

赤方偏移バイスペクトルの 新しい定量化法と測定

杉山 尚徳

Collaborators: Shun Saito, Florian Beutler, and Hee-Jong Seo



宇宙論における高次統計：バイスペクトルの理論と観測@京都大学

Mar.29-30, 2018

- 1) **Cosmological information leaks to non-Gaussian (non-linear) density fluctuations.**
- 2) **Breaking parameter degeneracy**

Anisotropic Bispectrum

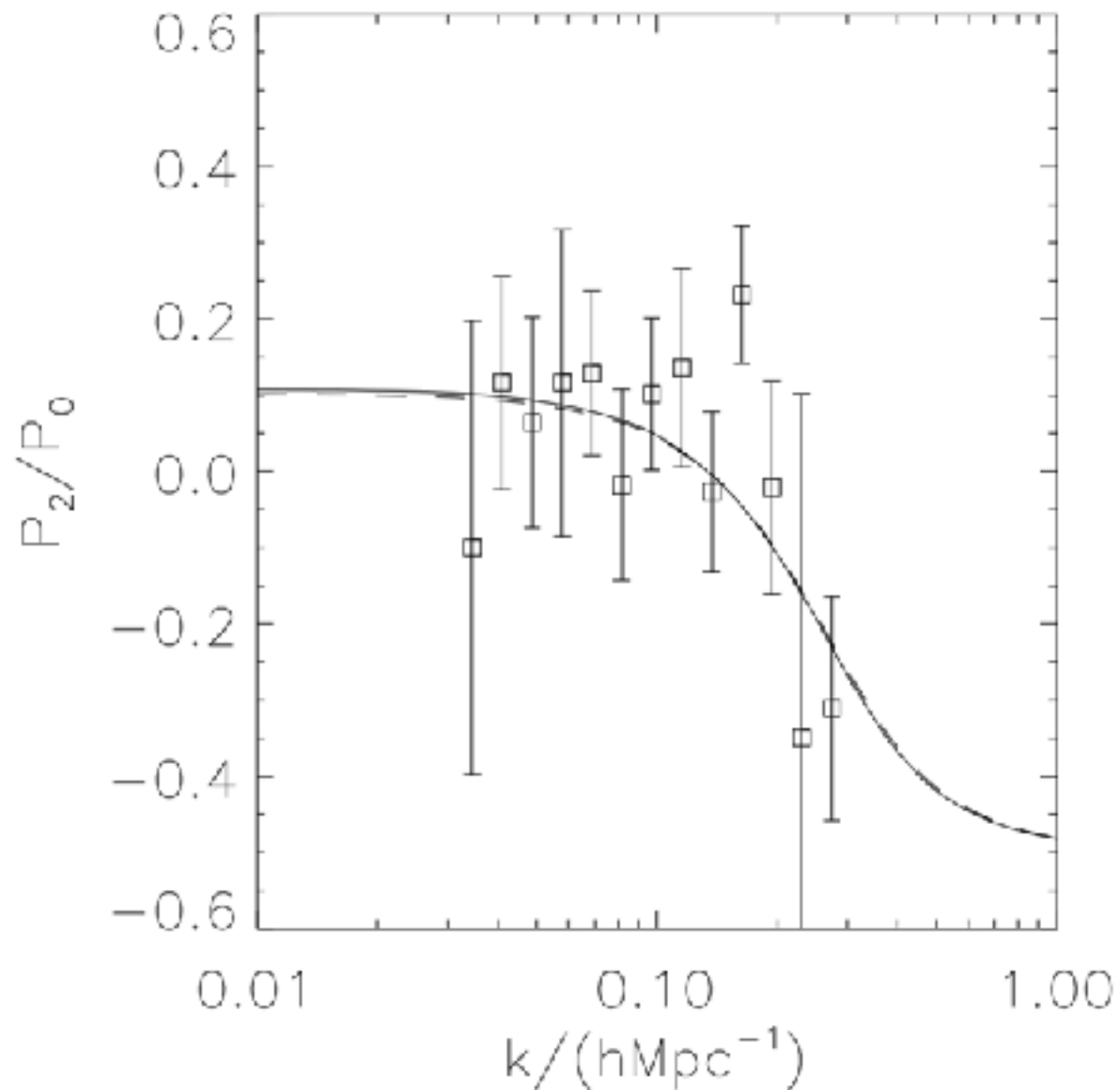
Hubble parameter from the AP effect
Growth rate from the RSD effect



