東北大学天文学教室・集中講義

暗黒物質優勢宇宙における構造形成（宇宙論）[1]

2018 年度

[1]樽家 篤史 (京都大学基礎物理学研究所)

参考文献・教科書

- P.J.E. Peebles, “The Large-scale structure of the Universe”, (Princeton Univ. Press, 1980)
- S.Dodelson, “Modern cosmology” (Academic Press, 2003)
- H. Mo, F. van den Bosch, S. D. White, “Galaxy Formation and Evolution”, (Cambridge Univ. Press, 2010)
- 松原隆彦, “現代宇宙論” (東京大学出版会, 2010)
- 松原隆彦, “宇宙論の物理 上・下” (東京大学出版会, 2014 年)
- 松原隆彦, “大規模構造の宇宙論” (共立出版, 2014 年)
- 須藤靖, “もののの大きさ” (東京大学出版会, 2006 年)

構造形成に関する専門的、かつ各トピックに焦点をあてたレビュー論文・テキストとして,

- F. Bernardeau, S. Colombi, E. Gaztañaga, R. Scoccimarro, ”Large-scale structure of the Universe and cosmological perturbation theory”, Physics Reports 367 (2002) 1-248 [3]
- V. Descjacques, D. Jeong, F. Schmidt, ”Large-scale galaxy bias”, Physics Reports 733 (2018) 1-193 [17]
- A. Cooray and R. Sheth, ”Halo models of large-scale structure”, Physics Reports 372 (2002) 1-129 [15]
- J. Lesgourgues, S. Pastor, ”Massive neutrinos and cosmology”, Physics Reports 429 (2006) 307-379 [33]
- A. Lewis, A. Challinor, ”Weak gravitational lensing of the CMB”, Physics Reports 429 (2006) 1-65 [34]
- M. Kilbinger, ”Cosmology with cosmic shear observations: a review”, Reports on Progress in Physics 78 (2015) 086901 [30]

Note –.

- 特に断りがない限り、$c = 1$ とする単位系を用いる。
- このノートは、一般相対性理論を履修したことがある学生を対象にしている。

Contents

Chapter 1

一様・等方宇宙の記述

1.1　一般相対性理論にもとづく宇宙

宇宙膨張のダイナミクスとゆらぎの進化を取り扱う上で、重力理論は不可欠になる。特に、考えるスケール（長さ）が宇宙の地平線スケールになると、一般相対性理論にもとづく記述が本質的になる。一般相対性理論における基礎方程式であるアインシュタイン方程式は、

$$G_{\mu\nu} = 8\pi\, G\, T_{\mu\nu}; \quad G^{\mu}_{\nu} \equiv R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2} R\, \delta^{\mu}_{\nu} \tag{1.1}$$

と記される。左辺の $G_{\mu\nu}$ が時空の幾何を記述するアインシュタインテンソル、右辺の $T_{\mu\nu}$ が物質場などの運動・時間変化を表すエネルギー・運動量テンソルである。この方程式から宇宙膨張の進化を記述するには、両辺にそれぞれ、宇宙の幾何と宇宙を満たす物質・エネルギーの情報をインプットする必要がある。

1.2　ロバートソン-ウォーカー計量

アインシュタイン方程式の左辺を具体的に計算するにあたり、まずは宇宙を記述する時空の幾何を仮定する必要がある。その際、もっともらしい仮定を与えてくれるものが、宇宙原理（あるいはコペルニクス原理）である。この原理にもとづくと、宇宙は大域的に一様かつ等方的である。この場合、時空の計量はロバートソン-ウォーカー (Robertson−Walker) 計量と呼ばれるもので表せ、スケール因子 $a(t)$ のみが宇宙膨張のダイナミクスをつかさどる唯一の力学変数となる。ロバートソン-ウォーカー計量にもとづく線素は次のように与えられる：

$$ds^2 = -dt^2 + \{a(t)\}^2\, d\vec{\ell}^2 \tag{1.2}$$

ここで、$d\vec{\ell}^2$ は３次元空間の線素で、以下のように表される：

$$d\vec{\ell}^2 = \frac{dr^2}{1-K\,r^2} + r^2(\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2) \tag{1.3}$$

$$= \begin{cases} d\chi^2 + \chi^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2) & ;\quad (K=0) \\ d\chi^2 + \left(\dfrac{\sinh\sqrt{-K}\chi}{\sqrt{-K}}\right)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2) & ;\quad (K\neq 0) \end{cases}$$

$$\equiv d\chi^2 + \{r(\chi)\}^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2), \tag{1.4}$$

上式に現れる定数 K は空間の曲率と関係する量で、その値に応じて、閉じた宇宙 $(K>0)$、開いた宇宙 $(K<0)$、平坦な宇宙 $(K=0)$ と呼ばれ、宇宙の空間幾何を特徴づける。また、変数 χ は共動距離と呼ばれ、動径座標 r と以下のように関係する：

$$\chi \equiv \int \frac{dt}{a(t)} = \int \frac{dr}{\sqrt{1-K\,r^2}} \tag{1.5}$$

1.3 エネルギー・運動量テンソル

ロバートソン-ウォーカー計量で時空の幾何が決まり、アインシュタイン方程式の左辺が計算できるようになったので、今度は、物質場の運動・時間変化を記述するエネルギー・運動量テンソルを考える。一様・等方的な宇宙では、物質場も一様・等方的になるため、時間のみの関数で記述される。宇宙を満たす物質場が（大域的に）完全流体で記述されるとすると、エネルギー・運動量テンソルは以下のようになる：

$$T^{\mu}_{\nu} = \mathrm{diag}\big(-\rho(t),\,P(t),\,P(t),\,P(t)\big), \tag{1.6}$$

ここで、ρ はエネルギー密度、P は圧力である。宇宙の主要エネルギー密度としては、大きく分けて、輻射場（相対論的粒子)、物質場（非相対論的粒子)、それに暗黒エネルギーの３成分が考えられる:

$$\rho = \rho_{\rm r} + \rho_{\rm m} + \rho_{\rm DE} \tag{1.7}$$

それぞれの状態方程式は次のように与えられる：

$$P_{\rm r} = \frac{1}{3}\,\rho_{\rm r}, \quad P_{\rm m} = 0, \quad P_{\rm DE} = w\,\rho_{\rm DE} \tag{1.8}$$

暗黒エネルギーの正体が不明である現在、その状態方程式に現れるパラメーター w は通常、負の値を取ると。多くの観測と無矛盾の ΛCDM モデルでは　-1 と仮定する。この場合、暗黒エネルギーは、アインシュタインが導入した宇宙定数と等価になり, エネルギー密度は時間的に変化しないことになるが、w が本当に -1 かどうかを巡っては今後の精密観測で決着がつけられることになる。時間依存性があることも考慮して、観測で暗黒エネルギーを制限する場合は、w のパラメーターをしばしば以下のように表す：

$$w(a) = w_0 + w_a(1-a). \tag{1.9}$$

1.4 フリードマン方程式

アインシュタイン方程式の両辺を計算するためのセットアップができたので、具体的に宇宙膨張の時間進化をつかさどる運動方程式を導出する。結果は以下のようになる：

$$G^{\mu}_{\nu} = 8\pi G\, T^{\mu}_{\nu}\,; \quad G^{\mu}_{\nu} \equiv R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2} R\, \delta^{\mu}_{\nu} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \left(\dfrac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \dfrac{8\pi G\,\rho}{3} - \dfrac{K}{a^2}, \\ 3\,\dfrac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G\,(\rho + 3P). \end{cases} \tag{1.10}$$

第 1 式のことを特にフリードマン方程式と呼ぶ。なお、アインシュタイン方程式から得られた 2 つの式は、エネルギー・運動量テンソルの保存則 $T^{\mu}_{\nu\,;\mu} = 0$ から得られる以下の式とも無矛盾に両立する：

$$\dot{\rho} + 3\,\frac{\dot{a}}{a}\,(\rho + P) = 0. \tag{1.11}$$

1.5 宇宙論パラメーター

フリードマン方程式にもとづく宇宙膨張の進化を観測から推定・決定する際、以下のような（無次元）パラメーターを導入しておくと[1]、観測量がそれらにどう依存するかを見ることで、宇宙膨張についての情報を引き出すことができる：

$$\text{ハッブルパラメーター：}\quad H \equiv \frac{\dot{a}}{a}, \tag{1.12}$$

$$\text{密度パラメーター：}\quad \Omega_{*} \equiv \frac{8\pi G}{3\,H^2}\,\rho_{*}, \qquad (* = \mathrm{r},\ \mathrm{m},\ \mathrm{DE}) \tag{1.13}$$

$$\text{曲率パラメーター：}\quad \Omega_K \equiv -\frac{K}{a^2 H^2} \tag{1.14}$$

以上で定義したパラメーターは、時間にも依存している点に注意。これらの量は、現在の時刻においては特に、H_0, $\Omega_{*,0}$, $\Omega_{0,K}$ などと下付き添え字をつけて記す。

導入したパラメーターを用いると, 式 (1.10) の第 1 式で与えられたフリードマン方程式は以下のように単純な表式になる：

$$\Omega_{\mathrm{r}}(a) + \Omega_{\mathrm{m}}(a) + \Omega_{\mathrm{DE}}(a) + \Omega_K(a) = 1. \tag{1.15}$$

さらに、各エネルギー成分の保存則と状態方程式をもとに、現在の時刻の宇宙論パラメーターを使って書き表すと (赤方偏移とスケール因子の関係 $1 + z = 1/a$ を用いて)

$$\left(\frac{H(z)}{H_0}\right)^2 = \Omega_{\mathrm{r},0}\,(1+z)^4 + \Omega_{\mathrm{m},0}\,(1+z)^3 + \Omega_{\mathrm{DE},0}\,\exp\left[3\int dz'\,\frac{1 + w(z')}{1 + z'}\right] + \Omega_{K,0}\,(1+z)^2. \tag{1.16}$$

が得られる。

---
[1] ハッブルパラメーター H は次元を持つので注意。

ここまで、宇宙の主要エネルギー成分として暗黒エネルギー、物質場、輻射場の三成分を考えたが、宇宙の熱史・構造形成を考える際、物質場、輻射場についてはもう少し細かく分けておくべきである。具体的には、バリオン (b)、 冷たい暗黒物質 (c)、ニュートリノ (ν)、そして光子 (γ) である。バリオン、冷たい暗黒物質は非相対論的な物質で（つまり状態方程式 $P\approx 0$ に従う）エネルギー密度は $\rho_{\rm b,c}\propto a^{-3}$ のように時間変化するが、光子は相対論的で $\rho_\gamma\propto a^{-4}$ のように変化する輻射場である。一方、ニュートリノは質量が十分軽いため、宇宙初期には相対論的にふるまうが、赤方偏移 $z\sim 200$ では、非相対論的になる。このような状況を適切に考慮すると、フリードマン方程式は式 (1.16) より、さらに以下のように表せる [32]

$$\left(\frac{H(z)}{H_0}\right)^2=\Omega_{\gamma,0}\left\{1+0.227\,N_{\rm eff}\,f\left(\frac{m_\nu}{T_{\nu,0}(1+z)}\right)\right\}(1+z)^4$$
$$+\left(\Omega_{\rm b,0}+\Omega_{\rm c,0}\right)(1+z)^3+\Omega_{\rm DE,0}\,\exp\left[3\int dz'\frac{1+w(z')}{1+z'}\right]+\Omega_{K,0}\,(1+z)^2, \tag{1.17}$$

ここで、$N_{\rm eff}$ はニュートリノの有効世代数 (標準値は $N_{\rm eff}=3.046$), m_ν はニュートリノの質量で (ここでは各世代等質量を仮定), and $T_{\nu,0}$ は現在のニュートリノ背景放射の温度で、 $T_{\nu,0}=(4/11)^{1/3}T_{\gamma,0}=1.945{\rm K}$ である。関数 f は、

$$f(y)\equiv\frac{120}{7\pi^4}\int_0^\infty dx\frac{x^2\sqrt{x^2+y^2}}{e^x+1}\simeq\{1+(0.3173y)^{1.83}\}^{1/1.83}. \tag{1.18}$$

で与えられる。

表 1.1 に、宇宙マイクロ波背景放射観測衛星 Planck による宇宙論パラメーターの結果をまとめた。ΛCDM モデルは平坦宇宙を仮定するため、曲率パラメーターは厳密にゼロである。また、輻射の密度パラメーターはここに示されていないが、マイクロ波背景放射の温度が観測から $T_=2.725\,{\rm K}$ と定まっていることと、輻射のエネルギー密度は $\rho_{\rm r}=(g_*\,\pi^2/30)(k_{\rm B}^4/(\hbar c)^3)\,T^4$ と不定性なく表せることから、

$$\Omega_{\rm r,0}h^2=4.155\times10^{-5} \tag{1.19}$$

が得られる[2]。

1.6 宇宙論における距離

- **光度距離**: 遠方天体から放射される光の減光具合から距離を定義したもの。絶対光度が既知の天体（標準光原）に対して、観測される見かけのフラックス (エネルギー流量) をもとに以下のように定義する：

$$d_{\rm L}(z)\equiv\sqrt{\frac{\text{絶対光度}}{4\pi\times\text{見かけのフラックス}}}=(1+z)\,r(\chi(z)) \tag{1.20}$$

  上式は、宇宙論的な赤方偏移を受けて光のエネルギーが変わるためと ($\delta E_{\rm obs}/\delta E_{\rm emit}=(1+z)^{-1}$)、観測者が受け取る光の時間間隔が変わるせいで ($\delta t_{\rm obs}/\delta t_{\rm emit}=1+z$)、見かけのフラックスが $F_{\rm obs}=\delta E_{\rm obs}/\delta t_{\rm obs}\propto 1/(1+z)^2$ と表せることに由来する。

[2] 3 種類のニュートリノと光子が輻射として寄与する場合 (i.e., $g_*=3.363$)。光子だけの場合、有効自由度は $g_*=2$ となり、密度パラメーター $\Omega_{\gamma,0}h^2=2.471\times10^{-5}$ を得る。

Table 1.1: Planck 2015 の結果にもとづく ΛCDM モデルにおける宇宙論パラメーター（文献 [48] の表 4・TT+lowP にもとづく数値）

$\Omega_{\mathrm{m},0}$	0.315
$\Omega_{\mathrm{b},0}$	0.049
$\Omega_{\mathrm{c},0}$	0.265
$\Omega_{\nu,0}$	——*
$\Omega_{\mathrm{DE},0}$	0.685†
h‡	0.673

* ΛCDM モデルでは, ニュートリノは質量ゼロを想定する。ただし Planck 2015 では、質量和 $m_\nu = 0.06\mathrm{eV}$ ($\Omega_{\nu,0}h^2 \approx \sum m_\nu/93.04\,\mathrm{eV} \approx 0.0006$)、かつ標準値の有効世代数 $N_{\mathrm{eff}} = 3.046$ を仮定している。

† ΛCDM モデルは、平坦宇宙、つまり $\Omega_{K,0} = 0$) を仮定する。したがって、$\Omega_{\mathrm{DE},0} = 1 - \Omega_{\mathrm{m},0}$ という関係がある。

‡ h は、現在のハッブルパラメーター H_0 と、$H_0 = 100\,h\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$ のように関係する無次元量である。

- **角径距離**: 遠方天体もしくは構造物の見かけのサイズから距離を定義する。実サイズがわかっている天体・構造物（標準ものさし）に対して、観測される見かけの角度サイズをもとに次のように定義する：

$$d_{\mathrm{A}}(z) \equiv \frac{\text{固有サイズ}}{\text{見かけの角度サイズ}} = \frac{1}{(1+z)}\, r(\chi(z)) \tag{1.21}$$

以上の 2 つの距離は、$d_{\mathrm{L}}(z) = (1+z)^2\, d_{\mathrm{A}}(z)$, という関係にある。この関係は、一様・等方宇宙でない場合でも一般に成り立つ関係として知られ (エザリントンの相反定理 [21, 20])、距離双対関係 (distance-duality relation) と呼ばれる。

低赤方偏移 $z \ll 1$ においては, 以下のような展開公式が導ける：

$$d_{\mathrm{L}}(z) = (1+z)^2\, d_{\mathrm{A}}(z) \simeq \frac{z}{H_0}\left[1 + \frac{1}{2}(1-q_0)z + \cdots\right], \qquad q_0 \equiv -\left.\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}\right|_{t_0} = \left.\frac{d\ln H(z)}{dz}\right|_{z=0} - 1. \tag{1.22}$$

ここで q_0 は減速度パラメーターと呼ばれる。

Chapter 2

構造形成の線形理論

この章では、文献 [18] をベースに、線形理論にもとづく密度ゆらぎの進化とその性質について解説する。

2.1 概観

現在観測される宇宙の大規模構造は、宇宙初期の小さな密度ゆらぎが重力不安定性にもとづき進化してきた。インフレーション理論では、その最初の種である原始密度ゆらぎは、量子ゆらぎが起源だったと説明する。初期に与えられた密度ゆらぎは時間発展の過程で、宇宙膨張や物質相互作用の影響を強く受ける。そのため、構造形成の理論にもとづく観測との比較から、初期宇宙のみならず宇宙膨張や宇宙のエネルギー・物質組成などのさまざまな情報を読み取ることが可能である。

密度ゆらぎの進化を考える上で、重要なポイントを挙げておく：

多成分系の進化 ： 前章でも述べたが宇宙には大きく分けて物質、輻射、それに暗黒エネルギーが存在し、前者２成分はさらに暗黒物質、バリオン、光子、ニュートリノと分けられる。それら各成分の密度ゆらぎは、 物質間の相互作用や宇宙膨張の時期に応じてふるまいが異なり、大規模構造の統計的性質に特徴的な痕跡を残す。特に、銀河サーベイなどの観測でプローブできるスケールでは、輻射優勢から物質優勢期にかけての密度ゆらぎの進化が重要で、重力以外に光子・バリオン（電子）間の電磁相互作用（トムソン散乱）がゆらぎのふるまいに大きく影響する。

地平線スケールを超える波長のゆらぎ ： ゆらぎの空間サイズを特徴づける（固有）波長は宇宙のスケール因子に比例するため、十分過去にさかのぼると、宇宙膨張の特徴的スケールであるハッブル半径（地平線）c/H より長くなりうる。このような超地平線スケールでは、ニュートン的な取り扱いができなくなり、一般相対性理論にもとづいてゆらぎの重力的進化を考える必要がある。

つまり、密度ゆらぎの時間進化を記述するためには、

- 多成分系のゆらぎの時間発展 $\rightarrow$ 暗黒物質、バリオン、光子、ニュートリノのボルツマン方程式
- 一般相対論にもとづく重力進化 $\rightarrow$ アインシュタイン方程式

の両者を組み合わせて考える必要がある。

2.2 ゆらぎの基礎方程式

この節では、アインシュタイン・ボルツマン系に対する線形摂動の基礎方程式を具体的に書き下す。

計量 (平坦)

$$ds^2 = -(1+2\Psi)dt^2 + \{a(t)\}^2 (1+2\Phi)\,\delta_{ij}\,dx^i\,dx^j. \tag{2.1}$$

摂動量

$$\begin{array}{lcl}
\text{CDM} & : & \delta(\boldsymbol{x}), \quad \vec{v}(\boldsymbol{x}) \\
\text{バリオン} & : & \delta_{\rm b}(\boldsymbol{x}), \quad \vec{v}_{\rm b}(\boldsymbol{x}) \\
\text{光子} & : & f_\gamma(p,x) = \left[\exp\left\{\frac{p}{T(1+\Theta)}\right\} - 1\right]^{-1} \\
\text{ニュートリノ} & : & f_\nu = \left[\exp\left\{\frac{E}{T_\nu(1+\mathcal{N})}\right\} + 1\right]^{-1}
\end{array} \tag{2.2}$$

フーリエ展開

スカラー量、ベクトル量である密度ゆらぎ、速度場に対して、それぞれ次のようにフーリエ展開を定義する：

$$\delta(\boldsymbol{x}) = \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\,\delta(\boldsymbol{k})\,e^{i\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}, \tag{2.3}$$

$$\vec{v}(\boldsymbol{x}) = \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\,\frac{i\,\boldsymbol{k}}{k}\,v(\boldsymbol{k})\,e^{i\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{2.4}$$

スカラー量である光子とニュートリノのゆらぎ Θ、$\mathcal{N}$ に対しても、(2.3) 式と同様にフーリエ展開を行う。ただし、変数の依存性には注意（後述参照）。

Note–. ベクトル・テンソル型の計量摂動がない場合（式 (2.1)）、速度場 $\vec{v}$ はポテンシャル流（渦なし流）として記述され、フーリエ成分の速度場はスカラー量になる。

発展方程式

$$\left(\frac{k}{a}\right)^2 \Phi + 3H(\dot{\Phi} - H\Psi) = 4\pi\, G \left(\sum_{i=\mathrm{c,b}} \rho_i\, \delta_i + 4\rho_\gamma\, \Theta_0 + 4\rho_\nu\, \mathcal{N}_0\right), \tag{2.5}$$

$$\left(\frac{k}{a}\right)^2 (\Phi + \Psi) = -8\pi\, G\, \Pi\,; \qquad \Pi \equiv 4(\rho_\gamma\, \Theta_2 + \rho_\nu\, \mathcal{N}_2) \tag{2.6}$$

$$\dot{\Theta} + i\frac{k\mu}{a}(\Theta + \Psi) + \dot{\Phi} = n_e\, \sigma_\mathrm{T} \left[\Theta_0 - \Theta + i\mu\, v_\mathrm{b} - \frac{\mathcal{P}_2(\mu)}{2}\, \Theta_2\right], \tag{2.7}$$

$$\dot{\delta} - \frac{k}{a}\, v + 3\dot{\Phi} = 0, \tag{2.8}$$

$$\dot{v} + H\, v + \frac{k}{a}\, \Psi = 0, \tag{2.9}$$

$$\dot{\delta}_\mathrm{b} - \frac{k}{a}\, v_\mathrm{b} + 3\dot{\Phi} = 0, \tag{2.10}$$

$$\dot{v}_\mathrm{b} + H\, v_\mathrm{b} + \frac{k}{a}\, \Psi = -\frac{n_e\, \sigma_\mathrm{T}}{R}\, \big(3\Theta_1 + v_\mathrm{b}\big)\,; \qquad R \equiv \frac{3\rho_\mathrm{b}}{4\rho_\gamma}, \tag{2.11}$$

$$\dot{\mathcal{N}} + i\frac{k\mu}{a}\left(\frac{p}{E}\mathcal{N} + \frac{E}{p}\, \Psi\right) + \dot{\Phi} = 0; \qquad E^2 = m_\nu^2 + p^2 \tag{2.12}$$

Note

- トムソン散乱の偏極依存性は無視している。

- 光子とニュートリノのゆらぎを表す摂動量である Θ と $\mathcal{N}$ は、運動量ベクトルの方向にも依存する。加えてニュートリノは、質量があるせいでゆらぎの発展は運動量の大きさ（もしくはエネルギー）にも依存する。従って、$\mu \equiv (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{p})/(kp)$ という方向余弦を導入すると、それぞれ、$\Theta(\boldsymbol{k},\mu)$、$\mathcal{N}(\boldsymbol{k},\mu,p)$ と表されることになる。多変数関数になって取り扱いが複雑になるが、運動量の方向依存性については多重極展開を適用すると見通しがよくなる:

$$\Theta(\boldsymbol{k},\mu) = \sum_\ell (-i)^\ell\, (2\ell+1)\, \Theta_\ell(k)\, \mathcal{P}_\ell(\mu), \tag{2.13}$$

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{k},p,\mu) = \sum_\ell (-i)^\ell\, (2\ell+1)\, \mathcal{N}_\ell(k,p)\, \mathcal{P}_\ell(\mu). \tag{2.14}$$

ボルツマン階層性

式 (2.13) (2.14) の多重極展開を用いて, 付録 C.2 にある公式を使うと、式 (2.7) (2.12) はそれぞれ、以下のような無限階の階層方程式に帰着する:

光子のボルツマン方程式：

$$\dot{\Theta}_0+\frac{k}{a}\Theta_1+\dot{\Phi}=0, \tag{2.15}$$

$$\dot{\Theta}_1+\frac{k}{3a}(2\Theta_2-\Theta_0-\Psi)=n_e\sigma_{\rm T}\left(-\Theta_1-\frac{v_{\rm b}}{3}\right), \tag{2.16}$$

$$\dot{\Theta}_2+\frac{k}{5a}(3\Theta_3-2\Theta_2)=n_e\sigma_{\rm T}\left(-\Theta_2+\frac{1}{10}\Theta_2\right), \tag{2.17}$$

$$\dot{\Theta}_\ell+\frac{k}{(2\ell+1)a}\{(\ell+1)\Theta_{\ell+1}-\ell\Theta_{\ell-1}\}=-n_e\sigma_{\rm T}\,\Theta_\ell,\quad(\ell\geq 3). \tag{2.18}$$

ニュートリノの（無衝突）ボルツマン方程式：

$$\dot{\mathcal{N}}_0+\frac{k}{a}\frac{p}{\sqrt{p^2+m_\nu^2}}\mathcal{N}_1+\dot{\Phi}=0, \tag{2.19}$$

$$\dot{\mathcal{N}}_1+\frac{k}{3a}\left\{\frac{p}{\sqrt{p^2+m_\nu^2}}(2\mathcal{N}_2-\mathcal{N}_0)-\frac{\sqrt{p^2+m_\nu^2}}{p}\,\Psi\right\}=0, \tag{2.20}$$

$$\dot{\mathcal{N}}_2+\frac{k}{5a}\,\frac{p}{\sqrt{p^2+m_\nu^2}}\,(3\mathcal{N}_3-2\mathcal{N}_2)=0, \tag{2.21}$$

$$\dot{\mathcal{N}}_\ell+\frac{k}{(2\ell+1)a}\,\frac{p}{\sqrt{p^2+m_\nu^2}}\,\{(\ell+1)\mathcal{N}_{\ell+1}-\ell\mathcal{N}_{\ell-1}\}=0,\quad(\ell\geq 3). \tag{2.22}$$

2.3 初期条件

ゆらぎの種類：

線形ゆらぎの発展方程式は、多成分系の連立微分方程式からなるため、複数の解が存在する。その中でも、初期時刻にゼロでないポテンシャルを与える解を特に「断熱ゆらぎ」と呼ぶ。それ以外の（独立な）解は、初期時刻のポテンシャルはゼロだが、物質成分間に密度差が存在するものであり、総称して「等曲率ゆらぎ」と呼ぶ。現在、特にマイクロ波背景放射の観測から断熱ゆらぎを強く支持する結果が得られている。断熱ゆらぎは、インフレーションモデルが予言する初期条件とも無矛盾で、ごく自然なセットアップである。以下では、断熱ゆらぎを仮定してゆらぎのふるまいを調べていく。

断熱ゆらぎの初期条件:

インフレーション理論では、スカラー場の量子ゆらぎがインフレーション中に超地平線スケール ($k\ll aH$) に引き伸ばされて（古典的なゆらぎとしての）原始曲率ゆらぎ $\Phi_{\rm p}$ が生成されたと考える。この $\Phi_{\rm p}$ が構造形成の種になるとして、輻射優勢期において超地平線

スケールのゆらぎが満たす関係を導くと、

$$\Theta_0 = \mathcal{N}_0 = \frac{1}{2}\Phi_{\rm p}, \tag{2.23}$$
$$\delta = \delta_{\rm b} = \frac{3}{2}\Phi_{\rm p}, \tag{2.24}$$
$$v = v_{\rm b} = \frac{k}{2\,a\,H}\Phi_{\rm p}, \tag{2.25}$$
$$\Theta_1 = \mathcal{N}_1 = -\frac{k}{6\,a\,H}\Phi_{\rm p}. \tag{2.26}$$
$$\Theta_\ell = \mathcal{N}_\ell = 0, \qquad (\ell \geq 2) \tag{2.27}$$

が得られる。

Note–. 上式では、ニュートリノゆらぎの四重極モーメント $\mathcal{N}_2$ を無視することで、$\Phi+\Psi=0$ として初期条件を求めたが、より正確には、$\mathcal{N}_2$ の影響を取り入れることで、$\Phi+\Psi=(2/5)\,R_\nu\Psi$ という関係が求まり、ニュートリノの寄与が初期条件に影響する。

2.4 ゆらぎの解: 輻射優勢期から物質優勢期へ

この節では、単純のため、ニュートリノ質量をゼロとして ($m_\nu = 0$)、近似を使いながら質量密度ゆらぎの進化を求めいく。ニュートリノ質量が有限の場合の影響については、2.8 節を参照。

超地平線スケールの進化 ($k \ll aH$)

$$\frac{d^2\Phi}{dy^2} + \frac{21y^2+54y+32}{2y(y+1)(3y+4)}\frac{d\Phi}{dy} + \frac{\Phi}{y(y+1)(3y+4)} = 0, \qquad \left(y \equiv \frac{a}{a_{\rm eq}}\right) \tag{2.28}$$

初期条件 $\Phi \to \Phi_{\rm p}$ at $y \to 0$ を満たす解は、

$$\Phi(y) = \frac{\Phi_{\rm p}}{10}\frac{1}{y^3}\left[16\sqrt{1+y} + 9y^3 + 2y^2 - 8y - 16\right] \tag{2.29}$$
$$\xrightarrow{y\gg 1} \frac{9}{10}\,\Phi_{\rm p} \tag{2.30}$$

地平線スケール以下の進化 ($k \gg aH$)

$$\ddot\delta + 2H\dot\delta - 4\pi\,G\,\rho_{\rm c}\,\delta = 0$$
$$\Longrightarrow \qquad \frac{d^2\delta}{dy^2} + \frac{3y+2}{2y(y+1)}\frac{d\delta}{dy} - \frac{3}{2}\frac{1}{y(y+1)}\,\delta = 0, \quad (\text{Meszaros equation}) \tag{2.31}$$

$$\delta = c_1\, D_1(y) + c_2\, D_2(y), \quad \begin{cases} D_1(y) = \dfrac{2}{3} + y \\ D_2(y) = D_1(y) \ln \left[\dfrac{\sqrt{y+1}+1}{\sqrt{y+1}-1} \right] - 2\sqrt{y+1} \end{cases} \tag{2.32}$$

輻射優勢期における地平線スケール近傍の振る舞い

共形時間 η を用いて $(a\, d\eta = dt)$ 発展方程式を書き下すと、

$$\delta'' + \frac{a'}{a}\delta' = -3\Phi'' + k^2\Phi - 3\frac{a'}{a}\Phi' \equiv S(\eta), \tag{2.33}$$

$$\Phi'' + \frac{4}{\eta}\Phi' + \frac{k^2}{3}\Phi = 0, \tag{2.34}$$

ここで、$(')$ は共形時間 η による微分を表す。.

