2018/3/29-30
研究会「宇宙論における高次統計」
@基研

バイスペクトルと宇宙論

樽家 篤史

バイスペクトルとは？

アンサンブル平均

$$\langle\delta(\boldsymbol{k}_1)\delta(\boldsymbol{k}_2)\delta(\boldsymbol{k}_3)\rangle = (2\pi)^3\,\delta_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_3)\,B(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)$$

密度ゆらぎ

- ３点相関関数のフーリエ版
- 多点統計量の中で２点統計に次いで単純な統計量
- 非ガウス性を表す統計指標

パワースペクトルに次いで豊富な宇宙論情報を含んでいる

次世代大規模構造観測による宇宙論研究で重要な統計量

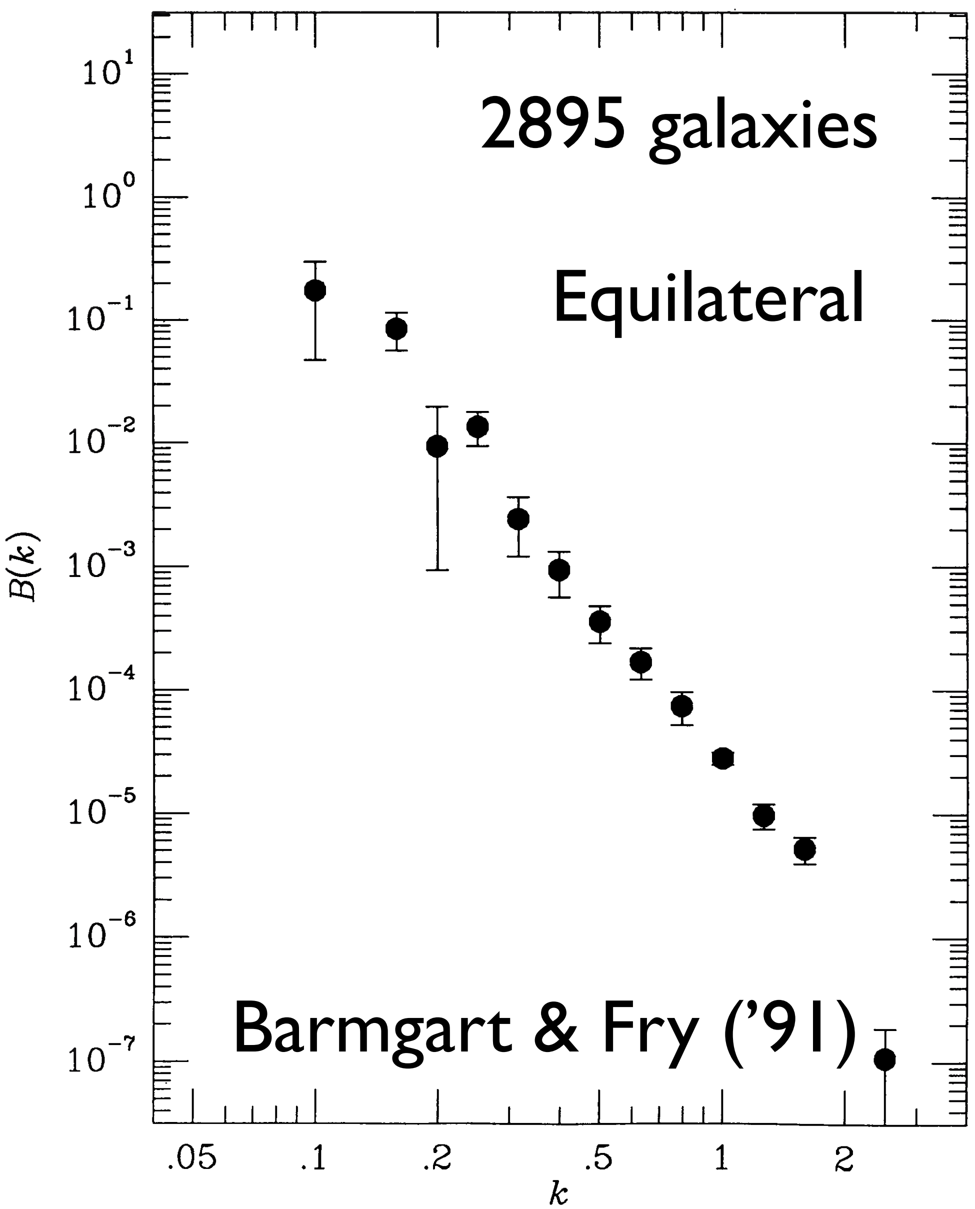
今回の研究会の狙い

技術的・理論的な課題を洗い出す

初期の観測

Peebles ('75), Peebles & Groth ('75)　　（角度）３点相関

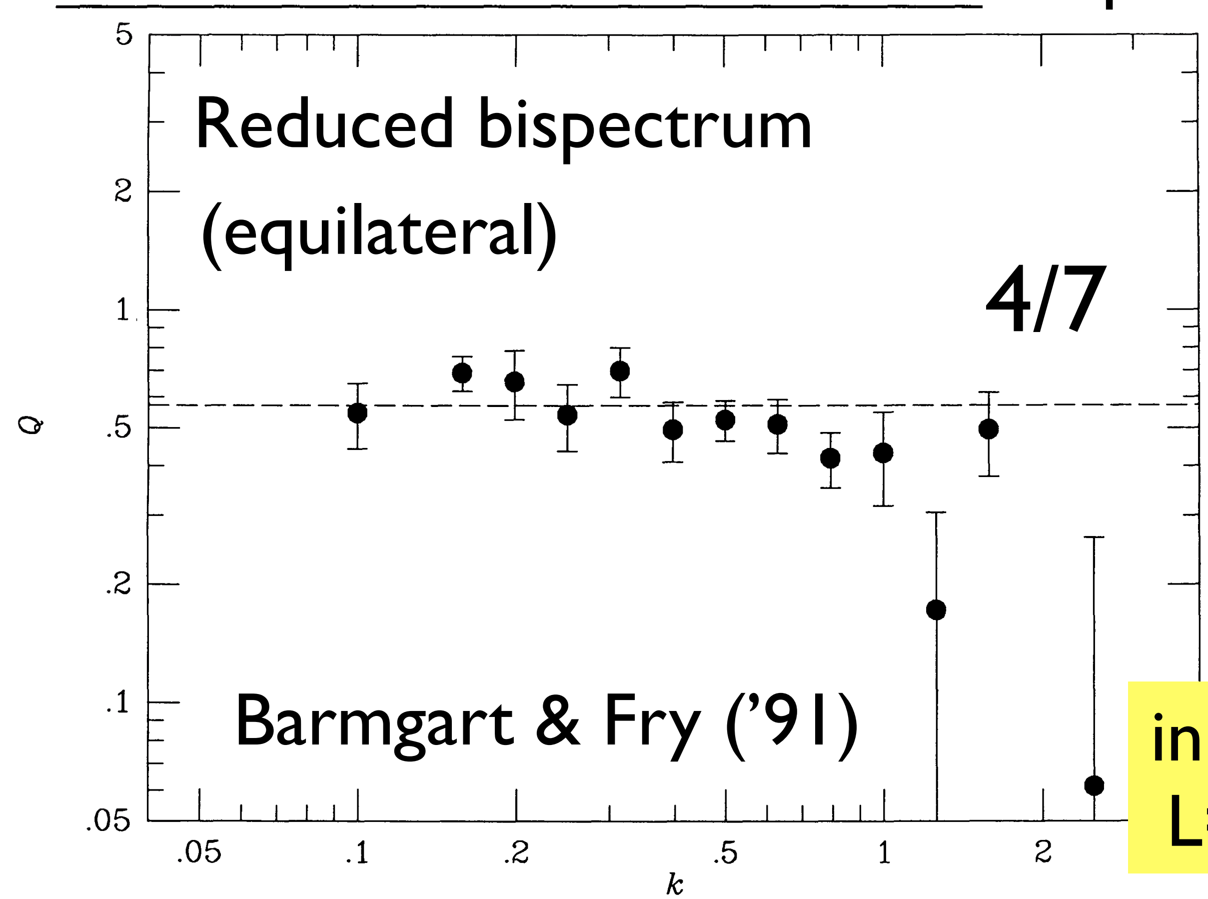
Barmgart & Fry ('91)　　（３次元）バイスペクトル



Sample	M_c	D	N
CfA 1.........	$-17.5 + 5 \log h$	$25h^{-1}$ Mpc	407
CfA 2.........	$-18.5 + 5 \log h$	$40h^{-1}$ Mpc	332
CfA 3.........	$-19.5 + 5 \log h$	$64h^{-1}$ Mpc	189
GH 1.........	$-18.6 + 5 \log h$	$65h^{-1}$ Mpc	878
GH 2.........	$-19.4 + 5 \log h$	$94h^{-1}$ Mpc	659
GH 3.........	$-19.9 + 5 \log h$	$119h^{-1}$ Mpc	430

CfA survey

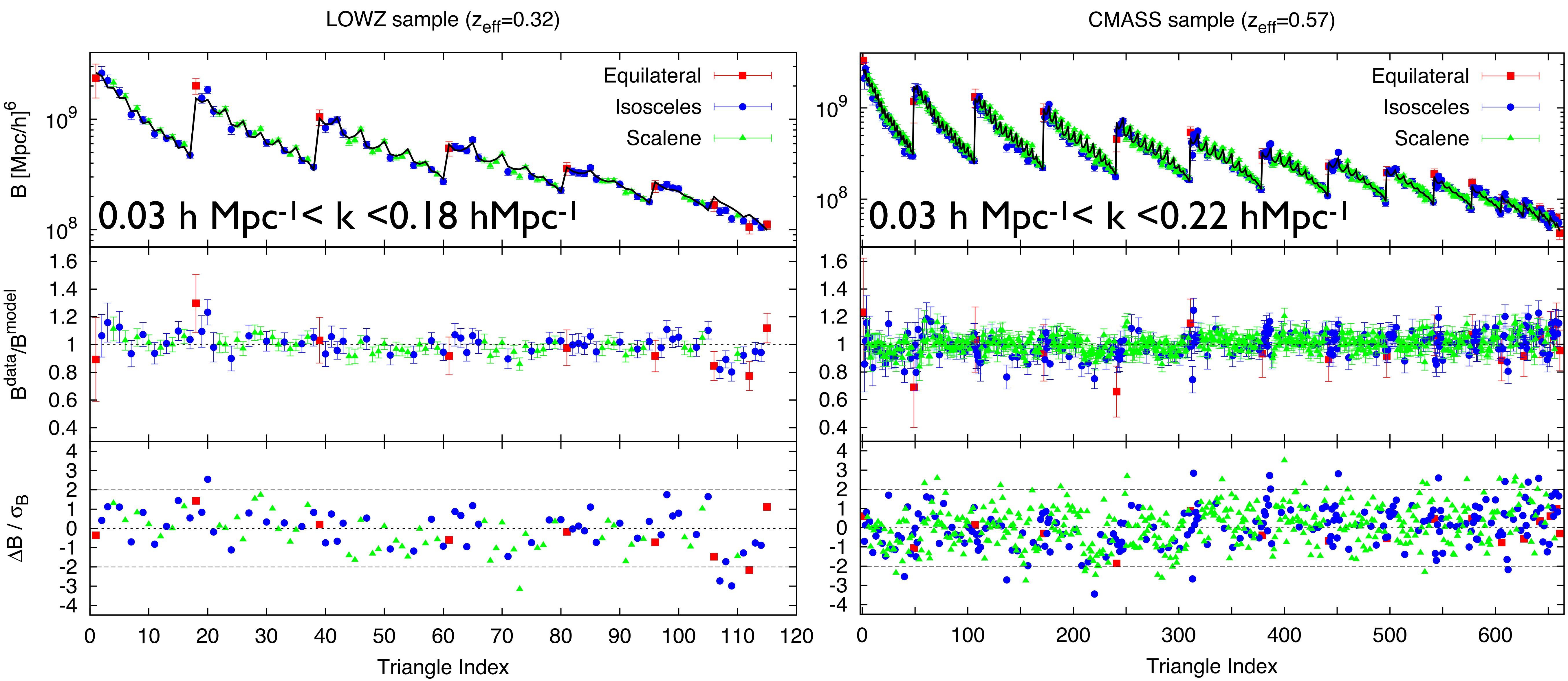
Giovanelli & Haynes survey (Pisces-Perseus super cluster region)

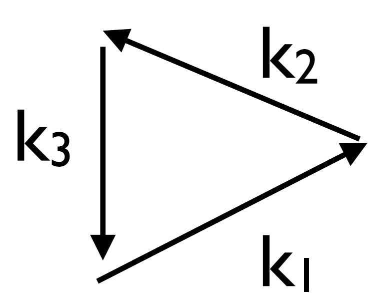


in physical units of L=64 h^{-1}Mpc box

最近の観測

Gil-Marin et al. ('17)





N_0=2 (LOWZ), 3 (CMASS)

$\Delta k=6k_f$

We then plot the bispectrum for triangular bins where we sequentially loop through all possible sets of values of k_1, k_2 and k_3, with k_3 in the inner most loop, and k_1 in the outer most increasing loop, where the loops go from $N_0\Delta k$ to the maximum value considered, either $k_{\rm Ny}/2$, a truncation scale set by our constraints $k_1 \leq k_2 \leq k_3$ and $k_i < k_1 + k_2$, or the maximum k-value considered. For the bispectrum displayed in Fig. 2, the data points have been coloured according to the type of triangular shape they represent. Equilateral triangles are displayed by red squares, isosceles by blue circles and scalene by green triangles.