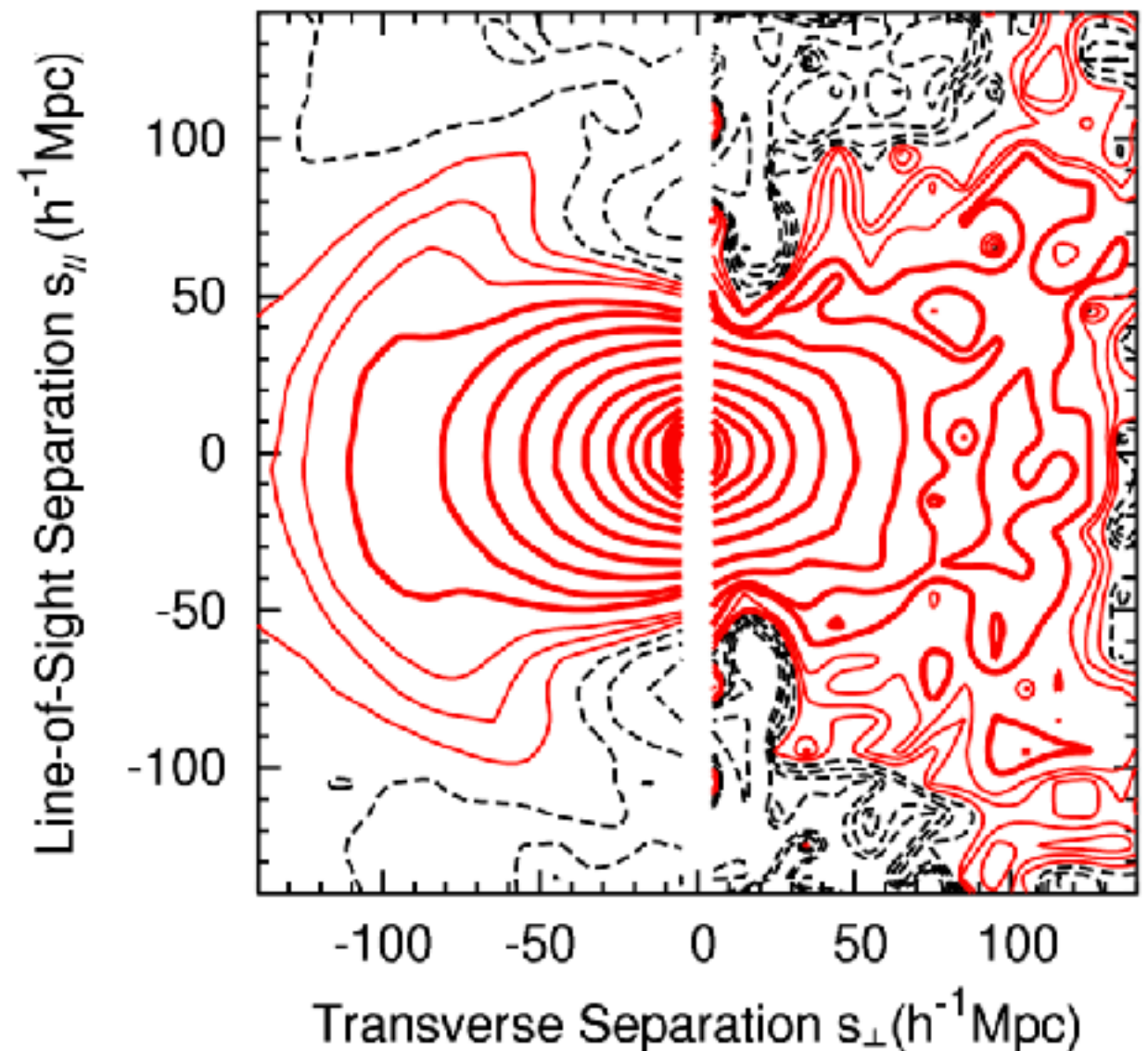
Testing gravity theories
Time dependence of dark energy
Neutrino mass