式 (2.33) の一般解は次のように表せる：

$$\delta = d_1\, \ln a + d_2\, + \int_0^\eta d\eta' \left\{ \ln a(\eta') - \ln a(\eta) \right\} \left(\frac{d \ln a(\eta')}{d\eta'} \right)^{-1} S(\eta'). \tag{2.35}$$

式 (2.24) にある断熱ゆらぎの初期条件に従うと, 係数 d_1、d_2 はそれぞれ $d_1 = 0$、$d_2 = (3/2)\Phi_\mathrm{p}$ と決まる。非斉次解のふるまいをより明示的に書き下すには、式 (2.34) からポテンシャル Φ の振る舞いを求める必要がある。超地平線スケールで $(k \ll aH)$ $\Phi \to \Phi_\mathrm{p}$ を満たす解は、

$$\Phi = \Phi_\mathrm{p} \left(3\frac{\sin(k\eta/\sqrt{3}) - (k\eta/\sqrt{3})\, \cos(k\eta/\sqrt{3})}{(k\eta/\sqrt{3})^3} \right) \tag{2.36}$$

$$\xrightarrow{k\eta \gg 1} \Phi_\mathrm{p} \left(-9\frac{\cos(k\eta/\sqrt{3})}{(k\eta)^2} \right) \tag{2.37}$$

短波長解 (2.37) を式 (2.35) に代入すると、ゆらぎの波長が地平線を横切ってから輻射・物質等密度期までの期間 $(a_H \ll a \ll a_\mathrm{eq})$ 、ゆらぎの進化は

$$\delta \simeq A\, \Phi_\mathrm{p} \ln \left(B \frac{a}{a_\mathrm{H}} \right) \tag{2.38}$$

のような振る舞いになる。係数 A、B については数値積分の結果から (積分上限を $\eta \to \infty$ とおいて) $A \sim 9$、$B \sim 0.6$ を得る (文献 [26] の Appendix B2 参照)。

解の接続

式 (2.38) (2.32) から得られた振る舞いをまとめると、

$$\text{輻射優勢期に地平線を横切る時 [Eq. (2.38)]}: \quad \delta \simeq A\, \Phi_\mathrm{p} \ln \left(B \frac{a}{a_\mathrm{eq}} \right),$$

$$\text{輻射・物質優勢期に地平線サイズ以下の時 [Eq. (2.32)]}: \quad \delta = c_1\, D_1 \left(\frac{a}{a_\mathrm{eq}} \right) + c_2\, D_2 \left(\frac{a}{a_\mathrm{eq}} \right) \tag{2.39}$$

係数 c_1、c_2 については、時刻 $y_{\rm m}=a_{\rm m}/a_{\rm eq}$ にて、$y_{\rm H}\ll y_{\rm m}\ll 1$ という条件を満たす領域で上記２つの解を接続することから決めることができる。ここでは成長モードに興味があるので、具体的に c_1 のみ書き下すと、

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{\dfrac{dD_2}{dy}|_{y_{\rm m}}\ln(B\dfrac{y_{\rm m}}{y_{\rm H}})-D_2(y_{\rm m})\dfrac{1}{y_{\rm m}}}{D_1(y_{\rm m})\dfrac{dD_2}{dy}|_{y_{\rm m}}-D_2(y_{\rm m})\dfrac{dD_1}{dy}|_{y_{\rm m}}}\,A\,\Phi_{\rm p}\\
&\xrightarrow{y_{\rm m}\ll 1} -\frac{9}{4}\left[-\frac{2}{3}\ln\left(B\frac{y_{\rm m}}{y_{\rm H}}\right)-\frac{2}{3}\ln\left(\frac{4}{y_{\rm m}}\right)+2\right]=\frac{3}{2}\,A\,\Phi_{\rm p}\,\ln\left(\frac{4B\,e^{-3}}{y_{\rm h}}\right).
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

これより、輻射・物質優勢期における地平線サイズ以下の (CDM) ゆらぎのふるまいは、

$$
\delta\simeq\frac{3}{2}\,A\,\Phi_{\rm p}\,\ln\left(4\sqrt{2}\,B\,e^{-3}\frac{k}{k_{\rm eq}}\right)\,D_1(a),\qquad (k\gg k_{\rm eq}),
\tag{2.41}
$$

係数 A と B は、それぞれ $A\sim 9$ and $B\sim 0.6$ である。

物質優勢〜暗黒エネルギー優勢期における地平線サイズ以下のゆらぎの進化

輻射・物質等密度時より後の時刻では、輻射成分は無視できるようになり、宇宙はアインシュタイン-ド・ジッター宇宙と呼ばれる物質場のみの平坦宇宙でよく記述され（つまり $\Omega_{\rm m,0}=1,\,\Omega_{\rm K,0}=0=\Omega_{\rm DE,0}$)、質量ゆらぎはスケール因子に比例して成長する。しかしながら、暗黒エネルギーが優勢な現在に近づくと、ゆらぎの成長はアインシュタイン-ド・ジッター宇宙のそれから次第にずれる。観測的に最も興味がある物質優勢期から暗黒エネルギー優勢期における線形成長率 D_1 は、

$$
\ddot{D}_1+2H\,D_1-4\pi\,G\,\rho\,D_1=0\,;\quad \rho=\rho_{\rm m}+\rho_{\rm DE}.
\tag{2.42}
$$

で記述される。この解（成長モード）をしばしば次のように表す：

$$
D_1(a)\propto a\,g(a).
\tag{2.43}
$$

関数 g がアインシュタイン-ド・ジッター宇宙からのずれを表し、ゆらぎの成長の抑制を特徴づける。暗黒エネルギー優勢期におけるゆらぎの進化を特徴づける量として、次の線形成長率も観測との比較でしばしば用いられる：

$$
f(a)\equiv\frac{d\ln D_1(a)}{d\ln a}.
\tag{2.44}
$$

暗黒エネルギーが宇宙定数の場合 $(w=-1)$, 上で定義した関数 $g(a)$ と $f(a)$ は、以下のような（フィッティング）公式で精度よく表せることが知られている（平坦でない宇宙でも適用可能） [12]：

$$
g(a)\simeq\frac{5}{2}\Omega_{\rm m}(a)\left[\Omega_{\rm m}^{4/7}(a)-\Omega_\Lambda(a)+\left\{1+\frac{\Omega_{\rm m}(a)}{2}\right\}\left\{1+\frac{\Omega_\Lambda(a)}{70}\right\}\right]^{-1},
\tag{2.45}
$$

$$
f(a)\simeq\Omega_{\rm m}^{4/7}(a)+\frac{\Omega_\Lambda(a)}{70}\left\{1+\frac{\Omega_{\rm m}(a)}{2}\right\}.
\tag{2.46}
$$

平坦宇宙の場合には、暗黒エネルギーの状態方程式パラメーター w が定数であると仮定すると、厳密解が求まることが知られている。その場合、関数 $g(a)$ と $f(a)$ は超幾何関数を用いて次のように表せる (e.g., [46]):

$$g(a) = {}_2F_1\left(-\frac{1}{3w}, \frac{w-1}{w}, 1-\frac{5}{6w}; -q(a)\right), \tag{2.47}$$

$$f(a) = 1 - \frac{3(w-1)}{6w-5} \frac{{}_2F_1\left[\frac{3w-1}{2w}, \frac{3w-1}{3w}, \frac{12w-5}{6w}, -q(a)\right]}{{}_2F_1\left[-\frac{1}{3w}, \frac{w-1}{2w}, \frac{6w-5}{6w}, -q(a)\right]} \tag{2.48}$$

ここで関数 $q(a)$ は、$q(a) \equiv \{(1-\Omega_{\mathrm{m},0})/\Omega_{\mathrm{m},0}\}\, a^{-3w}$ で与えられる。

2.5 遷移関数

これまで見てきたように、現在観測される密度ゆらぎは、超地平線スケールにわたるゆらぎとして生成され、輻射・物質優勢期を経て、観測される波長、つまりハッブル地平線より短くなったものである。ゆらぎの成長具合は、その波長がどの時刻にハッブル地平線を横切るか（短くなるか）によって変わるため、最終的に観測されるゆらぎの振幅は、波長（スケール）によって異なることになる。このゆらぎの波長依存性を特徴づけるため、以下で定義される遷移関数を導入する：

$$T(k;\, t_{\mathrm{m}}) \equiv \frac{\Phi(k;\, t_{\mathrm{m}})}{\Phi(k \to 0;\, t_{\mathrm{m}})}, \tag{2.49}$$

ここで、時刻 t_{m} は、宇宙がアインシュタイン-ドジッター宇宙に近い頃の物質優勢期のある時期を指す。$\Phi(k)$ はハッブル地平線より短い波長を持つ観測可能な曲率ポテンシャルである。式 (2.30) より、$\Phi(k \to 0;\, t_{\mathrm{m}}) = (9/10)\, \Phi_{\mathrm{p}}$ と表せる点に注意しておこう。

式 (2.49) を用いると、ハッブル地平線以下の質量ゆらぎは、時刻 $t > t_{\mathrm{m}}$ にて、以下のように書き表わせる：

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{k};\, a) &= \frac{3}{5} \frac{k^2}{\Omega_{\mathrm{m},0} H_0^2} \Phi_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{k})\, T(k)\ D_1(a) \\ &\equiv \delta_0(\boldsymbol{k})\, D_1(a).\end{aligned} \tag{2.50}$$

遷移関数は、時刻 t_m より以前の履歴にもとづいて決まるため、時間には依存しない。時間依存性は線形成長因子 D_1 で決まる。暗黒エネルギーなどのような成分は、より現在に近い時刻（赤方偏移 $z \sim 1$ 以下）で影響するため、線形成長因子のふるまいだけを変え、遷移関数には影響しない。遷移関数を用いて記述すると、過去の宇宙の進化の影響と現在近傍の時間進化を区別して取り扱えるという点で便利である。

遷移関数の漸近的ふるまい

式 (2.41) (2.49) より, 遷移関数のふるまいが以下のように求まる [1]

$$T(k) \simeq \begin{cases} \dfrac{5}{2}\,A\left(\dfrac{k}{k_{\rm eq}}\right)^{-2}\ln\left(4\sqrt{2}\,B\,e^{-3}\,\dfrac{k}{k_{\rm eq}}\right) \simeq 12\left(\dfrac{k}{k_{\rm eq}}\right)^{-2}\ln\left(\dfrac{k}{8k_{\rm eq}}\right), & k \gg k_{\rm eq} \\ 1, & k \ll k_{\rm eq}. \end{cases} \tag{2.51}$$

ここで現れる特徴的スケール $k_{\rm eq}$ は、輻射・物質等密時におけるハッブル地平線スケールで

$$k_{\rm eq} \equiv a_{\rm eq}\,H_{\rm eq} = \sqrt{\frac{2}{\Omega_{\rm r,0}H_0^2}}\,\frac{\Omega_{\rm m,0}H_0^2}{c} = 0.0095\left(\frac{\Omega_{\rm m,0}h^2}{0.13}\right)\ {\rm Mpc}^{-1} \tag{2.52}$$

と表される。

BBKS フィッティング公式

正確な遷移関数を求めるには、数値的に線形摂動の方程式を解くことが必要だが、数値計算の振る舞いを近似的に再現する解析的表式がいくつか知られている。代表的なものとして、文献 [2] の付録 G に記載された以下のフィッティング公式がある：

$$T_{\rm BBKS}(k) = \frac{\ln[1+2.34q]}{2.34q}\left\{1+3.39q+(16.2)^2+(5.47)^3+(6.71q)^4\right\}^{-1/4}\ ;\ q \equiv \frac{k}{\Gamma\,h\,{\rm Mpc}^{-1}} \tag{2.53}$$

ここで、Γ は、シェイプパラメーターと呼ばれ、$\Gamma = \Omega_{\rm m,0}h$ と与えられる。上式はもともと、CDM ゆらぎの遷移関数を表すものだったが、文献 [52] により、シェイプパラメーターを $\Gamma = \Omega_{\rm m,0}h\,\exp[-\Omega_{\rm b,0} - (2h)^{1/2}\Omega_{\rm b}/\Omega_{\rm m,0}]$ と置き換えることで、バリオンを含んだ質量ゆらぎの遷移関数として広く適用できることが知られている。

Note

- 上式のフィッティング公式には、後述するバリオン音響振動の影響が考慮されていない。バリオン音響振動まで含めたフィッティング公式は文献 [19] に与えられている。
- ニュートリノに質量がある場合、ニュートリノの自由流スケール前後で質量密度ゆらぎのふるまいが変わる。その影響を考慮した小スケールで適用できる遷移関数のフィッティング公式が、文献 [25] で与えられている。
- さらに精度のよい正確な遷移関数が知りたい場合は、CMB ボルツマンコードで数値的に求める必要がある。現在、パブリックなコードとして、`camb`[2] や `class`[3] などが知られており、前者はウェブ上で遷移関数を計算できるオンラインサイトもある。

[1] 正確には、この漸近形は質量ゆらぎではなく、CDM ゆらぎの遷移関数の漸近形である。
[2] http://camb.info
[3] http://class-code.net

最後に、等曲率ゆらぎの初期条件に対する移関数についてコメントしておく。等曲率ゆらぎでも遷移関数の漸近的なふるまいは、基本的に式 (2.51) で与えられるものとそう大差ない。ただし、断熱ゆらぎの場合に現れた対数的なスケール依存性は等曲率ゆらぎでは現れず、$k \gg k_{\rm eq}$ では、単純に $T(k) \propto (k/k_{\rm eq})^{-2}$ と振る舞うだけになる。これは、断熱ゆらぎの場合に現れたメザロス効果前のゆらぎの対数的成長が等曲率ゆらぎでは現れないことに起因している [31]。

2.6 バリオン音響振動

音響振動の方程式

ハッブル地平線以下のスケールの光子ゆらぎに着目して、光子・バリオン（電子）が強く結合しているという近似を使うと（強結合近似)、音響振動を表す以下の式が得られる：

$$\frac{d^2\Theta_0}{d\eta^2}+\frac{R}{1+R}\mathcal{H}\frac{d\Theta_0}{d\eta}+\frac{k^2}{3(1+R)}\Theta_0=-\frac{k^2}{3}\Psi-\frac{d^2\Phi}{d\eta^2}-\frac{R}{1+R}\mathcal{H}\frac{d\Phi}{d\eta} \tag{2.54}$$

これより、光子・バリオン流体の音速 c_s が次のように定義できる ($c=1$ の単位で)：

$$c_s\equiv\sqrt{\frac{1}{3(1+R)}}\ ;\ R=\frac{3\rho_{\rm b}}{4\rho_\gamma}. \tag{2.55}$$

式 (2.54) から摩擦項を無視した近似的振る舞いとして、

$$\Theta_0\ \propto\ \exp(i\,k\,r_s)\,;\quad r_s\equiv\int_0^\eta d\eta'\,c_s(\eta')\ \cdots\ \text{sound horizon scale} \tag{2.56}$$

が得られることがわかる。ここで、r_s は音響振動のスケールを表し、解析的に

$$\begin{aligned} r_s(\eta)&=\frac{2}{3\,k_{\rm eq}}\sqrt{\frac{6}{R_{\rm eq}}}\ln\left(\frac{\sqrt{1+R(\eta)}+\sqrt{R(\eta)+R_{\rm eq}}}{1+\sqrt{R_{\rm eq}}}\right) \\ &\approx 147\left(\frac{\Omega_{\rm m,0}h^2}{0.13}\right)^{-0.25}\left(\frac{\Omega_{\rm b,0}h^2}{0.024}\right)^{-0.008}\quad \text{at }\eta=\eta_{\rm rec}\end{aligned} \tag{2.57}$$

と表せる。

バリオンゆらぎとの関係

光子・バリオンはお互い強く結びついているため、光子ゆらぎの音響振動は、バリオンゆらぎにも現れる。強結合近似で用いた条件式を用いると、

$$v_{\rm b}\simeq-3\Theta_1\overset{k\gg aH}{\simeq}\frac{3}{k}\frac{d\Theta_0}{d\eta},\quad \frac{d\delta_{\rm b}}{d\eta}\simeq k\,v_{\rm b}\simeq 3\frac{d\Theta_0}{d\eta}\quad\longrightarrow\quad \delta_{\rm b}\ \simeq 3\Theta_0\ \propto\ \exp(ik\,r_s) \tag{2.58}$$

バリオンゆらぎに現れるこの音響振動のことを、特にバリオン音響振動と呼ぶ。

2.7 バリオンゆらぎの追いつき

宇宙の晴れ上がり（脱結合）の時期まで、ハッブル地平線以下のスケールではバリオンは光子と強く結合して重力的な成長をせず、ゆらぎは振動的ふるまいをしている。従ってバリオンのゆらぎはほぼ無視でき、このままでは現在観測で見られるような大規模構造を説明できない。その一方、CDM は重力相互作用しかしないため、再結合・脱結合の時期でもゆらぎは成長している。この CDM ゆらぎがあるおかげで、バリオンのゆらぎは脱結合後、それに引きずられる形で急成長する。このふるまいをバリオンゆらぎの追いつき（baryon catch-up）という。

追いつき現象がどのように起こるか具体的に見てみよう。晴れ上がり直後の重力ポテンシャルは基本的に CDM のゆらぎによって決まっていると考えると、ハッブル地平線以下では、バリオンゆらぎの発展方程式は以下で近似される：

$$\ddot{\delta}_{\rm b} + 2\,H\dot{\delta}_{\rm b} \simeq 4\pi\,G\rho_{\rm c}\,\delta. \tag{2.59}$$

物質優勢期における CDM の密度とゆらぎがそれぞれ $\rho_{\rm c} \propto a^{-3}$、$\delta \propto a$ と振る舞うことを用いると、上式は以下の式に帰着できる：

$$y^{1/2}\frac{d}{dy}\left(y^{3/2}\frac{d\delta_{\rm b}}{dy}\right) = \frac{3}{2}\,\delta\ ;\quad y \equiv \frac{a}{a_{\rm dec}}. \tag{2.60}$$

$y = 1$ にて $\delta_{\rm b} = 0$ という初期条件の特解を求めてみることにすると、

$$\delta_{\rm b} = \left(1 - \frac{3}{y} + \frac{2}{y^{3/2}}\right)\,\delta \tag{2.61}$$

となる。つまり、バリオンのゆらぎが CDM ゆらぎにすぐに追いつき、ゆらぎの振幅はほぼ同じにまで成長することを意味している。ここでは振幅ゼロから成長する解を求めたが、追いつき後のバリオンゆらぎの振幅には、晴れ上がり前の振る舞いが残りうる。従って、バリオン音響振動の空間パターンは現在でも観測できることになる。

2.8 ニュートリノの自由流減衰効果

有限の質量を持つニュートリノは、時間が経つと非相対論的になる ($m_{\nu,i} \gtrsim k_{\rm B}T$)。そのため、質量密度ゆらぎの成長に寄与するようになるが、コールドダークマターやバリオンに比べて大きな速度分散をもっている。そのせいで、ニュートリノの密度ゆらぎは CDM やバリオンとはやや異なる時間進化をする。ニュートリノの速度分散は以下のように求まる（分布関数に、フェルミ-ディラック分布 $f_\nu(q) = [\exp(q/T_\nu) - 1]^{-1}$ を代入する）：

$$\begin{aligned}\sigma_\nu^2 &= \frac{\displaystyle\int d^3q\,\left(\frac{q}{m_\nu}\right)^2\,f_\nu(q)}{\displaystyle\int d^3q\,f_\nu(q)} = \frac{15\zeta(5)}{\zeta(3)}\left(\frac{4}{11}\right)^{2/3}\frac{T_{\gamma,0}^2(1+z)^2}{m_\nu^2} \\ &\simeq \left(6.03\times10^{-3}\,c\right)^2\left(\frac{0.1\,{\rm eV}}{m_\nu}\right)^2(1+z)^2. \end{aligned} \tag{2.62}$$

こうした大きな速度分散を持っているため、ニュートリノのゆらぎは小さなスケールでは重力的に成長できない。その様は、ガスが自らの圧力で重力収縮を妨げる効果と同様であ

る。つまり、ジーンズ不安定性同様、ゆらぎが成長できるための条件があり、そこから特徴的なスケールが現れる。

自由流スケール（Free-streaming scale） $k_{\rm FS}$[4]

$$k_{\rm FS} \equiv \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{a\,H}{c_s^2} \simeq \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{a\,H}{\sigma_\nu} = \frac{0.0667}{(1+z)^2}\frac{m_\nu}{0.1\,{\rm eV}}\sqrt{\Omega_{\rm m,0}(1+z)^3+\Omega_\Lambda}\;h\,{\rm Mpc}^{-1}. \tag{2.63}$$

この自由流スケールより以下では ($k \ll k_{\rm FS}$)、ニュートリノのゆらぎは成長しない。つまり、全物質の質量ゆらぎは、ニュートリノが成長しない分だけ振幅が小さくなる。この減衰は近似的に次の式で特徴づけられる（$z=0$ において）：

$$\frac{P(k)|_{f_\nu\neq 0}}{P(k)|_{f_\nu=0}} \;\simeq\; 1-8\,f_\nu\;; \quad f_\nu \equiv \frac{\Omega_{\nu,0}}{\Omega_{\rm m,0}} \simeq 0.0075\left(\frac{0.1426}{\Omega_{\rm m,0}h^2}\right)\left(\frac{\sum m_\nu}{0.1\,{\rm eV}}\right). \tag{2.64}$$

ここで、$P(k)|_{f_\nu=0}$ とは、同じ質量密度パラメーターを持ち、ニュートリノ質量がゼロの場合の質量パワースペクトルである。より洗練された公式として、以下がある（ただし一部、経験式にもとづく）[文献 [33] の式 (141)]:

$$\frac{P(k)|_{f_\nu\neq 0}}{P(k)|_{f_\nu=0}} \;\simeq\; (1-f_\nu)^3\left(\frac{D_1(a)}{a_{\rm nr}}\right)^{-(6/5)f_\nu} = (1-f_\nu)^3\left\{1.9\times 10^5\frac{\Omega_{\nu,0}h^2}{N_{\rm eff}}\frac{D_1(a)}{a}\right\}^{-(6/5)f_\nu}. \tag{2.65}$$

こうしたパワースペクトルの減衰が観測できれば、ニュートリノ質量和を決定することにつながる。素粒子実験と異なり、ニュートリノ質量和を直接測定できる利点があるため、自由流減衰の検出・測定は将来観測の重要なターゲットとなっている。

[4]ジーンズ不安定性の条件式に現れる音速 $c_s=(\delta p/\delta\rho)^{1/2}$ はガスに対するもので、無衝突粒子であるニュートリノの速度分散 σ_ν と同じとみなすのは注意が必要である。なお、文献 [51] によると、$\delta P/\delta\rho$ の具体的な計算から、非相対論的極限では $c_s \simeq (\sqrt{5}/3)\sigma_\nu$ と対応させるのがより適切であるとの意見もある。

Chapter 3

非一様宇宙の観測

この章では、質量密度ゆらぎの性質を観測的に調べる手段と、それに付随する観測的効果について述べる。

3.1 大規模構造の観測量：2点統計量

前章でみたように、質量密度ゆらぎに刻まれた様々な特徴は極めて大きなスケールで現れる。またその特徴は、宇宙膨張を通じて時間変化にも現れるため、様々な赤方偏移の宇宙を広く観測することが重要になる。

質量密度ゆらぎを観測する現在の代表的な手段は、銀河の空間分布をトレーサーとして用いる銀河サーベイである。銀河サーベイは以下の２種類に大別される：

測光サーベイ : 天球面上に広がる個々の銀河を CCD（電荷結合素子）で観測する方法[1]。CCD を銀河の明るさと広がり・形状が測定できる。

分光サーベイ : 個々の銀河をスペクトル分光する方法。原子気体の吸収線・輝線を同定することで銀河の赤方偏移が測定できる。

前者の観測では、赤方偏移を正確に求めることはできないが、何色かのカラーフィルターを用いることで、銀河のスペクトルのモデルをもとに、ある程度、赤方偏移を決めることができ（測光赤方偏移)、様々な赤方偏移における銀河分布の２次元情報が得られる。また、銀河の形状は、弱重力レンズ効果の測定に使うことができ、直接、２次元面に射影された質量密度ゆらぎのプローブが可能になる、一方、後者の場合、銀河を一つ一つ分光するので時間はかかるが赤方偏移の測定で奥行きの情報が得られるため、実効的に大規模構造の３次元情報が得られる利点がある。

質量密度ゆらぎはランダムな空間分布なため、前章でみたような性質を銀河サーベイから引き出すには銀河の分布を統計量として定量化することが不可欠である。大規模構造を特徴付ける素朴で代表的な統計量が、2点相関関数やそのフーリエ版のパワースペクトルで、2点統計と呼ばれる。以下、それぞれのサーベイから得られる2点統計の関係について説明する。

<u>分光観測から得られる 2 点統計</u>

[1]最近では CMOS も使われるようになってきたようである

分光サーベイの観測量は、銀河の 3 次元個数密度分布 $n_{\rm gal}(\boldsymbol{x})$ であり、この時、2 点相関関数 ξ はお互い離れた 2 点間の場所 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{x}'$ での個数密度をもとに、

$$\langle n_{\rm gal}(\boldsymbol{x})\, n_{\rm gal}(\boldsymbol{x}')\rangle = \overline{n}_{\rm gal}^2 \Big[1+\xi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\Big] \tag{3.1}$$

と定義される。ここで、$\langle\cdots\rangle$ はアンサンブル平均を表し[2]、$\overline{n}_{\rm gal}$ は 3 次元平均個数密度である。つまり、銀河のペアをカウントしたとき、平均からの過剰成分が 2 点相関関数 ξ で特徴づけられている。インフレーション理論による予言では、原始密度ゆらぎの持つ統計性は一様かつ等方的であるとされる。こうした性質が質量密度ゆらぎにも反映されているなら、2 点相関関数は 2 点間の並進・回転に対しても不変となる。ξ は 2 点間の距離 $r \equiv |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|$ のみに依る関数となる。この時、パワースペクトルは 2 点相関関数のフーリエ変換として定義でき、波数の大きさのみに依る関数となる：

$$\begin{aligned} P(k) &= \int d^3\boldsymbol{r}\, \xi(r)\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \\ &= 4\pi \int_0^\infty dr\, r^2\, \frac{\sin(kr)}{kr}\, \xi(r) \end{aligned} \tag{3.2}$$

式 (3.1) と (3.2) を組み合わせると、次の関係が得られる：

$$\langle \delta_{\rm gal}(\boldsymbol{k})\delta_{\rm gal}(\boldsymbol{k}')\rangle = (2\pi)^3\, \delta_{\rm D}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\, P(k) \tag{3.3}$$

ここで $\delta_{\rm gal}(\boldsymbol{k})$ は、$\delta_{\rm gal}(\boldsymbol{x}) \equiv n_{\rm gal}(\boldsymbol{x})/\overline{n}_{\rm gal} - 1$ で定義される銀河の個数密度ゆらぎをフーリエ変換したものである：

$$\delta_{\rm gal}(\boldsymbol{x}) = \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\, \delta_{\rm gal}(\boldsymbol{k})\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{3.4}$$

式 (3.3) は、逆にパワースペクトルの定義として使うことができ、観測やシミュレーションからパワースペクトルを測定する際の基礎になる。

なお、実際の分光観測から求まる 2 点相関関数やパワースペクトルは、次節・次々節で述べる観測的効果によって、大域的な等方性が破れ、2 点間の距離 r や 波数の大きさ k だけでは特徴づけられない。ただし、逆にこの効果を利用して、新たな宇宙論的情報が得ることができるため、最近の銀河サーベイを用いた宇宙論研究ではこの効果に注目が集まっている。

測光サーベイから得られる 2 点統計

測光サーベイの場合、奥行き、つまり赤方偏移が正確に求まらないため、2 点統計量は天球面上に射影された 2 点に対する統計量になる。この時、2 点間を特徴付けるものは、距離ではなく角度になるため、2 点相関関数は角度相関関数、パワースペクトルは角度パワースペクトルと区別して呼ぶ。銀河の角度相関関数 w は、

$$\langle N_{\rm gal}(\hat{\boldsymbol{x}})\, N_{\rm gal}(\hat{\boldsymbol{x}}')\rangle = \overline{N}_{\rm gal}^2 \Big[1+w(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{x}}')\Big] \tag{3.5}$$

[2] ここでいうアンサンブル平均とは、観測される宇宙の他にも宇宙のコピーが多数あり、個々の宇宙から得られた' 観測量' を平均することで得られる仮想的な操作を表す。実際の宇宙では、体積平均でおきかえて測定を行う。

で定義される。ここで $N_{\rm gal}$ は天球面上の銀河の個数面密度であり、$\overline{N}_{\rm gal}$ は平均面密度を表す。統計的に一様・等方的な分布に対しては、角度相関関数は 2 点間の離角 $\theta=|\hat{\boldsymbol{x}}-\hat{\boldsymbol{x}}'|$ のみの関数となり、$w(\theta)$ と表す。一方、角度パワースペクトルは、$\delta_{\rm gal}^{\rm (2D)}(\hat{\boldsymbol{x}})\equiv N_{\rm gal}(\hat{\boldsymbol{x}})/\overline{N}_{\rm gal}-1$ で定義される個数面密度ゆらぎを、球面調和関数 $Y_{\ell,m}$ を用いて

$$\delta_{\rm gal}^{\rm (2D)}(\hat{\boldsymbol{x}})=\sum_{\ell}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}a_{\ell m}\,Y_{\ell m}(\hat{\boldsymbol{x}}) \tag{3.6}$$

と展開し、その展開係数のアンサンブル平均を取ることで定義される。統計的に一様・等方な場合、角度パワースペクトルは多重極 ℓ のみに依存し、

$$\langle\, a_{\ell m}\,a_{\ell' m'}\,\rangle=\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}\;C_\ell \tag{3.7}$$

と表される。この C_ℓ が角度パワースペクトルである。角度相関関数と角度パワースペクトルとは次の関係で結ばれている：

$$w(\theta)=\sum_{\ell}^{\infty}\frac{2\ell+1}{4\pi}\;C_\ell\;\mathcal{P}_\ell(\cos\theta) \tag{3.8}$$

ところで、測光サーベイの観測量 $N_{\rm gal}(\hat{\boldsymbol{x}})$ は、銀河の 3 次元個数密度 $n_{\rm gal}$ を観測で決まる重みづけで射影した量として書き表わせる。つまり、

$$N_{\rm gal}(\hat{\boldsymbol{x}})=\int_0^\infty d\chi\;w_{\rm g}(\chi)n_{\rm gal}(\boldsymbol{x}) \tag{3.9}$$

ここで χ は共動距離であり、$w_{\rm g}$ は視線方向に沿った重み関数を表す。この式にもとづくと、角度相関関数と角度パワースペクトルは 3 次元の相関関数、パワースペクトルと関係づけることができる。特に、2 点間の離角 θ が十分小さいという小角度近似 $\theta\ll1$ を使うと、

$$w(\theta)\simeq\int_0^\infty\{\,w_{\rm g}(\chi)\,\}^2\int_{-\infty}^{\infty}dy\;\xi\Bigl(\sqrt{\{r(\chi)\theta\}^2+y^2};\,z(\chi)\Bigr) \tag{3.10}$$

という簡単な関係が得られる。$r(\chi)$ は、共動角径距離である [式 (1.4)、(1.21) を参照]。上式で用いた小角度近似は、角度パワースペクトルの場合、$\ell\gg1$ という近似に対応し、この時、

$$C_\ell\simeq\int_0^\infty d\chi\left\{\frac{w_{\rm g}(\chi)}{r(\chi)}\right\}^2P\Bigl(\frac{\ell+1/2}{r(\chi)};\,z(\chi)\Bigr) \tag{3.11}$$

が得られる（リンバー近似）。従って、重み関数 $w_{\rm g}$ が何らかの方法でわかれば、3 次元の統計量 ξ、P の理論計算をもとに測光サーベイの観測量に対しても理論予言が可能になり、測光サーベイから宇宙論的情報が得られる。

なお、測光サーベイからは、撮像データをもとに銀河の形状の情報も得られるので、多数の銀河を使うことで弱重力レンズ効果による系統的な形状の’歪み’を検出することができる。この効果を用いると、質量密度ゆらぎを直接プローブすることが可能である。銀河の形状と質量密度ゆらぎの関係については 3.4 節で述べるが、銀河のカウント同様に形状に関する 2 点統計を測ることで、宇宙論的な情報も得ることができる。

3.2 赤方偏移空間歪み

赤方偏移空間

分光観測は、個々の銀河の赤方偏移を測定することで奥行きの情報が得られ、銀河分布の３次元地図を作成することができる点で強力な観測方法である。しかしながら、測定される赤方偏移は必ずしも宇宙膨張に由来する赤方偏移だけではない。分光スペクトルの輝線あるいは吸収線の波長をシフトさせる原因は他にもあり、中でも銀河の特異速度[3]によるドップラー効果は大きな系統誤差になりうる。観測者の視線方向に対する銀河の特異速度を $v_\parallel$ と書くと、$v_\parallel/c \ll 1$ の時、観測される赤方偏移 $z_{\rm obs}$ は、宇宙論的赤方偏移 z とは以下のように関係する ($c=1$ の単位系で)：

$$1+z_{\rm obs} \simeq (1+z)(1+v_\parallel)$$

この関係から、観測領域内の適当な場所に原点をとり、ハッブル則を用いて、個々の銀河の赤方偏移を共動座標系の位置に焼き直すと、

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{x} + \frac{1+z}{H(z)}\, v_\parallel\, \hat{x}. \tag{3.12}$$

となる。

さて、十分遠方の銀河分布に対して、観測される個々の銀河の距離は、銀河間の平均距離に比べて十分長くなる。この場合、ある領域の銀河分布に着目した時、観測者の視線方向はどの銀河に対しても同一方向であると考えても十分よい近似になる（遠方観測者近似)。そこで、銀河がクラスタリングしている領域に対する視線方向を $\hat{\boldsymbol{z}}$ とし、視線方向の銀河の特異速度を $v_\parallel = (\boldsymbol{v}\cdot\hat{z})$ と表すと、上式は、

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{x} + \frac{1+z}{H(z)}\,(\boldsymbol{v}\cdot\hat{z})\,\hat{z}. \tag{3.13}$$

となる。この遠方観測者近似にもとづいて、赤方偏移空間での銀河の個数密度場が、どのように表されるか考えてみよう。

上式で与えられる赤方偏移空間と実空間の関係は、座標変換とみなせるため、お互いの空間で銀河の個数密度は保存するはずである。従って、赤方偏移空間と実空間での密度場をそれぞれ $\delta^{\rm (S)}(\boldsymbol{s})$、$\delta_{\rm g}(\boldsymbol{x})$ と表すと、

$$\begin{aligned}&\{1+\delta^{\rm (S)}(\boldsymbol{s})\}d^3\boldsymbol{s} = \{1+\delta_{\rm g}(\boldsymbol{x})\}d^3\boldsymbol{x}\\ &\qquad\longrightarrow\quad \delta^{\rm (S)}(\boldsymbol{s}) = \{1+\delta_{\rm g}(\boldsymbol{x})\}\left|\frac{\partial\boldsymbol{s}}{\partial\boldsymbol{x}}\right|^{-1} - 1.\end{aligned} \tag{3.14}$$

見通しをよくするため、フーリエ変換をして密度場の表式を求めると

$$\begin{aligned}\delta^{\rm (S)}(\boldsymbol{k}) &= \int d^3\boldsymbol{s}\,\delta^{\rm (S)}(\boldsymbol{s})\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{s}}\\ &= \int d^3\boldsymbol{x}\left[\delta_{\rm g}(\boldsymbol{x}) - \frac{1+z}{H(z)}\frac{\partial v_z(\boldsymbol{x})}{\partial z}\right]\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - ik\mu_k(1+z)/H(z)\,v_z(\boldsymbol{x})}\end{aligned} \tag{3.15}$$

[3]宇宙膨張の寄与を差し引いた、個々の銀河が持つ固有の速度。

ここで、μ は視線方向と波数ベクトルの方向余弦を表、$\mu_k \equiv (\boldsymbol{k}\cdot\hat{z})/|\boldsymbol{k}|$ で定義される。

線形摂動 (カイザー公式)

式 (3.15) の右辺を線形化すると、

$$\delta^{(\mathrm{S})}(\boldsymbol{k}) \simeq \int d^3\boldsymbol{x}\left[\delta_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{x}) - \frac{1+z}{H(z)}\frac{\partial v_z}{\partial z}\right] e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} = \delta_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{k}) + \frac{1+z}{H(z)}\, k\,\mu_k^2\, v(\boldsymbol{k}). \tag{3.16}$$

さらに、連続の式を線形化した関係式 $\dot{\delta}_{\mathrm{m}} - (k/a)v = 0$ [式 (2.8) で $\dot{\Phi} \simeq 0$ としたもの] を用いると、線形の銀河バイアス関係 $\delta_{\mathrm{g}} = b\,\delta_{\mathrm{m}}$ の仮定の下、赤方偏移空間と実空間との密度場を結びつける関係式が得られる：

$$\delta^{(\mathrm{S})}(\boldsymbol{k}) = (b\,+\,f\,\mu_k^2)\delta_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{k}), \tag{3.17}$$