統計精度が上がっている→精密宇宙論へ応用

バイスペクトルの理論：初歩

摂動論的理解

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \cdots \quad ; \;\; \delta_n \sim \mathcal{O}(\delta_1^n)$$

ガウス的初期条件の場合　（δ_I：ガウス場）

$$\langle \delta(\boldsymbol{k}_1)\delta(\boldsymbol{k}_2)\delta(\boldsymbol{k}_3)\rangle \simeq \langle \delta_1(\boldsymbol{k}_1)\delta_1(\boldsymbol{k}_2)\delta_2(\boldsymbol{k}_3)\rangle + \langle \delta_2(\boldsymbol{k}_1)\delta_1(\boldsymbol{k}_2)\delta_1(\boldsymbol{k}_3)\rangle + \langle \delta_1(\boldsymbol{k}_1)\delta_2(\boldsymbol{k}_2)\delta_1(\boldsymbol{k}_3)\rangle + \cdots .$$

ツリー近似の表式

$$B(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3) \simeq \Big\{ 2F_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)P_\mathrm{lin}(k_1)P_\mathrm{lin}(k_2) + (\text{cyclic perm.}) \Big\}$$

2次の摂動カーネル

$$F_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) = \frac{5}{7} + \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2}{k_1k_2}\left(\frac{k_1}{k_2}+\frac{k_2}{k_1}\right) + \frac{2}{7}\frac{(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2)^2}{\boldsymbol{k}_1^2\boldsymbol{k}_2^2}$$

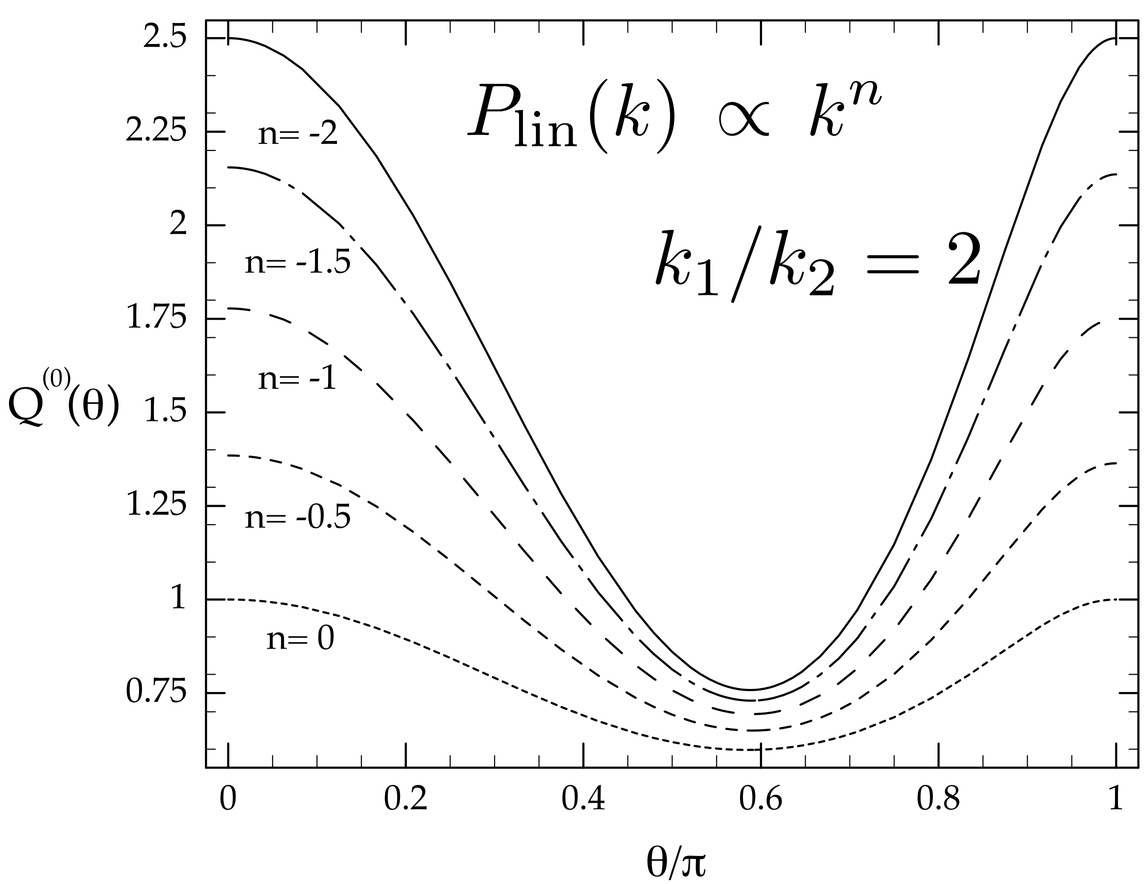
バイスペクトルの理論：初歩

実空間では（赤方偏移空間歪みなし）３変数の関数：

$|k_1|$, $|k_2|$, $|k_3|$ or $|k_1|$, $|k_2|$, θ_{12}

Reduced bispectrum

$$Q(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_3) \equiv \frac{B(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_3)}{P(k_1)P(k_2) + P(k_2)P(k_3) + P(k_1)P(k_3)}$$



→ ツリー近似ではゆらぎの振幅（規格化）に依らなくなる

（P(k)のシェイプにのみ依存）

正三角形 ($|k_1|=|k_2|=|k_3|$)では $Q = \dfrac{4}{7}$

Scoccimarro ('97)

バイスペクトルの理論：初歩

銀河バイアス
(ローカルバイアス)

物質密度場

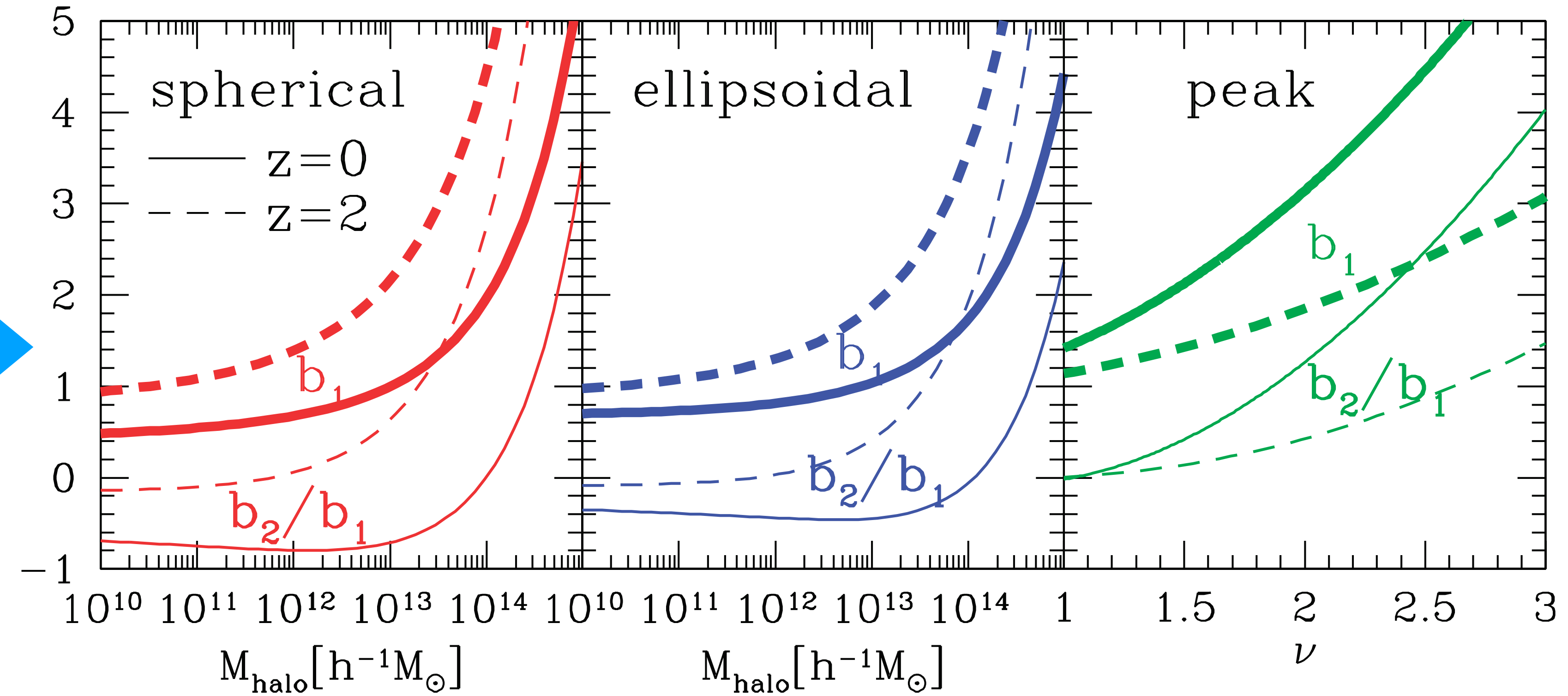
$$\delta_{\rm gal} = b_1\delta_{\rm m} + \frac{b_2}{2}\left(\delta_{\rm m}^2 - \langle\delta_{\rm m}^2\rangle\right) + \cdots$$

ツリー近似

$$B_{\rm gal}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3) = b_1^3 B_{\rm m}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3) + b_2 b_1^2 \left\{\, P_{\rm lin}(k_1)P_{\rm lin}(k_2) + (\text{cyclic perm.})\,\right\}$$

$$Q_{\rm gal}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3) = \frac{1}{b_1}\left[Q_{\rm m}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3) + \frac{b_2}{b_1}\right]$$

ハロー・ピークモデル
にもとづく予言



Nishimichi et al. ('07)

バイスペクトルの理論：初歩

赤方偏移空間ゆがみ：銀河の特異速度場の影響

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{x} + \frac{1+z}{H(z)}\left(\boldsymbol{v}\cdot\hat{z}\right)\hat{z}$$

$\boldsymbol{s}$ ：赤方偏移空間

$\boldsymbol{x}$ ：実空間

赤方偏移空間の密度場

$$\{1+\delta^{(\mathrm{S})}(\boldsymbol{s})\}d^3\boldsymbol{s} = \{1+\delta_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{x})\}d^3\boldsymbol{x} \longrightarrow \delta^{(\mathrm{S})}(\boldsymbol{s}) = \{1+\delta_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{x})\}\left|\frac{\partial\boldsymbol{s}}{\partial\boldsymbol{x}}\right|^{-1} - 1$$

$$\delta^{(\mathrm{S})}(\boldsymbol{k}) = \int d^3\boldsymbol{s}\,\delta^{(\mathrm{S})}(\boldsymbol{s})\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{s}}$$

$$\mu_i \equiv \frac{\boldsymbol{q}_i\cdot\hat{z}}{|\boldsymbol{q}|} \qquad \theta \equiv -\frac{\nabla\cdot\boldsymbol{v}}{f\,a\,H}$$

$$= \delta(\boldsymbol{k}) + f\,\mu^2\,\theta(\boldsymbol{k})$$

$$+\sum_{n=2}\int\frac{d^3\boldsymbol{q}_1}{(2\pi)^3}\cdots\int\frac{d^3\boldsymbol{q}_n}{(2\pi)^3}\delta_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}_{1\cdots n})\,\{\delta(\boldsymbol{k})+f\mu^2\theta(\boldsymbol{k})\}\frac{(f\mu\,k)^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{\mu_2}{q_2}\theta(\boldsymbol{q}_2)\cdots\frac{\mu_n}{q_n}\theta(\boldsymbol{q}_n)$$

$$= \sum_{n=1}\int\frac{d^3\boldsymbol{q}_1}{(2\pi)^3}\cdots\int\frac{d^3\boldsymbol{q}_n}{(2\pi)^3}\delta_D(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}_{1\cdots n})Z_n(\boldsymbol{q}_1,\cdots,\boldsymbol{q}_n)\delta_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}_1)\cdots\delta_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{q}_n)$$