Anisotropic Signal in two point statistics

Yamamoto et al. 2006

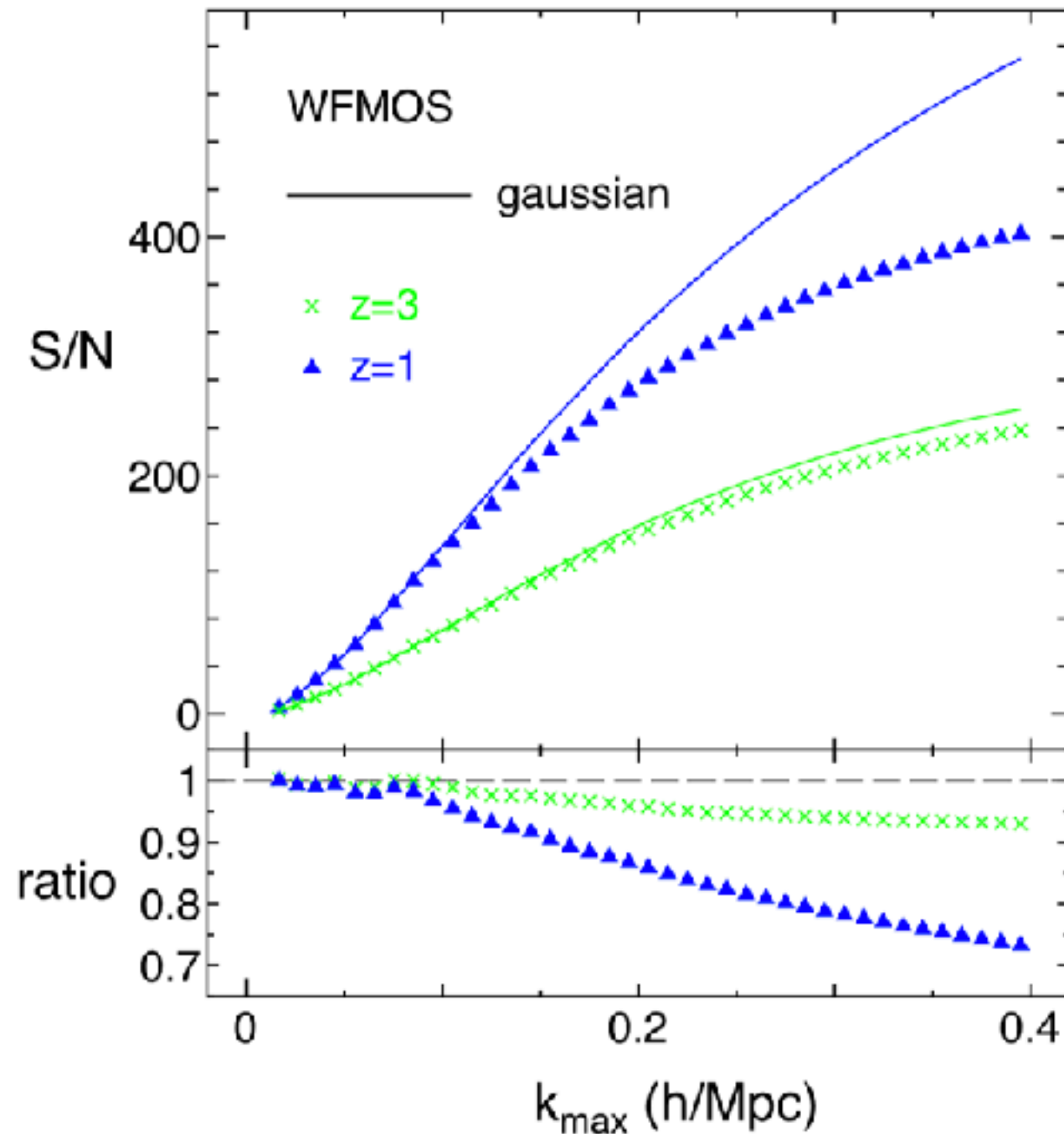


Okumura et al. 2008



Leakage of information into Higher-order statistics

Takahashi et al. 2009:



Three-point statistics: History

Angular catalogues:

Peebles & Groth (1975);

Groth & Peebles (1977);

Fry & Slender (1982)

Three-point statistics: History

Spectroscopic surveys in configuration-space

Kayo et al. (2004);

Jing & Boerner (2004);

Wang et al. (2004);

Gaztanaga et al. (2005);

Nichol et al. (2006);

Kulkarni et al. (2007);

Gaztanaga et al. (2009);

McBride et al. (2011a, b);

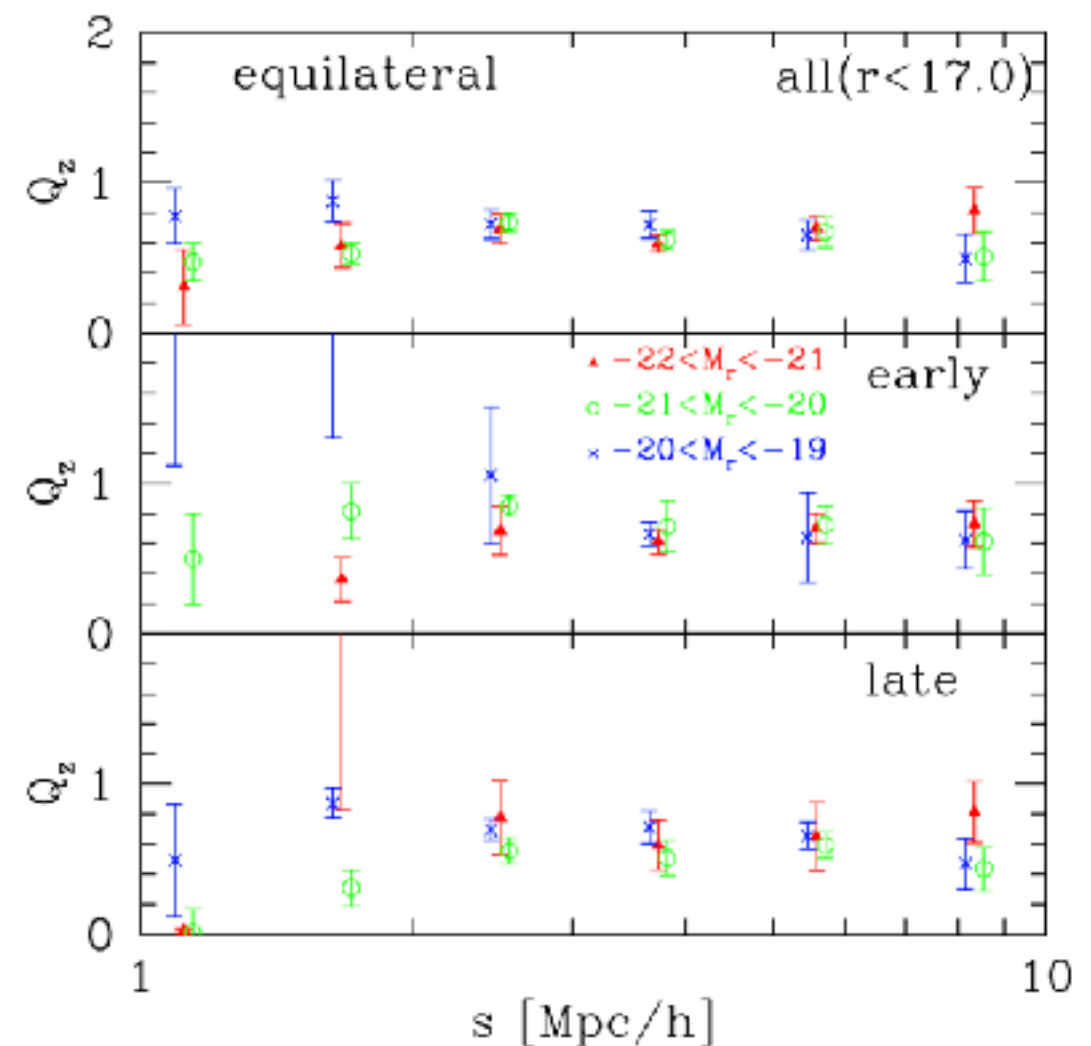
Marin (2011);