ここで f は 式 (2.44) で定義された線形成長率である。赤方偏移空間では、密度場が方向余弦 μ に陽に依存する形になっている。この関係式は Nick Kaiser によって導かれたものでカイザー公式と呼ばれる [28]。

カイザー公式を用いると、(線形) 赤方偏移空間における銀河のパワースペクトルは

$$P^{(\mathrm{S})}(\boldsymbol{k}) = (b + f\,\mu_k^2)^2\, P_{\mathrm{m}}(k) = \sum_\ell P_\ell^{(\mathrm{S})}(k)\,\mathcal{P}_\ell(\mu_k)\ ; \quad \begin{cases} P_0^{(\mathrm{S})}(k) = \left(b^2 + \dfrac{2}{3}fb + \dfrac{1}{5}f^2\right) P_{\mathrm{m}}(k) \\[2ex] P_2^{(\mathrm{S})}(k) = \left(\dfrac{4}{3}fb + \dfrac{4}{7}f^2\right) P_{\mathrm{m}}(k) \\[2ex] P_4^{(\mathrm{S})}(k) = \dfrac{8}{35}f^2\, P_{\mathrm{m}}(k) \end{cases} \tag{3.18}$$

と表せる。方向余弦の依存性が統計量に陽に現れることからわかるように、赤方偏移空間での統計的な等方性は破れている。なお、2 点相関関数に対応する関係式も、上式をフーリエ逆変換することで求まり、以下のように表せる：

$$\begin{aligned} \xi^{(\mathrm{S})}(\boldsymbol{s}) &= \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\, P^{(\mathrm{S})}(\boldsymbol{k})\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{s}} \\ &= \sum_{\ell=0,2,4} \xi_\ell^{(\mathrm{S})}(s)\mathcal{P}_\ell(\mu_{\mathrm{s}})\ ; \quad \xi_\ell^{(\mathrm{S})}(s) = (-i)^\ell \int \frac{dk k^2}{2\pi^2}\, j_\ell(k\,s)\, P_\ell^{(\mathrm{S})}(k), \end{aligned} \tag{3.19}$$

ここで、μ_{s} は、 $\mu_{\mathrm{s}} = \boldsymbol{s}\cdot\hat{z}/|\boldsymbol{s}|$ 　で定義される実空間における方向余弦である。

上述の赤方偏移空間歪みの線形理論にもとづくと、銀河のパワースペクトル・相関関数の非等方性を観測することで、重力不安定に由来するゆらぎの成長を測定することが可能になる。例えば、多重極展開したパワースペクトル $P_\ell^{(\mathrm{S})}$ に着目すると、ある波数の観測量 $P_0^{(\mathrm{S})}$、$P_2^{(\mathrm{S})}$、$P_4^{(\mathrm{S})}$ を組み合わせることで、$b^2P_m(k)$ と $f^2P_m(k)$ を分離して決めることができる。銀河サーベイなどで観測する典型的スケールでは、$P_m(k)$ はゆらぎの規格化を

与える宇宙論パラメーター σ_8 に強く依存するため[4]、赤方偏移空間歪みの観測から、$b\sigma_8$ と $f\sigma_8$ というパラメーターの組み合わせが決まることになる。このうち、$f\,\sigma_8$ が重力に由来したゆらぎの成長に依存する量であり、f は重力理論に基づいてその値が決まる。特に一般相対性理論にもとづく冷たい暗黒物質優勢宇宙では、

$$f(z) \simeq \Omega_{\rm m}(z)^{0.55} \tag{3.21}$$

という関係が高い精度で成り立つことが知られている (例えば [35])。従って、観測から上式のずれを調べることで宇宙論的なスケールでの一般相対論のテスト、重力理論の検証ができることになる。そのため、近年、赤方偏移空間歪みの測定は宇宙論研究における最重要テーマの 1 つとして、多くの銀河サーベイのサイエンスゴールに掲げられている。

ただし、カイザー公式は線形近似にもとづき導出された関係式で、あまり適用範囲が広くない。そもそも、赤方偏移空間と実空間の関係式 (3.13) には、速度場が含まれており、速度場が場所についての非線形関数であるため、ゆらぎの重力成長が徐々に非線形になる領域では、赤方偏移空間と実空間は単純な線形関係ではなくなる。そのため、観測から重力理論の検証を精度よく行うためには、線形理論を超える赤方偏移空間歪みの記述が不可欠になる。

3.3 幾何学的歪み (アルコック-パチンスキー効果)

銀河赤方偏移サーベイから求まる銀河の 3 次元空間分布は、赤方偏移空間歪みのせいで視線方向に沿って非等方な分布になっているが、加えて、遠方距離の宇宙論依存性によっても別の非等方性が生じうることが知られている。この非等方性は観測される銀河の位置座標を共動系の実空間座標に変換する際に現れるもので、アルコック-パチンスキー効果、もしくは幾何学的歪みと呼ばれる [1]。

銀河サーベイから得られる個々の銀河の位置は、天球面上の角度 $\boldsymbol{\theta}$ と赤方偏移 z で特徴づけられ、銀河 2 点間の距離はそれらの差 $(\Delta\boldsymbol{\theta}, \Delta z)$ で表せる。この差を、視線方向はハッブル則、その垂直方向（天球面方向）は角径距離を用いることで、次のように共動座標系での距離 $\Delta\boldsymbol{s}$ に換算できる[5]：

$$\Delta\boldsymbol{s}_{\parallel} = \frac{1+z}{H(z)}\,\Delta z, \qquad \Delta\boldsymbol{s}_{\perp} = (1+z)\,d_A(z)\,\Delta\boldsymbol{\theta}. \tag{3.22}$$

上式に現れるハッブルパラメーター、角径距離は、宇宙膨張を特徴づける宇宙論パラメーターに陽に依存している。つまり、観測から実距離への変換には宇宙論パラメーターを事前に正しく求めておくか、あるいは何らかの仮定を入れる必要がある。この仮定にもし間違いがあると、視線方向と垂直方向の長さが仮に同じだったとしても、H^{-1} と d_A の宇宙論パラメーター依存性の違いから、長さが異なってしまい、非等方性が生じてしまう。

以下では、この宇宙論パラメーターの間違いが相関関数、パワースペクトルにどう影響するか、具体的に見てみる。

---

[4] σ_8 は、線形の質量パワースペクトル P_m の振幅を決めるパラメーターで以下のように定義される：

$$\sigma_8^2 \equiv \int \frac{dk^2 k}{2\pi^2}\, W_{\rm th}^2(k\,R_8)\, P_{\rm m}(k), \quad (R_8 = 8\,h^{-1}\,{\rm Mpc}) \tag{3.20}$$

ここで、関数 $W_{\rm th}(x)$ はトップハット型フィルター関数をフーリエ変換したもので、$W(x) = (3/x^3)\{\sin x - x\cos x\}$ と表せる。

[5] 角径距離は物理的長さとして定義されるので、共動座標に焼き直す時、因子 (1+z) がつく点に注意。

相関関数

今、真の宇宙モデルにおける銀河 2 点間の距離を、視線方向垂直、平行成分それぞれ、$s'_\perp$、$s'_\parallel$ と表す。それに対し、適当な宇宙モデルを仮定し、観測から求めた距離を $s_\perp^{\rm obs}$、$s_\parallel^{\rm obs}$ と記そう。この時、真の距離と観測から求めた距離の間には、

$$s'_\perp = \frac{d_A}{d_{A,\rm fid}} s_\perp^{\rm obs}, \qquad s'_\parallel = \frac{H^{-1}}{H_{\rm fid}^{-1}} s_\parallel^{\rm obs}. \tag{3.23}$$

という関係が成り立つ。ここで、下付き添え字 $_{\rm fid}$ がついた量は、適当な宇宙モデルを仮定した時のものであることを示す。式 (3.23) をある種の座標変換とみなせば、適当な宇宙モデルを仮定して観測された相関関数 $\xi_{\rm obs}^{\rm (S)}$ は、真の宇宙で測定されるべき相関関数 $\xi^{\rm (S)}$ と次のように関係づくことがわかる：

$$\xi_{\rm obs}^{\rm (S)}(s^{\rm obs},\,\mu_{\rm s}^{\rm obs}) = \xi^{\rm (S)}(s',\,\mu'_{\rm s})\ ; \quad \begin{cases} s' \equiv \sqrt{(s'_\perp)^2 + (s'_\parallel)^2} = s^{\rm obs}\,\beta(\mu_{\rm s}^{\rm obs}) \\[2ex] \mu'_{\rm s} \equiv s'_\parallel/s' = \dfrac{H_{\rm fid}}{H}\dfrac{\mu_{\rm s}^{\rm obs}}{\beta(\mu_{\rm s}^{\rm obs})} \end{cases} \tag{3.24}$$

ただし、β は以下で定義される：

$$\beta(\mu_{\rm s}^{\rm obs}) = \sqrt{\left(\frac{d_A}{d_{A,\rm fid}}\right)^2 + \left\{\left(\frac{H_{\rm fid}}{H}\right)^2 - \left(\frac{d_A}{d_{A,\rm fid}}\right)^2\right\}(\mu_{\rm s}^{\rm obs})^2}. \tag{3.25}$$

パワースペクトル

パワースペクトルの場合も、相関関数のフーリエ変換を通じて、真の宇宙モデルでの波数ベクトルと、適当な宇宙モデルにもとづき観測から換算された波数ベクトルの間にミスマッチが生じることで幾何学的歪みが生じる。式 (3.23) から

$$k'_\perp = \frac{d_{A,\rm fid}}{d_A} k_\perp^{\rm obs}, \qquad k'_\parallel = \frac{H_{\rm fid}^{-1}}{H^{-1}} k_\parallel^{\rm obs} \tag{3.26}$$

従って、式 (3.24) より

$$P_{\rm obs}^{\rm (S)}(k^{\rm obs},\,\mu_k^{\rm obs}) = \frac{H}{H_{\rm fid}}\left(\frac{d_{A,\rm fid}}{d_A}\right)^2 P^{\rm (S)}(k',\,\mu'_k)\ ; \quad \begin{cases} k' = k^{\rm obs}\,\alpha(\mu_k^{\rm obs}) \\[2ex] \mu'_k = \dfrac{H}{H_{\rm fid}}\dfrac{\mu_k^{\rm obs}}{\alpha(\mu_k^{\rm obs})} \end{cases} \tag{3.27}$$

ここで α は

$$\alpha(\mu_k^{\rm obs}) = \sqrt{\left(\frac{d_{A,\rm fid}}{d_A}\right)^2 + \left\{\left(\frac{H}{H_{\rm fid}}\right)^2 - \left(\frac{d_{A,\rm fid}}{d_A}\right)^2\right\}(\mu_k^{\rm obs})^2}. \tag{3.28}$$

式 (3.24) (3.27) で与えられる表式は、真の宇宙モデルと観測量で仮定した宇宙モデルにミスマッチがあると、非等方性の高次の多重極成分が現れることを意味している。赤方偏移空間歪みの非等方性は、カイザー公式では $\ell = 0, 2, 4$ の成分に限られるが [式 (3.18)(3.19)]、幾何学的歪みの場合、線形近似が成り立つ領域でも $\ell > 4$ の成分が作られる。ただし、幾何学的歪みは見かけのもので、観測から相関関数・パワースペクトルを求める際に仮定した宇宙モデルが正しければ非等方は生じないため、逆にこのことを利用して、真の宇宙モデル、つまり、宇宙膨張を特徴づける宇宙論パラメーターを推測することができる。その際、統計量に特徴的なスケールが刻まれていると、よりよく宇宙モデルを決めることができる。2 章でみたように、相関関数・パワースペクトルには、２つの特徴的スケールが刻まれている。一つは輻射・物質等密度時のハッブル地平線で、もう一つはバリオン音響振動の音響地平線である。特に後者は、最近、銀河サーベイ観測の大型化により精密に測れるようになり、加速膨張への制限にも使われている。

3.4 弱い重力レンズ効果

重力レンズは一般相対性理論により予言される現象で、光の経路が重力源によって歪められる。系統的かつ大規模なサーベイが行われるようになって、多くの重力レンズ現象が観測されるようになり、最近は重力レンズを使った宇宙論の研究も活発である。重力レンズといっても、レンズ天体とレンズ源のサイズやそれらの距離によって性質に様々な違いがあるが、宇宙の大規模構造そのものがレンズ源となって遠方銀河からの光を歪め、見かけ上銀河の形状が歪む効果は、弱重力レンズ効果に分類される。この弱重力レンズ効果は、多数の銀河サンプルを使って測定することで、質量密度ゆらぎを観測する手段にもなる。

この節では、弱重力レンズの理論的記述について述べ、質量密度ゆらぎと重力レンズ観測がどう結びつけられるか概観していこう。

レンズ方程式

大規模構造の弱重力レンズ効果によって引き起こされる、遠方銀河のイメージの歪みを特に、コスミック シア (cosmic shear) と呼ぶ。このコスミック シアは、質量密度ゆらぎは空間的に相関を持つせいで、離れた場所でも相関を持つ（お互い離れた銀河どうしのイメージの歪みは相関する)。この相関の強さは、

- 質量密度ゆらぎの時間発展

- 光の経路上に沿って距離の重みがかかるため、宇宙膨張

に依って決まる。

輝度定理 (brightness theorem)

$$I_{\rm obs}(\vec{\theta}) = I_{\rm true}(\vec{\theta}_{\rm s}) \tag{3.29}$$

$I_{\rm obs}$: 観測される背景銀河の表面輝度（重力レンズあり）
$I_{\rm true}$: もともとの背景銀河の表面輝度（重力レンズなし）

重力レンズされた背景銀河の位置 $\vec{\theta}$ と もともとの背景銀河の位置 $\vec{\theta}_{\rm s}$ の間をつなぐ関係は、レンズ方程式によって与えられる。以下、平坦宇宙 (i.e., $K=0$) の下でレンズ方程式を導出する。

光の測地線

$$\frac{d^2x^i}{d\lambda^2} + \Gamma^i_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0, \quad (i = 1 \sim 3) \tag{3.30}$$

x^i : 光子の (共動) 位置座標で成分表示すると $(x_1, x_2, x_3) = (\chi\,\vec{\theta},\ \chi)$、ただし、$\chi(z) \equiv \int_0^z \frac{c\,dz'}{H(z')}$.
λ : アフィンパラメーター

計量（平坦） : $ds^2 = -\{1 + 2\,\Psi(\vec{x})\}\,dt^2 + a^2(t)\,\{1 + 2\,\Phi(\vec{x})\,\}\,\delta_{ij}\,dx^i dx^j$

式 (3.30) で与えられう測地方程式を、アフィンパラメーターでなく、共動距離 χ を用いた表式に書き換える。その際、以下の関係を用いる：

$$\frac{d\chi}{d\lambda} = \frac{d\chi}{dt}\frac{dt}{d\lambda} = -\frac{1}{a}p^0 \simeq -\frac{p}{a}\,(1-\Psi)\ ; \qquad p^2 \equiv g_{ij}p^ip^j \tag{3.31}$$

$$\left(\because \quad g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = 0 \quad\Longrightarrow\quad -(1+2\Psi)\,(p^0)^2 + g_{ij}\,p^ip^j = 0\right)$$

視線方向に対して直交する方向、すなわち $i = 1, 2$ の成分に特に着目すると、式 (3.30) の左辺第１、２項はそれぞれ

$$\begin{aligned} \frac{d^2x^i}{d\lambda^2} &= \frac{d^2}{d\lambda^2}\,(\chi\,\theta^i) \\ &\simeq \frac{p}{a}\,\frac{d}{d\chi}\,\left[\frac{p}{a}\,\frac{d}{d\chi}\,(\chi\,\theta^i)\right] \\ &= p^2\,\frac{d}{d\chi}\,\left[\frac{1}{a^2}\,\frac{d}{d\chi}\,(\chi\,\theta^i)\right] \qquad (\because \quad pa = \text{const.}) \end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{\alpha\beta}\,\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} &= \frac{p^2}{a^2}\,(1-\Psi)^2\,\Gamma^i_{\alpha\beta}\,\frac{dx^\alpha}{d\chi}\frac{dx^\beta}{d\chi} \\ &\simeq \frac{p^2}{a^2}\,\left[(\Psi-\Phi)_{,i} - 2a\,H\,\frac{d}{d\chi}\,(\chi\,\theta^i)\right] \end{aligned} \tag{3.33}$$

となる。ここでクリストッフェル記号 $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ は、摂動の 1 次までで $\Gamma^i_{00}=\Psi_{,i}/a^2$、$\Gamma^i_{0j}=\Gamma^i_{j0}=\delta_{ij}(H+\dot{\Phi})$、$\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{j0}=\delta_{ij}\Phi_{,k}+\delta_{ik}\Phi_{,j}-\delta_{jk}\Phi_{,i}$ と表されることを用いた。上の２式をまとめることで、測地線方程式は次のように書き直せる：

$$\frac{d}{d\chi}\left[\frac{1}{a^2}\frac{d}{d\chi}(\chi\,\theta^i)\right]+\frac{1}{a^2}\left\{(\Psi-\Phi)_{,i}-2a\,H\,\frac{d}{d\chi}(\chi\,\theta^i)\right\}=0 \tag{3.34}$$

この式はさらに簡略化でき、最終的に、

$$\frac{d^2}{d\chi^2}(\chi\,\theta^i)=(\Phi-\Psi)_{,i} \tag{3.35}$$

を得る。

式 (3.35) を、$\chi=0$ で $\theta^i=\theta^i_o$、$\chi=\chi_s(>0)$ で $\theta^i=\theta^i_s$ となるような境界条件で解くことで以下が得られる：

レンズ方程式

$$\begin{aligned}\theta^i_s &= \theta^i_o+\frac{1}{\chi_s}\int_0^{\chi_s}d\chi_1\int_0^{\chi_1}d\chi_2\,\Big\{\Phi(\vec{x}(\chi_2))-\Psi(\vec{x}(\chi_2))\Big\}_{,i}\\ &= \theta^i_o+\frac{1}{\chi_s}\int_0^{\chi_s}d\chi_2\int_{\chi_2}^{\chi_s}d\chi_1\,\Big\{\Phi(\vec{x}(\chi_2))-\Psi(\vec{x}(\chi_2))\Big\}_{,i}\\ &= \theta^i_o+\int_0^{\chi_s}d\chi'\,\frac{\chi_s-\chi'}{\chi_s}\Big\{\Phi(\vec{x}(\chi'))-\Psi(\vec{x}(\chi'))\Big\}_{,i}\end{aligned} \tag{3.36}$$

なお、下付き添え字 $({}_{,i})$ は、微分 $\frac{d}{dx^i}=\frac{1}{\chi}\frac{d}{d\theta^i}$ を表す。

コンバージェンスとシア

式 (3.36) は、背景銀河から発せられた光が前景の大規模構造が作る重力ポテンシャルで曲げられる様子を記述しているが、この式をうまく利用することで背景銀河のイメージがどのように歪むかも理解できる。具体的には、θ^i_o と θ^i_o の関係を座標変換ととらえ、以下のヤコビ行列 A_{ij} を評価する：

$$A_{ij}\equiv\frac{\partial\theta^i_s}{\partial\theta^j_o}=\delta_{ij}+\int_0^{\chi_s}d\chi\frac{(\chi_s-\chi)\chi}{\chi_s}\big(\Phi-\Psi\big)_{,ij} \tag{3.37}$$

ここで、$\frac{d}{d\theta^i_o}=\chi\frac{d}{dx^i}$ と表せることを用いた $(\because\ \ x^i=\chi\,\theta^i_o)$. このヤコビ行列は以下のように書き直せる：

$$A_{ij} \;=\; \delta_{ij}-\begin{pmatrix}\kappa+\gamma_1 & \gamma_2\\ \gamma_2 & \kappa-\gamma_1\end{pmatrix} \tag{3.38}$$

背景銀河のイメージが十分小さいと、イメージ上の各点が重力レンズ効果を通じて観測者が見るイメージにどう投影されるか、上の行列を用いた線形変換で表すことができる。行列 A_{ij} の右辺第２項は、重力レンズによる歪みを表しており、κ と γ_i はそれぞれ、

with κ and γ_i being defined by

$$\text{コンバージェンス：}\qquad \kappa(\vec{\theta}) = -\frac{1}{2}\int_0^{\chi_s} d\chi\, \frac{(\chi_s-\chi)\chi}{\chi_s}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)(\Phi-\Psi) \tag{3.39}$$

$$\text{シア：}\qquad \begin{cases} \gamma_1(\vec{\theta}) = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\chi_s} d\chi\, \frac{(\chi_s-\chi)\chi}{\chi_s}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)(\Phi-\Psi) \\ \gamma_2(\vec{\theta}) = \quad -\displaystyle\int_0^{\chi_s} d\chi\, \frac{(\chi_s-\chi)\chi}{\chi_s}\quad \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}(\Phi-\Psi) \end{cases} \tag{3.40}$$

と表せる。κ はイメージの拡大・縮小、γ_1 と γ_2 はお互い直交する方向に対してイメージの伸縮を特徴づけている。なお、弱重力レンズの下では、これら２つの量は十分小さく (κ, $|\gamma| \ll 1$)、ヤコビ行列の行列式がゼロになるようなことはない[6]。

重力レンズによるイメージの歪みが質量密度ゆらぎとどう結びついているかを見るため、コンバージェンス κ に着目し、いくつか近似を行うことで表式を簡単化しよう（とはいえ実用上、十分有用な近似になっている)。ハッブル地平線以下のスケールでは $\Phi=-\Psi$ が成り立つことを用いて $(\Phi-\Psi)=-2\,\Psi$ と表すことにして、式 (3.39) (3.40) の被積分関数に含まれる微分を以下のように書き直す：

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right]\Psi = \left[\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right]\Psi = \left[\nabla^2-\frac{1}{\chi^2}\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\chi^2\frac{\partial}{\partial\chi}\right)\right]\Psi. \tag{3.41}$$

最後の式の第２項は、ポテンシャルに対する時間微分になっている。第２章でも見たが、重力レンズの観測ができるような時期では、ポテンシャルはほぼ定数になっており、その意味ではこの時間微分項は、第１項に比べて無視できる。このことを考慮に入れて、式 (3.39) の表式を書き直すと

$$\begin{aligned} \kappa(\vec{\theta}) &\simeq \int_0^{\chi_s} d\chi\, \frac{(\chi_s-\chi)\chi}{\chi_s}\,\nabla^2\Psi(\vec{x};\chi) \\ &= \frac{3}{2}\,\Omega_{\mathrm{m}}H_0^2\int_0^{\chi_s} d\chi\, \frac{(\chi_s-\chi)\chi}{\chi_s}\,\frac{\delta(\vec{x};\chi)}{a(\chi)}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

第２式ではポアソン方程式を用いた。これより、重力レンズ効果の強さは、質量密度ゆらぎを重みつきで背景銀河から観測者まで積分したものに比例していることがわかる。重みは、背景銀河から観測者までの距離が真ん中になる時に最大になる。
ここまで、宇宙は平坦で、共動距離で χ_s だけ離れた時刻にだけ背景銀河がある場合を考えたが、式 (3.42) に関して、以下のような一般化が可能である：

- 平坦でない宇宙でのコンバージェンス:
  被積分関数に現れる共動距離 χ を共動角径距離 $r(\chi)=d_A/\{1+z(\chi)\}$ に置き換えて [式 (1.4) (1.21) 参照]、

$$\kappa(\vec{\theta}) = \frac{3}{2}\,\Omega_{\mathrm{m}}H_0^2\int_0^{\chi_s} d\chi\, \frac{r(\chi_s-\chi)\,r(\chi)}{r(\chi_s)}\,\frac{\delta(\vec{x};\chi)}{a(\chi)}. \tag{3.43}$$

[6] κ や $|\gamma|$ が 1 を超える場合は強い重力レンズと呼ぶ。

- 背景銀河の分布に広がりがある場合のコンバージェンス:
  背景銀河が共動距離の関数として広がりを持って分布している時、その広がりを $w_g(\chi)$ で表されるとすると、平坦でない宇宙で、

$$
\begin{aligned}
\kappa(\vec{\theta}) &= \frac{3}{2}\,\Omega_{\rm m}H_0^2\int_0^\infty d\chi_s\,w_g(\chi_s)\int_0^{\chi_s}d\chi\,\frac{r(\chi_s-\chi)\,r(\chi)}{r(\chi_s)}\,\frac{\delta(\vec{x};\chi)}{a(\chi)} \\
&= \int_0^\infty d\chi\,\frac{g(\chi)}{a(\chi)}\,\delta(\vec{x};\chi) \qquad (3.44)
\end{aligned}
$$

  ここで関数 $g(\chi)$ は以下で与えられる：

$$
g(\chi) = \frac{3}{2}\,\Omega_{\rm m}H_0^2\int_\chi^\infty d\chi_s\,\frac{r(\chi_s-\chi)\,r(\chi)}{r(\chi_s)}\,w_g(\chi_s) \qquad (3.45)
$$

調和空間上のコンバージェンスとシア

式 (3.39) (3.40) で与えられたコンバージェンスとシアは、ポテンシャルを通じてお互い関係づいていることがわかるが、調和空間で書き表すとその関係はかなり明確になる。κ と γ は天球面上で定義される量なので、調和展開は一般には球面調和関数を用いた表現になるが、観測で着目する領域が狭い場合は、近似的にその領域を平面的に扱うことができ、フーリエ展開による調和展開ができる：

$$
\widetilde{\kappa}(\vec{\ell}) = \int d^2\vec{\theta}\;e^{i\,\vec{\ell}\cdot\vec{\theta}}\,\kappa(\vec{\theta}) \qquad (3.46)
$$

この展開を式 (3.39) (3.40) に適用すると、調和空間（フーリエ空間）での関係は以下のようになる：

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\gamma}_1(\vec{\ell}) &= \frac{\ell_1^2-\ell_2^2}{\ell^2}\,\widetilde{\kappa}(\vec{\ell}), \qquad (3.47)\\
\widetilde{\gamma}_2(\vec{\ell}) &= 2\frac{\ell_1\ell_2}{\ell^2}\;\widetilde{\kappa}(\vec{\ell}). \qquad (3.48)
\end{aligned}
$$

ただし、$\ell^2=\ell_1^2+\ell_2^2$ である。２次元フーリエ空間を $(\cos\phi_\ell,\ \sin\phi_\ell)=(\ell_1/\ell,\ \ell_2/\ell)$ と書き表すと、上式は

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\gamma}_1(\vec{\ell}) &= \cos(2\phi_\ell)\;\widetilde{\kappa}(\vec{\ell}), \qquad (3.49)\\
\widetilde{\gamma}_2(\vec{\ell}) &= \sin(2\phi_\ell)\;\widetilde{\kappa}(\vec{\ell}). \qquad (3.50)
\end{aligned}
$$

となる。この関係式は、$\gamma=\gamma_1+i\gamma_2$ で定義される複素シアはスピン 2 の性質を持つことを示している。この性質を利用すると、次のような分解を行うことで、２成分あるシアか

らレンズ効果として物理的に意味のある成分を取り出すことができる：

E-/B-モード分解[7]

$$\begin{pmatrix} \gamma_{\rm E}(\vec{\ell}) \\ \gamma_{\rm B}(\vec{\ell}) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos(2\phi_\ell) & \sin(2\phi_\ell) \\ -\sin(2\phi_\ell) & \cos(2\phi_\ell) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\gamma}_1(\vec{\ell}) \\ \widetilde{\gamma}_2(\vec{\ell}) \end{pmatrix} \tag{3.51}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \gamma_{\rm E}(\vec{\ell}) \;+\; i\,\gamma_{\rm B}(\vec{\ell}) \;=\; e^{-i\,2\phi_\ell}\left[\widetilde{\gamma}_1(\vec{\ell}) \;+\; i\,\widetilde{\gamma}_2(\vec{\ell})\right] \tag{3.52}$$

この分解で定義される $\gamma_{\rm E,B}$ は天球面上の座標回転に対して不変な量になっている。式 (3.49) (3.50) をこの分解に代入すると、

$$\gamma_{\rm E}(\vec{\ell}) = \widetilde{\kappa}(\vec{\ell}), \qquad \gamma_{\rm B}(\vec{\ell}) = 0. \tag{3.53}$$

が得られる。つまり、B-モードのシア $\gamma_{\rm B}$ は、質量密度ゆら由来の重力レンズでは生成されない。

コスミック シアの観測

これまで重力レンズの性質について述べてきたが、最後に、測光サーベイから得られる観測データを使ってどうやって重力レンズを測定・検出するか、その原理について解説する。

測光サーベイでは、撮像データをもとに銀河の形状についての情報も得られる。重力レンズがあると見かけの背景銀河のイメージは本来のそれより歪んだものになり、しかもその歪みは、重力レンズを引き起こす前景の質量密度ゆらぎによって、空間的な相関を持つ。つまり、個々の背景銀河の形状に対する相関（例えば 2 点統計）を取ることで重力レンズを検出することができる。

背景銀河の形状を特徴づける単純な推定量として、以下のような四重極モーメントを考えよう：

$$q_{ij}^{\rm obs} \equiv \frac{\displaystyle\int d^2\vec{\theta}\, I_{\rm obs}(\vec{\theta})\,\theta_i\,\theta_j}{\displaystyle\int d^2\vec{\theta}\, I_{\rm obs}(\vec{\theta})} \tag{3.54}$$

$I^{\rm obs}(\theta)$ は観測される背景銀河の表面輝度分布である。輝度定理から背景銀河の表面輝度は不変であるため、$I_{\rm obs}(\vec{\theta}) = I_{\rm true}(\vec{\theta}_s)$ となる。ここで、$\vec{\theta}_s$ は（重力レンズがない）もとの背景銀河での天球面上の角度である。一方、観測される角度は、重力レンズがあると、もとの背景銀河の角度とは、先に定義したヤコビ行列から $\theta_i = (A^{-1})_{ij}\,\theta_{s,j}$ と結びつく。これらの関係を用いると、

$$\begin{aligned} q_{ij}^{\rm obs} &= \frac{\displaystyle\int d^2\vec{\theta}_s\;|\det A|^{-1}\,I_{\rm true}(\vec{\theta}_s)\,(A^{-1})_{i\ell}\,\theta^{\rm s}_\ell\,(A^{-1})_{jm}\,\theta^{\rm s}_m}{\displaystyle\int d^2\vec{\theta}_s\;|\det A|^{-1}\,I_{\rm true}(\vec{\theta}_{\rm s})} \\ &\simeq (A^{-1})_{i\ell}(A^{-1})_{jm}\,q^{\rm s}_{\ell m} \end{aligned} \tag{3.55}$$

と書き直せる。第２式では、背景銀河のイメージは小さいとし、ヤコビ行列の角度依存性を無視して積分の外に出した。ここで、$q^{\rm s}_{\ell m}$ は背景銀河の場所で測った場合の四重極モーメントであり、

$$q^{\rm s}_{ij} = \frac{\displaystyle\int d^2\vec{\theta}_{\rm s}\, I_{\rm true}(\vec{\theta}_{\rm s})\, \theta^{\rm s}_i\, \theta^{\rm s}_j}{\displaystyle\int d^2\vec{\theta}_{\rm s}\, I_{\rm true}(\vec{\theta}_{\rm s})} \tag{3.56}$$

で定義される。具体的に、ヤコビ行列の表式 (4.17) を代入し、重力レンズを受けた四重極モーメントがコンバージェンス、シアと表せるか見ていく。ヤコビ行列の逆行列、

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{(1-\kappa)^2 - \gamma^2} \begin{pmatrix} 1-\kappa+\gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & 1-\kappa-\gamma_1 \end{pmatrix} \tag{3.57}$$

を式 (3.55) に代入して、弱重力レンズの極限で ($\kappa, \gamma \ll 1$)、行列 $q^{\rm obs}_{ij}$ を書き下すと

$$q^{\rm obs}_{11} \simeq (1+2\,g_1)\,\tilde{q}^{\rm s}_{11} + 2\,g_2\,\tilde{q}^{\rm s}_{12}, \tag{3.58}$$

$$q^{\rm obs}_{22} \simeq (1-2\,g_1)\,\tilde{q}^{\rm s}_{22} + 2\,g_2\,\tilde{q}^{\rm s}_{12}, \tag{3.59}$$

$$q^{\rm obs}_{12} \simeq \tilde{q}^{\rm s}_{12} + g_2\,(\tilde{q}^{\rm s}_{11} + \tilde{q}^{\rm s}_{22}), \tag{3.60}$$

が得られる（$q_{ij} = q_{ji}$ であることに注意)。ここで、$\tilde{q}^{\rm s}_{ij} \equiv q^{\rm s}_{ij}/(1-\kappa)^2$ であり、g_i は換算シア (reduced shear) と呼ばれ、

$$g_i \equiv \frac{\gamma_i}{1-\kappa} \tag{3.61}$$

で定義される。この換算シアを具体的に測る上で、次のような楕円率と呼ばれる量を定義する：

$$\epsilon_1 \equiv \frac{q^{\rm obs}_{11} - q^{\rm obs}_{22}}{q^{\rm obs}_{11} + q^{\rm obs}_{22}}, \qquad \epsilon_2 \equiv \frac{2\,q^{\rm obs}_{12}}{q^{\rm obs}_{11} + q^{\rm obs}_{22}}. \tag{3.62}$$

ϵ_1 に式 (3.58)(3.59) を代入して、重力レンズを受ける前の楕円率 $\epsilon^{\rm s}_i$ との関係を求めると、

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{q^{\rm s}_{11} - q^{\rm s}_{22} + 2\,g_1\,(q^{\rm s}_{11} + q^{\rm s}_{22})}{q^{\rm s}_{11} + q^{\rm s}_{22} + 2\,g_1\,(q^{\rm s}_{11} - q^{\rm s}_{22}) + 4\,g_2\,q^{\rm s}_{12}} \\ &= \frac{\epsilon^{\rm s}_1 + 2\,g_1}{1 + 2\,g_1\,\epsilon^{\rm s}_1 \,+\, 2\,g_2\,\epsilon^{\rm s}_2} \end{aligned}$$