赤方偏移空間の摂動論カーネル

バイスペクトルの理論：初歩

赤方偏移空間のバイスペクトル

実空間の摂動論カーネル F_n をZ_n におきかえる：

ツリー近似の公式

Scoccimarro et al. ('99)

$$B^{\rm tree}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)=2Z_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)Z_1(\boldsymbol{k}_1)Z_1(\boldsymbol{k}_2)P_{\rm lin}(k_1)P_{\rm lin}(k_2)+2\text{ perms }(\boldsymbol{k}_1\leftrightarrow\boldsymbol{k}_2\leftrightarrow\boldsymbol{k}_3)$$

$$Z_1(\boldsymbol{k})=(b+f\mu^2)$$

$$Z_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)=bF_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)+f\mu^2G_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)+\frac{f\mu k}{2}\left[\frac{\mu_1}{k_1}(b+f\mu_2^2)+\frac{\mu_2}{k_2}(b+f\mu_1^2)\right]+\frac{b_2}{2}$$

統計的な等方性が破れる

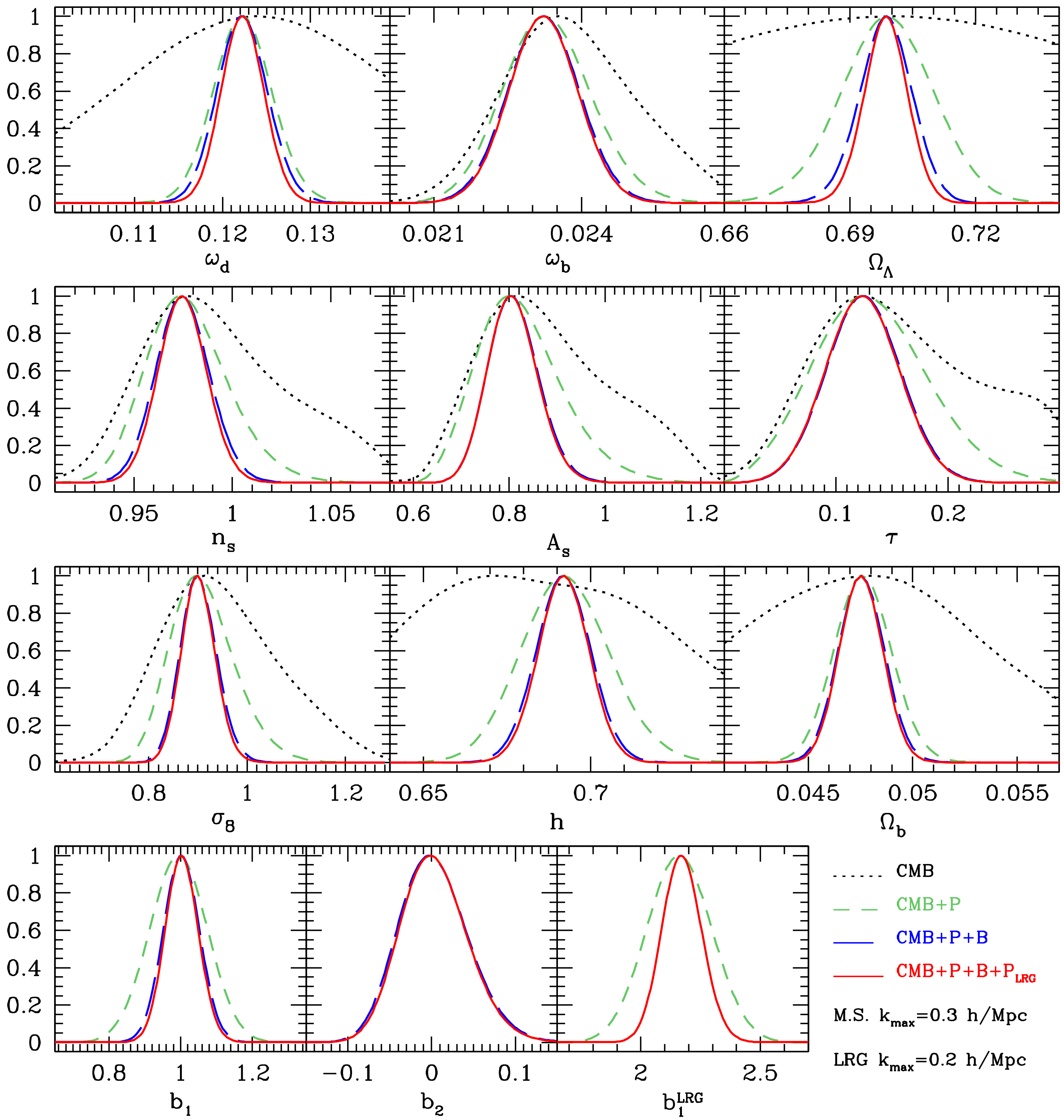
→三角形（k_1, k_2, k_3）の形以外に視線方向に対する方位にも依る

（５変数）

どう特徴づけるか？

バイスペクトルの宇宙論情報

バイスペクトル（モノポール成分）のシェイプを使った
宇宙論パラメーターの制限



フィッシャー解析

CMB (WMAP)

CMB+P

CMB+P+B

CMB+P+B+P_{LRG}

M.S. k_{max}=0.3 h/Mpc

LRG k_{max}=0.2 h/Mpc

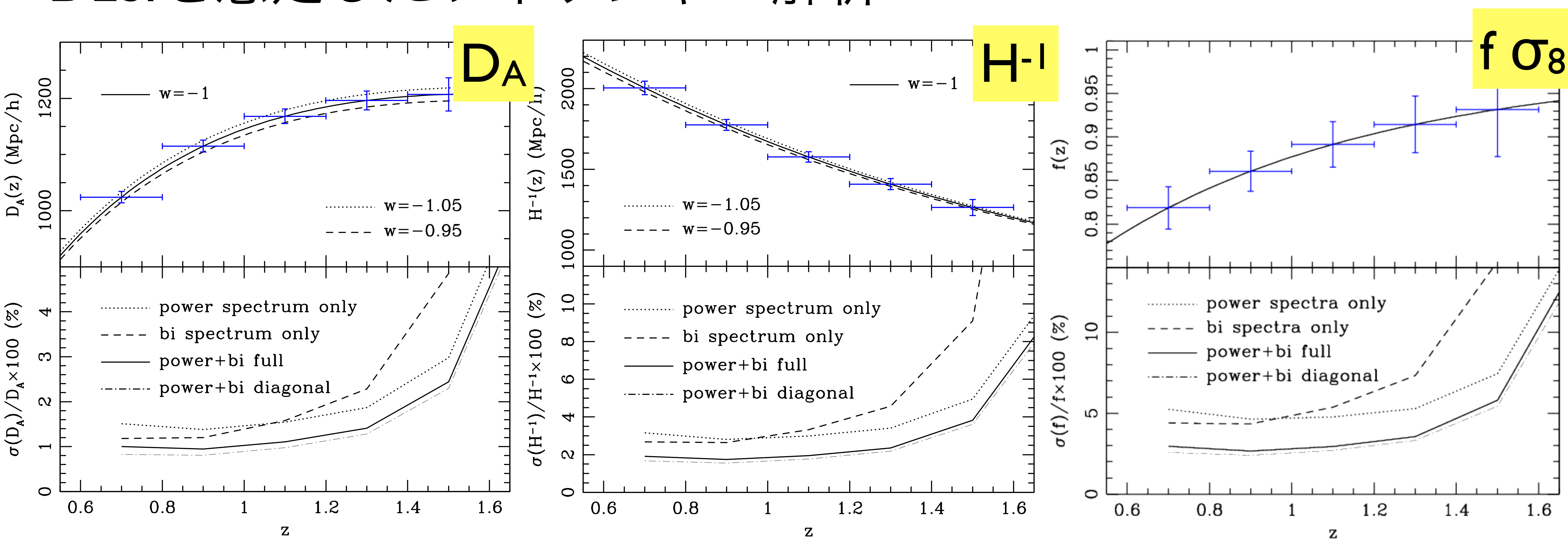
Sefusatti et al. ('06)

バイスペクトルの宇宙論情報

赤方偏移空間歪みとAlcock-Paczynski 効果を利用した制限
（フルシェイプを使って）

k_{max}=0.1 h^{-1}Mpc

DESIを想定したフィッシャー解析



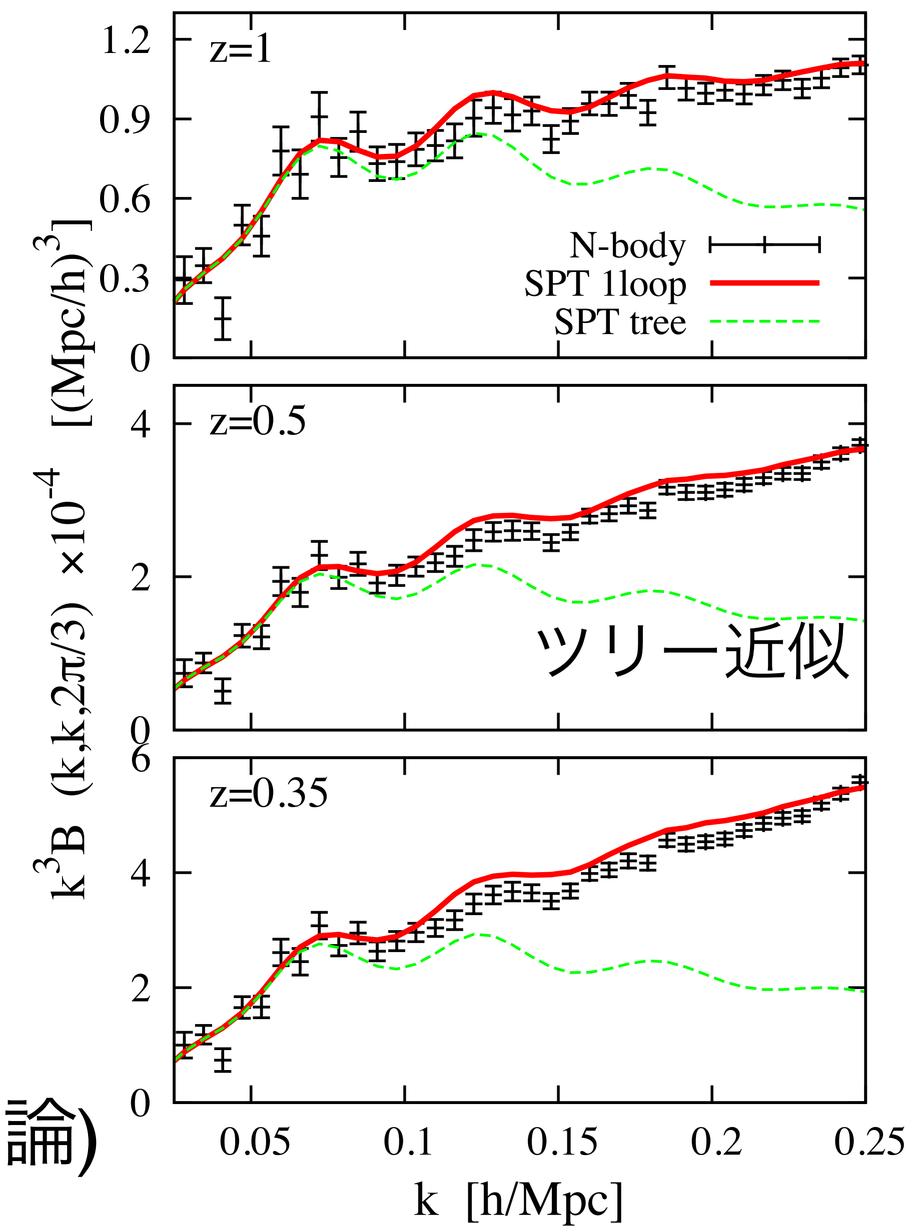
Song, AT & Oka ('15)