Marin et al. (2013);

Guo et al. (2013);

Slepian et al. (2017a,b);

Kayo et al. (2004)



Three-point statistics: History

Spectroscopic surveys in Fourier-space

Scoccimarro et al. 2001;

Feldman et al. 2001;

Verde et al. 2002;

Gil-Marin et al. 2015a,b;

Gil-Marin et al. 2017;

Pearson & Samushia 2017;

Breakthrough

**Scoccimarro 2015: FFT-based estimator
(Slepian & Eisenstein 2015)**

計算速度の向上

Full-configuration analysis の幕開け

Slepian et al. 2017 (BAO detection in configuration-space)

Gil-Marín et al. 2017 (P+B analysis in Fourier space)

Pearson & Samushia 2017 (BAO detection in Fourier-space)

**今後の銀河解析は、Bispectrum (3PCF)
との joint analysis が標準になる。**

まだ何か問題があるのか？

- 1) **Anisotropic signal**
- 2) **座標の取り方**
- 3) **測定の速さ**
- 4) **Window function effect**

M モードが好きじゃない。

Triangle condition が好きじゃない。

Scoccimarro et al. (1999):

$$B(k_1, k_2, \hat{n}) = \sum_{LM} B_{LM}(k_1, k_2) Y_L^M(\hat{n})$$

k1, k2, k3

- 1) 回転の自由度が残っている。**
- 2) 並進移動の自由度(triangle condition)が残っている。**
- 3) 宇宙は統計的一様等方。**

M を消す。

Triangle condition を課す。

NS et al. (2018):

$$B_{\ell_1 \ell_2 L}(k_1, k_2) \propto \sum_{m_1 m_2 m_3} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} B_{\ell_1 \ell_2 L}^{m_1 m_2 M}(k_1, k_2)$$

$$B_{\ell_1 \ell_2 L}^{m_1 m_2 M}(k_1, k_2) = N_{\ell_1 \ell_2 L} \int \frac{d^2 \hat{k}_1}{4\pi} \int \frac{d^2 \hat{k}_2}{4\pi} \int \frac{d^2 \hat{n}}{4\pi} \\ \times y_{\ell_1}^{m_1*}(\hat{k}_1) y_{\ell_2}^{m_2*}(\hat{k}_2) y_L^{M*}(\hat{n}) B(k_1, k_2, \hat{n}),$$

- 1) 回転の自由度は消える。
- 2) 並進移動の自由度は消える (Triangle condition 満たす。)
- 3) 統計的一様等方を満たす。

New Bispectrum Multipoles

$$B_{\ell_1 \ell_2 L}(k_1, k_2)$$

- 1) $\ell_1 \geq \ell_2$ (**k1** \leftrightarrow **k2**)
- 2) $|\ell_1 - \ell_2| \leq L \leq |\ell_1 + \ell_2|$ (**回転**)
- 3) $\ell_1 + \ell_2 + L = \text{even}$. (**パリティ**)
- 4) $L = \text{even}$ (**RSD**)