すなわち、弱重力レンズの極限で

$$\epsilon_1 \;\simeq\; \epsilon^{\rm s}_1 + 2\,g_1 \tag{3.63}$$

を得る。同様に、

$$\epsilon_2 \;\simeq\; \epsilon^{\rm s}_2 + 2\,g_2 \tag{3.64}$$

となる。

つまり、銀河自身の持つ固有の楕円率 ϵ_i^{s} がわかれば、背景銀河の楕円率から重力レンズのシアを測定することができる。楕円率 ϵ_i^{s} は局所的な銀河形成過程に由来して生じたと思うと、離れた銀河どうしでは無相関と考えられるため、ある程度、天球面のある領域内に含まれる銀河で平均するか、離れた銀河どうしの 2 点統計を評価することで、重力レンズのみの影響を取り出すことが可能になる。その際、固有の楕円率 ϵ_i^{s} は重力レンズの検出に対してノイズとなるが、銀河の個数面密度を増やすことができれば[8]、その影響を小さくでき、高いシグナル・ノイズ比で重力レンズの検出ができるようになる。現在、この原理をもとに、測光サーベイからコスミック シアの測定が行われている。

[8]最近の観測だと $\overline{N}_{\mathrm{gal}} \sim \mathcal{O}(10)\,\mathrm{arcmin}^{-2}$ 。

Chapter 4

非線形構造形成の解析的アプローチ

密度ゆらぎの振幅が大きくなり、1 に近づくと線形理論による取り扱いは破綻し、振幅が 1 を越えるとゆらぎの成長は非線形段階に入る。現在、観測される銀河や銀河団などの天体は非線形進化のもとで生み出されたものである。こうした天体の形成には、重力以外に電磁波の放射・吸収過程を含めた複雑な非線形過程になるが、非線形過程を重力に限っても、一般論の展開は困難で N 体シミュレーションなどの数値解析が必要である。ただし、問題を単純化したり、非線形性が弱い段階に状況を限ると、解析的な取り扱いから定性的な理解を得たり、定量的な理論予言が可能になる。ここでは、重力非線形性に対する取り扱いを通して構造形成に関する非線形効果について概観する。

4.1 球対称モデル

構造形成が進み非線形段階に入ると、密度コントラストが高い領域ではダークマターハローと呼ばれる自己重力束縛系が形成される。こうした系の特徴的な性質をおさえるために用いられるのが球対称モデルである。

質量 M で半径 R の一様密度球を考える。重力相互作用だけ考えると、この系の時間進化は半径 R の運動として記述され、運動方程式は、

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{GM}{R^2} \tag{4.1}$$

で与えられる。質量 M と半径 R、密度 ρ の間には、$M = (4\pi/3)\,\rho\, R^3$ という関係が成り立っている。まず、この系から得られる一様球の典型的な時間進化として、有限時刻で $R \to 0$ となる解をみてみよう。媒介変数 θ を用いて $(0 \le \theta \le 2\pi)$

$$R = \frac{GM}{2|E|}(1-\cos\theta), \quad t = \frac{GM}{(2|E|)^{3/2}}(\theta - \sin\theta). \tag{4.2}$$

と表される。ここで E は系のエネルギーを表す運動の定数である $(E \equiv \dot{R}^2/2 - GM/R < 0)$。この解は、時刻 $t_{\rm ta} = t(\pi)$ までは膨張宇宙のように半径 R が単調に増大するが、その後収縮に転じ、時刻 $t_{\rm coll} = t(2\pi) = 2t_{\rm ta}$ で半径がゼロになる。

式 (4.2) より一様球の密度は、以下で与えられる：

$$\rho \equiv \frac{M}{(4\pi/3)R^3} = \frac{6}{\pi}\frac{|E|^3}{G^3M^2}(1-\cos\theta)^{-3}. \tag{4.3}$$

時刻 $t_{\rm coll}$ （つまり $\theta = 2\pi$）で密度は発散することがわかる。

一様球をとりまく背景宇宙として、アインシュタイン-ド・ジッター宇宙を考える。背景密度が $\rho_{\rm m} = 3H^2/(8\pi G) = 1/(6\pi G t^2)$ で与えられることを用いて密度ゆらぎ δ を計算すると、

$$\delta \equiv \frac{\rho}{\rho_{\rm m}} - 1 = \frac{9}{2}\frac{(\theta - \sin\theta)^2}{(1-\cos\theta)^3} - 1, \tag{4.4}$$

なお、式 (4.4) は以下の発展方程式を満たすことがわかる (その意味については後述参照)：

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + 2H\frac{d\delta}{dt} - 4\pi G\,\rho_{\rm m}\,\delta = -4\pi G\,\rho_{\rm m}\,\delta^2 + \frac{4}{3(1+\delta)}\left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2. \tag{4.5}$$

ビリアル密度比

球対称モデルに現れる密度の発散は単純化のせいである。非線形段階に入った高密度領域は現実的には重力収縮に転じる頃から系のサイズは大きく変わらなくなり、時刻 $t_{\rm coll}$ ではビリアル平衡と呼ばれる力学的な平衡状態に落ち着くと考えられる。この考察にもとづいてビリアル平衡に落ち着いた一様球の密度コントラスト $\rho_{\rm vir}/\rho_{\rm m}$ を求めてみよう。ビリアル平衡では運動エネルギー K とポテンシャルエネルギー U の間に、$2K+U=0$ という関係が成り立つ。これにエネルギー保存 $K+U=E$ を組み合わせると、$E = U/2 = -GM/(2R_{\rm vir})$ が得られ、ビリアル平衡状態の半径は $R_{\rm vir} = -GM/(2|E|)$ と表せることがわかる。式 (4.2) を見返すと、ビリアル半径は $R_{\rm vir} = R_{\rm ta}/2$ と表される。これより、$\rho \propto R^{-3}$ であることを用いると、

$$\Delta_{\rm vir} \equiv \frac{\rho_{\rm vir}}{\rho_{\rm m}^{\rm EdS}(t_{\rm coll})} = \frac{8\rho(t_{\rm ta})}{\rho_{\rm m}^{\rm EdS}(t_{\rm ta})/4} = 18\pi^2 \simeq 177.6 \tag{4.6}$$

と求まる[1]。$\overline{\rho}_{\rm c}(t_{\rm coll})$ は時刻 $t_{\rm coll}$ での宇宙の臨界密度である。このビリアル密度 $\Delta_{\rm vir}$ は、暗黒物質ハローが持つ平均的な密度の典型的値であり、観測やシミュレーションからハローを同定する際の基準を与える。

臨界密度ゆらぎ

仮に、系が線形理論にもとづき進化していたとして、ビリアル平衡に達するまでに密度ゆらぎがどれだけ大きくなるか見積もってみよう。式 (4.2) および (4.4) をパラメーター θ についてテイラー展開すると、それぞれ $t \simeq \{GM/(2|E|)^3/2\}\theta^3/6 =$、$\delta \simeq (3/20)\theta^2$ を得る。これより、線形の密度ゆらぎは $\delta_{\rm lin} = (3|E|/10)\,\{6t/(GM)^{2/3}$ と表される。時刻 $t_{\rm coll}$ にビリアル平衡に達すると思うと、線形密度ゆらぎの振幅は、

$$\delta_{\rm crit} \equiv \delta_{\rm lin}(t_{\rm coll}) = \frac{3}{20}(12\pi)^{2/3} \simeq 1.68647. \tag{4.7}$$

[1] このビリアル密度比は、背景宇宙の質量エネルギー密度 $\rho_{\rm m}$ に対する密度比だが、臨界エネルギー密度 $\rho_{\rm c}$ に対してビリアル密度比を定義する文献もある。アインシュタイン-ド・ジッター宇宙では両者は等価だが、宇宙項があるような宇宙モデルだと異なる値になるため注意が必要である。

となる。 $\delta_{\rm crit}$ は、ダークマターハローが形成されるまでのタイムスケールを与え、線形密度ゆらぎからハローの個数密度を予言する質量関数理論において使われる。

ΛCDM モデルへの拡張 [44, 8, 42]

上記のビリアル密度、臨界密度ゆらぎはアインシュタイン-ド・ジッター宇宙におけるもので、宇宙項がある ΛCDM モデルのような宇宙モデルでは時間発展が異なるため、若干の修正を受ける。以下で与えられるフィッティング公式は解析的に表されており、様々な文献で用いられている：

$$\delta_{\rm crit} = 1.686\{\Omega_{\rm m}(t_{\rm coll})\}^{0.055} \tag{4.8}$$

$$\Delta_{\rm vir} = \frac{18\pi^2 + 82y - 39y^2}{\Omega_{\rm m}(t_{\rm coll})} \ ; \quad y \equiv \Omega_{\rm m}(t_{\rm coll}) - 1. \tag{4.9}$$

4.2 ゼルドビッチ近似

この節は文献 [38] にもとづいている。

ゼルドビッチ近似は、ラグランジュ摂動論の最低次に対するするもので、準線形段階の質量密度ゆらぎのふるまいを記述する方法としてゼルドビッチにより考え出された近似法である [58]。球対称モデルとは対照的に、ゼルドビッチ近似を使うと初期に与えた密度場の形状が重力進化によりどう発達していくか、定性的に理解することができる。定量的側面では、宇宙論的 N 体シミュレーションの初期条件を生成する標準的方法として長らく使われてきた。

前述の通り、ゼルドビッチ近似は質量素片の運動を記述するラグランジュ描像にもとづく近似である。質量素片の運動は以下のラグランジアンで与えられる：

$$L = \frac{1}{2}ma^2\dot{\boldsymbol{x}}^2 - m\Psi(\boldsymbol{x}), \tag{4.10}$$

これより運動方程式は、

$$\ddot{\boldsymbol{x}} + 2H\dot{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{a^2}\nabla_x\Psi(\boldsymbol{x}) = 0. \tag{4.11}$$

この運動を記述するため、初期の質量素片の位置座標 $\boldsymbol{q}$ （ラグランジュ座標）を出発点に、オイラー座標での位置 $\boldsymbol{x}$ への写像を表す変移場と呼ばれる量を導入する。変移場は $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{q})$ と表されるラグランジュ座標の関数である：

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}, t) = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{q}, t). \tag{4.12}$$

この $\boldsymbol{\psi}$ の運動を記述する方程式を導出するため、式 (4.11) の辺々に空間微分 ∇_x を作用する：

$$\nabla_x\Big(\ddot{\boldsymbol{\psi}} + 2H\dot{\boldsymbol{\psi}}\Big) = -4\pi\, G\rho_{\rm m}\, \delta_{\rm m}(\boldsymbol{x}) \tag{4.13}$$

上式で、微分作用素 ∇_x および 質量密度場 $\delta_{\rm m}$ はオイラー座標で表されているが、式 (4.12) にもとづくと、ラグランジュ座標とは以下のように関係している：

$$1+\delta_{\rm m}(\boldsymbol{x})=\left|\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\boldsymbol{q}}\right|^{-1}\equiv\frac{1}{J}, \tag{4.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}_i}=\left(\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\boldsymbol{q}}\right)^{-1}_{ij}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{q}_j}\equiv(J^{-1})_{ij}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{q}_j}. \tag{4.15}$$

一見しても変移場 $\boldsymbol{\psi}$ について非線形な関係になっていることがわかる。ゼルドビッチ近似では、この変移場 $\boldsymbol{\psi}$ を摂動量として扱い、最低次のオーダーで評価する。つまり、

$$J=\frac{1}{6}\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr}J_{ip}J_{jq}J_{kr}\simeq 1+\nabla_q\cdot\boldsymbol{\psi}, \tag{4.16}$$

$$(J^{-1})_{ij}=\frac{1}{2J}\epsilon_{jkp}\epsilon_{iqr}J_{kq}J_{pr}\simeq\delta_{ij}+\mathcal{O}(\boldsymbol{\psi}). \tag{4.17}$$

これをもとに、式 (4.13) を書き直すと最低次で、

$$\begin{aligned}(J^{-1})_{ij}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{q}_j}\Big(\ddot{\boldsymbol{\psi}}+2H\dot{\boldsymbol{\psi}}\Big)&=-4\pi\,G\rho_{\rm m}\Big(\frac{1}{J}-1\Big)\\ \Longrightarrow\quad(\nabla_q\cdot\boldsymbol{\psi})^{\cdot\cdot}+2H(\nabla_q\cdot\boldsymbol{\psi})^{\cdot}&-4\pi\,G\rho_{\rm m}(\nabla_q\cdot\boldsymbol{\psi})\simeq 0.\end{aligned} \tag{4.18}$$

となる。式 (4.18) は、線形密度ゆらぎの発展方程式と同じ形をしている。式 (4.16) より、十分初期には（$t\to 0$）$\delta_{\rm m}\simeq-\nabla_q\cdot\boldsymbol{\psi}$ という関係が得られることから、変移場は初期密度場 δ_0 を用いて、

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{q};a)=-\,D_1(a)\,\nabla_q\varphi(\boldsymbol{q}),\qquad\nabla_q^2\varphi(\boldsymbol{q})=\delta_0(\boldsymbol{q}). \tag{4.19}$$

と表せることがわかる。ここで D_1 は線形成長因子である。

ゼルドビッチ近似の特長とも言うべき点は、密度場を小さいとした近似ではないため、最低次の近似とはいえ線形理論の適用範囲を超えて密度ゆらぎの進化を記述できることにある。式 (4.19) を式 (4.16) に代入してみると、

$$1+\delta_{\rm m}(\boldsymbol{x})\simeq\frac{1}{(1-D_1\,\lambda_1)(1-D_1\,\lambda_2)(1-D_1\,\lambda_3)}. \tag{4.20}$$

ここで λ_i は行列 $\varphi_{,ij}$ の固有値を表す。この式は、初期に与えられた密度場の形状が時間が経つとどう変化するかを記述している。固有値 λ_i がみな等しい場合を除き、一般に非球対称な重力崩壊になり、$\lambda_1\gg\lambda_2,\,\lambda_3$ ならパンケーキ的な崩壊、$\lambda_1\sim\lambda_2>\lambda_3$ ならフィラメント的な崩壊が起こる。

ゼルドビッチ近似を超えた取り扱い

ゼルドビッチ近似はラグランジュ摂動論の最低次であり、ラグランジュ摂動論にもとづき変移場を系統的に摂動展開していくことで、高次の補正を取り入れた記述ができる (e.g., [9, 43, 10, 11, 24, 13])。以下では、その変移場 $\boldsymbol{\psi}$ を解くための基礎方程式を書き下

しておく。変移場はベクトルであり、自由度として縦（longitudinal）モードと呼ばれる成分と ($\psi_{k,k}$)、横（transverse）モードと呼ばれる成分がある ($\epsilon_{ijk}\psi_{j,k}$) 。ゼルドビッチ近似を求める際に用いた式 (4.13) からは、縦モードの発展方程式が得られるが、横モードの発展方程式は式 (4.11) に対してオイラー座標の回転を作用することで得られる。つまり、$\nabla\times(\ddot{\boldsymbol{x}}+2H\dot{\boldsymbol{x}})=0$ である。これらの方程式をラグランジュ座標だけで書き下すと最終的な基礎方程式が得られる [38]：

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2H\,\frac{\partial}{\partial t}-4\pi\,G\,\rho_{\rm m}\Big)\psi_{k,k}=&-\,\epsilon_{ijk}\epsilon_{ipq}\,\psi_{j,p}\,\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2H\,\frac{\partial}{\partial t}-2\pi\,G\,\rho_{\rm m}\Big)\psi_{k,q}\\&-\frac{1}{2}\,\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr}\psi_{i,p}\psi_{j,q}\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2H\,\frac{\partial}{\partial t}-\frac{4\pi}{3}\rho_{\rm m}\Big)\psi_{k,r},\end{aligned}\tag{4.21}$$

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2H\,\frac{\partial}{\partial t}\Big)\epsilon_{ijk}\,\psi_{j,k}=-\,\epsilon_{ijk}\,\psi_{p,j}\,\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2H\,\frac{\partial}{\partial t}\Big)\psi_{p,k},\tag{4.22}$$

ここで $\psi_{j,k}=\partial\psi_j/\partial q_k$。上式の右辺には、変移場の非線形項が含まれている。これを逐次評価することで系統的な摂動計算が可能になる。縦モードと横モードの解、$\psi_{k,k}$, $\epsilon_{ijk}\psi_{j,k}$) がそれぞれの方程式から得られたら、最後のステップで変移場 $\boldsymbol{\psi}$ を構築する。一見するとこのステップは自明ではないが、フーリエ空間では系統的な解の構築が可能である (e.g., [38])。また、特別な初期条件ではフーリエ変換をせずとも系統的に高次のオーダーまで解を構築できる (e.g., [49])。ただし、(4.21)(4.22) 式は、ラグランジュ座標 $\boldsymbol{q}$ とオイラー座標 $\boldsymbol{x}$ の間のマッピングが一意的である場合にのみ正しく、マッピングが多価になる場合は使えない。

4.3 (オイラー的) 摂動論

無衝突ボルツマン方程式 (ヴラソフ-ポアソン系)

出発点となる基礎方程式を書き下す：

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\boldsymbol{p}}{ma^2}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}-m\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{p}}\right]f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})=0,\tag{4.23}$$

supplemented with the Poisson equation:

$$\nabla^2\Psi(\boldsymbol{x})=4\pi\,G\,a^2\left[\frac{m}{a^3}\int d^3\boldsymbol{p}\,f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})-\rho_{\rm m}\right].\tag{4.24}$$

ここで、m は CDM (+バリオン) 粒子の質量を表す。

シングルストリーム近似

線形理論の基礎方程式を導いた時にも同様の仮定を行なったが、CDM (+バリオン) 粒子は、宇宙が晴れ上がる十分以前から、すでに「冷たかった」と考えられている。例えば、ニュートリノや光子の速度分布は、フェルミ-ディラック分布やプランク分布に従い、それらの分布の幅は温度で特徴づけられている。温度が高いと速度分布の幅が広く、低いと

と狭い。つまり、「冷たい」とは速度分布の幅が十分狭かったということを意味しており、初期条件として、以下のような分布関数の形を考えることに相当する：

$$\boxed{\text{Ansatz}}\quad f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = \overline{n}\,a^3\,\{1+\delta_{\rm m}(\boldsymbol{x})\}\,\delta_{\rm D}\big[\boldsymbol{p}-m\,a\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\big]. \tag{4.25}$$

以下では、重力進化の非線形段階でも成り立つと仮定し、密度場 $\delta_{\rm m}$ と速度場 $\boldsymbol{v}$ が従う方程式を導く（シングルストリーム近似）。上記の分布関数を式 (4.23) に代入し、0 次と 1 次のモーメントをとる。つまり、無衝突ボルツマン方程式の両辺それぞれを直接、あるいは運動量 $\boldsymbol{p}$ をかけた上で運動量空間で積分する。すると、それぞれから連続の式、圧力ゼロ流体に対するオイラー方程式が得られる：

$$\frac{\partial\delta_{\rm m}}{\partial t}+\frac{1}{a}\nabla\left[(1+\delta_{\rm m})\boldsymbol{v}\right]=0, \tag{4.26}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\frac{1}{a}(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v}=-\frac{1}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{x}}, \tag{4.27}$$

また、ポアソン方程式として

$$\frac{1}{a^2}\,\nabla^2\Psi=4\pi\,G\,\rho_{\rm m}\,\delta_{\rm m}. \tag{4.28}$$

を得る。

ところで、ラグランジュ時間微分 $\frac{d}{dt}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla$ を使うと 式 (4.26)-(4.28) から以下のような方程式が得られる：

$$\frac{d^2\delta_{\rm m}}{dt^2}+2H\frac{d\delta_{\rm m}}{dt}-\frac{4}{3(1+\delta_{\rm m})}\left(\frac{d\delta_{\rm m}}{dt}\right)^2=H^2(1+\delta)\Big(\frac{3}{2}\Omega_{\rm m}(a)\,\delta_{\rm m}+\sigma^{ij}\sigma_{ij}-\omega^{ij}\omega_{ij}\Big),$$

この発展方程式は球対称モデルで導いた式 (4.5) とよく似た形をしている。ただし、右辺には密度場だけで表せない速度場テンソル σ_{ij} および、ω_{ij} を含んでいる：

$$\sigma_{ij}=\frac{1}{2\,a\,H}\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\,(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\,\delta_{ij}\Big),$$
$$\omega_{ij}=\frac{1}{2\,a\,H}\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big).$$

σ_{ij} はシアーを表す量であり、また ω_{ij} は速度ベクトルの回転成分（あるいは渦度）に由来する量である。ただし、初期条件としてスカラー計量にもとづく線形ゆらぎだけが与えられた場合は渦度はゼロで、非線形な方程式 (4.26)-(4.28) を考えてもゼロから渦度は生成されない。従って、渦度を無視したポテンシャル流として速度場を記述すればよいことになる[2]。つまり、密度場と速度ポテンシャルの 2 つのスカラー関数を力学自由度として圧力ゼロ流体の方程式を解いていけばよいことになる。

以下では、質量密度場 $\delta_{\rm m}$ の添え字を無視して δ と表すことにし、流体方程式を逐次摂動的に解いていくことにする。

フーリエ空間における発展方程式

[2]ただし、式 (4.26)-(4.28) はあくまでシングルストリーム近似にもとづく方程式なので、いずれ近似が破れる点に注意。つまり、たとえ渦度が初期にゼロでも、シングルストリーム近似が破れる非線形領域では渦度が生成されうる。

ポテンシャル流を表す速度場を記述する量として、$\theta \equiv \nabla\cdot\boldsymbol{v}/(aH)$ で与えられる速度発散場を導入する。摂動計算はフーリエ空間で行うのが便利で見通しがよい。渦度を無視し、式 (4.26)-(4.28) をフーリエ空間の量で書き直すと:

$$a\frac{d\delta(\boldsymbol{k})}{da}+\theta(\boldsymbol{k})=-\int\frac{d^3\boldsymbol{k}_1d^3\boldsymbol{k}_2}{(2\pi)^3}\delta_{\rm D}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_{12})\,\alpha(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)\,\theta(\boldsymbol{k}_1)\delta(\boldsymbol{k}_2), \tag{4.29}$$

$$a\frac{d\theta(\boldsymbol{k})}{da}+\left(2+\frac{\dot{H}}{H^2}\right)\theta(\boldsymbol{k})+\frac{3}{2}\Omega_{\rm m}(a)\,\delta(\boldsymbol{k})=-\int\frac{d^3\boldsymbol{k}_1d^3\boldsymbol{k}_2}{(2\pi)^3}\delta_{\rm D}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_{12})\,\beta(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)\,\theta(\boldsymbol{k}_1)\theta(\boldsymbol{k}_2) \tag{4.30}$$

が得られる。ここで関数 α、β は移流項などから来る非線形モードカップリングを表す量で、以下で与えられる：

$$\alpha(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)=1+\frac{\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2}{|\boldsymbol{k}_1|^2},\qquad\beta(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)=\frac{(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2)|\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2|^2}{2\,|\boldsymbol{k}_1|^2|\boldsymbol{k}_2|^2}. \tag{4.31}$$

標準摂動論における摂動展開

標準摂動論と呼ばれる展開では、密度場や速度場の振幅が小さいとして以下のような展開を行う[3]：

$$\delta(\boldsymbol{k})=\sum_n D_1^n\,\delta_n(\boldsymbol{k}),\qquad\theta(\boldsymbol{k})=-f\sum_n D_1^n\,\theta_n(\boldsymbol{k}). \tag{4.32}$$

この展開を、式 (4.29) (4.30) に代入して各次数毎に満たすべき解を逐次求めていくのだが、十分時間が経ち成長モードが支配的な場合、n 次の解 δ_n と θ_n は、次のように表せる：

$$\delta_n(\boldsymbol{k})=\int\frac{d^3\boldsymbol{k}_1\cdots d^3\boldsymbol{k}_n}{(2\pi)^{3(n-1)}}\,\delta_D(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_{12\cdots n})\,F_n(\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n)\,\delta_0(\boldsymbol{k}_1)\cdots\delta_0(\boldsymbol{k}_n), \tag{4.33}$$

$$\theta_n(\boldsymbol{k})=\int\frac{d^3\boldsymbol{k}_1\cdots d^3\boldsymbol{k}_n}{(2\pi)^{3(n-1)}}\,\delta_D(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_{12\cdots n})\,G_n(\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n)\,\delta_0(\boldsymbol{k}_1)\cdots\delta_0(\boldsymbol{k}_n) \tag{4.34}$$

ここで、$\boldsymbol{k}_{12\cdots n}=\boldsymbol{k}_1+\cdots+\boldsymbol{k}_n$。 関数 δ_0 は原始曲率ゆらぎ $\Phi_{\rm p}$ に由来する初期密度場である [式 (2.50) を参照]. 関数 F_n と G_n は摂動論カーネルと呼ばれ、これらの関数形は漸化式を用いて系統的に構成できる。

摂動論カーネルの構成方法

次のカーネルを定義する：

$$\mathcal{F}_a^{(n)}(\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n)=\begin{pmatrix}F_n(\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n)\\G_n(\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n)\end{pmatrix}, \tag{4.35}$$

[3] 実際のところ, 式 (4.32) で与えられる展開は、$D_1=a$ を満たすアインシュタイン-ド・ジッター宇宙でのみ正しい。ΛCDM モデルのような $D_1\neq a$ となる宇宙モデルではあくまで近似に過ぎないが、摂動論の適用範囲内で近似の精度はかなりいいことが知られている。

すると、式 (4.29)(4.30) から以下のような漸化式が得られる[4]:

$$\mathcal{F}_a^{(n)}(\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n)=\sum_{m=1}^{n-1}\sigma_{ab}^{(n)}\,\gamma_{bcd}(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2)\,\mathcal{F}_c^{(m)}(\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_m)\mathcal{F}_d^{(n-m)}(\boldsymbol{k}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{k}_n),\quad (4.36)$$

ただし、$\mathcal{F}^{(1)}=(1,1)$。ここで、$\boldsymbol{q}_1=\boldsymbol{k}_1+\cdots+\boldsymbol{k}_m$、$\boldsymbol{q}_2=\boldsymbol{k}_{m+1}+\cdots+\boldsymbol{k}_n$ と記した。行列 $\sigma_{ab}^{(n)}$ とテンソル γ_{abc} はそれぞれ以下で与えられる (例えば、文献 [3, 16, 45] を参照)：

$$\sigma_{ab}^{(n)}=\frac{1}{(2n+3)(n-1)}\begin{pmatrix}2n+1 & 2\\ 3 & 2n\end{pmatrix},\quad (4.37)$$

$$\gamma_{abc}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)=\begin{cases}\alpha(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_1)/2 & (a,b,c)=(1,1,2)\\ \alpha(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)/2 & (a,b,c)=(1,2,1)\\ \beta(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) & (a,b,c)=(2,2,2)\\ 0 & \text{それ以外}\end{cases}\quad (4.38)$$

以上の漸化式から得られる摂動論カーネルは、引数 $\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n$ の入れ替えに対して対称になっていないので ($\boldsymbol{k}_1\leftrightarrow\boldsymbol{k}_2$)、これを用いて統計量を計算する際には対称化しておく：

$${}^s\mathcal{F}_a^{(3)}(\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n)\equiv\frac{1}{n!}\sum_{\text{permutations}}\mathcal{F}_a^{(n)}(\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n).\quad (4.39)$$

摂動論カーネルの具体的表式

以下、漸化式にもとづいて構成された摂動論カーネルの表式を 3 次まで具体的に書き下しておく:

$${}^sF_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)=\frac{5}{7}+\frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2}{k_1k_2}\left(\frac{k_1}{k_2}+\frac{k_2}{k_1}\right)+\frac{2}{7}\frac{(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2)^2}{\boldsymbol{k}_1^2\boldsymbol{k}_2^2},\quad (4.40)$$

$${}^sG_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)=\frac{3}{7}+\frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2}{k_1k_2}\left(\frac{k_1}{k_2}+\frac{k_2}{k_1}\right)+\frac{4}{7}\frac{(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2)^2}{\boldsymbol{k}_1^2\boldsymbol{k}_2^2}.\quad (4.41)$$

$$\begin{aligned}{}^sF_3(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)=\frac{1}{6}\Bigg[&\frac{7}{9}\frac{(\boldsymbol{k}_{123}\cdot\boldsymbol{k}_3)}{k_3^2}\,{}^sF_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)+\left\{\frac{7}{9}\frac{(\boldsymbol{k}_{123}\cdot\boldsymbol{k}_{12})}{k_{12}^2}+\frac{2}{9}\frac{k_{123}^2(\boldsymbol{k}_3\cdot\boldsymbol{k}_{12})}{k_3^2k_{12}^2}\right\}{}^sG_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)\Bigg]\\&+(\text{cyclic perm.})\ ,\end{aligned}\quad (4.42)$$

$$\begin{aligned}{}^sG_3(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)=\frac{1}{6}\Bigg[&\frac{1}{3}\frac{(\boldsymbol{k}_{123}\cdot\boldsymbol{k}_3)}{k_3^2}\,{}^sF_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)+\left\{\frac{1}{3}\frac{(\boldsymbol{k}_{123}\cdot\boldsymbol{k}_{12})}{k_{12}^2}+\frac{2}{3}\frac{k_{123}^2(\boldsymbol{k}_3\cdot\boldsymbol{k}_{12})}{k_3^2k_{12}^2}\right\}{}^sG_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)\Bigg]\\&+(\text{cyclic perm.})\ .\end{aligned}\quad (4.43)$$

[4] この漸化式はアインシュタイン-ド・ジッター宇宙の場合にのみ厳密で、それ以外の宇宙モデルに適用する場合は近似である。

引数の数が増えることもあり、高次になるほど表式は複雑になっていく。

ここで、摂動論カーネルが満たすいくつかの重要な性質についてまとめておく [3]:

- $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 + \cdots$ がゼロに近づく一方、各モード $\boldsymbol{k}_i$ が有限でゼロでない場合、

$$ {}^{s}F_n(\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_n) \propto k^2. \tag{4.44}$$

- カーネル ${}^{s}F_n$ の引数のいくつかが大きいが、和 $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{q}_1 + \cdots + \boldsymbol{q}_{n-2}$ が有限で固定値を持つ場合、カーネルは逆 2 乗則に従ってゼロに近く。つまり、$p \gg q_i$ となるモードに対して、

$$ {}^{s}F_n(\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_{n-2}, \boldsymbol{p}, -\boldsymbol{p}) \propto \frac{k^2}{p^2}. \tag{4.45}$$

 と振る舞う。

上記の性質はカーネル ${}^{s}G_n$ に対しても同様に成り立つ。

以下では、漸化式に従って構成した摂動論カーネルは適切に対称化されたものとみなし、${}^{s}F_n$ や ${}^{s}G_n$ を F_n、G_n と記すことにする。

ラグランジュ摂動論との対応

ここで、標準摂動展開とラグランジュ摂動論の関係について少し触れておく。ラグランジュ摂動論では、密度場 δ や速度発散場 θ を展開するのではなく [式 (4.32)]、質量分布が一様に見えるラグランジュ座標を導入し ($\boldsymbol{q}$, 質量要素の静止系)、各質量要素の運動を変移場 (ベクトル) $\boldsymbol{\psi}$ によって記述する [式 (4.12)]:

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}, t) = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{q}, t).$$

ここで、極限 $t \to 0$ で $\boldsymbol{\psi} \to 0$ を満たすとする。フーリエ空間に移ってこの変移場を書き表すと

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{k}; a) &\equiv \int d^3\boldsymbol{q}\, \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{q})\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{q}} = \sum_n D_1^n(a)\, \boldsymbol{\psi}_n(\boldsymbol{k})\ ; \\ \boldsymbol{\psi}_n(\boldsymbol{k}) &= i \int \frac{d^3\boldsymbol{p}_1 \cdots d^3\boldsymbol{p}_n}{(2\pi)^{3(n-1)}}\, \delta_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{p}_{12\cdots n})\, \boldsymbol{L}_n(\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n)\, \delta_0(\boldsymbol{p}_1) \cdots \delta_0(\boldsymbol{p}_n).\end{aligned} \tag{4.46}$$

上式に現れる関数 $\boldsymbol{L}_n$ がラグランジュ摂動論における摂動論カーネルである。なお、ラグランジュ摂動論の 1 次はゼルドビッチ近似であり、$\boldsymbol{L}_1$ はゼルドビッチ近似のカーネルに対応する。

このカーネル $\boldsymbol{L}_n$ と標準摂動論におけるカーネル F_n との関係は次のように求まる。まず、フーリエ変換した密度場を、変移場を使って書き表してみる。関係 $d^3\boldsymbol{q} = \{1+\delta(\boldsymbol{x})\}d^3\boldsymbol{x}$

を使うと、

$$\begin{aligned}
\delta(\boldsymbol{k}) &= \int d^3\boldsymbol{x}\,\delta(\boldsymbol{x})\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \\
&= \int d^3\boldsymbol{q}\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{q})\}} - (2\pi)^3\,\delta_{\rm D}(\boldsymbol{k}), \quad \left(\because\ \ \delta(\boldsymbol{x}) = \left|\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\boldsymbol{q}}\right| - 1\right) \\
&= \sum_n \left(\int \frac{d^3\boldsymbol{k}_1\cdots d^3\boldsymbol{k}_n}{(2\pi)^{3(n-1)}}\delta_{\rm D}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}_{12\cdots n})\,\frac{(-i)^n}{n!}\,\{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{k}_1)\}\cdots\{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{k}_n)\}\right) - (2\pi)^3\delta_{\rm D}(\boldsymbol{k})
\end{aligned} \tag{4.47}$$