ダークエネルギー状態方程式

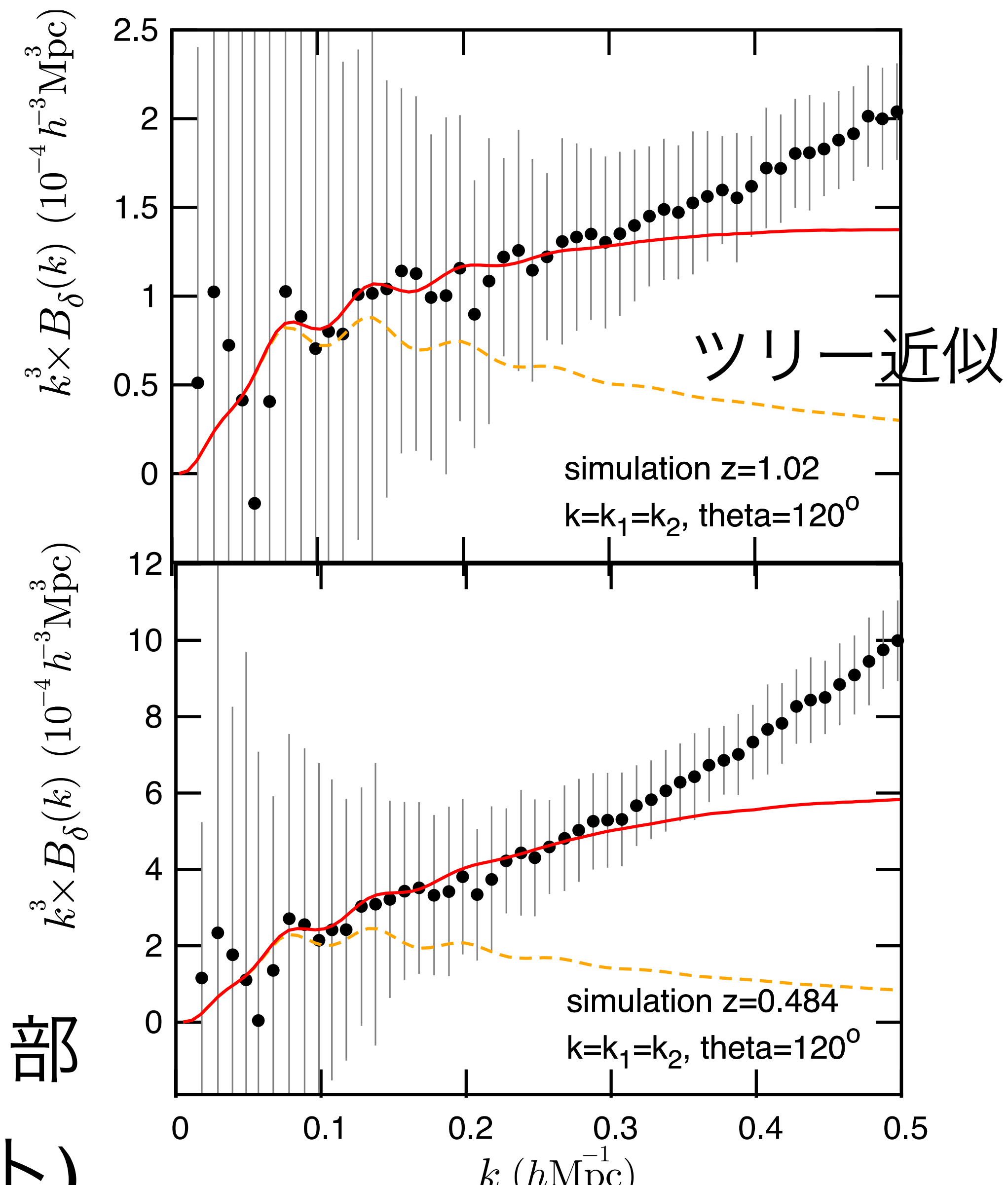
宇宙論的スケールでの重力テスト

課題：非線形性

ツリー近似の適用範囲は広くない



橋本(D論)



高橋(内部レポート)

フィッティング公式の精度も 5%（以上?） (e.g., Gil-Marin et al.'14)

非等方性には応用できない

課題：バイスペクトルの定量化

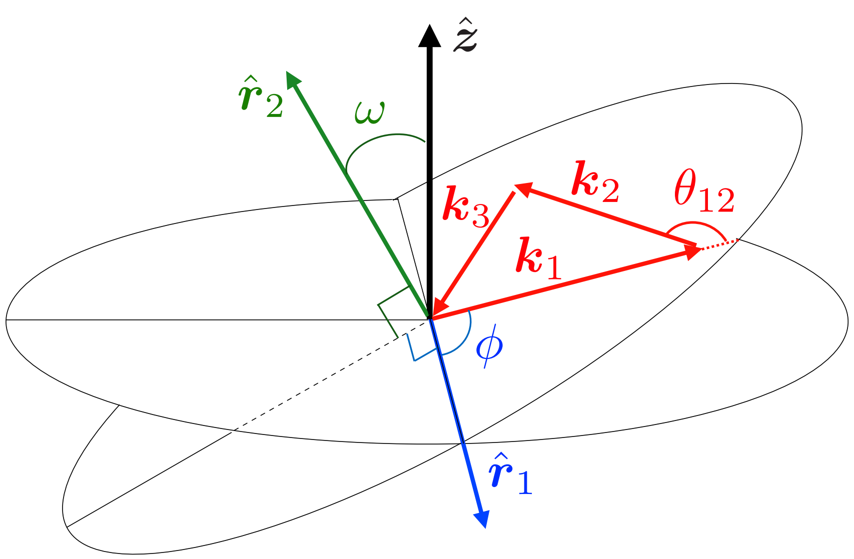
赤方偏移空間におけるバイスペクトルの非等方性

（５変数）

- ゆらぎの成長率 (f)
- 幾何学的距離 (D_A, H^{-1})

サーベイ形状・マスクの影響を考慮して

どうやって効率よく特徴づけするか？



TripoSH

$$B(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \hat{n}) = \sum_{JM_J} \sum_{\ell_1\ell_2L\ell_{12}} B^{JM_J}_{\ell_1\ell_2\ell_{12}L}(k_1, k_2) S^{JM_J}_{\ell_1\ell_2\ell_{12}L}(\hat{k}_1, \hat{k}_2, \hat{n}),$$

$$S^{JM_J}_{\ell_1\ell_2\ell_{12}L}(\hat{k}_1, \hat{k}_2, \hat{n}) = \sum_{m_1m_2m_{12}M} C^{\ell_{12}m_{12}}_{\ell_1m_1;\ell_2m_2} C^{JM_J}_{\ell_{12}m_{12};LM} \; y^{m_1}_{\ell_1}(\hat{k}_1) y^{m_2}_{\ell_2}(\hat{k}_2) y^{M}_{L}(\hat{n}),$$

$$C^{\ell_3m_3}_{\ell_1m_1;\ell_2m_2} = (-1)^{\ell_1-\ell_2+m_3}\sqrt{2\ell_3+1}\begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & -m_3 \end{pmatrix}$$

Sugiyama et al. ('18)

課題：エラー共分散

宇宙論データ解析

$$\mathcal{L}_B \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\chi_B^2\right\}; \quad \chi_B^2 \equiv \sum_{\ell,\ell'=1,2}\sum_{ij}\left(B^{(s)}_{i,\ell,\mathrm{model}} - B^{(s)}_{i,\ell,\mathrm{sim}}\right)\left(\boxed{C^B_{\ell\ell'}}\right)^{-1}_{ij}\left(B^{(s)}_{j,\ell,\mathrm{model}} - B^{(s)}_{j,\ell,\mathrm{sim}}\right)$$

エラー共分散

i, j: バイスペクトルの形状を表すラベル

l,l': バイスペクトルの非等方性を特徴づけるラベル

ガウス統計なら $C^B_{\ell\ell',ij} \equiv \delta_{\ell\ell'}\delta_{ij}\left(\sigma_i^B\right)^2$

- サーベイ形状・非ガウス性の影響（非対角成分）
- パワースペクトルと組み合わせた解析ではクロス共分散

どこまで正しく定量的にエラー推定できるか？

小まとめ

バイスペクトルを使った宇宙論的応用が進みつつある

今後の精密宇宙論観測においてどこまで正しい解析ができるか？

- 高精度な理論モデル構築
- 実用的なバイスペクトル測定方法の開発
  （バイスペクトルの特徴づけ・分解法）
- バイスペクトルを取り入れたデータ解析手法の構築
  （バイスペクトルのエラー共分散）
- 新たな宇宙論プローブとしての可能性

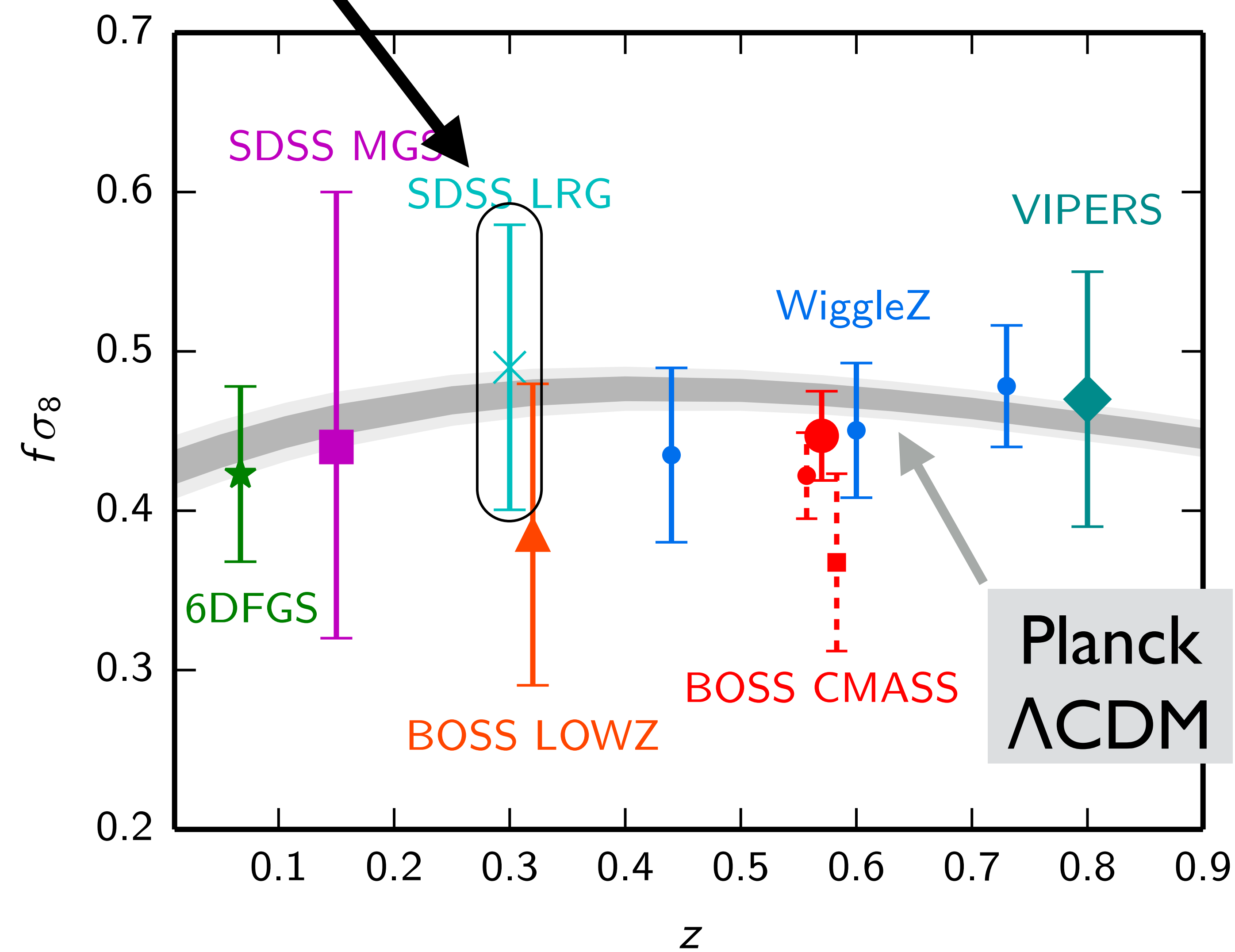
Monthly Notices of the ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY MNRAS Advance Access published February 17, 2014
MNRAS (2014) doi:10.1093/mnras/stu111

Simultaneous constraints on the growth of structure and cosmic expansion from the multipole power spectra of the SDSS DR7 LRG sample

Akira Oka,[1★] Shun Saito,[2] Takahiro Nishimichi,[3] Atsushi Taruya[2,4,5] and Kazuhiro Yamamoto[6]

[1]*Department of Physics, University of Tokyo, Tokyo 113-0033, Japan*
[2]*Kavli Institute for the Physics and Mathematics of the Universe (WPI), University of Tokyo, Chiba 277-8583, Japan*
[3]*Institute d'Astrophysics de Paris, CNRS, 98 bis Boulevard Arago, F-75014 Paris, France*
[4]*Research Center for the Early Universe, School of Science, University of Tokyo, Tokyo 113-0033, Japan*
[5]*Yukawa Institute for Theoretical Physics, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan*
[6]*Department of Physical Science, Hiroshima University, Higashi-Hiroshima 739-8526, Japan*