Relation to Power Spectrum Multipoles

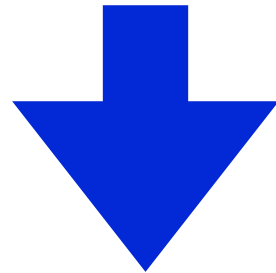
$$B_{\ell_1 \ell_2 L}(k_1, k_2)$$

$$L \sim \ell$$

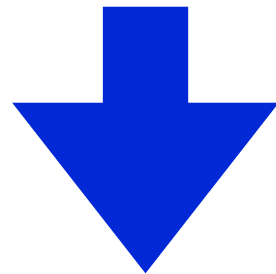
$$P_\ell(k)$$

Theoretical advantage

統計的一様等方性+パリティ対称性を満たす。



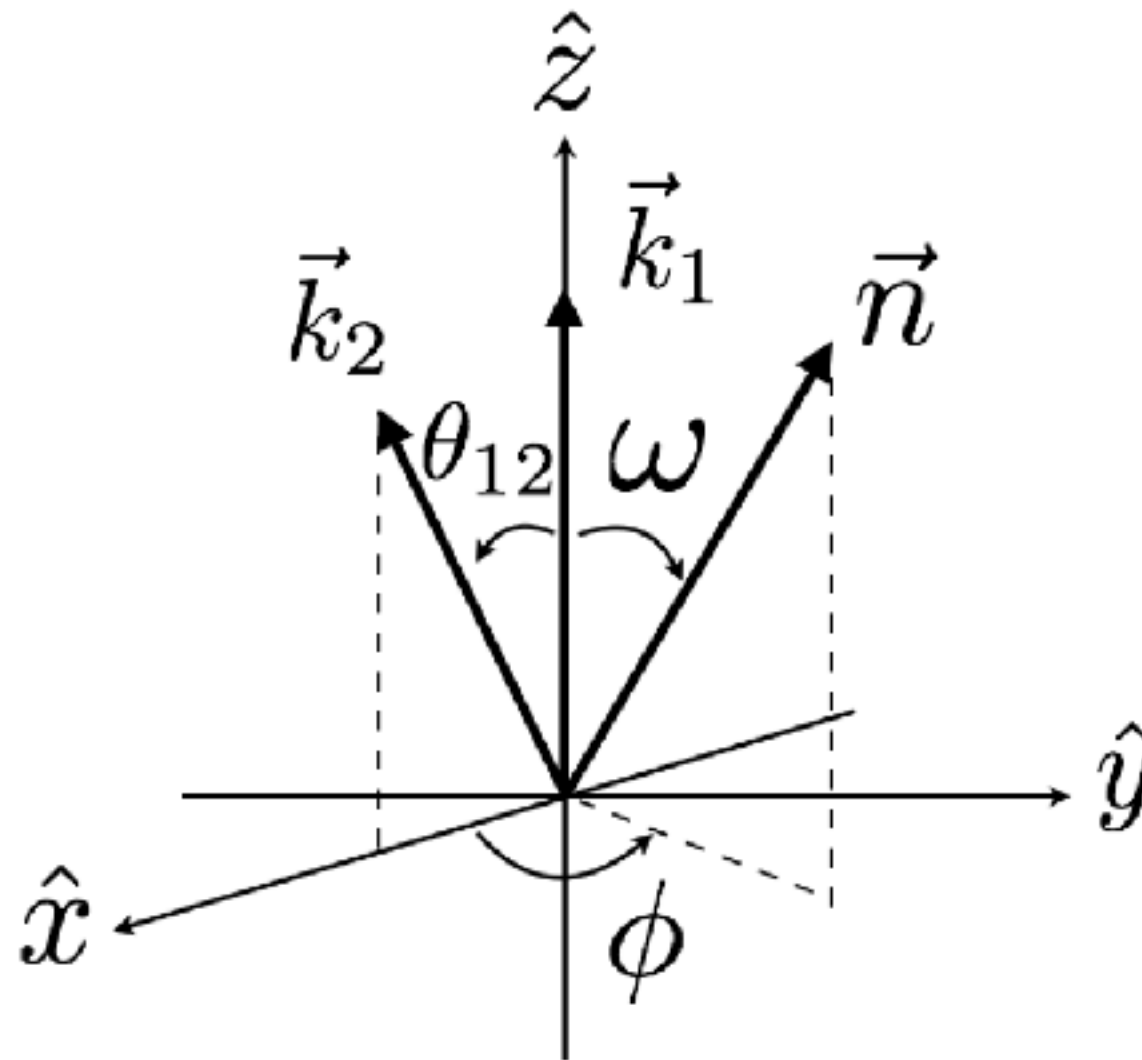
結果が座標軸に依存しない。



好きな座標軸を取ってよい。

座標軸の例:

(1) Scoccimarro et al. (1999)