を得る。展開された上式に式 (4.46) を代入し、各オーダーごとにラグランジュ摂動論のカーネルを式 (4.33) で与えられる標準摂動論のカーネルと比較すると、

$$\begin{aligned}
F_1(\boldsymbol{k}) &= 1 = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{L}_1(\boldsymbol{k}), \\
F_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) &= \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) + \frac{1}{2}\{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{L}_1(\boldsymbol{k}_1)\}\{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{L}_1(\boldsymbol{k}_2)\}, \\
F_3(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3) &= \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{L}_3(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3) + \frac{1}{3}\big[\{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{L}_1(\boldsymbol{k}_1)\}\{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)\} + (\text{cyclic perm.})\big] \\
&\qquad + \frac{1}{6}\{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{L}_1(\boldsymbol{k}_1)\}\{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{L}_1(\boldsymbol{k}_2)\}\{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{L}_1(\boldsymbol{k}_3)\}.
\end{aligned}$$

$\cdots$

が逐次得られる。これらの関係を使うと、変移場 $\boldsymbol{\psi}$ の運動を解かずともラグランジュ摂動論のカーネル $\boldsymbol{L}_n$ の縦モード (*longitudinal* mode) を求めることができる。ただし、こうして構成されたカーネルは横モード (*transverse* mode) を取り入れることができない。横成分は３次以上から現れることが知られており、縦・横モード両方の自由度を適切と取り扱うには、変移場の運動を解く必要がある [式 (4.21) (4.21) を参照。定式化については文献 [38] を参照]。

ガウス的初期条件

これまで見たように、摂動論で計算される高次解は初期密度場 δ_0 の展開として表されている [式 (4.33) (4.34)、それに (4.46)]。この密度場は原始密度ゆらぎの性質を担う確率場であり、その性質が決まれば、摂動論の結果をもとに様々な統計量を定量評価することができる。初期密度場 δ_0 の性質は今後も十分な検証が必要だが、今のところ、ガウス統計で記述されるとする仮定は観測的にも十分妥当と思われている。この場合、初期密度場の統計的性質は、パワースペクトル $P_0(k)$ のみで特徴づけられることになり、摂動論を用いて弱非線形領域で計算できる全ての統計量はこの初期パワースペクトル P_0 を用いて書き表すことができる。ガウス統計に従う δ_0 は以下のような関係を満たす：

$$\langle\delta_0(\boldsymbol{k})\rangle = 0, \tag{4.48}$$

$$\langle\delta_0(\boldsymbol{k}_1)\delta_0(\boldsymbol{k}_2)\rangle = (2\pi)^3\,\delta_{\rm D}(\boldsymbol{k}_{12})P_0(k) \tag{4.49}$$

$$\langle\delta_0(\boldsymbol{k}_1)\delta_0(\boldsymbol{k}_2)\delta_0(\boldsymbol{k}_3)\rangle = 0, \tag{4.50}$$

$$\langle\delta_0(\boldsymbol{k}_1)\delta_0(\boldsymbol{k}_2)\delta_0(\boldsymbol{k}_3)\delta_0(\boldsymbol{k}_4)\rangle = (2\pi)^6\left[\delta_{\rm D}(\boldsymbol{k}_{12})\delta_{\rm D}(\boldsymbol{k}_{34})P_0(k_1)P_0(k_2) + (\text{cyclic perm.})\right], \tag{4.51}$$

$\vdots$

つまり、一般に、正の整数 n に対して、

$$\langle\delta_0(\boldsymbol{k}_1)\cdots\delta_0(\boldsymbol{k}_{2n+1})\rangle = 0, \tag{4.52}$$

$$\langle\delta_0(\boldsymbol{k}_1)\cdots\delta_0(\boldsymbol{k}_{2n})\rangle = \sum_{\text{all pair associations } p}\ \prod_{\text{pairs } (i,j)} \langle\delta_0(\boldsymbol{k}_i)\delta_0(\boldsymbol{k}_j)\rangle. \tag{4.53}$$

これらの性質はウィックの定理 (Wick's theorem) もしくは、イセルリスの定理 (Isserlis' theorem) と呼ばれる。

摂動論による統計計算

具体的な道具が出揃ったので、摂動論にもとづき、いくつか統計量を計算してみよう。

- **パワースペクトル**：$\langle\delta(\boldsymbol{k}_1)\delta(\boldsymbol{k}_2)\rangle = (2\pi)^3\delta_{\rm D}(\boldsymbol{k}_{12})\,P(k_1)$

  最低次である線形理論の次のオーダー (1 ループと呼ぶ) まで具体的に書き下すと、

$$\langle\delta(\boldsymbol{k}_1)\delta(\boldsymbol{k}_2)\rangle \simeq \langle\delta_1(\boldsymbol{k}_1)\delta_1(\boldsymbol{k}_2)\rangle + \langle\delta_2(\boldsymbol{k}_1)\delta_2(\boldsymbol{k}_2)\rangle + \langle\delta_1(\boldsymbol{k}_1)\delta_3(\boldsymbol{k}_2)\rangle + \langle\delta_3(\boldsymbol{k}_1)\delta_1(\boldsymbol{k}_2)\rangle + \cdots . \tag{4.54}$$

  これより、パワースペクトルの表式として

$$P(k,a) \simeq \{D_1(a)\}^2\,P_0(k) + \{D_1(a)\}^4\left\{P_{22}(k) + P_{13}(k)\right\}. \tag{4.55}$$

  を得る。右辺第 1 項は線形のパワースペクトルで、鉤括弧内の項が高次摂動から来る補正項である。具体的に書き下すと

$$P_{22}(k) = 2\int\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\{F_2(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p},\boldsymbol{p})\}^2\,P_0(|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}|)P_0(p), \tag{4.56}$$

$$P_{13}(k) = 6\,P_0(k)\int\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\{F_3(\boldsymbol{k},\boldsymbol{p},-\boldsymbol{p})\}^2\,P_0(p). \tag{4.57}$$

  となる。摂動の各次数で時間依存性が異なるため、これら高次補正が線形パワースペクトルに足されることで、パワースペクトルの成長はスケールに依存するようになる。

- **バイスペクトル**：$\langle\delta(\boldsymbol{k}_1)\delta(\boldsymbol{k}_2)\delta(\boldsymbol{k}_3)\rangle = (2\pi)^3\,\delta_{\rm D}(\boldsymbol{k}_{123})\,B(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)$

  バイスペクトルは 3 点統計量であり、線形オーダーのバイスペクトルは初期密度場がガウス統計に従うためゼロになる。ただ、高次の摂動を考えることでゼロでない有限のバイスペクトルが現れる。最低次のオーダーの評価で、

$$\begin{aligned}\langle\delta(\boldsymbol{k}_1)\delta(\boldsymbol{k}_2)\delta(\boldsymbol{k}_3)\rangle &\simeq \langle\delta_1(\boldsymbol{k}_1)\delta_1(\boldsymbol{k}_2)\delta_2(\boldsymbol{k}_3)\rangle + \langle\delta_2(\boldsymbol{k}_1)\delta_1(\boldsymbol{k}_2)\delta_1(\boldsymbol{k}_3)\rangle \\ &\quad + \langle\delta_1(\boldsymbol{k}_1)\delta_2(\boldsymbol{k}_2)\delta_1(\boldsymbol{k}_3)\rangle + \cdots .\end{aligned} \tag{4.58}$$

  これよりバイスペクトルの表式は、

$$B(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3) \simeq \{D_1(a)\}^4\left\{2F_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)P_0(k_1)P_0(k_2) + (\text{cyclic perm.})\right\}. \tag{4.59}$$

  となる。この結果からもわかるように、重力の非線形進化は一般に非ガウス性を生み出すため、3 点統計以外の高次の統計量（4 点、5 点統計など）も非線形性が顕著になるにつれ、無視できなくなる。言い方を変えると、もともとパワースペクトルに含まれていた初期条件の情報は、重力非線形によって、高次統計量にも流れていく。

くりこみ摂動論

摂動計算はその宿命として、高次の補正項を逐次取り込むことで、計算精度を向上させ、適用範囲が広げて行く必要がある。ただ、どの程度精度が上がるか、どこまで計算が適用できるかは摂動計算のスキームに依るところが大きい。オイラー描像にもとづく標準摂動論は、密度場・速度場を微小量として展開するため、変移場ベクトルを微小量とするラグランジェ摂動論と比べて展開の収束性は悪いことが知られている。実際、パワースペクトルを２ループ（１ループよりさらに高次のオーダーの補正項）まで計算してみるとある波数スケールでは負の寄与となり、正の寄与を与える１ループと打ち消し合いが起こる。低赤方偏移では非線形性が徐々に強くなるため、この打ち消し合いはさらに強くなり、計算の適用範囲が広がるばかりか、むしろ悪化する。

オイラー描像にもとづく摂動計算の収束性をあげるための１つの手法として、近年、展開のくりこみ、あるいは再和法と呼ばれるテクニックが発展してきた。これまで様々な手法が提案されてきたが (例えば、[56, 47, 36, 16, 53])、ここでは、文献 [4] にもとづく、多点プロパゲーター展開（あるいは Γ-展開）と呼ばれる再和法について解説する（[37] も参照)[5]。

ある時刻の密度場 $\delta(\boldsymbol{k},a)$ に対し, 初期の密度場 δ_0 で p 回汎関数微分したのち、統計平均を取った次のような量を考える：

$$\frac{1}{p!}\Big\langle\frac{\delta^p\delta(\boldsymbol{k},a)}{\delta\delta_0(\boldsymbol{k}_1)\cdots\delta\delta_0(\boldsymbol{k}_p)}\Big\rangle\equiv\delta_{\rm D}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_{12\cdots p})\frac{1}{(2\pi)^{3(p-1)}}\,\Gamma^{(p)}(\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_p) \tag{4.60}$$

右辺に現れる関数 $\Gamma^{(p)}$ を $(p+1)$ 点プロパゲーターと呼ぶ。このプロパゲーターは、p 個の初期密度場 $\delta_0(\boldsymbol{k}_i)$ $(i=1,\cdots,p)$ が非線形モードカップリングを通じて波数ベクトル $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}_1+\cdots+\boldsymbol{k}_p$ を持つ時間発展後の密度場に与える影響を特徴づけている。左辺の分子に現れる $\delta(\boldsymbol{k},a)$ は非線形な密度場であり、プロパゲーターは非摂動的性質を持った統計量となっている。標準摂動論を用いてこの $(p+1)$ 点プロパゲーターを表すと、以下のような無限次の展開として表される：

$$\Gamma^{(p)}(\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_p;\,a)=\{D_1(a)\}^p\,F_p(\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_p)+\sum_{n=1}\{D_1(a)\}^{p+2n}\,\Gamma^{(p)}_{n\text{-loop}}(\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_p) \tag{4.61}$$

ここで、$\Gamma^{(p)}_{n\text{-loop}}$ は高次の補正項で、摂動論カーネルを用いて

$$\begin{aligned}\Gamma^{(p)}_{n\text{-loop}}&(\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_p)\\&=c_n^{(p)}\int\frac{d^3\boldsymbol{q}_1\cdots d^3\boldsymbol{q}_n}{(2\pi)^{3n}}F_{2n+p}(\boldsymbol{q}_1,-\boldsymbol{q}_1,\cdots,\boldsymbol{q}_n,-\boldsymbol{q}_n,\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_p)\,P_0(q_1)\cdots P_0(q_n).\end{aligned} \tag{4.62}$$

と表される。ただし、$c_n^{(p)}=(2-1)!!\,{}_{2n+p}C_p$。摂動展開の表式をもとに、式 (4.55) に与えられた標準摂動論にもとづくパワースペクトルの展開表式を多点プロパゲーターを使っ

[5]この再和法は文献 [53] によるウィーナー-エルミート展開と呼ばれる方法と基本的に等価である。

て書き直すと、系統的に以下のように表せることが示せる：

$$P(k,a) = \{\Gamma^{(1)}(k;a)\}^2 P_0(k) + \sum_{n=2} n! \int \frac{d^3\boldsymbol{q}_1\cdots d^3\boldsymbol{q}_n}{(2\pi)^{3(n-1)}}\delta_{\rm D}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}_{12\cdots n})\left\{\Gamma^{(n)}(\boldsymbol{q}_1,\cdots,\boldsymbol{q}_n;\,a)\right\}^2 P_0(q_1)\cdots P_0(q_n). \tag{4.63}$$

同様に、バイスペクトルやトライスペクトルなどの多点統計量も、標準摂動論にもとづく摂動展開を多点プロパゲータを使って系統的に再構成できる [4, 5, 57]。微小量を用いて展開していないという点において、上式は標準摂動論の展開と決定的に異なる。つまり、多点プロパゲーターそのものが標準摂動論の無限次の展開で表される非摂動な量であり、たとえ、式 (4.63) を有限次数で打ち切っても、部分的に無限次の展開を取り込んだ効果が期待できる。多点プロパゲーター展開が再和法、もしくはくりこみ法と呼ばれる所以がここにある。

ただし、多点プロパゲーター展開が真の威力を発揮するのは、式 (4.62) を非摂動的性を考慮して適切に評価できたときのみである。厳密な評価は一般には困難であるが、摂動計算を駆使することで、大域的な波数依存性をある程度正確に記述する”近似解”は構築できる。その際、多点プロパゲーターの重要な性質がある：

- 小スケールのふるまい：極限 $k\to\infty$ のもとでは、式 (4.61) で与えられた摂動展開の無限和をとることができ、以下のようなガウス型減衰関数が得られる [4, 6]

$$\Gamma^{(p)}(\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_p;\,a) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \{D_1(a)\}^p F_p(\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_p)\, e^{-k^2\sigma_d^2/2} \tag{4.64}$$

  ただし、$k=|\boldsymbol{k}_1+\cdots+\boldsymbol{k}_p|$。ここで、$\sigma_d^2$ はラグランジュ摂動論における変移場ベクトルの分散を表し、最低次（線形）では

$$\sigma_d^2 = \{D_1(a)\}^2 \int \frac{dq}{6\pi^2}P_0(q). \tag{4.65}$$

  と表せる。

- 大スケールのふるまい：波数 k が十分小さい極限では、ゆらぎは線形に近くなるので式 (4.62) にある標準摂動論による展開をもとに、プロパゲーターをある程度精度よく記述できる。この取り扱いは波数が大きい領域では破綻するものの、高次の各補正項は、次のような漸近的ふるまいを持つ：

$$\Gamma^{(p)}_{n\text{-loop}}(\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_p;\,a) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{n!}\left(-\frac{k^2\sigma_d^2}{2}\right)^n \{D_1(a)\}^p F_p(\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_p) \tag{4.66}$$

上記の 2 つの性質にもとづけば、大スケールと小スケールのふるまいを滑らかにつなぐ”正則化された”多点プロパゲーターの近似解が構築できる。その 1 つの例は、以下で与えられる [5]：

$$\Gamma^{(p)}_{\rm reg}(\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_p;\,a) = \{D_1(a)\}^p \times\left[F_p(\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_p)\left\{1+\frac{k^2\sigma_d^2}{2}\right\} + \{D_1(a)\}^2\,\Gamma^{(p)}_{\text{1-loop}}(\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_p)\right]\exp\left\{-\frac{k^2\sigma_d^2}{2}\right\}, \tag{4.67}$$

この近似解は、大スケールにて ($k \ll 1$)、標準摂動論の展開式 (4.62) を 1 ループオーダーまで正しく再現する。一方、小スケールでは ($k \gg 1$)、式 (4.66) にある性質を使うと、式 (4.64) に示されたふるまいに漸近的に一致する。さらに、標準摂動論の展開次数を上げれば、大スケールのふるまいが改善され、精度のよい正則プロパゲーターの構成も可能である。こうして構成された多点プロパゲーターを式 (4.63) に代入すれば、標準摂動論よりも広い適用範囲でパワースペクトルの理論予言ができる。

この手法にもとづきパワースペクトルの摂動計算を行う、`RegPT` と呼ばれるパブリックコードが公開されており [55][6]、高速計算手法も実装されて観測データとの比較などに使われている。

4.4 ハローモデル

これまで、摂動計算をもとに重力進化の弱非線形領域で密度場のふるまいを記述するいくつかの手法を紹介してきた。こうした手法は、大スケールでの振る舞いに対しては、比較的簡単な計算から精度のよい理論予言を提供するが、非線形性が強い小スケール領域への適用は難しい。基礎方程式に基づく実直な解析計算では、一般に煩雑な上に得るものが少なく（適用範囲が少ししか広がらない）、精度の高い計算を行うという観点では、コストはかかるがシミュレーションをやった方がより確実かもしれない。

ただ、精度を多少犠牲にするなら、現象論的アプローチにもとづき、非線形領域のふるまいを記述する解析的計算手法が知られている。その 1 つが「ハローモデル」である。ハローモデルにもとづけば、質量密度場のみならず、ハロー・銀河のクラスタリングの定量化にも応用できる。このアプローチの根底にある仮定は、以下の 2 点に集約される：

仮定 1 宇宙はダークマターハローと呼ばれる自己重力束縛天体で埋め尽くされており、すべての CDM 粒子（およびバリオン）はこれらハローの構成要素となっている。

仮定 2 ダークマターハローの密度構造（密度プロファイル）はあまねく普遍的な構造をもち、ハローの（ビリアル）質量 M に応じてその関数形 $\rho_{\rm halo}(r;M)$ が決まる。また、ハローの個数は 宇宙モデル（と時刻）が決まると、質量 M のみで特徴づけられ、個数密度は $n_{\rm halo}(M)$ と表せる（質量関数と呼ぶ）。

例として、パワースペクトルから逆フーリエ変換して求まる 2 点相関関数 $\xi(r)$ について考えてみよう。2 点相関関数は、$\xi(r) = \langle \delta(\boldsymbol{x})\delta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})\rangle$ と表される。つまり、距離 r だけ離れた天体ペア（あるいは CDM 粒子のペア）を見つける頻度を表す統計量であり、ポアソン分布に比べて過剰にペアを見つける確率を定量的に表す。粒子ペアの数をカウントする際、上記の仮定 1 にもとづくと、ペアが同一ハローに含まれる場合と（1 ハロー成分）、それぞれ異なるハローに含まれる場合（2 ハロー成分）の 2 通りに分類できることになる。また、ペアを見つける頻度は、CDM 粒子の場合、ハローの密度プロファイルに依存し、仮定 2 にもとづくと、ハローの質量に応じてどの場所にいるかに依っている。様々なペアに対して統計平均を取って 2 点相関関数を評価することは、様々な質量をもつハローに対して平均することに対応する。この操作を 1 ハロー成分、2 ハロー成分に分けてカウントすれば最終的に求めたい質量密度ゆらぎの 2 点相関関数が得られる。結果は以

[6] http://ascl.net/1404.012

下のような表式にまとめられる：

$$\xi(\boldsymbol{r}) = \xi_{1\text{-halo}}(r) + \xi_{2\text{-halo}}(r)\,; \tag{4.68}$$

$$\xi_{1\text{-halo}}(r) = \int dM\, n_{\rm halo}(M) \int d^3\boldsymbol{x} \frac{\rho_{\rm halo}(\boldsymbol{x};\, M)}{\rho_{\rm m}}\, \frac{\rho_{\rm halo}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r};\, M)}{\rho_{\rm m}}, \tag{4.69}$$

$$\begin{aligned}\xi_{2\text{-halo}}(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|) &= \int dM_1\, n_{\rm halo}(M_1) \int dM_2\, n_{\rm halo}(M_2) \\ &\times \int d^3\boldsymbol{x}_1 \frac{\rho_{\rm halo}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1;\, M_1)}{\rho_{\rm m}} \int d^3\boldsymbol{x}_1\, \frac{\rho_{\rm halo}(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}_2;\, M_2)}{\rho_{\rm m}}\, \xi_{\rm hh}(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2;\, M_1, M_2).\end{aligned} \tag{4.70}$$

ここで、式 (4.70) に現れる関数 $\xi_{\rm hh}$ は質量 M_1、M_2 のハローペアに対する 2 点相関関数を表す。対応する質量パワースペクトルは、

$$P(k) = P_{1\text{-halo}}(k) + P_{2\text{-halo}}(k)\,; \tag{4.71}$$

$$P_{1\text{-halo}}(k) = \int dM\, n_{\rm halo}(M) \left| \frac{\tilde{\rho}_{\rm halo}(k;\, M)}{\rho_{\rm m}} \right|^2, \tag{4.72}$$

$$P_{2\text{-halo}}(k) = \int dM_1\, n_{\rm halo}(M_1) \int dM_2\, n_{\rm halo}(M_2)\, \frac{\tilde{\rho}_{\rm halo}(k;\, M_1)}{\rho_{\rm m}} \frac{\tilde{\rho}_{\rm halo}(k;\, M_2)}{\rho_{\rm m}}\, P_{\rm hh}(k;\, M_1, M_2). \tag{4.73}$$

となる。ここで、$\tilde{\rho}_{\rm halo}$ は密度プロファイル $\rho_{\rm halo}$ をフーリエ変換したもので、 $P_{\rm hh}$ はハローの 2 点相関関数をフーリエ変換して求まるパワースペクトルである。$P_{\rm hh}$ は、線形パワースペクトル $P_{\rm lin}(k) = \{D_1(a)\}^2\, P_0(k)$ を用いて

$$P_{\rm hh}(k;\, M_1, M_2) = b(M_1)\, b(M_2)\, P_{\rm lin}(k) \tag{4.74}$$

と表すことができる。ここで、$b(M)$ は次節でも述べるが、バイアスパラメーターと呼ばれる量で、上記の仮定 2 にもとづくと、ハローの質量の関数として表せ、質量関数 $n_{\rm halo}(M)$ を通じて求まる（詳細はここでは述べない)。$\xi_{\rm hh}$ については上式をフーリエ変換すればよい。

ハローモデルは、ハローの質量関数 $n_{\rm halo}$、密度プロファイル $\rho_{\rm halo}$ にもとづき、質量密度ゆらぎの非線形クラスタリングを'ある程度'定量的に記述する。特に、こうした記述が有効なのは、非線形性が強い小スケールの統計量の理論予言である。ハローモデルの様々な応用、特に銀河分布の統計量への拡張については、文献 [15] に詳しく述べられている。最近は、赤方偏移空間ゆがみの非線形モデル、非ガウス性によるエラー共分散行列の評価などへの応用も広がっている [23, 54, 29]。

4.5 銀河・ハローバイアス

これまで本章では、比較的大スケールにおけるダークマターの重力的なクラスタリングに対する解析的取り扱いについて述べてきた。しかしながら、銀河サーベイから得られる基本的な観測量は銀河分布であり、ダークマター分布とは異なる。もう少し正確には、我々が直接観測から測定できるものは、銀河の個数密度ゆらぎに対する統計量で、質量密度ゆらぎに対するそれとは似て非なるものである。宇宙の構造形成の標準的な描像では、バリオンからなる光る銀河はダークマターハローにひきよせられ、質量密度が高いところ

に形成されるはずだが、ガスの供給量や輻射過程によるフィードバックなど、銀河形成は重力だけでは決まらない要素がある。銀河分布は、ダークマターで占められた質量分布を100%トレースしているわけではなく、ある種、バイアスされたトレーサーとしてみなすのが自然であろう。そのため、これまで解説してきた非線形な構造形成の取り扱いを実際の観測データに応用するためには、銀河分布とダークマター分布の間を結びつける必要がある[7]。

$$\delta_{\rm gal}(\boldsymbol{x}) = \frac{n_{\rm gal}(\boldsymbol{x})}{\overline{n}_{\rm gal}} - 1 \qquad \longleftrightarrow \qquad \delta(\boldsymbol{x}) = \frac{\rho_{\rm m}(\boldsymbol{x})}{\rho_{\rm m}} - 1. \tag{4.75}$$

上記の関係を銀河バイアスという。

銀河バイアスの記述：もっとも簡単な例[8]

- 線形バイアス: 文献 [27] により銀河バイアスの概念が初めて導入された際に、あるモデルから導かれたもっとも単純な関係式である：

$$\delta_{\rm gal}(\boldsymbol{x}) = b\,\delta_{\rm m}(\boldsymbol{x}). \tag{4.76}$$

- 非線形バイアス：線形バイアスの自然かつもっとも単純な拡張 (例えば、文献 [22])：

$$\delta_{\rm gal}(\boldsymbol{x}) = \sum_n \frac{b_n}{n!}\Big[\{\delta_{\rm m}(\boldsymbol{x})\}^n - \langle\{\delta_{\rm m}(\boldsymbol{x})\}^n\rangle\Big]. \tag{4.77}$$

一般的には、銀河バイアスは、空間的に非局所的で、非線形かつ、質量密度ゆらぎだけでは決まらない確率的要素を含む関数として表されるべきものであり、摂動的な展開を用いないと具体的な表式を書き下すことは困難である (摂動的にバイアスを一般的に取り扱う試みとして、文献 [41, ?] を参照)。

天体バイアスのモデル

銀河バイアスをどう記述するのか、さらにどういった性質があるのかについては、観測との直接比較が不可欠であるが、質量密度ゆらぎの性質は宇宙モデル・宇宙論パラメーターに依存するため、銀河バイアスそのものの性質を観測だけから抜き出すには細心の注意が必要になる。そこで、観測の代わりに理想化されたモデルをもとに実直な理論計算からバイアスのもつ普遍的性質を解き明かす研究も行われている。代表的なものが、ハロー、密度ピークを天体とみなしたモデルで、ラグランジュ描像にもとづき以下のように構築される：

$$\text{ハローバイアス:} \qquad 1 + \delta_{\rm halo}(\boldsymbol{q};\,M) = \frac{\hat{n}_{\rm halo}(\boldsymbol{q};\,M)}{n_{\rm halo}(M)}, \tag{4.78}$$

$$\text{ピークバイアス:} \qquad 1 + \delta_{\rm peak}(\boldsymbol{q};\,\nu_{\rm c}) = \frac{\hat{n}_{\rm peak}(\boldsymbol{q};\,\nu_{\rm c})}{n_{\rm peak}(\nu_{\rm c})}, \tag{4.79}$$

---

[7] 包括的なレビューとして、文献 [17] を参照。

[8] ここで挙げた例は、オイラー描像で見た空間的にローカルなバイアスである。他に、ラグランジェ描像にもとづくローカルなバイアスの記述法がある。

ここで、$\hat{n}_{\rm halo}$ や $\hat{n}_{\rm peak}$ は確率的な個数密度場を表す。一方、 $n_{\rm halo}$ や $n_{\rm peak}$ は統計平均した個数密度を表す。つまり、 $\langle \hat{n}_{\rm halo}\rangle = n_{\rm halo}$、 $\langle \hat{n}_{\rm peak}\rangle = n_{\rm peak}$ という関係にある。確率密度場 $\hat{n}_{\rm halo}$ の具体的な表式は（詳細は文献 [39] を参照）：

$$\hat{n}_{\rm halo}(\boldsymbol{q};\, M) = -2\frac{\rho_{\rm m}}{M}\,\frac{\partial}{\partial M}\Theta\bigl[\delta(\boldsymbol{q}|M) - \delta_{\rm crit}\bigr] \tag{4.80}$$

ここで、Θ はヘヴィサイドステップ関数である。$\delta_{\rm crit}$ は球対称モデルをもとに評価される臨界密度ゆらぎを表す [式 (4.7)、もしくは (4.8)]。また、$\delta(\boldsymbol{q}|M)$ は半径 $\{M/(4\pi\,\rho_{\rm m}/3)\}^{1/3}$ のトップハットフィルターでスムージングをかけた線形密度場である。一方、ピークバイアスに現れる確率密度場 $\hat{n}_{\rm peak}$ は、ガウシアンフィルターをかけた線形密度場 δ を用いて [39]、

$$\hat{n}_{\rm peak}(\boldsymbol{q};\, \nu_{\rm c}) = \frac{3^{3/2}}{R_*^3}\,\delta_{\rm D}(\nu-\nu_{\rm c})\delta_{\rm D}(\vec{\eta})\Theta(\lambda_3)|{\rm det}(\zeta_{ij})| \tag{4.81}$$

と表される。ここで、 $R_* = \sqrt{3}\sigma_1/\sigma_2$、$\nu = \delta/\sigma$, $\eta_i = \nabla_i\delta/\sigma_1$、 $\zeta_{ij} = \nabla_i\nabla_j\delta/\sigma_2$ である。 σ_n は $\sigma_n^2 = \langle(\nabla^n\delta)^2\rangle$ で定義される密度場の勾配に対する分散である。

式 (4.78) (4.79) の数密度場は、線形密度場の汎関数として表されているが、ピーク、ハローがラグランジェ描像にもとづいて定義されることに由来し、線形密度場はラグランジェ座標 $\boldsymbol{q}$ の関数として与えられている。したがって、実際の位置座標に対する密度場を求める場合は、4.2 節で導入した変移場ベクトル $\boldsymbol{\psi}$ をもとに、密度場を" マッピング" する必要がある：

$$1+\delta_{\rm X}(\boldsymbol{x}) = \int d^3\boldsymbol{q}\,[1+\delta_X(\boldsymbol{q})]\,\delta_{\rm D}\bigl(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{q})\bigr), \qquad ({\rm X = halo,\ peak}). \tag{4.82}$$

変移場ベクトルは重力非線形性を通じて決まるので、このマッピングを通じてバイアスの関係（ここでは、質量密度場とハロー・ピークの個数密度場との関係）は空間的に非局所的になる。こうした非局所性を通じて、密度場以外に、速度場にもバイアスが現れうるとの指摘もされている。

現実的な (?) バイアスのパラメトリゼーション

構造形成の観点から天体分布の起源・進化を知る上で銀河バイアスは重要な概念で記述方法を巡って様々な研究が行われているが、観測データから宇宙論の情報を引き出すためだけなら、宇宙論の情報を損なわないように適切なパラメーターを導入して、質量密度ゆらぎの理論予言と比較すればよい。摂動計算にもとづく理論予言なら、導入するパラメーターもたかだか数個で済むので、それほど宇宙論の決定精度を損なわずに観測と直接比較が可能である。ここでは、BOSS でも使われた銀河バイアスのパラメトリゼーションを示す [50, 40, 14]：

$$\delta_{\rm gal}(\boldsymbol{x}) = b_1\,\delta(\boldsymbol{x}) + \frac{b_2}{2}\left[\delta(\boldsymbol{x})^2 - \langle\delta(\boldsymbol{x})^2\rangle\right] + \frac{1}{2}\,b_{s^2}\left[s(\boldsymbol{x})^2 - \langle s(\boldsymbol{x})^2\rangle\right] + \cdots \tag{4.83}$$

上式で b_1、b_2、b_{s^2} がバイアスのパラメーターであり、場 s は、式 (4.82) を通じて現れる、潮汐場に由来する非局所場である：

$$s(\boldsymbol{x})^2 = s_{ij}(\boldsymbol{x})s^{ij}(\boldsymbol{x})\ ; \quad s_{ij}(\boldsymbol{x}) = \left(\nabla_i\nabla_j\,\nabla^{-2} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right)\,\delta(\boldsymbol{x}) \tag{4.84}$$

ここでは、質量密度ゆらぎの２次までの展開表式を示したが、銀河のパワースペクトルを高次の摂動補正を考慮して計算すると、少なくとも３次まで展開する必要がある。３次のオーダーでは、潮汐場と密度場・速度場の非線形カップリングに由来する新たな非局所項が現れる [50]。最終的にパワースペクトルを求めると、５つの銀河バイアスパラメーターを含む表式が得られる[9]：

$$
\begin{aligned}
P_{\rm gal}(k) = b_1^2\,P_{\delta\delta}(k) &+ 2b_2b_1\,P_{b2,\delta}(k) + 2b_{s2}b_1\,P_{bs2,\delta}(k) + 2b_{3{\rm nl}}b_1\,\sigma_3^2(k)\,P_{\rm lin}(k) \\
&+ b_2^2\,P_{b22}(k) + 2\,b_2b_{s2}\,P_{b2s2}(k) + b_{s2}^2\,P_{bs22}(k) + N,
\end{aligned}
\tag{4.85}
$$

ここで $P_{\delta\delta}$ は高次の摂動補正を含む非線形なパワースペクトルを指す。各項の具体的な表式については文献 [50, 7] を参照。

[9]赤方偏移空間に行くと、さらに Finger-of-God 減衰項をパラメトライズするためのパラメーターが増える。

Appendix A

摂動方程式の導出

ここでは、本編第 2 章にて取り扱った線形理論にもとづく相対論的なゆらぎの進化の基礎方程式 (2.5)-(2.12) を導出する。なおこの章の導出は、S. Dodelson 著の「Modern Cosmology」[18] に基づいている。

A.1 アインシュタイン方程式の摂動

この節では、式 (2.1) で与えられた以下の計量

$$ds^2 = -(1+2\Psi)dt^2 + \{a(t)\}^2\,(1+2\Phi)\,\delta_{ij}\,dx^i\,dx^j$$

にもとづき、線形アインシュタイン方程式を導く。

　まず、アインシュタイン方程式の左辺である重力パートの計算に必要な諸量をまとめておく：

クリストッフェル記号

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\,g^{\alpha\beta}\Big\{\frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}}\Big\} \tag{A.1}$$

Φ、Ψ の線形オーダーまでの寄与として、

$$\Gamma^0_{00} = \dot{\Psi}, \quad \Gamma^0_{0i} = \Gamma^0_{i0} = \frac{\partial\Psi}{\partial x^i}, \quad \Gamma^0_{ij} = a^2\Big\{H\Big(1-2\Psi+2\Phi\Big)+\dot{\Phi}\Big\}\delta_{ij}, \tag{A.2}$$

$$\Gamma^i_{00} = \frac{1}{a^2}\,\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}, \quad \Gamma^i_{0j} = (H+\dot{\Phi})\,\delta_{ij}, \quad \Gamma^i_{jk} = \frac{\partial\Phi}{\partial x^j}\delta_{ik} + \frac{\partial\Phi}{\partial x^k}\delta_{ij} - \frac{\partial\Phi}{\partial x^i}\delta_{jk}. \tag{A.3}$$

リッチテンソル

$$R_{\mu\nu} \equiv \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha} \tag{A.4}$$