Planck 2015 XIII



SDSSの論文を差し置いて、我々の論文がPlanckの論文で引用されている

こういう論文をバイスペクトルで書きたい！

博士論文

Toward a precision cosmological test of gravity from redshift-space bispectrum based on perturbation theory

基礎物理学研究所 宇宙グループ
橋本一彦

What has been done

I. Hashimoto (PhD thesis)

- Perturbation-theory (PT) based modeling of redshift-space bispectrum at one-loop order

- Constructing mock galaxy catalog (halos) based on 350 runs of N-body simulations (L=1000 h^{-1}Mpc & N=1024^3)

- Parameter estimation study with PT template

  (particularly focusing on the estimation of growth rate)

✓un-biased estimation of $f\sigma_8$ is possible within 3% accuracy

✓combination of bispectrum with power spectrum improves the constraint on $f\sigma_8$ by ~20%

PT-based model of bispectrum

バイスペクトルの厳密な表式（5変数）

$$B^{(s)}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)=\int d\boldsymbol{r}_{13}d\boldsymbol{r}_{23}e^{i(\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{r}_{13}+\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{r}_{23})}\langle A_1A_2A_3\underline{e^{j_4A_4+j_5A_5}}\rangle$$ 減衰の効果

$$A_i=\delta(\boldsymbol{r}_i)+f\nabla_z u_z(\boldsymbol{r}_i)\qquad(i=1,2,3)\qquad u_z=(\boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{z}})/(aH)$$

$$A_4=u_z(\boldsymbol{r}_1)-u_z(\boldsymbol{r}_3),\ A_5=u_z(\boldsymbol{r}_2)-u_z(\boldsymbol{r}_3),\ j_4=-ik_{1z}f,\ j_5=-ik_{2z}f$$

<u>単純に展開 → **標準摂動論(SPT)**</u>

指数関数的な減衰の効果も単純に展開

$$\langle \underline{e^X} \cdots\rangle=\langle(\underline{1+X}+X^2/2\cdots)\cdots\rangle$$

$$B_{\rm PT}\simeq \underset{O((\delta_1)^4)}{B_{\rm tree}} + \underset{O((\delta_1)^6)}{B_{1-{\rm loop}}} + \cdots$$

有限の項までの効果しか取り入れられずパワースペクトルでも
シミュレーションとの一致が悪い　Taruya et al. ('10)

PT-based model of bispectrum

バイスペクトルの厳密な表式（5変数）

$$B^{(\mathrm{s})}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3) = \int d\boldsymbol{r}_{13} d\boldsymbol{r}_{23} e^{i(\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{r}_{13}+\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{r}_{23})} \langle A_1 A_2 A_3 \underline{e^{j_4 A_4 + j_5 A_5}} \rangle$$ 減衰の効果

減衰を表す部分を展開しない

$$\langle \underline{e^X} \cdots \rangle = \underline{\exp\{\langle e^X \rangle_c\}} \underline{\{\langle \cdots \rangle_c \cdots\}}$$

標準摂動論で
1-loopまで計算

我々のモデル

$$B^{(\mathrm{s})}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3) = \underline{D_{\mathrm{FoG}}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)} \, \underline{B'_{\mathrm{PT}}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)}$$

・キュムラントで統計平均を書き直し、減衰の効果を分離する
・パワースペクトルの場合では、系統誤差の少ないモデルとして広く実際の観測にも用いられている　e.g. Oka et al. (‘14)

TNSモデル: $P^{(\mathrm{s})}(k,\mu) = D_{\mathrm{FoG}}(k,\mu) P'_{\mathrm{PT}}(k,\mu)$ Taruya et al. (‘10)

Explicit expressions

減衰のモデル：ガウス型、1変数の減衰関数を使用

$$\exp\left\{\langle e^{j_4 A_4 + j_5 A_5}\rangle_{\mathrm{c}}\right\} \to D_{\mathrm{FoG}}(q) = \exp(-\sigma_v^2 q^2/2)$$

$$q^2 = k_{1z}^2 + k_{2z}^2 + k_{3z}^2$$ σ_v:フリーパラメータ

摂動計算の部分：1-loopの標準摂動論 ー 補正項(D_1, D_2) を計算

$$B'_{\mathrm{PT}}(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_3) = B^{\mathrm{tree}} + B_{222}^{\text{1-loop}} + B_{\text{321-I}}^{\text{1-loop}} + B_{\text{321-II}}^{\text{1-loop}} + B_{411}^{\text{1-loop}} - D_1 - D_2$$

$$B^{\mathrm{tree}}(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_3) = 2Z_2(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2)Z_1(\boldsymbol{k}_1)Z_1(\boldsymbol{k}_2)P_{\mathrm{L}}(k_1)P_{\mathrm{L}}(k_2)$$

$$B_{222}^{\text{1-loop}}(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_3) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} Z_2(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{p}) Z_2(-\boldsymbol{p}, \boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{p}) Z_2(-\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{p}, -\boldsymbol{k}_2 - \boldsymbol{p}) P_{\mathrm{L}}(p) P_{\mathrm{L}}(|\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{p}|) P_{\mathrm{L}}(|\boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{p}|)$$

$$B_{\text{321-I}}^{\text{1-loop}}(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_3) = Z_1(\boldsymbol{k}_1) P_{\mathrm{L}}(k_1) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} Z_2(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{k}_2 - \boldsymbol{p}) Z_3(-\boldsymbol{k}_1, -\boldsymbol{p}, -\boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{p}) P_{\mathrm{L}}(p) P_{\mathrm{L}}(|\boldsymbol{k}_2 - \boldsymbol{p}|)$$

$$B_{\text{321-II}}^{\text{1-loop}}(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_3) = Z_1(\boldsymbol{k}_1) Z_2(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2) P_{\mathrm{L}}(k_1) P_{\mathrm{L}}(k_2) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} Z_3(\boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{p}, -\boldsymbol{p}) P_{\mathrm{L}}(p)$$

$$B_{411}^{\text{1-loop}}(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_3) = Z_1(\boldsymbol{k}_1) Z_1(\boldsymbol{k}_2) P_{\mathrm{L}}(k_1) P_{\mathrm{L}}(k_2) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} Z_4(-\boldsymbol{k}_1, -\boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{p}, -\boldsymbol{p}) P_{\mathrm{L}}(p)$$

$$D_1(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_3) = -\frac{q^2\sigma_{\mathrm{v,lin}}^2}{2} C_1(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_3) - f^2 \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} \frac{\mu_p^2}{p^2} P_{22}(p) \Big\{ (k_1 k_2 \mu_1 \mu_2)\, C_1(\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{p},\ \boldsymbol{k}_2 - \boldsymbol{p},\ \boldsymbol{k}_3) + (k_1 k_3 \mu_1 \mu_3)\, C_1(\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{p},\ \boldsymbol{k}_2,\ \boldsymbol{k}_3 - \boldsymbol{p}) + (k_2 k_3 \mu_2 \mu_3)\, C_1(\boldsymbol{k}_1,\ \boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{p},\ \boldsymbol{k}_3 - \boldsymbol{p}) \Big\}$$

$$D_2(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_3) = -\frac{q^2\sigma_{\mathrm{v,lin}}^2}{2} C_2(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_3) + f^3 (k_1\mu_1)(k_2\mu_2)(k_3\mu_3)\ J_2(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_3) + f^3\ K_2(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_3)$$

Multipole expansion

赤方偏移空間でバイスペクトルは5変数を持つ

以下では、バイスペクトルの非等方性を次のように特徴付ける

3変数　　　　　　　　　　　　　　　　5変数

$$\hat{B}_\ell^{(\mathrm{s})}(k_1, k_2, \theta_{12}) = \int_{-1}^{1} d\mu \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} B^{(\mathrm{s})}(k_1, k_2, \theta_{12}, \mu, \phi) \underline{P_\ell(\mu)} \qquad \mu \equiv \cos\omega$$

ルジャンドル多項式

$\ell = 0$: 単極成分

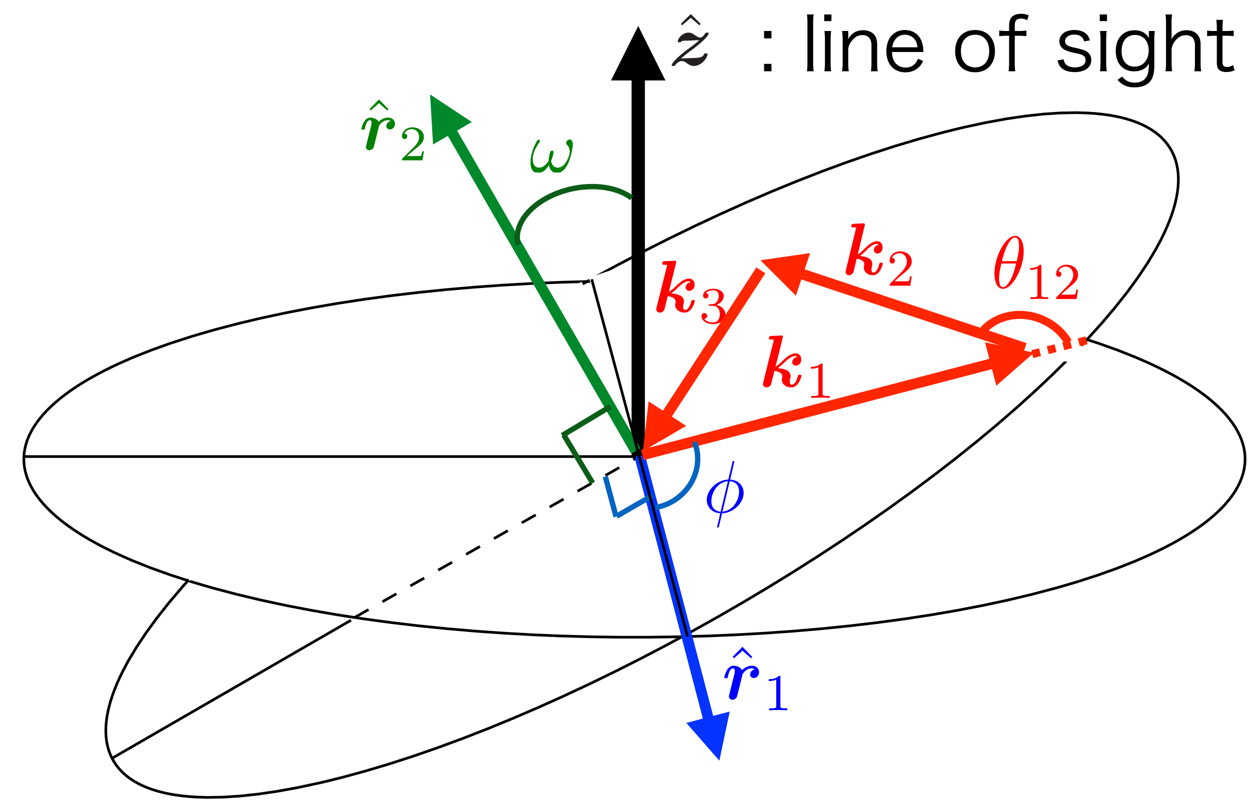
$\ell = 2$: 四重極成分

例.赤方偏移空間のパワースペクトル

1変数　　　　　　2変数

$$P_\ell^{(\mathrm{s})}(k) = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \int_0^1 d\mu P^{(\mathrm{s})}(k, \mu) \mathcal{P}_\ell(\mu).$$

$$\mu \equiv \hat{k} \cdot \hat{z}$$



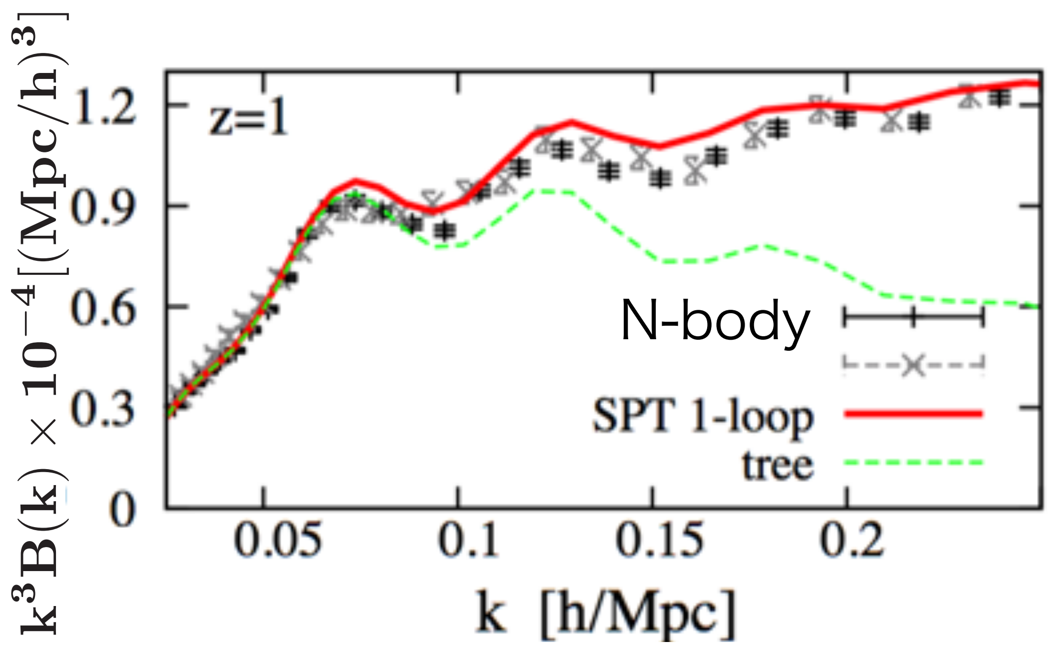
$$\hat{r}_2 = k_1 \times k_2 / k_1 k_2 \sin\theta_{12}.$$