$$\mathbf{k}_1 = \{0, 0, k_1\}$$

$$\mathbf{k}_2 = \{k_2 \sin \theta_{12}, 0, k_2 \cos \theta_{12}\}$$

$$\hat{n} = \{\sin \omega \cos \phi, \sin \omega \sin \phi, \cos \omega\}$$

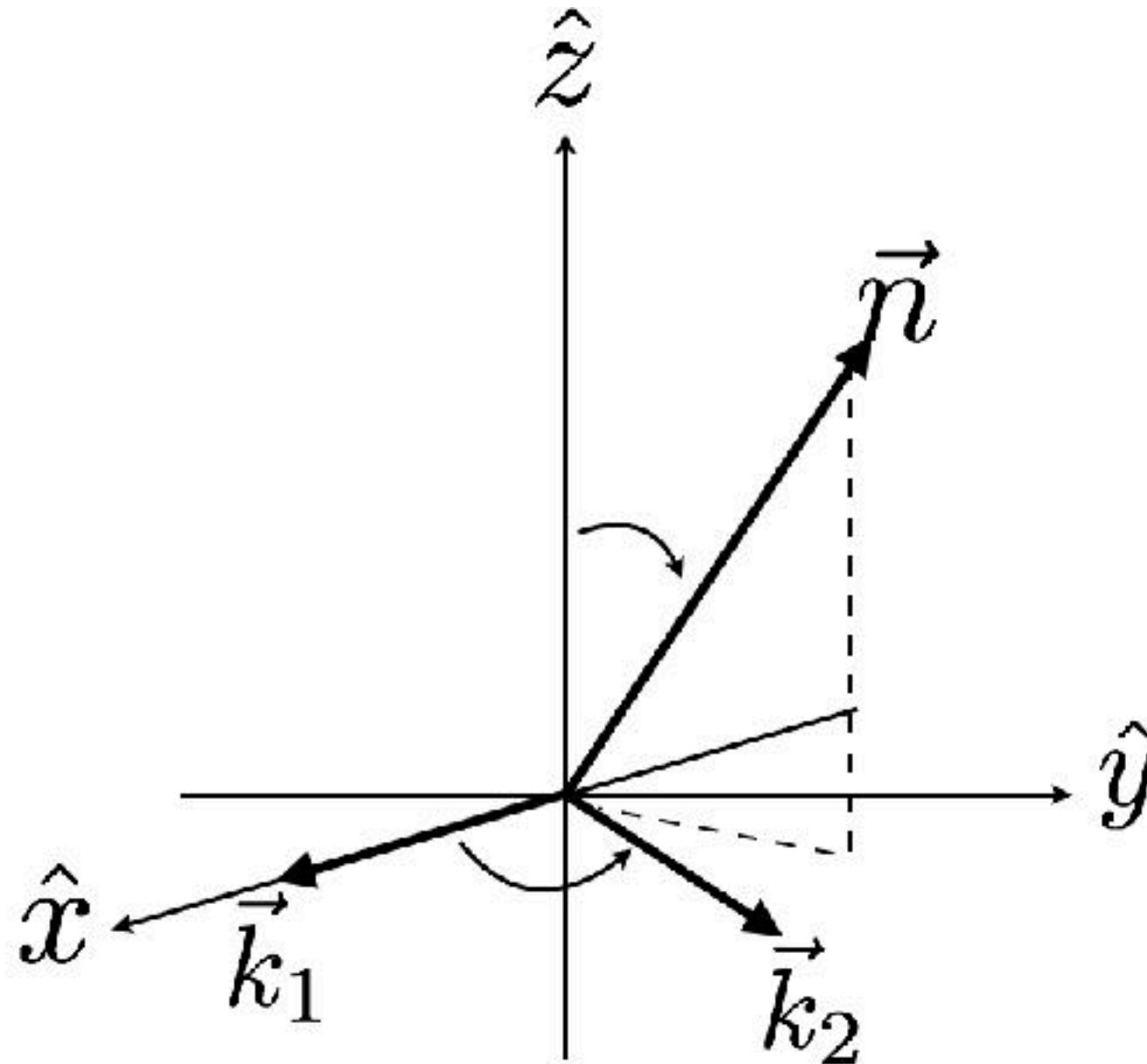
座標軸の例:

(1) Scoccimarro et al. (1999)

$$B_{\ell_1 \ell_2 L}(k_1, k_2) = \frac{N_{\ell_1 \ell_2 L} H_{\ell_1 \ell_2 L}}{\sqrt{(4\pi)(2L+1)}} \int \frac{d \cos \theta_{12}}{2}$$
$$\times \left[\sum_M \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & L \\ 0 & -M & M \end{pmatrix} y_{\ell_2}^{-M*}(\cos \theta_{12}, 0) \right]$$
$$\times \underline{B_{LM}(k_1, k_2, \theta_{12})}.$$