以降、あとの計算で便利のため、フーリエ展開した表式を求めておく[1]：

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{k^2}{a^2}\,\Psi - 3\ddot{\Phi} + 3H(\dot{\Psi} - 2\dot{\Phi}), \tag{A.5}$$

$$R_{ij} = a^2\Big\{\Big(2H^2 + \frac{\ddot{a}}{a}\Big)(1 + 2\Phi - 2\Psi) + H\,(6\dot{\Phi} - \dot{\Psi}) + \ddot{\Phi} + \frac{k^2}{a^2}\,\Phi\Big\}\delta_{ij} + k_i k_j(\Phi + \Psi) \tag{A.6}$$

$$R_{0j} = -2\,i\,k_j\Big(\frac{\dot{\Phi}}{a} - H\,\Psi\Big) \tag{A.7}$$

<u>スカラー曲率</u>

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{A.8}$$

計量 g^{0i} がゼロになることから、スカラー曲率は、リッチテンソル R_{00}、R_{ij} から計算できる：

$$\begin{aligned} R &= g^{00} R_{00} + g^{ij} R_{ij} \\ &= 6\Big(\frac{\ddot{a}}{a} + H^2\Big)\big(1 - 2\Psi\big) + 2\,\frac{k^2}{a^2}\,\Psi + 6\,\ddot{\Phi} - 6H\,(\dot{\Psi} - 4\,\dot{\Phi}) + 4\frac{k^2}{a^2}\,\Phi. \end{aligned} \tag{A.9}$$

以上の結果をもとに、アインシュタインテンソル $G^\nu_\mu \equiv g^{\mu\alpha} R_{\nu\alpha} - (1/2)\delta^\mu_\nu\, R$ が求まる。ただ、独立な摂動方程式を導出するのに、アインシュタインテンソル全ての成分を計算する必要はない。密度ゆらぎに対応するスカラー型摂動で独立な発展方程式は１０成分あるテンソルのうち、２成分のみである。特に、(00) 成分と (ij) 成分のトレースレスパートを抜き出せば、簡潔な発展方程式が求まる。G^i_j のトレースレスパートは、フーリエ空間の射影演算子 $k_i k^j/k^2 - (1/3)\delta^j_i$ と縮約を取れば求まる。以下、線形摂動のオーダーの結果の表式は、

$$\delta G^0_0 = -6\,H\,\dot{\Phi} + 6H^2\,\Psi - 2\frac{k^2}{a^2}\,\Phi, \tag{A.10}$$

$$\Big(\frac{k_i k^j}{k^2} - \frac{1}{3}\delta^j_i\Big)\delta G^i_j = \frac{2}{3a^2}(\Phi + \Psi). \tag{A.11}$$

となる。

引き続き、アインシュタイン方程式の右辺に対応する物質パートを考えよう。独立な発展方程式を導出するため、エネルギー・運動量テンソルの (00) 成分と (ij) 成分のみに着目する。スカラー型摂動の場合、（フーリエ変換された）エネルギー・運動量テンソルの摂動は、一般に、

$$\delta T^0_0 = -\delta\rho, \tag{A.12}$$

$$\delta T^i_j = \Big[\delta p\,\delta^i_j\; + \Pi\,\Big(-\frac{k^i k_j}{k^2} + \frac{\delta^i_j}{3}\Big)\Big], \tag{A.13}$$

[1]フーリエ展開は平坦宇宙の場合の調和関数展開で、閉じた宇宙や開いた宇宙の場合は別の調和関数を用いて展開する必要がある。

と書き表せる。ここで、$\delta\rho$ はエネルギー密度のゆらぎ、δp は（等方的な）圧力ゆらぎ、Π は非等方ストレスを表す。多成分系の物質の進化を考える場合、これら摂動量は各成分の和として表せる。輻射優勢期以降、宇宙の構造形成に影響する重要な物質は、CDM、バリオン、光子、ニュートリノの４成分である。つまり、(00) 成分は、

$$\delta T^0_0 = -\sum_i \delta\rho_i, \qquad (i = \mathrm{cdm},\, \mathrm{b},\, \gamma,\, \nu), \tag{A.14}$$

となる。一方、(ij) 成分については、相対論的な光子とニュートリノのみが寄与する。非相対論的粒子の CDM とバリオンは、後のボルツマン方程式の摂動で見るように、線形レベルでは圧力が無視できる流体としてみなせ、圧力ゆらぎ、非等方ストレスは無視できる。(ij) 成分はトレースレスパートのみ考えればいいので、射影演算子 $k_i k^j/k^2 - (1/3)\delta^j_i$ と縮約を取ると、

$$\Big(\frac{k_i k^j}{k^2} - \frac{1}{3}\delta^j_i\Big)\delta T^i_j = -\frac{2}{3}\sum_i \Pi_i, \qquad (i = \gamma,\, \nu) \tag{A.15}$$

となる。

(A.10)(A.11)(A.14)(A.15) 式より、重力、物質の両パートの式が揃ったので、アインシュタイン方程式が導出できる。摂動部分の表式は、

$$\delta G^\nu_\mu = 8\pi G\, \delta T^\nu_\mu \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} k^2\Phi + 3H(\dot{\Phi} - H\Psi) = 4\pi\, a^2 \displaystyle\sum_i \delta\rho_i \\[2ex] k^2(\Phi + \Psi) = -8\pi\, G\, a^2 \displaystyle\sum_i \Pi_i \end{cases} \tag{A.16}$$

ただし、物質パートの摂動量 $\delta\rho$、Π は、以下で述べる物質各成分のボルツマン方程式から求められるもので、ボルツマン方程式を解いて得られる分布関数 f_i との関係が必要である。以下、その関係を導出する。

一般に、エネルギー・運動量テンソルは分布関数を用いて次のように表せる：

$$\begin{aligned} T^0_0 &= -\sum_i g_i \int \frac{d^3\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3}\, E_i(q)\, f_i(\vec{q}), \\ T^i_j &= \sum_p g_p \int \frac{d^3\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3}\, \frac{q^i q_j}{E_p(q)}\, f_p(\vec{q}) \end{aligned} \tag{A.17}$$

ここで、g_i は各成分の自由度を表し、E_i は各成分の一粒子のエネルギーで、質量 m と運動量 q を持つ場合、$E_i = \sqrt{q^2 + m^2}$ と表せる。

まず、(00) 成分について考えよう。まず、非相対論な CDM、バリオンは分布関数に広がりがなく、線形レベルではほぼ圧力ゼロの流体とみなせるので、(2.2) 式で与えた摂動量を用いて、

$$(T^0_0)_{\mathrm{cdm}} = -\rho_{\mathrm{cdm}}(1 + \delta), \tag{A.18}$$

$$(T^0_0)_{\mathrm{b}} = -\rho_{\mathrm{b}}(1 + \delta_{\mathrm{b}}), \tag{A.19}$$

と書ける。一方、光子、ニュートリノは、(2.2) 式のように分布関数を通じて摂動量が定義されているので、具体的に分布関数を代入して、$E_\gamma =$ 摂動の 1 次のオーダーで評価する。光子の場合、自由度 $g_\gamma = 2$ であることと、相対論的 ($E_\gamma(q) = q$) であることを用いて、摂動の一次のオーダーで、

$$\begin{aligned}(T^0_0)_\gamma &= -2\int \frac{d^3\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3}\, q\Big[f^{(0)}_\gamma - q\,\frac{\partial f^{(0)}_\gamma}{\partial q}\,\Theta\Big]; \quad f^{(0)}_\gamma = [e^{q/T}-1]^{-1}\\ &= -\rho_\gamma(1+4\,\Theta_0). \end{aligned} \tag{A.20}$$

ここで Θ_0 とは、Θ を運動量に対して角度平均した量で、(2.13) 式で定義された多重極展開の単極子成分 ($\ell = 0$) に対応する。なお、第 2 項に現れる 4 倍の因子は部分積分を行うことで現れ、積分 $\int d^3\boldsymbol{q}/(2\pi)^3\, f^{(0)}_\gamma$ を一様なエネルギー密度 ρ_γ として定義した。ニュートリノの場合も同様の計算で、

$$(T^0_0)_\nu = -\rho_\nu(1+4\,\mathcal{N}_0). \tag{A.21}$$

が得られる。ただし厳密には、上式はニュートリノが相対論的な場合、つまり $m_\nu \gg T_\nu$ の時のみ正しい。ここでは、輻射優勢期におけるゆらぎの進化を適切に取り扱うため、ニュートリノは相対論的であるとしてアインシュタイン方程式を導くことにするが、ニュートリノが非相対論的になる場合は、上式は使えない点に注意が必要である[2]。

以上の結果をまとめると、アインシュタイン方程式の (00) 成分は、

$$\boxed{k^2\Phi + 3H(\dot\Phi - H\Psi) = 4\pi\, a^2\left(\rho_{\rm cdm}\,\delta + \rho_{\rm b}\,\delta_{\rm b} + 4\rho_\gamma\,\Theta_0 + 4\rho_\nu\,\mathcal{N}_0\right) \qquad (A.22)}$$

となり、(2.5) 式が得られる。

次に (ij) 成分を考える。(A.17) 式に射影演算子をかけてトレースレスパートを取ると、

$$\Big(\frac{k_ik^j}{k^2} - \frac{1}{3}\delta^j_i\Big)T^i_j = \sum_{p=\gamma,\nu} g_p \int \frac{d^3\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3}\,\frac{q^2(\mu_q^2 - 1/3)}{E_p(q)}\, f_p(\vec q)\,; \qquad \mu_q \equiv \frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{q}|}. \tag{A.23}$$

光子の場合に ($g_\gamma = 2$、$E_\gamma(q) = q$)、具体的に分布関数を代入して右辺を計算してみると、

$$\begin{aligned}\Big(\frac{k_ik^j}{k^2} - \frac{1}{3}\delta^j_i\Big)T^i_j &= 2\int \frac{dq\,q^2}{2\pi^2}\, q\int_{-1}^{1}\frac{d\mu_q}{2}\left(\mu_q^2 - \frac{1}{3}\right)\left\{f^{(0)}(q) - q\frac{\partial f^{(0)}(q)}{\partial q}\,\Theta\right\}\\ &= -2\int \frac{dq\,q^2}{2\pi^2}\, q^2\frac{\partial f^{(0)}(q)}{\partial q}\int_{-1}^{1}\frac{d\mu_q}{2}\,\frac{2}{3}\mathcal{P}_2(\mu)\,\Theta\\ &= -2\int \frac{dq\,q^2}{2\pi^2}\, q^2\frac{\partial f^{(0)}(q)}{\partial q}\left(-\frac{2}{3}\Theta_2\right) \qquad \left(\because\ \text{(2.13) 式より、}\Theta = \sum_\ell (-1)^\ell(2\ell+1)\,\mathcal{P}_\ell\,\Theta_\ell\right)\\ &= 2\cdot 4\left(\int \frac{dq\,q^2}{2\pi^2}\, q\, f^{(0)}(q)\right)\left(-\frac{2}{3}\,\Theta_2\right)\\ &= -\frac{8}{3}\,\rho_\gamma\,\Theta_2 \end{aligned} \tag{A.24}$$

[2] とはいえ、ニュートリノの質量が十分小さい限り、ニュートリノが重力ポテンシャルに与える影響は極めて小さいので影響はほぼ無視できる。

が得られる。ニュートリノも相対論的な場合、光子と同様に扱えるため（つまり、$g_\nu = 2$、$E_\gamma(q) = q$）、同じ計算を繰り返すことで、$-(8/3)\,\rho_\nu \mathcal{N}_2$ が得られる。従って、ニュートリノ・光子の和で表されるエネルギー・運動量テンソルのトレースレスパートは、

$$\Big(\frac{k_i k^j}{k^2} - \frac{1}{3}\delta_i^j\Big) T^i_j = -\frac{8}{3}\left(\rho_\gamma\,\Theta_2 + \rho_\nu\,\mathcal{N}_2\right). \tag{A.25}$$

これより非等方ストレス Π は

$$\Pi = 4\big(\rho_\gamma\,\Theta_2 + \rho_\nu\,\mathcal{N}_2\big) \tag{A.26}$$

と表され、(ij) 成分のアインシュタイン方程式は、

$$\boxed{k^2(\Phi + \Psi) = -16\pi\,G\,a^2\left(\rho_\gamma\,\Theta_2 + \rho_\nu\,\mathcal{N}_2\right) \qquad \text{(A.27)}}$$

となり、(2.6) 式が得られる。

A.2 光子のボルツマン方程式

物質場のゆらぎの発展方程式を導くため、これよりボルツマン方程式を考える。ボルツマン方程式は位置と運動量の関数である分布関数の発展を記述し、一般に

$$\frac{df_i}{dt} = C[f_a, f_b] \tag{A.28}$$

のように書ける。左辺はドリフト項と呼ばれ、粒子の運動に伴う分布関数の変化を表す。一方、右辺は衝突項と呼ばれ、物質間の相互作用（散乱・反応）による分布関数の変化を記述する。左辺のドリフト項には、重力と宇宙膨張の影響が現れるが、その大きさは粒子が相対論的か非相対論的かで異なる。また、右辺は物質の詳細に依存する。光子の場合、衝突項に効くのは電子（バリオン）との電磁散乱、つまりコンプトン散乱である。ただし、大規模構造や宇宙マイクロ波背景放射の観測でプローブできるスケールは、宇宙の温度が十分下がってきた時期の現象に対応するため、コンプトン散乱の低エネルギー極限であるトムソン散乱を考えればよく、バリオン・光子間のエネルギー交換は無視できる。

以上の点に留意し、ここではまず光子のボルツマン方程式に着目し、ドリフト項と衝突項にわけてそれぞれから摂動方程式を導出する。

A.2.1 ドリフト項

光子の場合に、(A.28) 式の左辺を具体的に書き下す。時間に関する全微分は、粒子の位置と運動量に対する時間微分を通して評価できる：

$$\frac{df_\gamma}{dt} = \frac{\partial f_\gamma}{\partial t} + \frac{\partial f_\gamma}{\partial x^i}\frac{d\,x^i}{dt} + \frac{\partial f_\gamma}{\partial p}\frac{d\,p}{dt} + \cancelto{\text{高次}}{\frac{\partial f_\gamma}{\partial \hat{\gamma}^i}\frac{d\,\hat{\gamma}^i}{dt}} \tag{A.29}$$

ここで、右辺第３、４項は運動量 $\boldsymbol{p}$ を大きさ p と向き $\hat{\gamma}^i$ の自由度にわけて書き表した。すると、最後の第４項に現れる $\partial f_\gamma/\partial\hat{p}^i$ と $d\hat{p}^i/dt$ は、ゼロ次のオーダーではいずれもゼロになるため、2 次以上の高次を考えない限り無視できる。

上式を光子の測地線方程式を用いてさらに書きかえていこう。測地線方程式の導出はB.1節にまとめてある。その結果より、

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\hat{\gamma}^i}{a}\big(1+\Psi-\Phi\big), \tag{A.30}$$

$$\frac{dp}{dt} = -\Big[H + \dot{\Phi} + \frac{\hat{\gamma}^i}{a}\frac{\partial \Psi}{\partial x^i}\Big]\,p. \tag{A.31}$$

これらの関係をドリフト項に代入すると、

$$\frac{df_\gamma}{dt} \simeq \frac{\partial f_\gamma}{\partial t} + \frac{\hat{\gamma}^i}{a}(1+\Psi-\Phi)\frac{\partial f_\gamma}{\partial x^i} - p\Big(H + \dot{\Phi} + \frac{\hat{\gamma}^i}{a}\frac{\partial \Psi}{\partial x^i}\Big)\frac{\partial f_\gamma}{\partial p} \tag{A.32}$$

を得る。上式は0次と1次を含むので、具体的に分布関数を代入して、一様成分の0次と非一様成分の1次に分離する。(2.2)式に与えられた分布関数より、

$$f_\gamma \simeq f^{(0)} - p\,\frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p}\,\Theta\ ; \quad f^{(0)} = [e^{p/T_\gamma} - 1]^{-1} \tag{A.33}$$

と展開できることを用いると、ドリフト項は

$$(0\text{次}) \ : \frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial t} - H\,p\,\frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p}, \tag{A.34}$$

$$(1\text{次}) \ : \Big(\frac{\partial}{\partial t} - H\,p\,\frac{\partial}{\partial p}\Big)\Big\{-p\,\frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p}\,\Theta\Big\} + \frac{\hat{\gamma}^i}{a}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\Big\{-p\,\frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p}\,\Theta\Big\} - p\frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p}\Big(\dot{\Phi} + \frac{\hat{\gamma}^i}{a}\,\frac{\partial \Psi}{\partial x^i}\Big) \tag{A.35}$$

に分離できる。なお、A.2.3節で具体的に計算するが、0次では衝突項はゼロとなるため、(A.34)式は恒等的にゼロとなる必要がある。分布関数 $f^{(0)}$ の具体形（プランク分布）を代入してみると、光子の温度 T_γ が $T_\gamma \propto 1/a$ を満たす限り、矛盾なく(A.34)式はゼロになることがわかる。

(A.34)式がゼロとなることを用いて、(A.35)式を書き直すと、

$$\Big(-p\frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p}\Big)\,\Big[\dot{\Theta} + \frac{\gamma^i}{a}\frac{\partial \Theta}{\partial x^i} + \dot{\Phi} + \frac{\gamma^i}{a}\,\frac{\partial \Psi}{\partial x^i}\Big] \tag{A.36}$$

を得る。最後に、(2.3)(2.4)の定義に沿って、上式をフーリエ変換すると、

$$\Big(-p\frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p}\Big)\,\Big[\dot{\Theta} + i\,\frac{k\,\mu}{a}\,\Theta + \dot{\Phi} + i\,\frac{k\,\mu}{a}\,\Psi\Big] \tag{A.37}$$

A.2.2 衝突項

ここでは、トムソン散乱

$$e^-(q) + \gamma(p) \quad \leftrightarrows \quad e^-(q') + \gamma(p') \tag{A.38}$$

を素過程とした衝突項を計算し、摂動方程式を導く。トムソン散乱が起こる状況として、

- エネルギー・運動量の交換は起こらない
- 数密度の変化はなく保存する
- 電子は非相対論的粒子としてふるまう

といったことを踏まえて、近似を用いて衝突項を評価する。

まず、(A.38) 式にもとづく衝突項の一般的表式は、次のようになる[3]：

$$C[f(p_\gamma)] = \frac{1}{p_\gamma}\int \mathcal{D}q_e \int \mathcal{D}q'_e \int \mathcal{D}p'_\gamma \; (2\pi)^4 \delta_{\rm D}^{(4)}(p_\gamma + q_e - p'_\gamma - q'_e)\,|\mathbf{M}|^2$$
$$\times \big[f_e(\boldsymbol{q}'_e)\, f_\gamma(\boldsymbol{p}'_\gamma)\,\{1-f_e(\boldsymbol{q}_e)\}\,\{1+f_\gamma(\boldsymbol{p}_\gamma)\}$$
$$- f_e(\boldsymbol{q}_e) f_\gamma(\boldsymbol{p}_\gamma)\{1-f_e(\boldsymbol{q}'_e)\}\{1+f_\gamma(\boldsymbol{p}'_\gamma)\}\big] \tag{A.39}$$

ここで $\mathbf{M}$ は散乱振幅であり、具体的な表式は後述する。被積分関数に $1-f_e(q_e)$ や $1+f_\gamma(p_\gamma)$ といった因子が現れるが、これらは電子、光子の統計性（フェルミ、ボーズ統計）に由来するパウリ抑制と誘導放射の効果である。また $\mathcal{D}q_e$、$\mathcal{D}p_\gamma$ は、それぞれ電子と光子に対する 3 次元の不変運動量要素であり、電子の場合に書き下すと、

$$\mathcal{D}q_e \equiv \delta_{\rm D}(|\boldsymbol{q}_e|^2 + m_e^2 - E_e^2)\, d^4 q_e = \frac{d^3\boldsymbol{q}}{2E_e(q_e)(2\pi)^3} \quad ; \quad E_e(\boldsymbol{q}_e) = \sqrt{|\boldsymbol{q}_e|^2 + m_e^2} \tag{A.40}$$

と表される。さらに、$\delta_{\rm D}^{(4)}$ は 4 次元のデルタ関数で、

$$\delta_{\rm D}^{(4)}(p_\gamma + q_e - p'_\gamma - q'_e) = \delta_{\rm D}^{(3)}(\boldsymbol{p}_\gamma + \boldsymbol{q}_e - \boldsymbol{p}'_\gamma - \boldsymbol{q}'_e)$$
$$\times\, \delta_{\rm D}[E(\boldsymbol{p}_\gamma) + E_e(\boldsymbol{q}_e) - E(\boldsymbol{p}'_\gamma) - E_e(\boldsymbol{q}'_e)] \tag{A.41}$$

と運動量とエネルギーに対するデルタ関数で表せる。

密度が十分低い状態で起こる散乱では、パウリ抑制と誘導放射の効果は無視できるため、以下では $1-f_e(q_e)\simeq 1$ や $1+f_\gamma(p_\gamma)\simeq 1$ とおこう。その上で、(A.40) (A.41) 式を衝突項 (A.39) に代入して、光子の運動量 $\boldsymbol{p}'_\gamma$ について積分する：

$$C[f(p_\gamma)] = \frac{2\pi}{p_\gamma}\int \frac{d^3\boldsymbol{q}_e}{(2\pi)^3\,2E_e(q_e)} \int \frac{d^3\boldsymbol{p}'_\gamma}{(2\pi)^3\,2E_\gamma(p'_\gamma)}\,\frac{1}{2E_e(\boldsymbol{p}_\gamma + \boldsymbol{q}_e - \boldsymbol{p}'_\gamma)}\;|\mathbf{M}|^2$$
$$\times \big\{ f_e(\boldsymbol{p}_\gamma + \boldsymbol{q}_e - \boldsymbol{p}'_\gamma)\, f(\boldsymbol{p}'_\gamma) - f_e(\boldsymbol{q}_e) f(\boldsymbol{p}_\gamma)\big\}$$
$$\times\, \delta_{\rm D}\big[E(\boldsymbol{p}_\gamma) + E_e(\boldsymbol{q}_e) - E(\boldsymbol{p}'_\gamma) - E_e(\boldsymbol{p}_\gamma + \boldsymbol{q}_e - \boldsymbol{p}'_\gamma)\big] \tag{A.42}$$

[3]本来、衝突項は、ボルツマン方程式を $\frac{df}{d\lambda} = \tilde{C}[f]$ と書いた上で定義されるべきだが（λ はアフィンパラメーター）、前節では (A.28) 式のように、$\frac{df}{dt} = C[f]$ と表した上でドリフト項を導いた。このため、衝突項 $C[f]$ は、本来の衝突項 $\tilde{C}[f]$ を用いて $C[f] = \tilde{C}[f]\,\frac{d\lambda}{dt} = \tilde{C}[f]/p^0_\gamma$ と表されることになる。ところで、p^0_γ は、(B.2) より、$p^0_\gamma = (1-\Psi)p_\gamma$ と表されるが、衝突項は摂動の 1 次のオーダーなので、結局、$\tilde{C}[f]$ に因子 $1/p_\gamma$ をかけたものがここでの衝突項になる。(A.39) 式の積分の前に、因子 $1/p_\gamma$ がつくのはそうした理由による。

光子は相対論的だが、電子は非相対論的ということから、$E(p_\gamma)=p_\gamma$、$E(q_e)\simeq m_e+q_e^2/(2m_e)$ と表せるので（以下、$p_\gamma=|\boldsymbol{p}_\gamma|$、$q_e=|\boldsymbol{q}_e|$ などと記す）、上式はさらに、

$$C[f(p_\gamma)]\simeq\frac{\pi}{4m_e^2\,p_\gamma}\int\frac{d^3\boldsymbol{q}_e}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\boldsymbol{p}'_\gamma}{(2\pi)^3\,p'_\gamma}\,|\mathbf{M}|^2 \times\Bigl\{f_e(\boldsymbol{p}_\gamma+q_e-p'_\gamma)\,f(\boldsymbol{p}'_\gamma)-f_e(\boldsymbol{q}_e)f(\boldsymbol{p}_\gamma)\Bigr\} \times\delta_{\mathrm{D}}\Bigl[p_\gamma+\frac{q_e^2}{2m_e}-p'_\gamma-\frac{(\boldsymbol{p}_\gamma+\boldsymbol{q}_e-\boldsymbol{p}'_\gamma)^2}{2m_e}\Bigr] \tag{A.43}$$

と近似できる。さらに、非相対論的な散乱なため、散乱で変化する運動量は十分小さい、つまり、$p_\gamma\sim p'_\gamma\ll m_e$ ということを使うと、

$$\frac{q_e^2}{2m_e}-p'_\gamma-\frac{(\boldsymbol{p}_\gamma+\boldsymbol{q}_e-\boldsymbol{p}'_\gamma)^2}{2m_e}\simeq-\frac{\boldsymbol{q}_e\cdot(\boldsymbol{p}_\gamma-\boldsymbol{p}'_\gamma)}{m_e} \tag{A.44}$$

とできる。これより、衝突項に現れるデルタ関数は、

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{D}}\Bigl[p_\gamma+\frac{q_e^2}{2m_e}-p'_\gamma-\frac{(\boldsymbol{p}_\gamma+\boldsymbol{q}_e-\boldsymbol{p}'_\gamma)^2}{2m_e}\Bigr]&\\ &\simeq\delta\Bigl(p_\gamma-p'_\gamma-\frac{\boldsymbol{q}_e\cdot(\boldsymbol{p}_\gamma-\boldsymbol{p}'_\gamma)}{m_e}\Bigr)\\ &\simeq\delta_{\mathrm{D}}(p_\gamma-p'_\gamma)+\frac{\boldsymbol{q}_e\cdot(\boldsymbol{p}_\gamma-\boldsymbol{p}'_\gamma)}{m_e}\,\frac{\partial}{\partial p'_\gamma}\,\delta_{\mathrm{D}}(p_\gamma-p'_\gamma)\end{aligned} \tag{A.45}$$

と近似できる。これを衝突項に代入すると

$$\begin{aligned}C[f(\boldsymbol{p}_\gamma)]\simeq&\frac{\pi}{4m_e^2\,p_\gamma}\int\frac{d^3\boldsymbol{q}_e}{(2\pi)^3}\,f_e(\boldsymbol{q}_e)\,\int\frac{d^3\boldsymbol{p}'_\gamma}{(2\pi)^3\,p'_\gamma}\,|\mathbf{M}|^2\,\Bigl\{f(\boldsymbol{p}'_\gamma)-f(\boldsymbol{p}_\gamma)\Bigr\}\\ &\times\Bigl\{\delta_{\mathrm{D}}(p_\gamma-p'_\gamma)+\frac{\boldsymbol{q}_e\cdot(\boldsymbol{p}_\gamma-\boldsymbol{p}'_\gamma)}{m_e}\,\frac{\partial}{\partial p'_\gamma}\,\delta_{\mathrm{D}}(p_\gamma-p'_\gamma)\Bigr\}\\ =&\frac{\pi\,\overline{n}_e}{4m_e^2\,p_\gamma}\int\frac{d^3\boldsymbol{p}'_\gamma}{(2\pi)^3\,p'_\gamma}\,|\mathbf{M}|^2\,\Bigl\{f(\boldsymbol{p}'_\gamma)-f(\boldsymbol{p}_\gamma)\Bigr\}\\ &\times\Bigl\{\delta_{\mathrm{D}}(p_\gamma-p'_\gamma)+\boldsymbol{v}_e\cdot(\boldsymbol{p}_\gamma-\boldsymbol{p}'_\gamma)\,\frac{\partial}{\partial p'_\gamma}\,\delta_{\mathrm{D}}(p_\gamma-p'_\gamma)\Bigr\}\end{aligned} \tag{A.46}$$

ここで、分布関数の 0 次、1 次のモーメントを取って、電子の数密度 $\overline{n}_e$ と速度 $\boldsymbol{v}_e$ を定義した：

$$\overline{n}_e\equiv\int\frac{d^3\boldsymbol{q}_e}{(2\pi)^3}\,f_e(\boldsymbol{q}_e)\qquad m_e\,\overline{n}_e\,\boldsymbol{v}_e\equiv\int\frac{d^3\boldsymbol{q}_e}{(2\pi)^3}\,\boldsymbol{q}_e\,f_e(\boldsymbol{q}_e). \tag{A.47}$$

さらに計算を進めるために、トムソン散乱の散乱振幅の表式を代入する：

$$|\mathbf{M}|^2=6\pi\,\sigma_{\mathrm{T}}\,m_e^2\,\Bigl\{1+(\hat{\gamma}\cdot\hat{\gamma}')^2\Bigr\}\,;\quad\hat{\gamma}\equiv\frac{\boldsymbol{p}_\gamma}{p_\gamma} \tag{A.48}$$

光子の運動量積分を $\int d^3\boldsymbol{p}'_\gamma = \int dp'_\gamma\, p'^2_\gamma \int d^2\hat{\gamma}'$ と表し、上式を (A.46) 式に代入すると、

$$
\begin{aligned}
C[f(p_\gamma)] = \frac{3}{8}\overline{n}_e\sigma_\mathrm{T} \int dp'_\gamma \left(\frac{p'_\gamma}{p_\gamma}\right) \int \frac{d^2\hat{\gamma}'}{2\pi} \Big\{1 + (\hat{\gamma}\cdot\hat{\gamma}')^2\Big\}\ \Big\{f(\boldsymbol{p}'_\gamma) - f(\boldsymbol{p}_\gamma)\Big\} \\
\times \Big\{\delta_\mathrm{D}(p_\gamma - p'_\gamma) + \boldsymbol{v}_e\cdot(\boldsymbol{p}_\gamma - \boldsymbol{p}'_\gamma)\,\frac{\partial}{\partial p'_\gamma}\,\delta_\mathrm{D}(p_\gamma - p'_\gamma)\Big\}
\end{aligned}
\tag{A.49}
$$

方向積分は後で計算することにして、運動量の大きさ p'_γ についての積分を実行する。各項にわけて計算すると、

$$
\int dp'_\gamma \left(\frac{p'_\gamma}{p_\gamma}\right)\Big\{f(\boldsymbol{p}'_\gamma) - f(\boldsymbol{p}_\gamma)\Big\}\delta_\mathrm{D}(p_\gamma - p'_\gamma) = f(p_\gamma, \hat{\gamma}') - f(p_\gamma, \hat{\gamma})
$$

$$
\begin{aligned}
&\int dp'_\gamma \left(\frac{p'_\gamma}{p_\gamma}\right)\Big\{f(\boldsymbol{p}'_\gamma) - f(\boldsymbol{p}_\gamma)\Big\}\,\boldsymbol{v}_e\cdot(\boldsymbol{p}_\gamma - \boldsymbol{p}'_\gamma)\,\frac{\partial}{\partial p'_\gamma}\,\delta_\mathrm{D}(p_\gamma - p'_\gamma) \\
&\quad = -\int dp'_\gamma\,\delta_\mathrm{D}(p_\gamma - p'_\gamma)\,\frac{\partial}{\partial p'_\gamma}\left[\left(\frac{p'_\gamma}{p_\gamma}\right)\Big\{f(\boldsymbol{p}'_\gamma) - f(\boldsymbol{p}_\gamma)\Big\}\,\boldsymbol{v}_e\cdot(\boldsymbol{p}_\gamma - \boldsymbol{p}'_\gamma)\right] \\
&\quad = -\int dp'_\gamma\,\delta_\mathrm{D}(p_\gamma - p'_\gamma)\Bigg[\frac{1}{p_\gamma}\Big\{\cancelto{0}{f(\boldsymbol{p}'_\gamma) - f(\boldsymbol{p}_\gamma)} + p'_\gamma\,\frac{f(\boldsymbol{p}'_\gamma)}{\partial p'_\gamma}\Big\}\,\boldsymbol{v}_e\cdot(\boldsymbol{p}_\gamma - \boldsymbol{p}'_\gamma) \\
&\qquad - \frac{p'_\gamma}{p_\gamma}\Big\{\cancelto{0}{f(\boldsymbol{p}'_\gamma) - f(\boldsymbol{p}_\gamma)}\Big\}(\boldsymbol{v}_e\cdot\hat{\gamma}')\Bigg] \\
&\quad = -p_\gamma\,\frac{\partial f(\boldsymbol{p}_\gamma)}{\partial p_\gamma}\ \boldsymbol{v}_e\cdot(\hat{\gamma} - \hat{\gamma}')
\end{aligned}
$$

さらに、(A.33) 式にもとづき、分布関数を 0 次と 1 次にわけ、0 次は運動量の大きさのみに依存し、1 次は方向のみに依存することを用いると、摂動の 1 次までのオーダーで上式の結果はそれぞれ、

$$
\begin{aligned}
f(p_\gamma, \hat{\gamma}') - f(p_\gamma, \hat{\gamma}) &= -p_\gamma\,\frac{\partial f_0(p_\gamma)}{\partial p_\gamma}\Big\{\Theta(\hat{\gamma}') - \Theta(\hat{\gamma})\Big\}. \\
-\,p_\gamma\,\frac{\partial f(\boldsymbol{p}_\gamma)}{\partial p_\gamma}\ \boldsymbol{v}_e\cdot(\hat{\gamma} - \hat{\gamma}') &= -p_\gamma\,\frac{\partial f^{(0)}(p_\gamma)}{\partial p_\gamma}\ \boldsymbol{v}_e\cdot(\hat{\gamma} - \hat{\gamma}')
\end{aligned}
$$

と書き直せる。以上の結果を用いると、(A.49) 式は

$$
C[f] \simeq -\frac{3}{8}\overline{n}_e\,\sigma_\mathrm{T}\left(p_\gamma\,\frac{\partial f_0(p_\gamma)}{\partial p_\gamma}\right)\int\frac{d^2\hat{\gamma}'}{2\pi}\Big\{1 + (\hat{\gamma}\cdot\hat{\gamma}')^2\Big\}\Big[\Theta(\hat{\gamma}') - \Theta(\hat{\gamma}) - \boldsymbol{v}_e\cdot(\hat{\gamma} - \hat{\gamma}')\Big].
\tag{A.50}
$$