Standard PT results

実空間

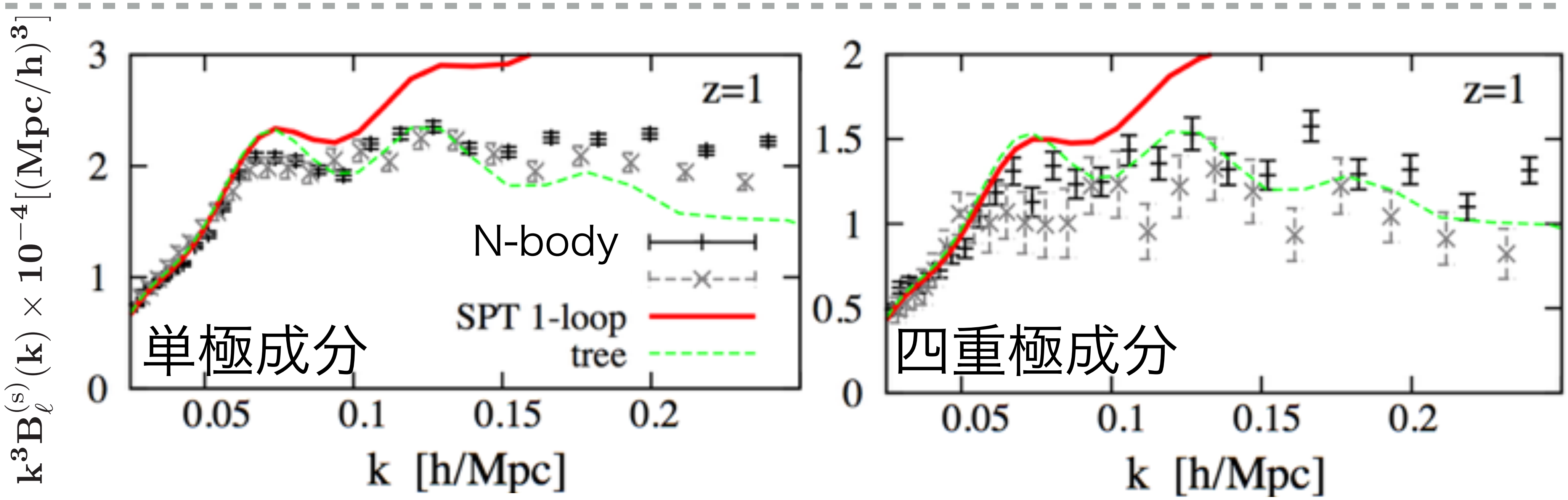
: 正三角形

$k = k_1 = k_2 = k_3$



赤方偏移空間

: 正三角形



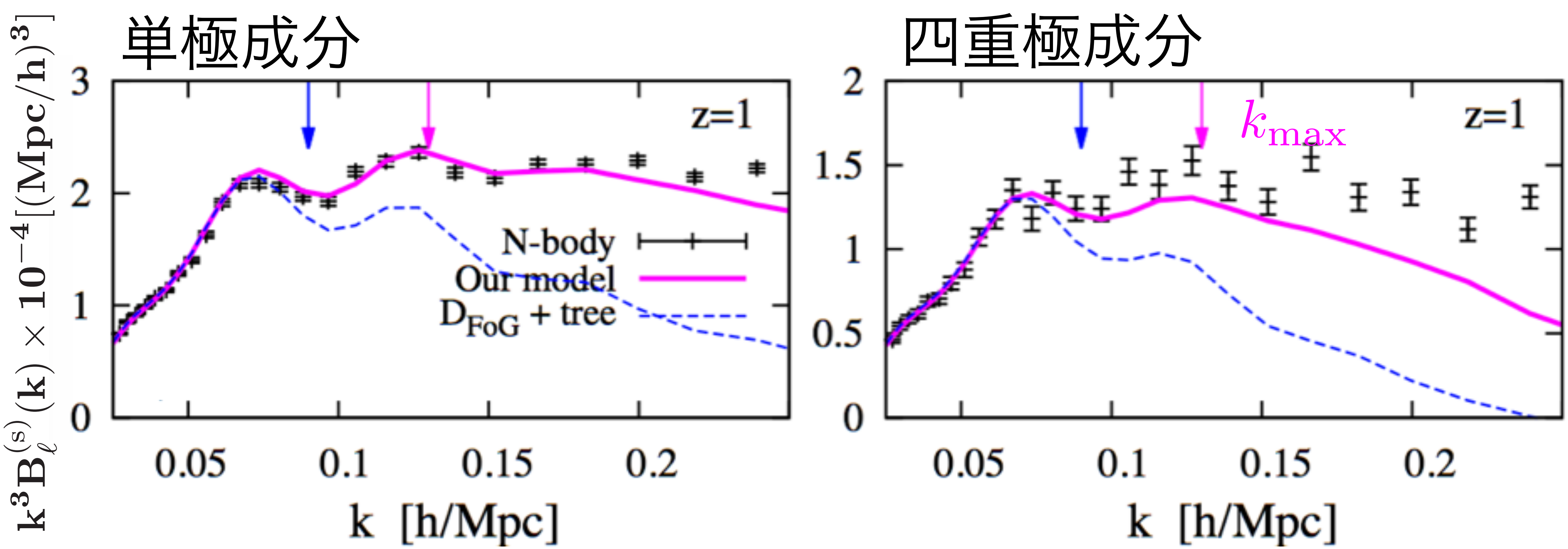
単純な摂動論は実空間で有効だが、赤方偏移空間では

すぐにシミュレーションと一致しなくなる

An improved PT model

DEUS (L=1325h^{-1}Mpc, N=512^3, 512 runs)

赤方偏移空間のバイスペクトル：正三角形

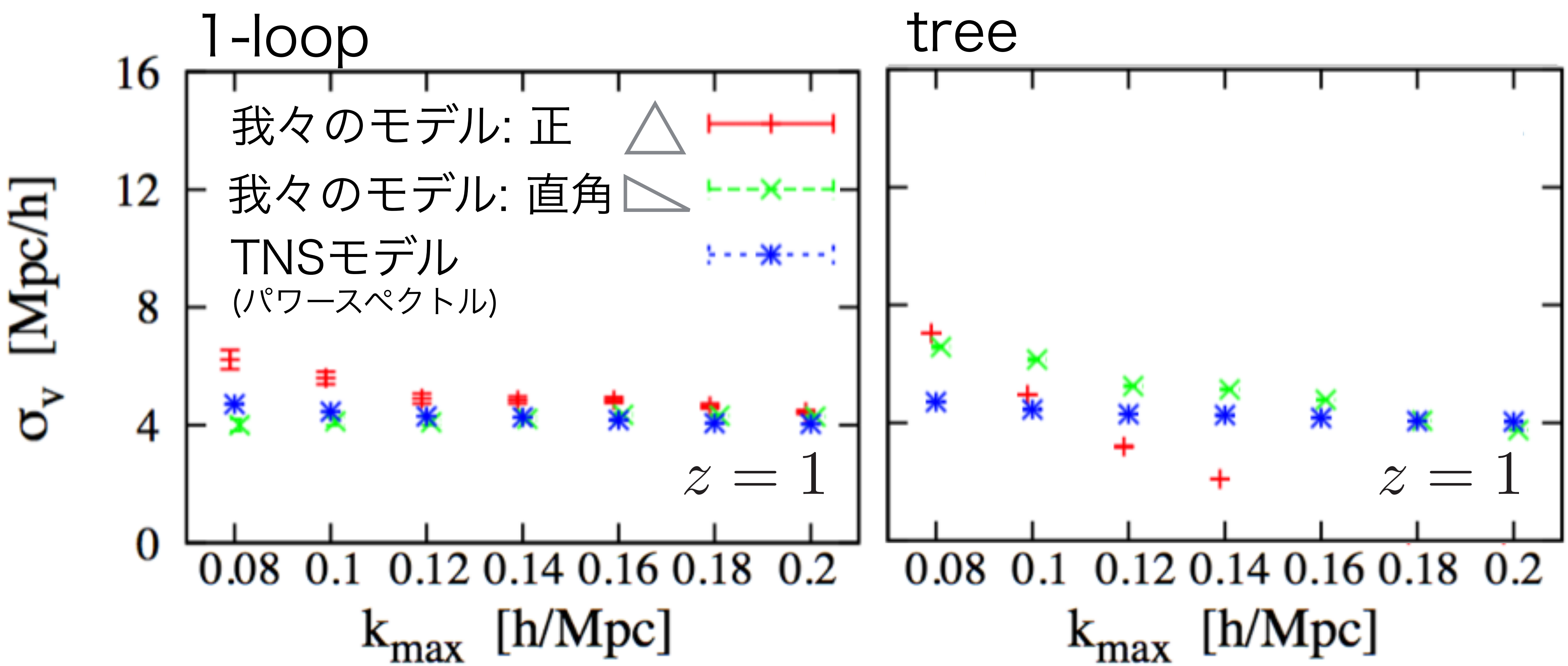


- $k_{\max} = 0.13\ h\mathrm{Mpc}^{-1}$ までのデータで σ_v をフィット
- 準非線形領域では物質場のシミュレーションとよく一致

An improved PT model

σ_v の $k_{\max}$ 依存性

単極・四重極成分を用いて $k_{\max}$ までフィット



我々のモデルでは、σ_v はパワースペクトルのものとほぼ一致する

Mock catalog

物質場の生成：Gadget-2 code

Springel('05)

$1\ [\mathrm{Gpc}^3]$, 1024^3 粒子, 350 回, z=1

e.g. Subaru PFS: $1.0 < z < 1.2,\ V_{\mathrm{surv}} = 0.96h^{-3}\mathrm{Gpc}$

ハローの同定：Friends-of-friends + Rockstar code

Davis et al.('85), Springel et al.('01)

N体粒子の分布の中からハローを同定するアルゴリズム

20個以上の粒子が束縛されている天体をハローと定義する

ハロー質量 $> 5 \times 10^{12}\ M_{\mathrm{solar}}$

バイスペクトル測定の高速化

Baldauf et al.('76), Scoccimarro.('15)