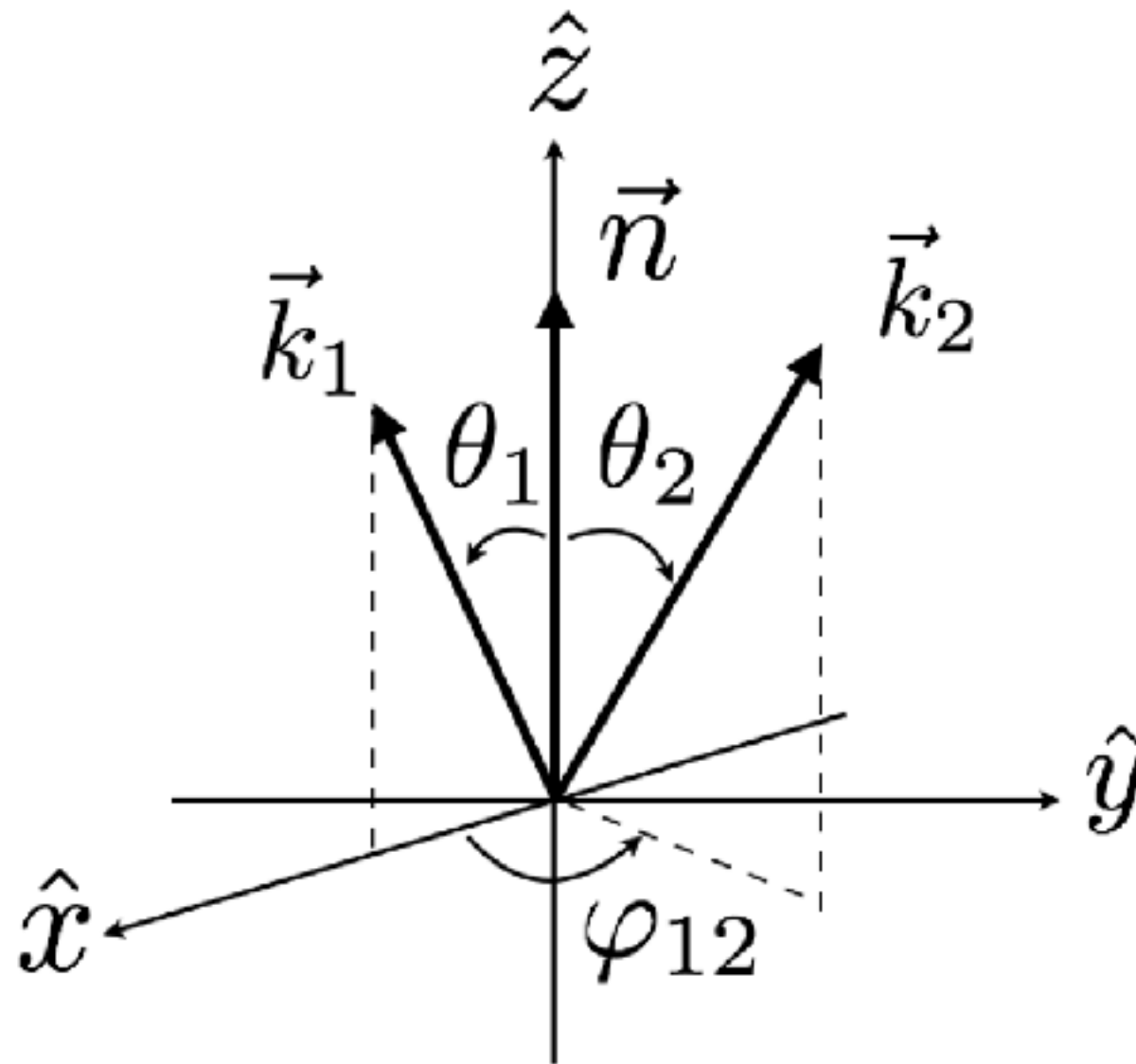
座標軸の例:

(2) Hashimoto et al. 2017



座標軸の例:

(3) Slepian et al. 2017



$$k_1 = \{k_1 \sin \theta_1, 0, k_1 \cos \theta_1\}$$

$$k_2 = \{k_2 \sin \theta_2 \cos \varphi_{12}, k_2 \sin \theta_2 \sin \varphi_{12}, k_2 \cos \theta_2\}$$

$$\hat{n} = \{0, 0, 1\}.$$

座標軸の例:

(3) Slepian et al. 2017

$$\begin{aligned} B_{\ell_1 \ell_2 L}(k_1, k_2) &= N_{\ell_1 \ell_2 L} H_{\ell_1 \ell_2 L} \int \frac{d \cos \theta_1}{2} \int \frac{d \cos \theta_2 d \varphi_{12}}{4\pi} \\ &\times \left[\sum_m \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & L \\ m & -m & 0 \end{pmatrix} y_{\ell_1}^{m*}(\theta_1, 0) y_{\ell_2}^{-m*}(\theta_2, \varphi_{12}) \right] \\ &\times B(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2, \varphi_{12}). \end{aligned}$$

座標軸の例:
(4) 測定する場合。

$$\boldsymbol{x} = \chi(z) \{ \cos \delta_g \cos \alpha_g, \cos \delta_g \sin \alpha_g, \sin \delta_g \}$$

Comoving distance

Right ascension

Declination

North Pole が z 軸

Estimator

二種類の密度場:

$$n(\vec{x}) = \sum_i \delta_D(\vec{x} - \vec{x}_i)$$

$$n_{\ell' m'}(\vec{x}) = \sum_i \underline{Y_{\ell' m'}(\hat{x})} \delta_D(\vec{x} - \vec{x}_i)$$

$$\begin{aligned} \hat{B}_{\ell_1 \ell_2 L}(k_1, k_2) &= H_{\ell_1 \ell_2 L} \sum_{m_1 m_2 M} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & L \\ m_1 & m_2 & M \end{pmatrix} \\ &\times \frac{N_{\ell_1 \ell_2 L}}{I} \int \frac{d^2 \hat{k}_1}{4\pi} y_{\ell_1}^{m_1*}(\hat{k}_1) \int \frac{d^2 \hat{k}_2}{4\pi} y_{\ell_2}^{m_2*}(\hat{k}_2) \\ &\times \int \frac{d^3 k_3}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \\ &\times \delta n(\mathbf{k}_1) \delta n(\mathbf{k}_2) \delta n_L^M(\mathbf{k}_3), \end{aligned}$$