となる。

最後に残された方向積分について、順を追って計算していく。方向ベクトル $\hat{\gamma}$ を z-軸に選び、もう一方の方向ベクトルを $\hat{\gamma}' = (\sqrt{1-\mu^2}\cos\phi, \sqrt{1-\mu^2}\sin\phi, \mu)$ と表す。この

時、$d^2\hat{\gamma} = d\phi\, d\mu$ と書けることを用いると、以下の公式を得る：

$$\int \frac{d^2\hat{\gamma}'}{2\pi} \left\{ 1 + (\hat{\gamma}\cdot\hat{\gamma}')^2 \right\} = \int_{-1}^{1} d\mu\, (1+\mu^2) = \frac{8}{3} \tag{A.51}$$

$$\int \frac{d^2\hat{\gamma}'}{2\pi} \left\{ 1 + (\hat{\gamma}\cdot\hat{\gamma}')^2 \right\} \hat{\gamma}' = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} d\mu\, (1+\mu^2) \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{1-\mu^2}\,\cos\phi \\ \sqrt{1-\mu^2}\,\sin\phi \\ \mu \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \tag{A.52}$$

これらを衝突項に代入すると、

$$C[f] \simeq -\frac{3}{8}\overline{n}_e\, \sigma_{\rm T} \left(p_\gamma \frac{\partial f_0(p_\gamma)}{\partial p_\gamma} \right) \left[\int \frac{d^2\hat{\gamma}'}{2\pi} \left\{ 1 + (\hat{\gamma}\cdot\hat{\gamma}')^2 \right\} \Theta(\hat{\gamma}') - \frac{8}{3} \left\{ \Theta(\hat{\gamma}) - \boldsymbol{v}_e \cdot \hat{\gamma} \right\} \right] \tag{A.53}$$

残る積分については、衝突項を（位置座標について）フーリエ変換した上で実行する。(2.3)(2.4) 式にもとづきフーリエ変換した衝突項 $\tilde{C}[f]$ は、

$$\tilde{C}[f] = -\frac{3}{8}\overline{n}_e\, \sigma_{\rm T} \left(p_\gamma \frac{\partial f_0(p_\gamma)}{\partial p_\gamma} \right) \left[\int \frac{d^2\hat{\gamma}'}{2\pi} \left\{ 1 + (\hat{\gamma}\cdot\hat{\gamma}')^2 \right\} \Theta(\boldsymbol{k},\hat{\gamma}') - \frac{8}{3} \left\{ \Theta(\boldsymbol{k},\hat{\gamma}) - i\,(\hat{k}\cdot\hat{\gamma})\, v_e(\boldsymbol{k}) \right\} \right] \tag{A.54}$$

その上で、温度ゆらぎ Θ を (2.13) 式をもとに多重極展開する。ルジャンドル多項式 $\mathcal{P}_\ell$ の直交性を用いると、

$$\int \frac{d^2\hat{\gamma}'}{2\pi} \Theta(\boldsymbol{k},\hat{\gamma}') = \int_{-1}^{1} d\mu' \sum_\ell (-i)^\ell (2\ell+1) \mathcal{P}_\ell(\mu')\, \Theta_\ell = 2\Theta_0(\boldsymbol{k}), \tag{A.55}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2\hat{\gamma}'}{2\pi} (\hat{\gamma}\cdot\hat{\gamma}')^2\, \Theta(\hat{\gamma}') &= \hat{\gamma}_i\hat{\gamma}_j \int \frac{d^2\hat{\gamma}'}{2\pi} \hat{\gamma}'^i \hat{\gamma}'^j\, \Theta(\boldsymbol{k},\hat{\gamma}') \\ &= \frac{8}{3} \left[\frac{1}{16} \hat{\gamma}_i\hat{\gamma}_j \int \frac{d^2\hat{\gamma}'}{4\pi} \left(3\hat{\gamma}'^i\hat{\gamma}'^j - \delta^{ij} \right) 4\Theta(\boldsymbol{k},\hat{\gamma}') + \frac{1}{4} \int \frac{d^2\hat{\gamma}'}{4\pi} \Theta(\boldsymbol{k},\hat{\gamma}') \right] \\ &= \frac{8}{3} \left[\frac{1}{16} \hat{\gamma}_i\hat{\gamma}_j \Pi_\gamma^{ij} + \frac{1}{4}\, \Theta_0(\boldsymbol{k}) \right], \end{aligned} \tag{A.56}$$

と積分できる。ここで、Π_γ は光子の非等方ストレスを表す量で、

$$\Pi_\gamma^{ij} \equiv \int \frac{d^2\hat{\gamma}'}{4\pi} \left(3\hat{\gamma}'^i\hat{\gamma}'^j - \delta^{ij} \right) 4\Theta(\boldsymbol{k},\hat{\gamma}') \tag{A.57}$$

と定義した。Π_γ^{ij} の表式にはまだ積分が残っているが、積分後は波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の関数として表される対称行列である。そのため、積分後の一般的な表式は、

$$\Pi_\gamma^{ij} = X(\boldsymbol{k})\, \hat{k}^i \hat{k}^j + Y(\boldsymbol{k})\, \delta^{ij} \tag{A.58}$$

に限られる。この関係を手がかりに、関数 X、Y の具体的表式を導くことにしよう。Π_γ^{ij} に対して δ_{ij} と $\hat{k}^i\hat{k}^j$ でそれぞれ縮約をとり、(A.57)(A.58) 式を見比べると、

$$\begin{aligned} 0 &= X(\boldsymbol{k}) + 3Y(\boldsymbol{k}), \\ -8\,\Theta_2(\boldsymbol{k}) &= X(\boldsymbol{k}) + Y(\boldsymbol{k}) \end{aligned}$$

という関係が得られる。なお、第２式の左辺の計算には、多重極展開の式 (2.13) を用い、方向余弦 μ の定義 $\mu = \hat{k}\cdot\hat{\gamma}$ を用いた。これら２式を連立させて解くと、$X = -12\,\Theta_2(\boldsymbol{k})$、$Y = 4\,\Theta_2(\boldsymbol{k})$ が求まる。これより、Π_γ^{ij} を $\hat{\gamma}_i\hat{\gamma}_j$ で縮約をとった表式は、

$$\hat{\gamma}_i\hat{\gamma}_j\Pi_\gamma^{ij} = -4(3\mu^2-1)\,\Theta_2(\boldsymbol{k}) = -8\,\mathcal{P}_2(\mu)\,\Theta_2(\boldsymbol{k}) \tag{A.59}$$

となる。

以上を用いると、フーリエ変換された光子の衝突項が以下のように求まる：

$$\tilde{C}[f] = \overline{n}_e\,\sigma_\mathrm{T}\left(-p_\gamma\frac{\partial f_0(p_\gamma)}{\partial p_\gamma}\right)\left[\Theta_0(\boldsymbol{k}) - \Theta(\boldsymbol{k},\hat{\gamma}) + i\,\mu\,v_\mathrm{b}(\boldsymbol{k}) - \frac{1}{2}\,\mathcal{P}_2(\mu)\,\Theta_2(\boldsymbol{k})\right] \tag{A.60}$$

A.2.3　光子のボルツマン方程式：まとめ

A.2.1、および A.2.3 節における計算を経て、光子のボルツマン方程式に対する線形摂動の式が求まった。(A.37)、(A.60) 式より、フーリエ変換された摂動方程式は、

$$\boxed{\begin{aligned}&\dot{\Theta}(\boldsymbol{k},\hat{\gamma}) + i\,\frac{k\,\mu}{a}\Big\{\Theta(\boldsymbol{k},\hat{\gamma}) + \Psi(\boldsymbol{k})\Big\} + \dot{\Phi}(\boldsymbol{k})\\ &\qquad = \overline{n}_e\,\sigma_\mathrm{T}\left[\Theta_0(\boldsymbol{k}) - \Theta(\boldsymbol{k},\hat{\gamma}) + i\,\mu\,v_\mathrm{b}(\boldsymbol{k}) - \frac{1}{2}\,\mathcal{P}_2(\mu)\,\Theta_2(\boldsymbol{k})\right] \qquad \text{(A.61)}\end{aligned}}$$

となる。

A.3　ダークマターのボルツマン方程式

光子に引き続き、ダークマターのボルツマン方程式を考える。構造形成で取り扱うダークマターは、基本的に重力相互作用しかしない仮想的な粒子で構成されていると仮定する。そのため、衝突項 $C[f]$ を無視した無衝突ボルツマン方程式を考えればよい：

$$\frac{df_\mathrm{dm}}{dt} = \frac{\partial f_\mathrm{dm}}{\partial t} + \frac{\partial f_\mathrm{dm}}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f_\mathrm{dm}}{\partial p^i}\frac{dp^i}{dt} = 0 \tag{A.62}$$

ドリフト項の評価だけすればよいので、光子のボルツマン方程式に比べて計算は楽になるが、ダークマターは質量 m を持った粒子である点に注意が必要である。つまり、光子とは異なり、ダークマターの運動量ベクトル $\boldsymbol{p}$ は、エネルギー E と $E^2 = |\boldsymbol{p}|^2 + m^2$ で関係づいている。いいかえると、ダークマターの運動量ベクトルは、運動量の向き $\hat{\gamma}$ とエネルギー E で特徴づけられる。このことを用いて、ボルツマン方程式を以下のように書き直そう：

$$\frac{\partial f_\mathrm{dm}}{\partial t} + \frac{\partial f_\mathrm{dm}}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f_\mathrm{dm}}{\partial E}\frac{dE}{dt} + \cancelto{\text{高次}}{\frac{\partial f_\mathrm{dm}}{\partial \hat{\gamma}^i}\frac{\hat{\gamma}^i}{dt}} = 0 \tag{A.63}$$

最後の項は、光子と同様、摂動の２次以上の高次なので無視できる。第２、３項に現れる位置とエネルギーに対する時間微分、dx^i/dt、dE/dt については、測地線方程式より摂動

の２次以上を無視した表式、

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dt} = \frac{p^i}{p^0} \simeq \frac{\hat{\gamma}^i}{a}\,\frac{p}{E}\,(1-\phi+\Psi), \tag{A.64}$$

$$\frac{dE}{dt} = -E\Big[(H+\dot{\Phi})\,\frac{p^2}{E^2} + \frac{1}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\,\hat{\gamma}^i\,\frac{p}{E}\Big] \tag{A.65}$$

が得られる（導出はB.2節参照)。上式を代入すると、ダークマターのボルツマン方程式は

$$\frac{\partial f_{\rm dm}}{\partial t} + \frac{\hat{\gamma}^i}{a}\,\frac{p}{E}\,(1-\cancel{\Phi+\Psi})\frac{\partial f_{\rm dm}}{\partial x^i} - \Big\{(H+\dot{\Phi})\frac{p^2}{E} + \frac{p}{a}\,\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\,\hat{\gamma}^i\Big\}\frac{\partial f_{\rm dm}}{\partial E} = 0 \tag{A.66}$$

と表せる。なお、上式に現れる運動量の大きさ p とは、 $p=\sqrt{E^2-m^2}$ と書けるエネルギーの関数である。

ここで、ダークマターの性質について考えてみる。ダークマターの特徴的性質の１つとして、非相対論的であることが挙げられる。非相対論的とは、$p \ll m$ であることを表し、熱平衡分布を保った粒子分布の場合、温度 T が質量エネルギーに比べて十分小さいこと（$T \ll m$）を意味する。ダークマター優勢宇宙で構造形成が進む大きな理由は、ひとえにダークマターが非相対論的であることによっている。さらに、標準宇宙モデルにもとづく構造形成では、ダークマターは「冷たい」状態であることが要請される（コールドダークマター)。いいかえると、運動量空間における分布関数の広がりが、粒子の運動量にくらべて十分狭く、

$$f_{\rm dm} \simeq n_{\rm dm}\,\delta_{\rm D}(p^i - m\,v^i) \tag{A.67}$$

と近似できることを意味している。ここで、$n_{\rm dm}$ と v^i はそれぞれダークマターの個数密度と速度である。

以上の点に留意して、ダークマターの時間発展を記述する方程式を導こう。(A.66) 式の辺々を運動量空間で積分すると、

$$\frac{\partial n_{\rm dm}}{\partial t} + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x^i}(n_{\rm dm}\,v^i) - (H+\dot{\Phi})\int d^3\boldsymbol{p}\,\frac{p^2}{E}\,\frac{\partial f_{\rm dm}}{\partial E} - \cancelto{\text{高次}}{\frac{1}{a}\,\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\int d^3\boldsymbol{p}\,p\,\hat{\gamma}^i\,\frac{\partial f_{\rm dm}}{\partial E}} = 0. \tag{A.68}$$

ここで、個数密度 $n_{\rm dm}$ と 速度 v^i は、運動量空間を積分した場所のみの関数として、改めて以下のように定義した：

$$n_{\rm dm}(\boldsymbol{x}) \equiv \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\,f_{\rm dm} \tag{A.69}$$

$$n_{\rm dm}(\boldsymbol{x})\,v^i(\boldsymbol{x}) \equiv \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{p\,\hat{\gamma}^i}{E}\,f_{\rm dm} \tag{A.70}$$

(A.68) 式には運動量空間の積分が陽に残されているが、第４項は摂動の２次以上の寄与なので無視できる。第３項の積分については、$dE/dp = p/E$ であることを用いて部分積分を行うと（$d^3\boldsymbol{p} = dp\,p^2\,d^2\hat{\gamma}$ と表せることに注意して）

$$\begin{aligned}\int d^3\boldsymbol{p}\,\frac{p^2}{E}\,\frac{\partial f_{\rm dm}}{\partial E} &= \int d^3\boldsymbol{p}\,p\frac{\partial f_{\rm dm}}{\partial p} = \int dp\,d^2\hat{\gamma}\,p^3\frac{\partial f_{\rm dm}}{\partial p} \\ &= \cancel{\Big[\int d^2\hat{\gamma}\,p^3\,f_{\rm dm}\Big]} - 3\int d^3\boldsymbol{p}\,f_{\rm dm} \qquad \text{(A.71)} \\ &= -3\,n_{\rm dm} \qquad \text{(A.72)}\end{aligned}$$

となる。従って、(A.68) 式は、

$$\frac{\partial n_{\rm dm}}{\partial t}+\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x^i}(n_{\rm dm}\,v^i)-3(H+\dot{\Phi})\,n_{\rm dm}=0 \tag{A.73}$$

に帰着する。これは連続の式に相違ない。個数密度場 $n_{\rm dm}$ には一様成分とゆらぎの非一様成分が混在しているので、

$$n_{\rm dm}=\overline{n}_{\rm dm}\,\{\,1+\delta(\boldsymbol{x})\,\} \tag{A.74}$$

と表し、一様成分と非一様成分に分離することで、(A.73) 式から密度ゆらぎ δ の発展方程式

$$\boxed{\frac{\partial\delta}{\partial t}+\frac{1}{a}\frac{\partial v^i}{\partial x^i}+3\,\dot{\Phi}=0} \tag{A.75}$$

が得られる。これをフーリエ変換すると、本編第 2 章の (2.8) 式が導ける。

速度場 v^i が従う発展方程式については、(A.66) 式に $p\,\hat{\gamma}^i/E$ をかけて運動量空間で積分することで得られる：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\bigl(n_{\rm dm}\,v^i\bigr)&+\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x^j}\int\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\left(\frac{p}{E}\right)^2\hat{\gamma}^i\hat{\gamma}^j\,f_{\rm dm}\\&-(H+\dot{\Phi})\int\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{p^3}{E^2}\hat{\gamma}^i\,\frac{\partial f_{\rm dm}}{\partial E}-\frac{1}{a}\,\frac{\partial}{\partial x^j}\int\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{p^2}{E}\hat{\gamma}^i\hat{\gamma}^j\,\frac{\partial f_{\rm dm}}{\partial E}=0\end{aligned} \tag{A.76}$$

上式 (A.76) のうち第 2 項は、ダークマターの速度分布の幅が十分狭いという仮定のもとで無視できる。残る第 3、4 項についても一見すると同様の理由で無視できそうに思えるが、分布関数の微分を含むため、若干取り扱いに注意を要する。実際、関係 $dE/dp=p/E$ を用いて部分積分を行うと、第 3 項については、

$$\begin{aligned}\int\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{p^3}{E^2}\hat{\gamma}^i\,\frac{\partial f_{\rm dm}}{\partial E}&=\int\frac{d^2\hat{\Omega}_p}{(2\pi)^3}\,\hat{\gamma}^i\int dp\,\frac{p^4}{E}\,\frac{\partial f_{\rm dm}}{\partial p}\\&=-\int\frac{d\hat{\Omega}_p}{(2\pi)^3}\,\hat{\gamma}^i\int dp\left(4\frac{p^3}{E}-\frac{p^5}{E^3}\right)f_{\rm dm}\\&=-\int\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\,\hat{\gamma}^i\left(4\frac{p}{E}-\cancel{\frac{p^3}{E^3}}\right)f_{\rm dm}\end{aligned} \tag{A.77}$$

となり、第 1 項から $-4n_{\rm dm}\,v^i$ を得る（第 2 項は非相対論極限のもとで無視できる）。また、(A.76) 式の第 4 項に現れる積分については部分積分を行うことで、

$$\begin{aligned}\int\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{p^2}{E}\hat{\gamma}^i\hat{\gamma}^j\,\frac{\partial f_{\rm dm}}{\partial E}&=\int\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\,p\,\hat{\gamma}^i\hat{\gamma}^j\,\frac{\partial f_{\rm dm}}{\partial p}\\&=-3\int\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\,\hat{\gamma}^i\hat{\gamma}^j\,f_{\rm dm}\end{aligned} \tag{A.78}$$

となる。この項は密度ゆらぎを通じて決まるポテンシャル勾配にかかる因子であり、線形近似のレベルでは、被積分関数に現れる分布関数は（運動量に依存しない）一様成分しか

含まないとしてよい。つまり、

$$\int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{p^3}{E^2}\hat{\gamma}^i\,\frac{\partial f_{\rm dm}}{\partial E} = -3\,\frac{\int d^2\hat{\gamma}\;\hat{\gamma}^i\hat{\gamma}^j}{\int d^2\hat{\gamma}}\int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\,f_{\rm dm} = -3\left(\int \frac{d^2\hat{\gamma}}{4\pi}\,\hat{\gamma}^i\hat{\gamma}^j\right)\overline{n}_{\rm dm}$$

と変形でき、最後に角度積分の公式 $\int d^2\hat{\gamma}\,\hat{\gamma}^i\hat{\gamma}^j = (4\pi/3)\,\delta^{ij}$ を用いると、$-\overline{n}_{\rm dm}\,\delta^{ij}$ を得る。以上の計算をまとめると（線形近似のオーダーで)、

$$\frac{\partial}{\partial}\big(n_{\rm dm}\,v^i\big) + 4H\,n_{\rm dm}\,v^i + \frac{1}{a}\,\overline{n}_{\rm dm}\,\frac{\partial\Psi}{\partial x^i} = 0 \tag{A.79}$$

が得られる。最後に、(A.74) 式の関係を使って、連続の式 (A.73) から $\dot{\overline{n}}_{\rm dm} + 3H\overline{n}_{\rm dm} = 0$ が得られることを用いると、 オイラー方程式に対応する発展方程式、

$$\boxed{\frac{\partial v^i}{\partial t} + H\,v^i + \frac{1}{a}\,\frac{\partial\Psi}{\partial x^i} = 0} \tag{A.80}$$

が導ける。上式を (2.4) 式の定義をもとにフーリエ変換したものが、(2.9) 式である。

A.4 バリオンのボルツマン方程式

今度は、バリオンのボルツマン方程式を考える。ここでいうバリオンとは、電子と陽子からなる非相対論的物質のことを指す。この電子と陽子は、お互いクーロン散乱で強く結びついている。クーロン散乱の反応率は、宇宙論的に興味あるあらゆる時期において、宇宙の膨張率を凌駕するため、電子と陽子の密度ゆらぎの値は凍結され、お互いの共通の値を持つ：

$$\frac{\rho_{\rm e} - \overline{\rho}_{\rm e}}{\overline{\rho}_{\rm e}} = \frac{\rho_{\rm p} - \overline{\rho}_{\rm p}}{\overline{\rho}_{\rm p}} \equiv \delta_{\rm b} \tag{A.81}$$

同様に、電子と陽子は速度も共通の値を持つ：

$$\boldsymbol{v}_{\rm e} = \boldsymbol{v}_{\rm p} \equiv \boldsymbol{v}_{\rm b} \tag{A.82}$$

以下では、これら共通のゆらぎ $\delta_{\rm b}$、$\boldsymbol{v}_{\rm b}$ が満たす発展方程式を導出しよう。

導出の見通しをよくするため、多少簡略された表記を用いて電子と陽子のボルツマン方程式を書き下す：

$$\frac{df_{\rm e}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q})}{dt} = \langle c_{\rm ep}\rangle_{QQ'q'} + \langle c_{\rm e\gamma}\rangle_{pp'q'}, \tag{A.83}$$

$$\frac{df_{\rm p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Q})}{dt} = \langle c_{\rm ep}\rangle_{qq'Q'}. \tag{A.84}$$

上式右辺は衝突項であり、$c_{\rm ep}$ が電子・陽子のクーロン散乱、$c_{\rm e\gamma}$ は電子と光子とのコンプトン散乱（トムソン散乱）を表している。添え字は散乱前後の運動量を表し、$\vec{p}$ と $\vec{p}'$ は光子の運動量、$\vec{q}$ と $\vec{q}'$ は電子の運動量、そして $\vec{Q}$ と $\vec{Q}'$ は陽子の運動量を意味する。運動量

ベクトルにプライムがつくかつかないかで、散乱後か散乱前かを区別している。3 種類ある衝突項のうち、コンプトン散乱についてはすでに A.2.3 節で述べたが、運動量で積分する前の表式は、以下で与えられる：

$$c_{e\gamma} \equiv (2\pi)^4 \, \delta_{\rm D}^{(4)}(p+q-p'-q') \, \frac{|\mathcal{M}|^2}{8E(p)E(p')E_{\rm e}(q)E_{\rm e}(q')} \left\{ f_{\rm e}(q') \, f_\gamma(p') - f_{\rm e}(q) f_\gamma(p) \right\} \tag{A.85}$$

これを添え字で示された運動量で積分したものが (A.83) 式に現れる衝突項であり、運動量積分されたことがわかるようにブラケットで囲っている：

$$\langle \, c_{e\gamma} \, \rangle_{pp'q'} \equiv \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\boldsymbol{p}'}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\boldsymbol{q}'}{(2\pi)^3} \, c_{e\gamma} \tag{A.86}$$

クーロン散乱の衝突項についても、同様の記法で表されている。

なお、(A.84) 式の右辺には、光子と陽子のコンプトン散乱項も考慮されるべきだが、電子の散乱断面積に比べて十分小さいため、無視した。また、(A.83)(A.84) 式の右辺にはイオン化と再結合を表す項も入るべきだが、再結合以前の時期を考える限り無視できる。

以上の表記法と注意点を踏まえ、A.3 節のダークマターにおける導出を参考に、ボルツマン方程式の低次のモーメントからバリオンのゆらぎが従う方程式を導出する。まず、(A.83) 式の両辺に、電子の運動量の体積要素 $d^3\boldsymbol{q}/(2\pi)^3$ をかけて積分する。左辺のドリフト項の積分は、ダークマターのボルツマン方程式から (A.73) 式を導出した時と同様の計算であり、ただちに

$$\frac{\partial n_{\rm e}}{\partial t} + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(n_{\rm e} v_{\rm b}^i\right) + 3(H+\dot{\Phi})\, n_{\rm e} = \langle c_{\rm ep} \rangle_{QQ'q'q} + \langle c_{e\gamma} \rangle_{pp'q'q}, \tag{A.87}$$

を得る。右辺の衝突項の積分は、被積分関数 $c_{\rm ep}$、$c_{e\gamma}$ が $Q \leftrightarrow Q'$ と $q \leftrightarrow q'$ の入れ替えに対して反対称であることから、最終的にゼロになる。実際のところ、電子の対生成や対消滅が起こらない状況では電子数は保存するため、右辺はゼロになるべきであり、この結論は直感と合っている。右辺がゼロとなるため、上式は、ダークマターの連続の式 (A.73) と全く同じ式になる。従って、ダークマターと全く同じ形のゆらぎ $\delta_{\rm b}$ の発展方程式が得られる：

$$\dot{\delta}_{\rm b} + \frac{1}{a}\frac{\partial v_b^i}{\partial x^i} + 3\dot{\Phi} = 0. \tag{A.88}$$

これをフーリエ展開したものが、2 章の (2.10) 式である。

次に、バリオンの速度 $\boldsymbol{v}_{\rm b}$ が従う発展方程式を導くため、ボルツマン方程式の 1 次のモーメントをとる。(A.83) 式に電子の運動量 $\vec{q}$ をかけた後、体積要素 $d^3\boldsymbol{q}/(2\pi)^3$ をかけて積分する。同様に、(A.84) 式に対し、陽子の運動量 $\vec{Q}$ をかけて、体積要素 $d^3\boldsymbol{Q}/(2\pi)^3$ で積分する。ここで、前節のダークマターでは、$\vec{q}/E$ をかけて積分して (A.79) 式が得られたことを思い出そう。因子 $1/E$ だけ重みが違うが、非相対論的極限の場合、$E \simeq m$ であるため、この違いは質量がかかるか否かなので、電子と陽子のモーメント方程式の左辺は、(A.79) 式にそれぞれ電子の質量 $m_{\rm e}$、陽子の質量 $m_{\rm p}$ がかかったものと同じ構造にな

ることがわかる。つまり、

$$m_{\rm e}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\big(n_{\rm b}v_{\rm b}^i\big)+4H\,n_{\rm b}v_{\rm b}^i+\frac{n_{\rm b}}{a}\,\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\right\}=\langle c_{\rm ep}q^i\rangle_{QQ'q'q}+\langle c_{\rm e\gamma}q^i\rangle_{pp'q'q},\tag{A.89}$$

$$m_{\rm p}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\big(n_{\rm b}v_{\rm b}^i\big)+4H\,n_{\rm b}v_{\rm b}^i+\frac{n_{\rm b}}{a}\,\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\right\}=\langle c_{\rm ep}Q^i\rangle_{QQ'q'q},\tag{A.90}$$

を得る。これら２式の辺々を足すと、

$$m_{\rm p}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\big(n_{\rm b}v_{\rm b}^i\big)+4H\,n_{\rm b}v_{\rm b}^i+\frac{n_{\rm b}}{a}\,\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\right\}=\langle c_{\rm ep}(q^i+Q^i)\rangle_{QQ'q'q}+\langle c_{\rm e\gamma}q^i\rangle_{pp'q'q},\tag{A.91}$$

となる。ここで、電子の質量は陽子の質量に比べて十分小さいことを用いた。そのため、左辺は陽子の寄与が支配的になる。一方、右辺の衝突項を見ると、クーロン散乱項には電子と陽子の両方の寄与がクーロン散乱項に現れる他、トムソン散乱項は電子の寄与のみ現れる。ここで、連続の式の導出時と同様に、保存則、つまりクーロン散乱で全運動量が保存することを考えると、$c_{\rm ep}(q^i+Q^i)$ を全運動量で積分した結果もやはりゼロになるはずである。従って、

$$\frac{\partial v_{\rm b}^i}{\partial t}+H\,v_{\rm b}^i+\frac{1}{a}\,\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}=\frac{1}{\rho_{\rm b}}\,\langle c_{\rm e\gamma}q^i\rangle_{pp'q'q},\tag{A.92}$$

が得られる。ここで、$\rho_{\rm b}=m_{\rm p}\,n_{\rm b}^{(0)}$ と定義し、$n_{\rm b}^{(0)}\propto a^{-3}$ であることを用いた。

残る部分はトムソン散乱項の評価である。クーロン散乱で全運動量 $\vec{q}+\vec{Q}$ が保存するのと同様、トムソン散乱でも $\vec{q}+\vec{p}$ が保存することを使うと、

$$\langle c_{\rm e\gamma}q^i\rangle_{pp'q'q}=-\langle c_{\rm e\gamma}p^i\rangle_{pp'q'q}.\tag{A.93}$$

となるので、右辺を手がかりに散乱項を評価する。$\langle c_{\rm e\gamma}\rangle_{p'q'q}$ は、A.2.3 節ですでに導出した。$\langle c_{\rm e\gamma}\rangle_{p'q'q}$ をフーリエ変換した表式は、(A.60) 式で与えられている。ここではさらに、光子の運動量 $\vec{p}$ をかけ、$\vec{p}$ で積分する：

$$\begin{aligned}[-\langle c_{\rm e\gamma}p^i\rangle_{pp'q'q}\text{のフーリエ変換}]&=\overline{n}_e\,\sigma_{\rm T}\int\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\,p^i\Big(p\,\frac{\partial f_0(p)}{\partial p}\Big)\\&\times\Big[\Theta_0(\boldsymbol{k})-\Theta(\boldsymbol{k},\hat{\gamma})+i\,\mu\,v_{\rm b}(\boldsymbol{k})-\frac{1}{2}\,\mathcal{P}_2(\mu)\,\Theta_2(\boldsymbol{k})\Big]\end{aligned}\tag{A.94}$$

一方、(A.92) 式左辺をフーリエ変換すると（速度場のフーリエ変換は (2.4) 式で与えられることを用いて)、

$$i\hat{k}^i\Big\{\frac{\partial v_{\rm b}}{\partial t}+H\,v_{\rm b}+\frac{k}{a}\,\Psi\Big\}\tag{A.95}$$

となるので、(A.92) 式全体をフーリエ変換した表式は（方向余弦 μ は $\mu=\hat{k}\cdot\hat{\gamma}$ と書けることを用いて)、

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_{\rm b}}{\partial t}+H\,v_{\rm b}+\frac{k}{a}\Psi&=-i\,\frac{\overline{n}_e\,\sigma_{\rm T}}{\rho_{\rm b}}\int\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\,p\mu\Big(p_\gamma\,\frac{\partial f_0(p_\gamma)}{\partial p_\gamma}\Big)\\&\times\Big[\Theta_0(\boldsymbol{k})-\Theta(\boldsymbol{k},\hat{\gamma})+i\,\mu\,v_{\rm b}(\boldsymbol{k})-\frac{1}{2}\,\mathcal{P}_2(\mu)\,\Theta_2(\boldsymbol{k})\Big]\end{aligned}\tag{A.96}$$

とまとまる。右辺の積分を順をおって計算する。運動量 $\vec{p}$ を、波数ベクトル $\vec{k}$ の向きを z-軸とする極座標で表して積分すると、

$$\begin{aligned}
&\int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\, p\,\mu\Big(p\,\frac{\partial f_0(p)}{\partial p}\Big)\left[\Theta_0(\boldsymbol{k})-\Theta(\boldsymbol{k},\hat{\gamma})+i\,\mu\, v_{\rm b}(\boldsymbol{k})-\frac{1}{2}\,\mathcal{P}_2(\mu)\,\Theta_2(\boldsymbol{k})\right]\\
&\quad=\int \frac{dp}{2\pi^2}\,p^4\,\frac{\partial f_0(p)}{\partial p}\,\int\frac{d\mu}{2}\,\mu\Big[\Theta_0(\boldsymbol{k})-\Theta(\boldsymbol{k},\mu)+i\,\mu\, v_{\rm b}(\boldsymbol{k})-\frac{1}{2}\,\mathcal{P}_2(\mu)\,\Theta_2(\boldsymbol{k})\Big]\\
&\quad=-4\Big\{\int \frac{dp}{2\pi^2}\,p^3\,f_0(p)\Big\}\int\frac{d\mu}{2}\,\mu\Big[\Theta_0(\boldsymbol{k})-\Theta(\boldsymbol{k},\mu)+i\,\mu\, v_{\rm b}(\boldsymbol{k})-\frac{1}{2}\,\mathcal{P}_2(\mu)\,\Theta_2(\boldsymbol{k})\Big]
\end{aligned} \tag{A.97}$$

ここで、括弧 $\{\cdots\}$ 内の p に関する積分は光子の（一様な）エネルギー密度 ρ_γ に相違ない。一方、後ろの μ-積分については、多重極展開の表式 (2.13) を代入し、ルジャンドル多項式の直交性を用いて計算すると、$i\,\{\Theta_1(\boldsymbol{k})+v_{\rm b}(\boldsymbol{k})/3\}$ が得られる。従って、(A.96) 式から、

$$\boxed{\frac{\partial v_{\rm b}}{\partial t}+H\,v_{\rm b}+\frac{k}{a}\Psi=-\,\overline{n}_e\,\sigma_{\rm T}\,\frac{4\rho_\gamma}{3\rho_{\rm b}}\,\big\{3\Theta_1+1\big\}}$$

が導出できる。これは、2 章の (2.11) 式に対応する発展方程式である。

A.5 ニュートリノのボルツマン方程式

最後にニュートリノのボルツマン方程式を考えよう。ニュートリノは弱い相互作用をする粒子だが、温度 $T_{\rm dec}\simeq 1\,{\rm MeV}$ で反応が切れるため、ダークマター同様、衝突項をゼロとおいた無衝突ボルツマン方程式によって記述される。ただし、ニュートリノは $\mathcal{O}(0.1)\,{\rm eV}$ 程度の小さな質量を持っており、$T_\nu\gg m$ を満たす時期では相対論的粒子として振舞い、非相対論的になるのは赤方偏移 $1+z_{\rm nr}=200(m_{\nu,i}/0.1\,{\rm eV})$ からである。その点に注意して発展方程式を導出する[4]。

まず、線形摂動まで含めたボルツマン方程式は、A.3 節で述べた導出と途中まで同じで、(A.66) 式の類推で、

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial t}+\frac{\hat{\gamma}^i}{a}\,\frac{p}{E}\,\frac{\partial f_\nu}{\partial x^i}-\Big\{(H+\dot{\Phi})\frac{p^2}{E}+\frac{p}{a}\,\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\,\hat{\gamma}^i\Big\}\frac{\partial f_\nu}{\partial E}=0 \tag{A.98}$$

