集中講義「宇宙大規模構造と精密宇宙論」 (2015 年 11 月 9, 16, 30 日)　**課題**

[1] 宇宙大規模構造の観測量

(i) 天球面上に与えられた２次元密度分布の角度相関関数 $w(\theta_{12})$ は、離角 θ_{12} が十分小さい時、３次元密度分布に対する相関関数$\xi(r)$ を用いて次のように表せる：

$$w(\theta_{12}) \simeq \int_0^\infty w_g^2(\chi) \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \xi\left(\sqrt{f_K^2(\chi)\,\theta_{12}^2 + y^2};\, \chi\right). \tag{1}$$

ここで $\chi(z) = c\int_0^z dz'/H(z')$、$f_K(\chi)$ はそれぞれ共動動径距離、共動角径距離を表し、w_g は密度分布の奥行き (動径方向) に対する重み関数である。相関関数 ξ と３次元密度分布のパワースペクトル $P(k)$ との関係を用いて、上式が以下のように表せることを示せ：

$$w(\theta_{12}) = \int_0^\infty d\chi\, w_g^2(\chi) \int_0^\infty \frac{dk_\perp\, k_\perp}{2\pi}\, J_0\left(k_\perp\, f_K(\chi)\,\theta_{12}\right)\, P(k_\perp;\, \chi). \tag{2}$$

ただし、J_0 は第１種ベッセル関数で積分形で $J_0(x) = \int_0^{2\pi} d\phi\, e^{i\,x\,\cos\phi}/(2\pi)$ と定義される。

(ii) 角度相関関数 $w(\theta)$ と角度パワースペクトル C_ℓ には次のような関係がある：

$$C_\ell = 2\pi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\, \mathcal{P}_\ell(\cos\theta)\, w(\theta). \tag{3}$$

ここで、$\mathcal{P}_\ell$ はルジャンドル多項式である。前問で示した関係式 (2) をもとに、小角度スケールにおいて ($\ell \gg 1$)、角度パワースペクトルは３次元密度分布のパワースペクトル $P(k)$ と以下のように表せることを示せ：

$$C_\ell \simeq \int_0^\infty d\chi \left\{\frac{w_g(\chi)}{f_K(\chi)}\right\}^2 P\left(\frac{\ell}{f_K(\chi)};\, \chi\right). \tag{4}$$

(ヒント：$\ell \gg 1$ において成り立つ近似式 $P_\ell(\cos(x/\ell)) \rightarrow J_0(x)$、およびベッセル関数の公式 $\int_0^\infty dx\, x\, J_\nu(ax)\, J_\nu(bx) = \delta_{\rm D}(a-b)/a$ を用いる)

[2] 宇宙大規模構造の非線形進化

Einstein-de Sitter 宇宙 ($\Omega_{\rm m} = 1, \Omega_{\rm DE} = 0, K = 0$) では、密度ゆらぎの線形成長因子は $D_+(t) = a(t)$ となる。この時、標準摂動論において、質量密度ゆらぎ δ と速度発散 $\theta \equiv (\nabla\cdot\boldsymbol{v})/(aH)$ を $\delta = \delta_1 + \delta_2 + \cdots$、$\theta = \theta_1 + \theta_2 + \cdots$ と展開した時、n 次の解はそれぞれ、

$$\begin{aligned}
\delta_n(\boldsymbol{k};\, t) &= a^n(t) \int \frac{d^3\boldsymbol{k}_1 \cdots d^3\boldsymbol{k}_n}{(2\pi)^{3(n-1)}}\, \delta_{\rm D}(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_{12\cdots n})\, F_n(\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_n)\, \delta_0(\boldsymbol{k}_1) \cdots \delta_0(\boldsymbol{k}_n), && (5)\\
\theta_n(\boldsymbol{k};\, t) &= -a^n(t) \int \frac{d^3\boldsymbol{k}_1 \cdots d^3\boldsymbol{k}_n}{(2\pi)^{3(n-1)}}\, \delta_{\rm D}(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_{12\cdots n})\, G_n(\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_n)\, \delta_0(\boldsymbol{k}_1) \cdots \delta_0(\boldsymbol{k}_n) && (6)
\end{aligned}$$