FFTを用いたバイスペクトルの高速測定方法を我々の

四重極成分の定義に基づいて実装

Statistical analysis

最尤推定法 & Markov-chain Monte Carlo 法

理論モデルをパラメータ空間内で繰り返し計算し、尤度関数が最大となるパラメータの組みと信頼区間を求める

尤度関数

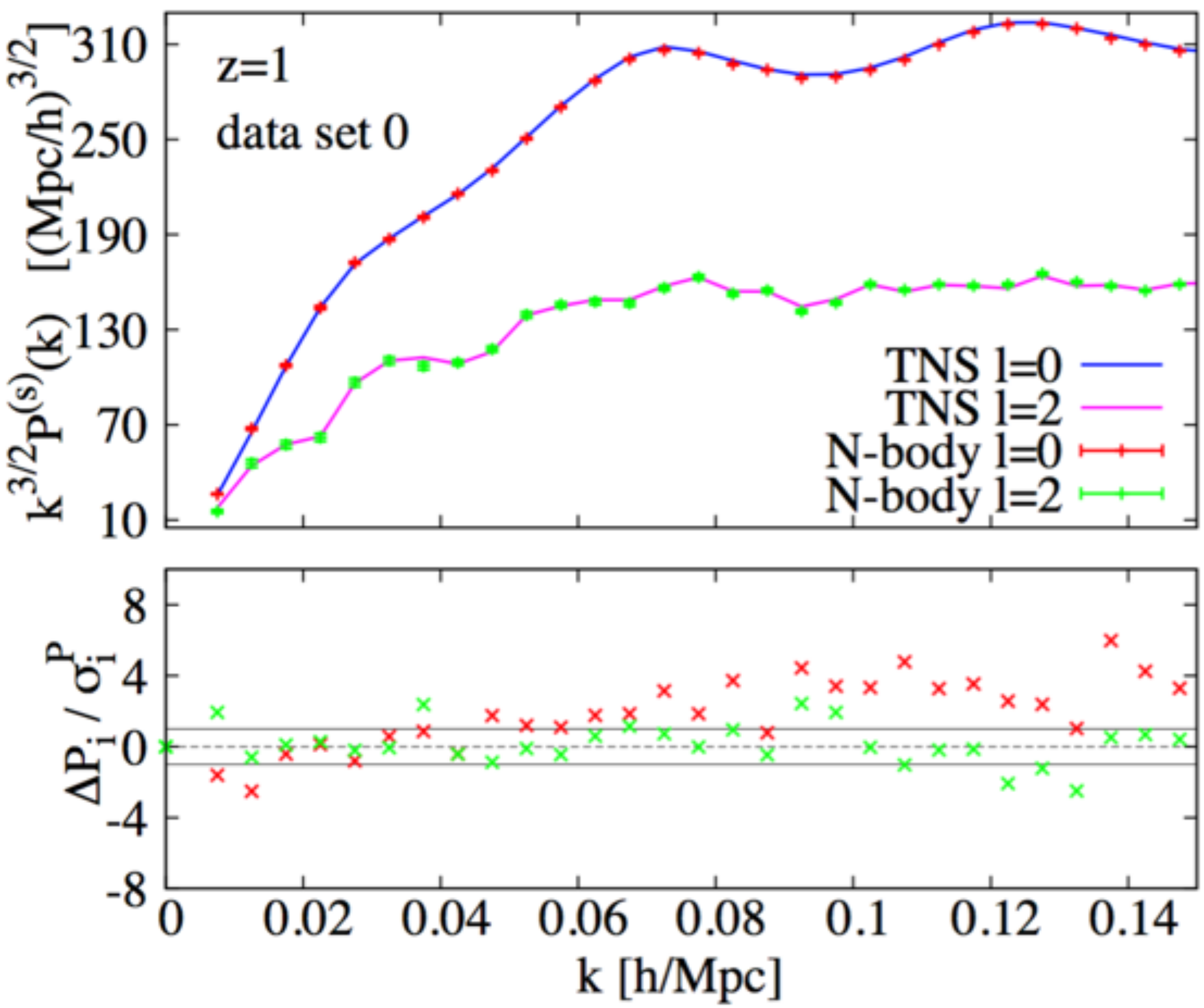
$$\mathcal{L}_P \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\chi_P^2\right\}; \quad \chi_P^2 \equiv \sum_{\ell,\ell'=1,2}\sum_{ij}\left(P_{i,\ell,\mathrm{model}}^{(s)} - P_{i,\ell,\mathrm{sim}}^{(s)}\right)\left(C_{\ell\ell'}^P\right)_{ij}^{-1}\left(P_{j,\ell,\mathrm{model}}^{(s)} - P_{j,\ell,\mathrm{sim}}^{(s)}\right)$$

$$\mathcal{L}_B \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\chi_B^2\right\}; \quad \chi_B^2 \equiv \sum_{\ell,\ell'=1,2}\sum_{ij}\left(B_{i,\ell,\mathrm{model}}^{(s)} - B_{i,\ell,\mathrm{sim}}^{(s)}\right)\left(C_{\ell\ell'}^B\right)_{ij}^{-1}\left(B_{j,\ell,\mathrm{model}}^{(s)} - B_{j,\ell,\mathrm{sim}}^{(s)}\right)$$

$C_{\ell\ell',ij}^P \equiv \delta_{\ell\ell'}\delta_{ij}\left(\sigma_i^P\right)^2,\ C_{\ell\ell',ij}^B \equiv \delta_{\ell\ell'}\delta_{ij}\left(\sigma_i^B\right)^2$: 共分散行列　　i, j : binの番号

σ_i^P, σ_i^B : N体の標準誤差

Halo power spectrum



フリーパラメータ:

$$f,\ \sigma_v,\ b_0,\ Q,\ A$$

P+B をフィットに用いた

$$\Delta P_i = P^{(\mathrm{s})}_{\mathrm{TNS}}(k_i) - P^{(\mathrm{s})}_{\mathrm{sim}}(k_i)$$