と表される。コールドダークマターとの大きな違いは、運動量空間に広がりを持った分布関数である。ニュートリノの分布関数を一様成分とゆらぎの成分にわけて表す：

$$f_\nu=f_\nu^{(0)}+f_\nu^{(1)} \tag{A.99}$$

ニュートリノは熱平衡ではフェルミ-ディラック分布に従い、相対論的粒子の状態で反応が切れるため、反応凍結後の一様成分の分布関数 $f^{(0)}$ は、相対論的なフェルミ-ディラック分布

$$f_\nu^{(0)}=\big(e^{p/T_\nu}+1\big)^{-1} \tag{A.100}$$

[4]実験で見つかるニュートリノは、ニュートリノ振動によって 3 世代間でフレーバー混合が起こるが、重力不安定性に起因する構造形成を考える限り、フレーバー混合の影響は無視できるので、質量固有状態のニュートリノに対して各世代独立な時間発展を考える。

に従う[5]。なお、ニュートリノが非相対論的粒子になった後も、(A.100) 式は無衝突ボルツマン方程式の解として成り立ち、ニュートリノの温度は $T_\nu \propto a^{-1}$ に従って時間変化する。これをもとに、非一様成分の分布関数を

$$f_\nu^{(1)} = \frac{\partial f_\nu^{(0)}}{\partial \ln T_\nu}\mathcal{N} \tag{A.101}$$

と表すことにすると、(2.2) 式の定義と対応し、ニュートリノが質量ゼロの場合、摂動量 $\mathcal{N}$ は（ニュートリノの）温度ゆらぎとみなせる。

以上の定義のもと、(A.98) 式で与えられる無衝突ボルツマン方程式を一様成分とゆらぎの成分にわけて書き表すと、

$$\frac{\partial f_\nu^{(0)}}{\partial t} - H\frac{p^2}{E}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial E} = 0, \tag{A.102}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \ln T_\nu}\mathcal{N}\Big) + \frac{\hat{\gamma}^i}{a}\frac{p}{E}\frac{\partial f_\nu^{(0)}}{\partial \ln T_\nu}\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x^i} - H\frac{\partial}{\partial E}\Big(\frac{\partial f_\nu^{(0)}}{\partial \ln T_\nu}\mathcal{N}\Big) - \Big(\dot{\Phi}\frac{p^2}{E} + \frac{p}{a}\frac{\partial \Psi}{\partial x^i}\hat{\gamma}^i\Big)\frac{\partial f_\nu^{(0)}}{\partial E} = 0 \tag{A.103}$$

を得る。$E^2 = p^2 + m^2$ であることを用いると、(A.100) 式は確かに (A.102) 式の解になっていることがわかる。(A.102) 式を用いると、(A.103) 式は、

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \ln T_\nu}\Big(\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} + \frac{\hat{\gamma}^i}{a}\frac{p}{E}\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x^i}\Big) - \Big(\dot{\Phi}\frac{p^2}{E} + \frac{p}{a}\frac{\partial \Psi}{\partial x^i}\hat{\gamma}^i\Big)\frac{\partial f_\nu^{(0)}}{\partial E} = 0 \tag{A.104}$$

となり、さらに、 $\partial f^{(0)}/\partial E = -(E/p^2)(\partial f^{(0)}/\partial \ln T_\nu)$ が成り立つことを用いると、

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} + \frac{\hat{\gamma}^i}{a}\frac{p}{E}\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x^i} + \dot{\Phi} + \frac{E}{p}\frac{\hat{\gamma}^i}{a}\frac{\partial \Psi}{\partial x^i} = 0 \tag{A.105}$$

が得られる。フーリエ展開すると、最終的に

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} + i\frac{k\mu}{a}\Big(\frac{p}{E}\mathcal{N} + \frac{E}{p}\Psi\Big) + \dot{\Phi} = 0} \tag{A.106}$$

という発展方程式が得られる。

[5] 化学ポテンシャルは無視できると仮定。ビッグバン元素合成などの観測的制限からも化学ポテンシャルはほぼゼロであることが知られている。

Appendix B

非一様宇宙の測地線方程式

ここでは、ボルツマン方程式からゆらぎの線形摂動方程式を導出する際に必要となる光子（質量ゼロ）と有質量粒子の測地線方程式を、式 (2.1) で与えられる計量のもとで導出する。

B.1　光の測地線方程式

測地線の方程式は、$p^\mu \equiv dx^\mu/d\lambda$ で定義される 4 元運動量を用いて、一般に

$$\frac{dp^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\, p^\alpha\, p^\beta = 0 \tag{B.1}$$

で与えられる。ここで､λ はアフィンパラメーターであり､4 元運動量の時間成分 $p^0 = dt/d\lambda$ を通じて時間と関係づいている。

光の測地線方程式を導く際、光子は質量ゼロであり、４元運動量に対して光的条件、つまり $p_\nu p^\nu = 0$ を満たす必要がある点に注意する。この条件のため、４元運動量で独立な自由度は３つになる。そこで４元運動量を、

$$p^\mu = \left\{(1-\Psi)\, p,\, (1-\Phi)\, \frac{p}{a}\, \hat{\gamma}^i\right\} \tag{B.2}$$

と表すことにする。ここで、$\hat{\gamma}^i$ は３次元単位ベクトルで、

$$\delta_{ij}\, \hat{\gamma}^i \hat{\gamma}^j = 1 \tag{B.3}$$

を満たす。(B.2) 式において、p と $\hat{\gamma}^i$ はそれぞれ３次元運動量の大きさと向きの自然な定義になっており、光的条件についても、計量 (2.1) のもとで整合的に満たされることが具体的に計算してみるとわかる：

$$\begin{aligned}
p_\mu p^\mu &= g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu \\
&= g_{00}\, (p^0)^2 + g_{ij} p^i p^j \\
&= -(1+2\Psi)\, (1-\Psi)^2 p^2 + a^2 (1+2\Phi) \delta_{ij}\, (1-\Phi)^2 \left(\frac{p}{a}\right) \hat{\gamma}^i \hat{\gamma}^j \\
&= \Big\{-(1+2\Psi)\, (1-\Psi)^2 + (1+2\Phi)\, (1-\Phi)^2\Big\}\, p^2.
\end{aligned} \tag{B.4}$$

つまり、計量の摂動１次のオーダーまででゼロになる。

以上の準備のもと、A.2.1 節で用いた光子の測地線方程式　(A.30)(A.31) を導出しよう。まず、4 元運動量の具体的表式 (B.2) をたよりに、空間成分と時間成分の比 p^i/p^0 を取って整理する：

$$\begin{aligned} \frac{p^i}{p^0} &= (1-\Phi)(1+\Psi)\frac{\hat{\gamma}^i}{a} \\ &\simeq (1+\Psi-\Phi)\,\frac{\hat{\gamma}^i}{a}. \end{aligned} \tag{B.5}$$

ここで、p^i と p^0 が $dx^i/d\lambda$、$dt/d\lambda$ と書けることを用いると、ただちに、(A.30) 式が得られる：

$$\boxed{\frac{dx^i}{dt} = (1+\Psi-\Phi)\,\frac{\hat{\gamma}^i}{a}}$$

ついで、測地線方程式の時間成分に着目する：

$$\frac{dp^0}{d\lambda} + \Gamma^0_{\alpha\beta}\,p^\alpha p^\beta = 0. \tag{B.6}$$

上式の辺々を $p^0 = dt/d\lambda$ で割って、(B.2) 式で与えた 4 元運動量の第 0 成分を代入すると (Ψ が摂動量であることに注意して)、

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\big\{(1-\Psi)\,p\big\} + \Gamma^0_{\alpha\beta}\,\frac{p^\alpha p^\beta}{p}\,(1+\Psi) = 0, \\ \Longrightarrow\ &(1-\Psi)\frac{dp}{dt} = p\,\frac{d\Psi}{dt} - \Gamma^0_{\alpha\beta}\,\frac{p^\alpha p^\beta}{p}\,(1+\Psi). \end{aligned} \tag{B.7}$$

辺々に $(1+\Psi)$ をかけると、

$$\frac{dp}{dt} = p\Big\{\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\hat{\gamma}^i}{a}\,\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\Big\} - \Gamma^0_{\alpha\beta}\,\frac{p^\alpha p^\beta}{p}\,(1+2\Psi). \tag{B.8}$$

ここで、時間に関する微分 d/dt は粒子の運動に沿った微分であり、(A.30) 式を用いて、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + (1+\Psi-\Phi)\,\frac{\hat{\gamma}^i}{a}\,\frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned} \tag{B.9}$$

と書けることを用いた。(B.8) 式の右辺第 2 項については、(A.2)(A.3) 式で与えられたクリストッフェル記号と 4 元運動量の具体的表式を代入し、摂動の 1 次のオーダーまで拾うと、

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{\alpha\beta}\,\frac{p^\alpha p^\beta}{p} &= \Gamma^0_{00}\,\frac{(p^0)^2}{p} + 2\Gamma^0_{0i}\,\frac{p^0 p^i}{p} + \Gamma^0_{ij}\,\frac{p^i p^j}{p} \\ &= \frac{\partial\Psi}{\partial t}(1-\Psi)^2\,p + 2\,\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\,(1-\Psi)(1-\Phi)\,\frac{p}{a}\,\hat{\gamma}^i \\ &\quad + a^2\Big\{H + \frac{\partial\Phi}{\partial t} + 2H(\Phi-\Psi)\Big\}\,(1-\Phi)^2\,\frac{p}{a^2} \\ &\simeq (1-2\Psi)\,\Big\{H + \frac{\partial}{\partial t}(\Psi+\Phi) + 2\frac{\hat{\gamma}^i}{a}\,\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\Big\}\,p \end{aligned} \tag{B.10}$$

と求まる。従って、これを (B.8) 式に代入して整理すると、

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= p\Big\{\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\hat{\gamma}^i}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\Big\} - \Big\{H + \frac{\partial}{\partial t}(\Psi+\Phi) + 2\frac{\hat{\gamma}^i}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\Big\}p \\ &= \Big\{-H - \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{\hat{\gamma}^i}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\Big\}p \end{aligned} \tag{B.11}$$

となり、第 A.2.1 節の (A.31) 式、

$$\boxed{\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} = -H - \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{\hat{\gamma}^i}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}}$$

を得る。

なお、ボルツマン方程式の線形摂動には測地線方程式の空間成分は不要だが、ここから重力レンズ効果を記述する方程式が導けるため、以下、導出を示しておく。(B.1) 式の空間成分を p^0 で割ると、

$$\frac{dp^i}{dt} + \Gamma^i_{\alpha\beta}\frac{p^\alpha p^\beta}{p^0} = 0. \tag{B.12}$$

左辺第 1 項に (B.2) 式を代入して整理すると、

$$(1-\Phi)\,\frac{p}{a}\,\frac{d\hat{\gamma}^i}{dt} = -\hat{\gamma}^i\,\frac{d}{dt}\Big\{(1-\Phi)\frac{p}{a}\Big\} - \Gamma^i_{\alpha\beta}\frac{p^\alpha p^\beta}{p^0} \tag{B.13}$$

右辺第 1 項の微分は、上で導出した (A.31) 式と微分の関係式 (B.9) を用いて、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big\{(1-\Phi)\frac{p}{a}\Big\} &= (1-\Phi)\,\frac{p}{a}\,\Big\{-H + \frac{1}{p}\frac{dp}{dt} - \frac{d\Phi}{dt}\Big\} \\ &= -(1-\Phi)\,\frac{p}{a}\,\Big\{2\Big(H + \frac{\partial\Phi}{\partial t}\Big) + \frac{\hat{\gamma}^i}{a}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\,(\Psi+\Phi)\Big\}.\end{aligned} \tag{B.14}$$

と計算できる。一方、(B.13) 式の右辺第 2 項は、クリストッフェル記号 (A.2)(A.3) と (B.2) 式を代入して整理すると、

$$\begin{aligned}\Gamma^i_{\alpha\beta}\frac{p^\alpha p^\beta}{p^0} &= \Gamma^i_{00}p^0 + 2\Gamma^i_{0j}p^j + \Gamma^i_{jk}\frac{p^i p^j}{p^0} \\ &= \frac{p}{a^2}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i} + 2\Big(H + \frac{\partial\Phi}{\partial t}\Big)\,\frac{p}{a}(1-\Phi)\,\hat{\gamma}^i + \Big(\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}\delta_{ik} + \frac{\partial\Phi}{\partial x^k}\delta_{ij} - \frac{\partial\Phi}{\partial x^i}\delta_{jk}\Big)\frac{p}{a^2}\,\hat{\gamma}^j\hat{\gamma}^k \\ &= (1-\Phi)\,\frac{p}{a}\,\Big\{\frac{1}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i} + 2\Big(H + \frac{\partial\Phi}{\partial t}\Big)\,\hat{\gamma}^i + \frac{1}{a}\,\Big(2\,\hat{\gamma}^i\hat{\gamma}^j\,\frac{\partial\Phi}{\partial x^j} - \frac{\partial\Phi}{\partial x^i}\Big)\Big\}\end{aligned} \tag{B.15}$$

とまとまる。これら 2 式を (B.13) 式に代入し、両辺を共通因子 $(1-\Phi)(p/a)$ で割ると、

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\gamma}^i}{dt} &= \hat{\gamma}^i\Big\{2\Big(H + \frac{\partial\Phi}{\partial t}\Big) + \frac{\hat{\gamma}^j}{a}\,\frac{\partial}{\partial x^j}\,(\Psi+\Phi)\Big\} \\ &\qquad - \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x^i}(\Psi-\Phi) - 2\Big(H + \frac{\partial\Phi}{\partial t}\Big)\,\hat{\gamma}^i - \frac{2}{a}\,\hat{\gamma}^i\hat{\gamma}^j\,\frac{\partial\Phi}{\partial x^j} \\ &= -\frac{1}{a}\,\Big(\frac{\partial}{\partial x^i} - \hat{\gamma}^i\hat{\gamma}^j\,\frac{\partial}{\partial x^j}\Big)\,(\Psi-\Phi)\end{aligned} \tag{B.16}$$

従って、光子の運動量の向きに関する発展方程式

$$\frac{d\hat{\gamma}^i}{dt} = -\frac{1}{a}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} - \hat{\gamma}^i\hat{\gamma}^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\left(\Psi - \Phi\right) \tag{B.17}$$

が導出できる。$\hat{\gamma}^i$ は光の進行方向を表すベクトルであるが、右辺は微分作用素 $(\partial_i - \hat{\gamma}^i\hat{\gamma}^j\partial_j)$ のせいで、光の進行方向に対して直交する方向を向いている。つまり、物質の非一様性によって作られるポテンシャルにより、光の進行方向が曲げられる様子を表している。

B.2 有質量粒子の測地線方程式

質量 m を持った粒子の 4 元運動量 p^μ は、質量ゼロの光子とは異なり、 時間的条件、つまり $p_\mu p^\mu = -m^2$ を満たさねばならない。光子の 4 元運動量の具体的表式を参考に、

$$p^\mu = \left\{(1-\Psi)\,E,\,(1-\Phi)\,\frac{p}{a}\,\hat{\gamma}^i\right\}\,; \quad \delta_{ij}\hat{\gamma}^i\hat{\gamma}^j = 1 \tag{B.18}$$

と表す。この時、計量 (2.1) のもとで、

$$\begin{aligned} p_\mu p^\mu &= g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu \\ &= g_{00}\,(p^0)^2 + g_{ij}p^ip^j \\ &= -(1+2\Psi)\,(1-\Psi)^2E^2 + (1+2\Phi)(1-\Phi)^2\,p^2 \\ &\simeq -E^2 + p^2 \end{aligned} \tag{B.19}$$

となり、$E^2 = p^2 + m^2$ を満たせば、時間的条件が満たされることがわかる。つまり、(B.2) 式において、E と p はエネルギーと運動量に対応する自然な定義になっている。

ボルツマン方程式で用いる測地線方程式は、光子と場合と同様の要領で導出できる。まず、 4 元運動量の空間成分と時間成分の比を取る：

$$\frac{p^i}{p^0} = \frac{(1-\Phi)\,\dfrac{\hat{\gamma}^i}{a}\,p}{(1-\Psi)\,E} \simeq (1+\Psi-\Phi)\frac{p}{E}\,\frac{\hat{\gamma}^i}{a} \tag{B.20}$$

ここで、$p^i = dx^i/d\lambda$、$p^0 = dt/d\lambda$ より、$p^i/p^0 = dx^i/dt$ であるため、上式よりただちに、A.3 節の (A.64) 式、

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dt} = \frac{p^i}{p^0} \simeq \frac{\hat{\gamma}^i}{a}\,\frac{p}{E}\,(1-\phi+\Psi) \tag{B.21}$$

が得られる。次いで、測地線方程式の第 0 成分に注目し、辺々を $p^0 = dt/d\lambda$ で割る：

$$\begin{aligned} &\frac{dp^0}{dt} + \Gamma^0_{\alpha\beta}\,\frac{p^\alpha p^\beta}{p^0} = 0. \\ \Longrightarrow\ &(1-\Psi)\frac{dE}{dt} = E\,\frac{d\Psi}{dt} - \Gamma^0_{\alpha\beta}\,\frac{p^\alpha p^\beta}{p^0}. \end{aligned} \tag{B.22}$$

辺々に $(1+\Psi)$ をかけると、

$$\frac{dE}{dt} = E\frac{d\Psi}{dt} - \Gamma^0_{\alpha\beta}\,\frac{p^\alpha}{p^\beta}p^0(1+\Psi). \tag{B.23}$$

右辺第3項については、(A.2)(A.3) 式のクリストッフェル記号と4元運動量の (B.18) 式を手がかりに、摂動の1次までのオーダーで計算すると、

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{\alpha\beta}\,\frac{p^\alpha p^\beta}{p^0} &= \Gamma^0_{00}\,p^0 + 2\Gamma^0_{0i}\,p^i + \Gamma^0_{ij}\,\frac{p^i p^j}{p^0} \\
&= \frac{\partial\Psi}{\partial t}(1-\Psi)\,E + 2\,\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\,(1-\Phi)\,\frac{p}{a}\,\hat{\gamma}^i \\
&\quad + \left\{H + \frac{\partial\Phi}{\partial t} + 2H(\Phi-\Psi)\right\}(1-\Psi)(1-\Phi)^2\frac{p^2}{E} \\
&\simeq (1-\Psi)\,E\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \left(\frac{p}{E}\right)^2\left(H + \frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) + 2\frac{p}{E}\,\frac{\hat{\gamma}^i}{a}\,\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\right\}
\end{aligned} \tag{B.24}$$

が得られる。上式を (B.23) 式に代入して整理することで、

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= E\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{p}{E}\,\frac{\hat{\gamma}^i}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\right\} - E\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \left(\frac{p}{E}\right)^2\left(H + \frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) + 2\frac{p}{E}\,\frac{\hat{\gamma}^i}{a}\,\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\right\} \\
&= -E\left\{\left(\frac{p}{E}\right)^2(H+\dot{\Phi}) + \frac{p}{E}\,\frac{\hat{\gamma}^i}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\right\}
\end{aligned} \tag{B.25}$$

となり、A.3 節の (A.65) 式、

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = -E\left[(H+\dot{\Phi})\,\frac{p^2}{E^2} + \frac{1}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\,\hat{\gamma}^i\,\frac{p}{E}\right]}$$

が導出できる。

Appendix C

有用な公式

C.1 フーリエ変換

$$A(\boldsymbol{x}) = \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\, A(\boldsymbol{k})\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}, \tag{C.1}$$

$$A(\boldsymbol{k}) = \int d^3\boldsymbol{x}\, A(\boldsymbol{x})\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}. \tag{C.2}$$

Dirac's delta-function:

$$\delta_{\rm D}(\boldsymbol{x}) = \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}. \tag{C.3}$$

Relation between $\xi(r)$ and $P(k)$ (Wiener-Khintchine relation):

$$\xi(r) = \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\, P(|\boldsymbol{k}|)\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}, \tag{C.4}$$

$$P(k) = \int d^3\boldsymbol{r}\, \xi(|\boldsymbol{r}|)\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}. \tag{C.5}$$

C.2 ルジャンドル多項式

$$(1-\mu^2)\frac{d^2\mathcal{P}_\ell(\mu)}{d\mu^2} - 2\mu\frac{d\mathcal{P}_\ell(\mu)}{d\mu} + \ell(\ell+1)\,\mathcal{P}_\ell(\mu) = 0 \tag{C.6}$$

$$\int_{-1}^{1} d\mu\, \mathcal{P}_\ell(\mu)\, \mathcal{P}_{\ell'}(\mu) = \frac{2}{2\ell+1}\,\delta_{\ell\ell'} \tag{C.7}$$

$$\ell\,\mathcal{P}_\ell(\mu) - (2\ell-1)\mu\,\mathcal{P}_{\ell-1}(\mu) + (\ell-1)\mathcal{P}_{\ell-2}(\mu) = 0 \tag{C.8}$$

$$(\mu^2-1)\frac{d\mathcal{P}_\ell(\mu)}{d\mu} = \ell\,\{\mu\,\mathcal{P}_\ell(\mu) - \mathcal{P}_{\ell-1}(\mu)\} = (\ell+1)\{\mathcal{P}_{\ell+1}(\mu) - \mu\mathcal{P}_{\ell-1}(\mu)\} \tag{C.9}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_0(\mu) &= 1, \\
\mathcal{P}_1(\mu) &= \mu, \\
\mathcal{P}_2(\mu) &= \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1), \\
\mathcal{P}_3(\mu) &= \frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu), \\
\mathcal{P}_4(\mu) &= \frac{1}{8}(35\mu^4 - 30\mu^2 + 3),
\end{aligned} \tag{C.10}$$

$$\mathcal{P}_\ell(\hat{k}\cdot\hat{x}) = \frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}(\hat{k})\, Y^*_{\ell m}(\hat{x}). \tag{C.11}$$

C.3 エルミート多項式

$$H_n(x) = e^{x^2/2}\left(-\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2/2} \tag{C.12}$$

$$\frac{d^2 H_n(x)}{dx^2} - x\frac{dH_n(x)}{dx} + n\, H_n(x) = 0. \tag{C.13}$$

$$H_{n+1}(x) - x\, H_n(x) + n\, H_{n-1}(x) = 0, \tag{C.14}$$

$$\begin{aligned}
H_1(1) &= x, \\
H_2(x) &= x^2 - 1, \\
H_3(x) &= x^3 - 3x, \\
H_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 3, \\
H_5(x) &= x^5 - 10x^3 + 15x.
\end{aligned} \tag{C.15}$$

C.4 球ベッセル関数

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{d}{dx} + 1 - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\right] j_\ell(x) = 0 \tag{C.16}$$

$$j_\ell(x) = x^n\left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\sin x}{x} \tag{C.17}$$

$$\begin{aligned}
j_0(x) &= \frac{\sin x}{x}, \\
j_1(x) &= \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}, \\
j_2(x) &= \frac{(3-x^2)\sin x - 3x\cos x}{x^3}, \\
j_3(x) &= \frac{(15-6x^2)\sin x - x(15-x^2)\cos x}{x^4},
\end{aligned} \tag{C.18}$$

$$e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} = \sum_{\ell=0} i^\ell (2\ell+1)\, j_\ell(kx)\, \mathcal{P}_\ell(\hat{k}\cdot\hat{x}). \tag{C.19}$$

Bibliography

[1] C Alcock and B. Paczynski. An evolution free test for non-zero cosmological constant. *Nature*, 281:358, 1979.

[2] J. M. Bardeen, J. R. Bond, N. Kaiser, and A. S. Szalay. The statistics of peaks of Gaussian random fields. ApJ, 304:15–61, May 1986.

[3] F. Bernardeau, S. Colombi, E. Gaztañaga, and R. Scoccimarro. Large-scale structure of the Universe and cosmological perturbation theory. Phys. Rep., 367:1–248, September 2002.

[4] F. Bernardeau, M. Crocce, and R. Scoccimarro. Multipoint propagators in cosmological gravitational instability. Phys. Rev. D, 78(10):103521, November 2008.

[5] F. Bernardeau, M. Crocce, and R. Scoccimarro. Constructing regularized cosmic propagators. Phys. Rev. D, 85(12):123519, June 2012.

[6] F. Bernardeau, N. van de Rijt, and F. Vernizzi. Resummed propagators in multicomponent cosmic fluids with the eikonal approximation. Phys. Rev. D, 85(6):063509, March 2012.

[7] F. Beutler, H.-J. Seo, A. J. Ross, P. McDonald, S. Saito, A. S. Bolton, J. R. Brownstein, C.-H. Chuang, A. J. Cuesta, D. J. Eisenstein, A. Font-Ribera, J. N. Grieb, N. Hand, F.-S. Kitaura, C. Modi, R. C. Nichol, W. J. Percival, F. Prada, S. Rodriguez-Torres, N. A. Roe, N. P. Ross, S. Salazar-Albornoz, A. G. Sánchez, D. P. Schneider, A. Slosar, J. Tinker, R. Tojeiro, M. Vargas-Magaña, and J. A. Vazquez. The clustering of galaxies in the completed SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: Baryon Acoustic Oscillations in Fourier-space. MNRAS, September 2016.

[8] G. L. Bryan and M. L. Norman. Statistical Properties of X-Ray Clusters: Analytic and Numerical Comparisons. ApJ, 495:80–99, March 1998.

[9] T. Buchert. A class of solutions in Newtonian cosmology and the pancake theory. A&A, 223:9–24, October 1989.

[10] T. Buchert. Lagrangian theory of gravitational instability of Friedman-Lemaitre cosmologies and the 'Zel'dovich approximation'. MNRAS, 254:729–737, February 1992.

[11] T. Buchert and J. Ehlers. Lagrangian theory of gravitational instability of Friedman-Lemaitre cosmologies – second-order approach: an improved model for non-linear clustering. MNRAS, 264, September 1993.

[12] S. M. Carroll, W. H. Press, and E. L. Turner. The cosmological constant. ARA&A, 30:499–542, 1992.

[13] P. Catelan. Lagrangian dynamics in non-flat universes and non-linear gravitational evolution. MNRAS, 276:115–124, September 1995.

[14] K. C. Chan, R. Scoccimarro, and R. K. Sheth. Gravity and large-scale nonlocal bias. Phys. Rev. D, 85(8):083509, April 2012.

[15] A. Cooray and R. Sheth. Halo models of large scale structure. Phys. Rep., 372:1–129, December 2002.

[16] M. Crocce and R. Scoccimarro. Renormalized cosmological perturbation theory. Phys. Rev. D, 73(6):063519, March 2006.

[17] Vincent Desjacques, Donghui Jeong, and Fabian Schmidt. Large-scale galaxy bias. Phys. Rep., 733:1–193, February 2018.

[18] S. Dodelson. *Modern cosmology*. 2003.

[19] D. J. Eisenstein and W. Hu. Baryonic Features in the Matter Transfer Function. ApJ, 496:605–614, March 1998.

[20] G. F. R. Ellis. On the definition of distance in general relativity: I. M. H. Etherington (Philosophical Magazine ser. 7, vol. 15, 761 (1933)). *General Relativity and Gravitation*, 39:1047–1052, July 2007.

[21] I. M. H. Etherington. On the Definition of Distance in General Relativity. *Philosophical Magazine*, 15, 1933.

[22] J. N. Fry and E. Gaztanaga. Biasing and hierarchical statistics in large-scale structure. ApJ, 413:447–452, August 1993.

[23] C. Hikage and K. Yamamoto. Impacts of satellite galaxies on the redshift-space distortions. J. Cosmology Astropart. Phys., 8:019, August 2013.

[24] E. Hivon, F. R. Bouchet, S. Colombi, and R. Juszkiewicz. Redshift distortions of clustering: a Lagrangian approach. A&A, 298:643, June 1995.

[25] W. Hu and D. J. Eisenstein. Small-Scale Perturbations in a General Mixed Dark Matter Cosmology. ApJ, 498:497–503, May 1998.

[26] W. Hu and N. Sugiyama. Small-Scale Cosmological Perturbations: an Analytic Approach. ApJ, 471:542, November 1996.

[27] N. Kaiser. On the spatial correlations of Abell clusters. ApJ, 284:L9–L12, September 1984.

[28] N. Kaiser. Clustering in real space and in redshift space. MNRAS, 227:1–21, July 1987.

[29] I. Kayo, M. Takada, and B. Jain. Information content of weak lensing power spectrum and bispectrum: including the non-Gaussian error covariance matrix. MNRAS, 429:344–371, February 2013.

[30] Martin Kilbinger. Cosmology with cosmic shear observations: a review. *Reports on Progress in Physics*, 78:086901, July 2015.

[31] H. Kodama and M. Sasaki. Evolution of Isocurvature Perturbations II:. Radiation-Dust Universe. *International Journal of Modern Physics A*, 2:491–560, 1987.

[32] E. Komatsu, K. M. Smith, J. Dunkley, C. L. Bennett, B. Gold, G. Hinshaw, N. Jarosik, D. Larson, M. R. Nolta, L. Page, D. N. Spergel, M. Halpern, R. S. Hill, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, N. Odegard, G. S. Tucker, J. L. Weiland, E. Wollack, and E. L. Wright. Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation. ApJS, 192:18, February 2011.

[33] J. Lesgourgues and S. Pastor. Massive neutrinos and cosmology. Phys. Rep., 429:307–379, July 2006.

[34] Antony Lewis and Anthony Challinor. Weak gravitational lensing of the CMB. Phys. Rep., 429:1–65, June 2006.

[35] E. V. Linder. Redshift distortions as a probe of gravity. *Astroparticle Physics*, 29:336–339, June 2008.

[36] T. Matsubara. Resumming cosmological perturbations via the Lagrangian picture: One-loop results in real space and in redshift space. Phys. Rev. D, 77(6):063530, March 2008.

[37] T. Matsubara. Nonlinear perturbation theory integrated with nonlocal bias, redshift-space distortions, and primordial non-Gaussianity. Phys. Rev. D, 83(8):083518, April 2011.

[38] T. Matsubara. Recursive solutions of Lagrangian perturbation theory. Phys. Rev. D, 92(2):023534, July 2015.

[39] T. Matsubara and V. Desjacques. Impacts of biasing schemes in the one-loop integrated perturbation theory. Phys. Rev. D, 93(12):123522, June 2016.

[40] P. McDonald and A. Roy. Clustering of dark matter tracers: generalizing bias for the coming era of precision LSS. J. Cosmology Astropart. Phys., 8:020, August 2009.

[41] M. Mirbabayi, F. Schmidt, and M. Zaldarriaga. Biased tracers and time evolution. J. Cosmology Astropart. Phys., 7:030, July 2015.

[42] H. Mo, F. C. van den Bosch, and S. White. *Galaxy Formation and Evolution*. May 2010.

[43] F. Moutarde, J.-M. Alimi, F. R. Bouchet, R. Pellat, and A. Ramani. Precollapse scale invariance in gravitational instability. ApJ, 382:377–381, December 1991.

[44] T. T. Nakamura and Y. Suto. Strong Gravitational Lensing and Velocity Function as Tools to Probe Cosmological Parameters — Current Constraints and Future Predictions —. *Progress of Theoretical Physics*, 97, January 1997.

[45] T. Nishimichi, H. Ohmuro, M. Nakamichi, A. Taruya, K. Yahata, A. Shirata, S. Saito, H. Nomura, K. Yamamoto, and Y. Suto. Characteristic Scales of Baryon Acoustic Oscillations from Perturbation Theory: Nonlinearity and Redshift-Space Distortion Effects. PASJ, 59:1049–1060, December 2007.

[46] T. Padmanabhan. Cosmological constant-the weight of the vacuum. Phys. Rep., 380:235–320, July 2003.

[47] M. Pietroni. Flowing with time: a new approach to non-linear cosmological perturbations. J. Cosmology Astropart. Phys., 10:036, October 2008.

[48] Planck Collaboration, P. A. R. Ade, N. Aghanim, M. Arnaud, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, A. J. Banday, R. B. Barreiro, J. G. Bartlett, and et al. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. A&A, 594:A13, September 2016.

[49] Shohei Saga, Atsushi Taruya, and Stéphane Colombi. Lagrangian Cosmological Perturbation Theory at Shell Crossing. Phys. Rev. Lett., 121:241302, December 2018.

[50] S. Saito, T. Baldauf, Z. Vlah, U. Seljak, T. Okumura, and P. McDonald. Understanding higher-order nonlocal halo bias at large scales by combining the power spectrum with the bispectrum. Phys. Rev. D, 90(12):123522, December 2014.

[51] M. Shoji and E. Komatsu. Massive neutrinos in cosmology: Analytic solutions and fluid approximation. Phys. Rev. D, 81(12):123516, June 2010.

[52] N. Sugiyama. Cosmic Background Anisotropies in Cold Dark Matter Cosmology. ApJS, 100:281, October 1995.

[53] N. S. Sugiyama and T. Futamase. An Application of the Wiener Hermite Expansion to the Nonlinear Evolution of Dark Matter. ApJ, 760:114, December 2012.

[54] M. Takada and B. Jain. The impact of non-Gaussian errors on weak lensing surveys. MNRAS, 395:2065–2086, June 2009.

[55] A. Taruya, F. Bernardeau, T. Nishimichi, and S. Codis. Direct and fast calculation of regularized cosmological power spectrum at two-loop order. Phys. Rev. D, 86(10):103528, November 2012.

[56] A. Taruya and T. Hiramatsu. A Closure Theory for Nonlinear Evolution of Cosmological Power Spectra. ApJ, 674:617–635, February 2008.

[57] A. Taruya, T. Nishimichi, and F. Bernardeau. Precision modeling of redshift-space distortions from a multipoint propagator expansion. Phys. Rev. D, 87(8):083509, April 2013.

[58] Y. B. Zel'dovich. Gravitational instability: An approximate theory for large density perturbations. A&A, 5:84–89, March 1970.