と表せる。ただし $\boldsymbol{k}_{12\cdots n} = \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 + \cdots \boldsymbol{k}_n$。 δ_0 は線形密度ゆらぎで、これを用いて１次解は $\delta_1(\boldsymbol{k}) = a\,\delta_0(\boldsymbol{k})$、$\theta_1(\boldsymbol{k}) = -a\,\delta_0(\boldsymbol{k})$ と表される。以下では、δ_0 はガウス統計に従うランダム密度場とし、その統計性はパワースペクトル $P_0(k)$

$$\langle\delta_0(\boldsymbol{k})\delta_0(\boldsymbol{k}')\rangle = (2\pi)^3\, \delta_{\rm D}(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}')\, P_0(|\boldsymbol{k}|)$$

で特徴づけられるとする。

(i) ２次の摂動論カーネル $F_2(\boldsymbol{k}_1,\, \boldsymbol{k}_2)$, $G_2(\boldsymbol{k}_1,\, \boldsymbol{k}_2)$ を具体的に求めよ。

(ii) 最低次の摂動計算で、以下で定義されるバイスペクトル $B(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)$ を、摂動論カーネル F_n と線形密度ゆらぎのパワースペクトル P_0 を用いて書き表せ：

$$\left\langle\, \delta(\boldsymbol{k}_1)\delta(\boldsymbol{k}_2)\delta(\boldsymbol{k}_3)\,\right\rangle = (2\pi)^3\,\delta_{\rm D}(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_3)\;B(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3) \tag{7}$$

(iii) 前問 (i)(ii) までの結果をもとに、非ガウス性を特徴づける「歪度 (skewness) 」と呼ばれる量 S_3 を評価してみよう：

$$S_3 \equiv \frac{\langle\{\delta(\vec{x})\}^3\,\rangle}{\langle\{\delta(\vec{x})\}^2\,\rangle^2}. \tag{8}$$

右辺の分子・分母はそれぞれ、フーリエ空間の密度場 $\delta(\boldsymbol{k})$ と次のように結びついている：

$$\left\langle\{\delta(\vec{x})\}^3\right\rangle \;=\; \int \frac{d^3\boldsymbol{k}_1 d^3\boldsymbol{k}_2 d^3\boldsymbol{k}_3}{(2\pi)^9}\left\langle\,\delta(\boldsymbol{k}_1)\delta(\boldsymbol{k}_2)\delta(\boldsymbol{k}_3)\,\right\rangle e^{i(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_3)\cdot\vec{x}}, \tag{9}$$

$$\left\langle\{\delta(\vec{x})\}^2\right\rangle \;=\; \int \frac{d^3\boldsymbol{k}_1 d^3\boldsymbol{k}_2}{(2\pi)^6}\left\langle\,\delta(\boldsymbol{k}_1)\delta(\boldsymbol{k}_2)\,\right\rangle e^{i(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)\cdot\vec{x}} \tag{10}$$

(i),(ii) の結果を上式に代入し、最低次の摂動計算で具体的に評価することで、歪度は次のように求まることを示せ[1]：

$$S_3 \simeq \frac{34}{7}. \tag{11}$$

---

[1] ヒント：(10) 式は、最低次の評価では、線形密度場 δ_1 を代入すればよく、

$$\left\langle\{\delta(\vec{x})\}^2\,\right\rangle \simeq a^2\int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\,P_0(k)$$

となる。一方、(9) 式の評価には問い (ii) で求めたバイスペクトルの表式を用いる。すると、

$$\left\langle\{\delta(\vec{x})\}^3\,\right\rangle \propto \left[a^2\int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\,P_0(k)\right]^2$$

という関係が求まる。