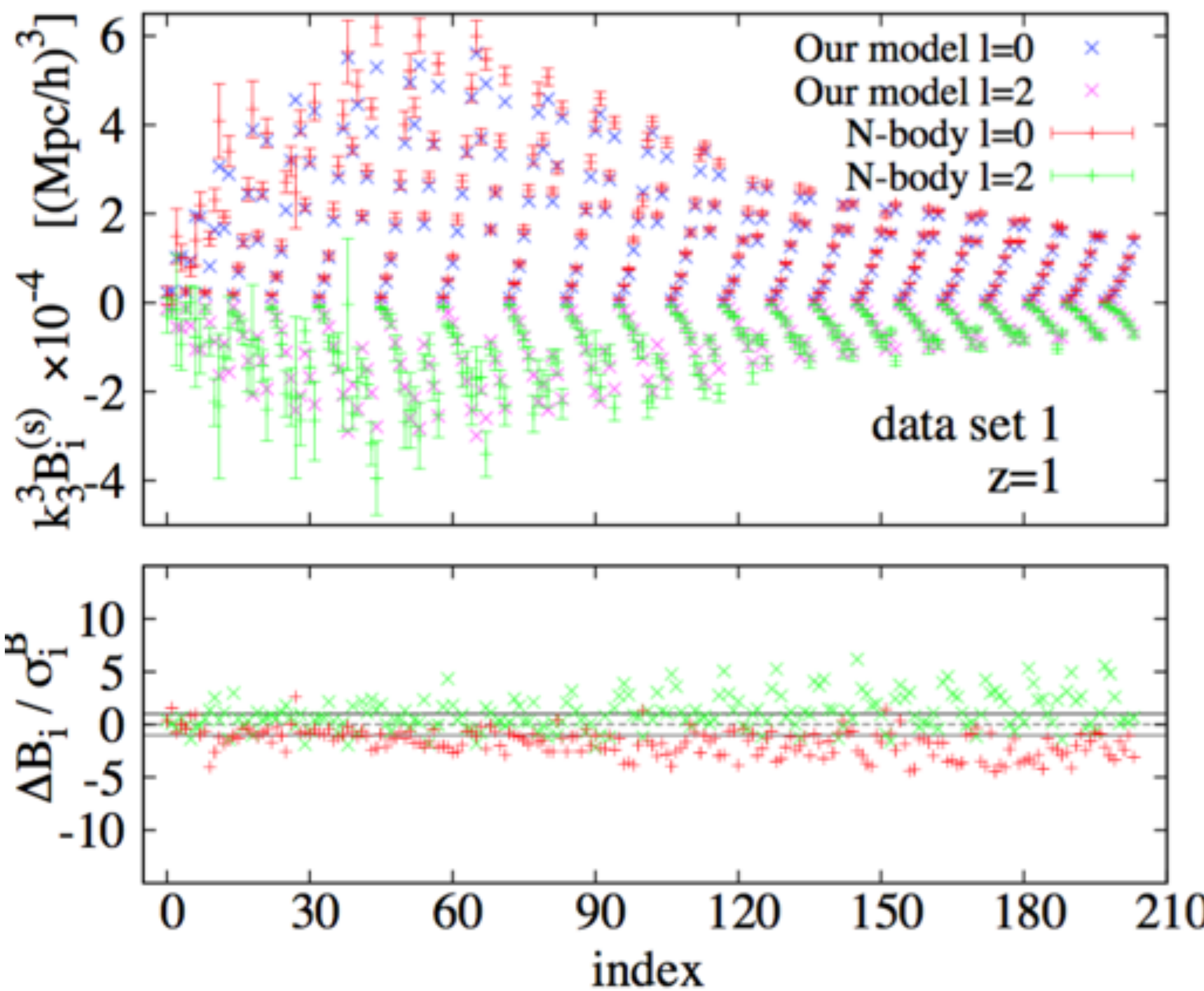
σ_i^P: N体の標準誤差

・大スケールほどTNSモデルとN体は一致する

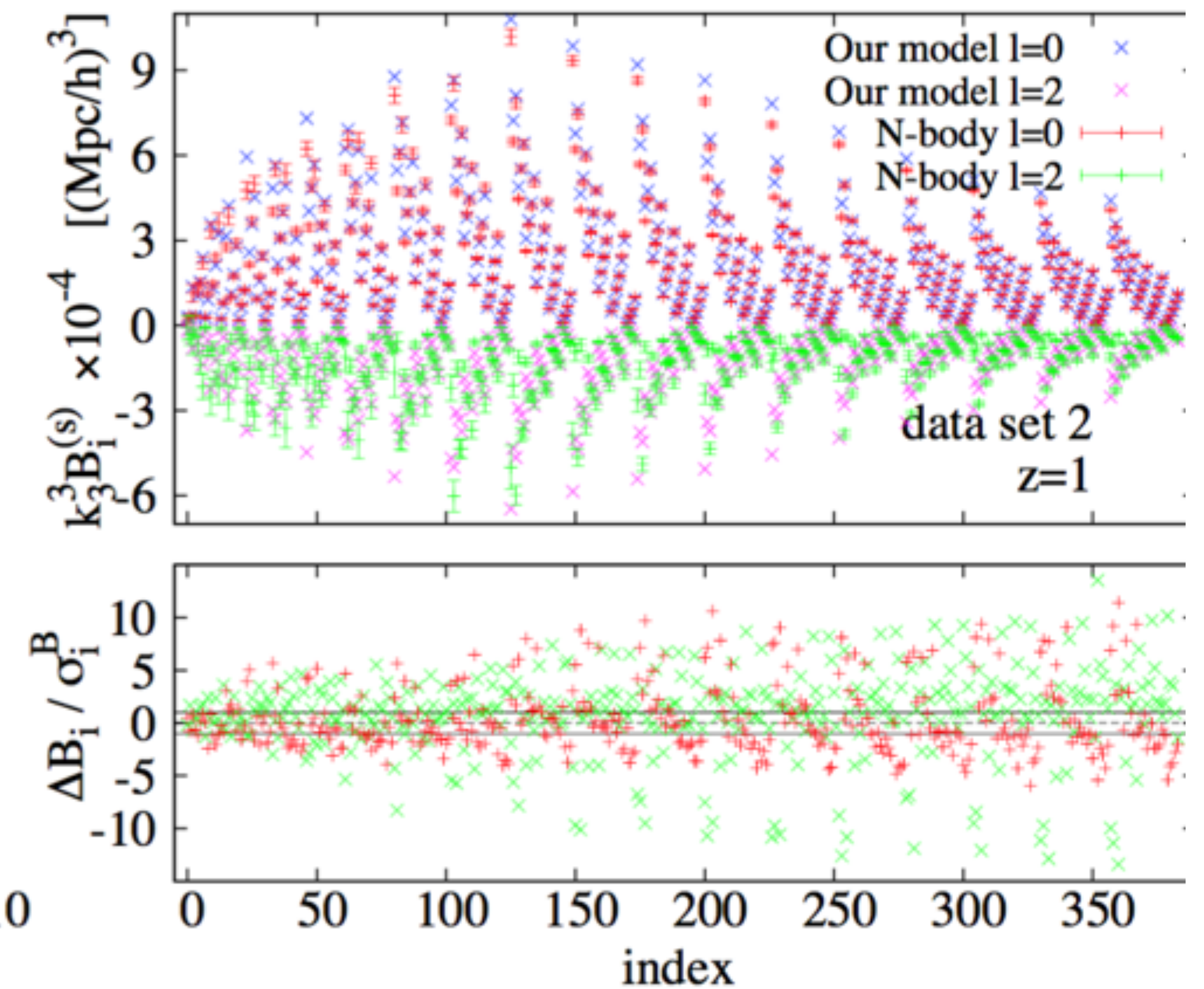
・四重極成分のジグザグはbin内のモードの離散性による

Halo bispectrum

<u>鋭角三角形</u>



<u>鈍角三角形</u>

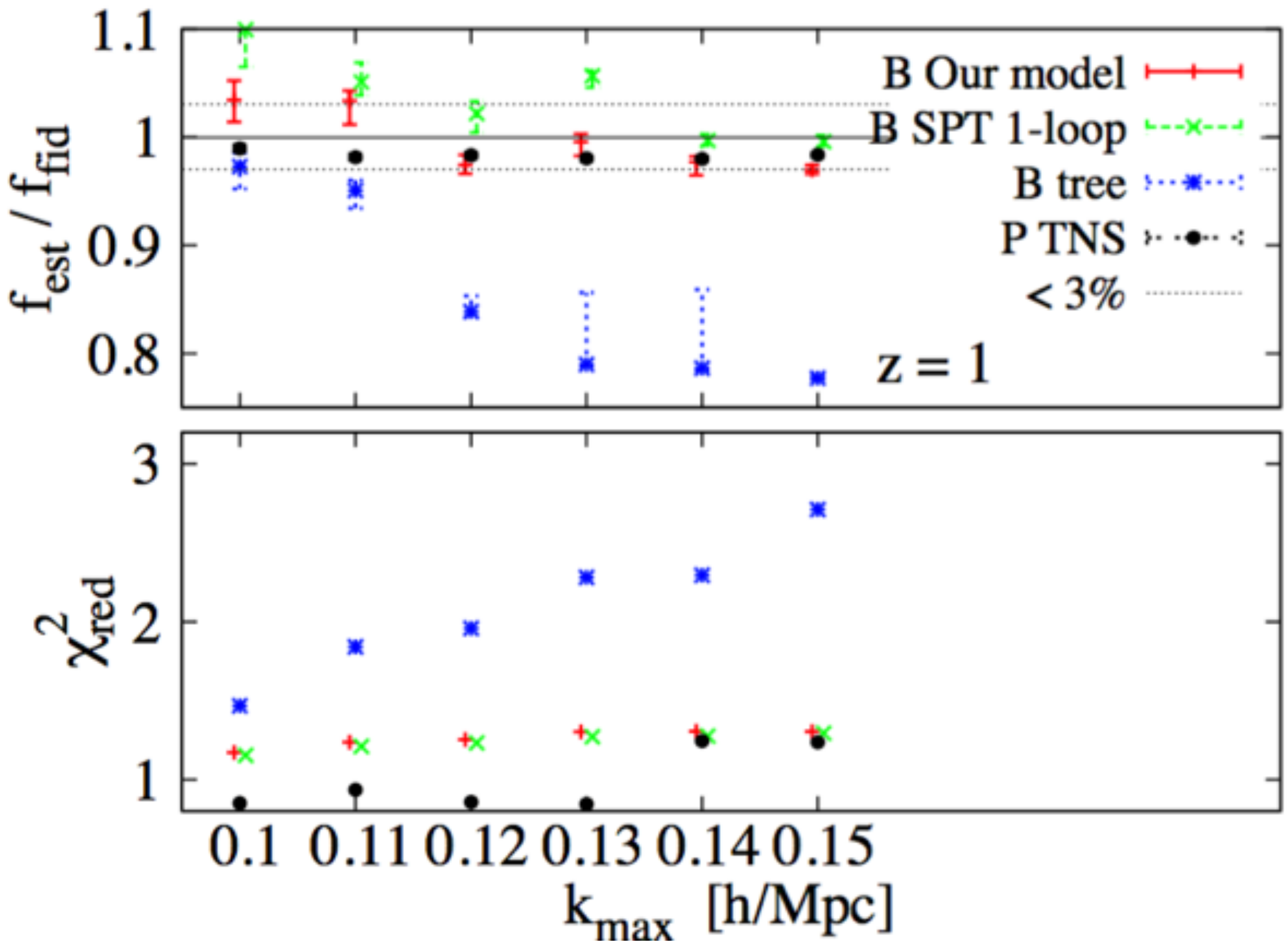


細長い三角形でシミュレーションと大きな誤差が生じる

→ 理論、測定ともに問題があるのでこれらを除いて統計解析を行う

Estimation of growth rate

750個の三角形($\cos\theta_{12} > -0.9,\ k_2 + k_3 - k_1 < 3\Delta k/2$)に対して統計解析を実施



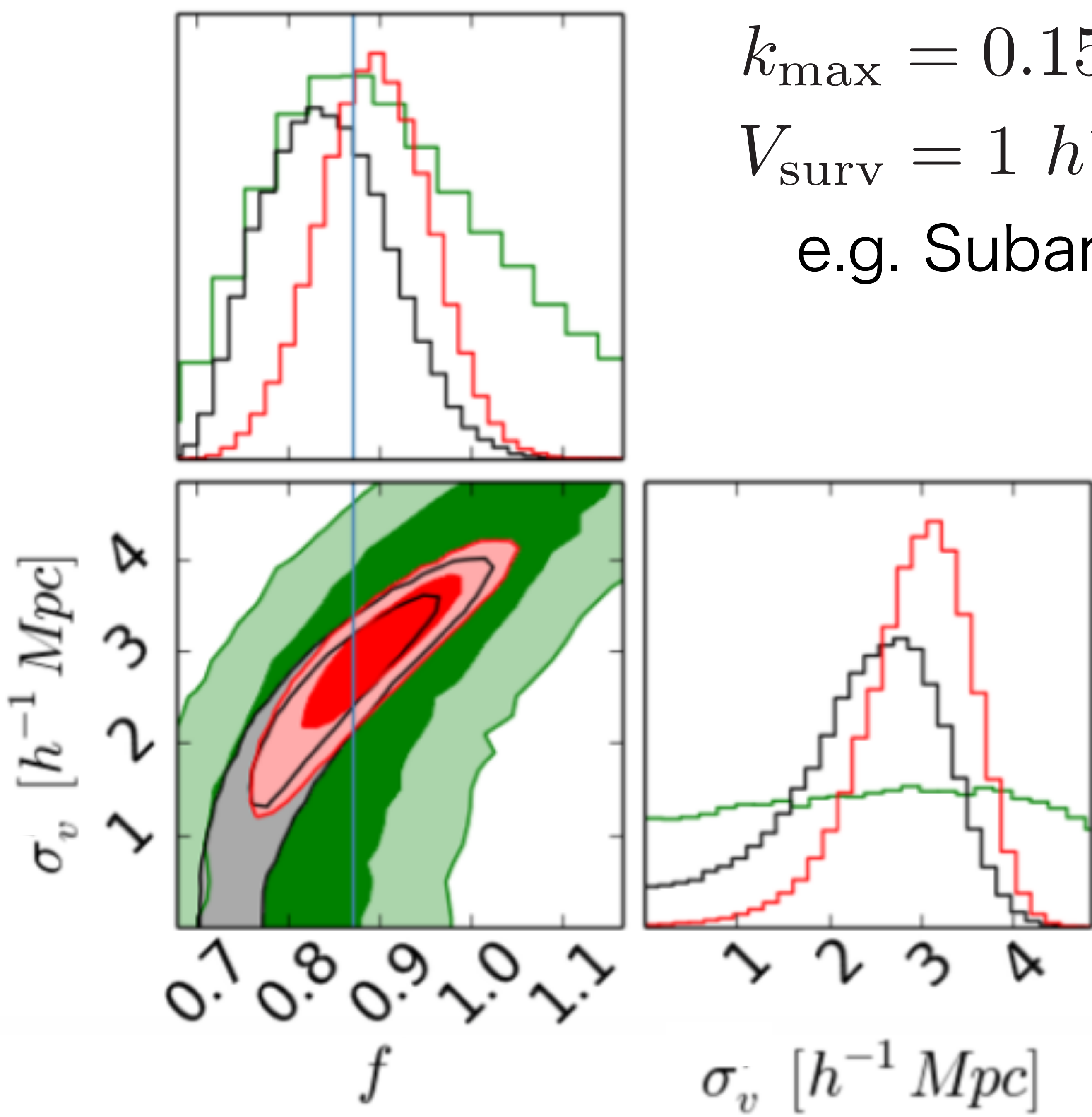
$f_{\rm fid}$:真の成長率

$f_{\rm est}$:推定した成長率

・バイスペクトル単体でも < 3%の精度で成長率を決定できる

・1-loopからの寄与は、推定精度を大きく向上させる

Combined constraint



$k_{\rm max} = 0.15\ h{\rm Mpc}^{-1}$

$V_{\rm surv} = 1\ h^{-3}{\rm Gpc}^3,\ \ z = 1$ の観測領域を仮定

e.g. Subaru PFS: $1.0 < z < 1.2,\ V_{\rm surv} = 0.96h^{-3}{\rm Gpc}$

真の値は１ σ の範囲内

成長率の制限は17%強まる

(全ての三角形を加えると30%以上)

Hector et al. 2016と同程度

・バイスペクトルは単極成分のみ

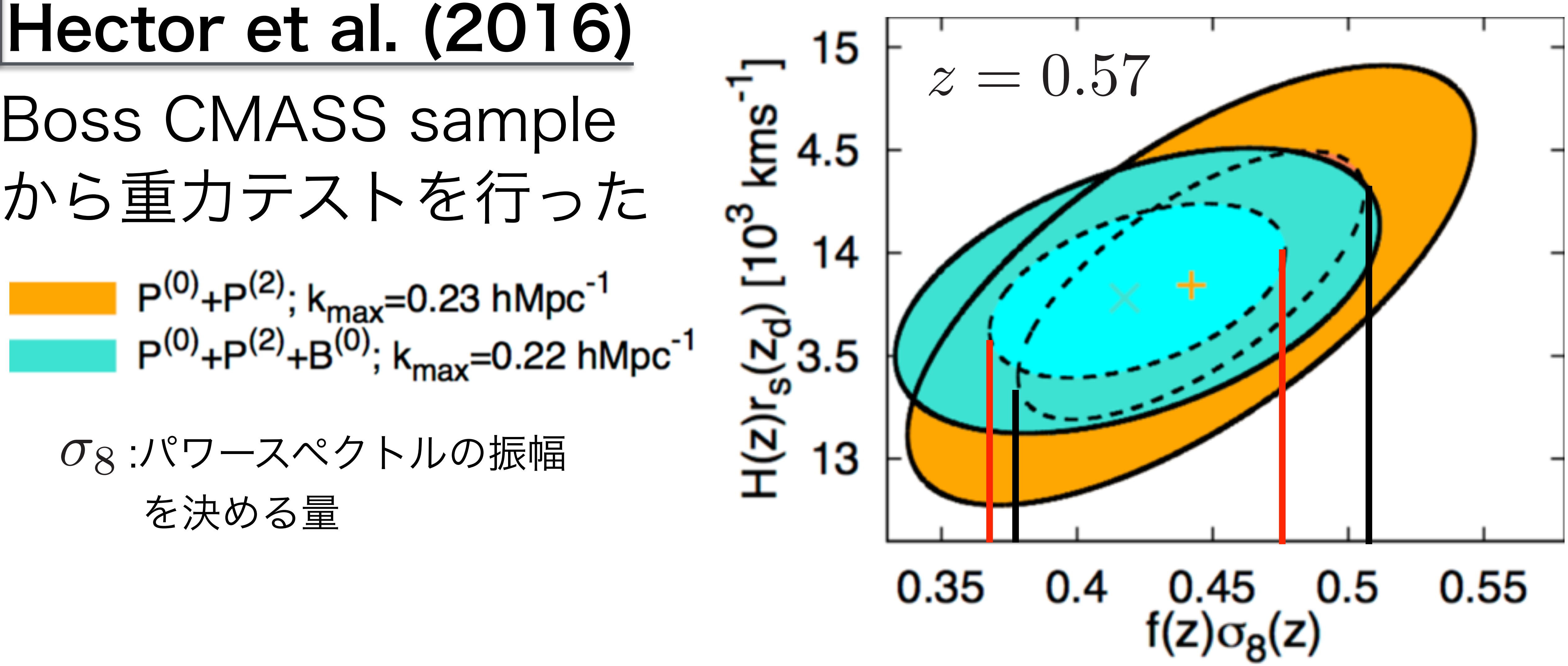
・ $k_{\rm max} = 0.22\ h^{-1}{\rm Mpc}$

我々の理論モデルを用いれば、より大きなスケールに限っても、従来と同程度制限を強めることができる

C.f. previous work

Hector et al. (2016)

Boss CMASS sample
から重力テストを行った



σ_8 :パワースペクトルの振幅を決める量

・バイスペクトルの単極成分を加え、成長率の制限を~15%改善
・理論モデルはシミュレーションに基づくフィット関数
・パワースペクトルと組み合わせても、5%の系統誤差が生じうる

Discussion

理論テンプレートの改良

$$B^{(\mathrm{s})}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3) = D_{\mathrm{FoG}}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)\,B'_{\mathrm{PT}}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)$$

・非線形なバイアスモデル
・摂動論部分の改良（くりこみ計算への拡張と高速化）
・bin内部の離散性の取り入れ

A-P効果の影響

バイスペクトル測定法の改良

- 細長い三角形（squeezed, folded）の測定方法の改善
- 新しい分解方法を用いた測定

データ解析方法の改良

- エラー共分散（クロスコバリアンス）の影響