Estimator

- 1) **Bispectrum estimator の Triangle condition を FFT を使って計算する方法。**
- 2) **Shot noise**
- 3) **Three-point function estimator**
- 4) **Three-point function shot noise**
- 5) **Global plane-parallel approximation (Simulations)**

Estimator

- 1) **Bispectrum estimator の Triangle condition を FFT を使って計算する方法。**
- 2) **Shot noise**
- 3) **Three-point function estimator**
- 4) **Three-point function shot noise**
- 5) **Global plane-parallel approximation (Simulations)**

省略します。

Estimator

(k1,k2) のビンごとに、FFT が必要。

20 k-bin を考えれば、 $20 \times 20 = 400$ FFTs

実際は、もっと FFT が必要。

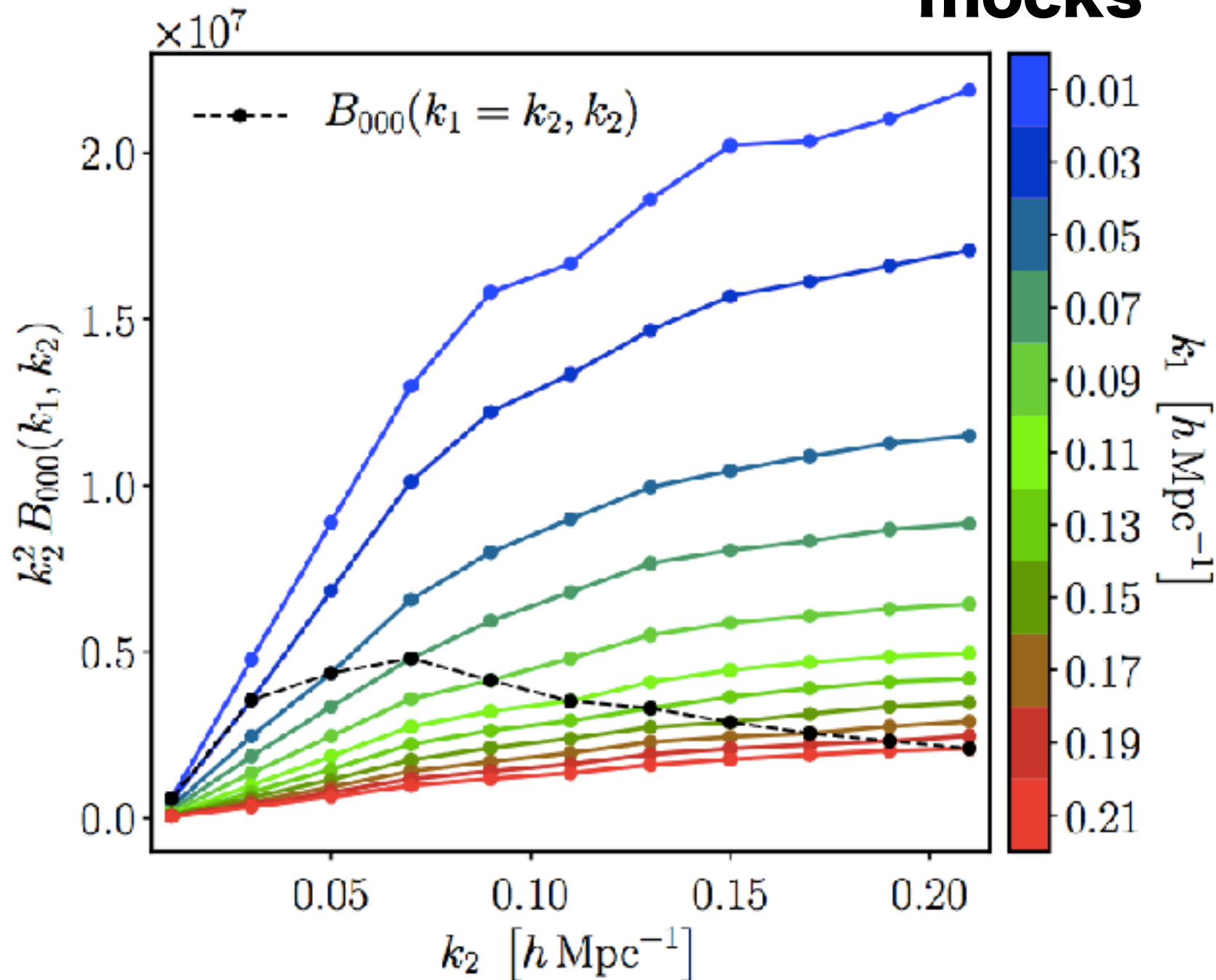
ビンの数は、大問題:

- 1) 莫大な mock が必要**
- 2) 計算時間がかかる。**

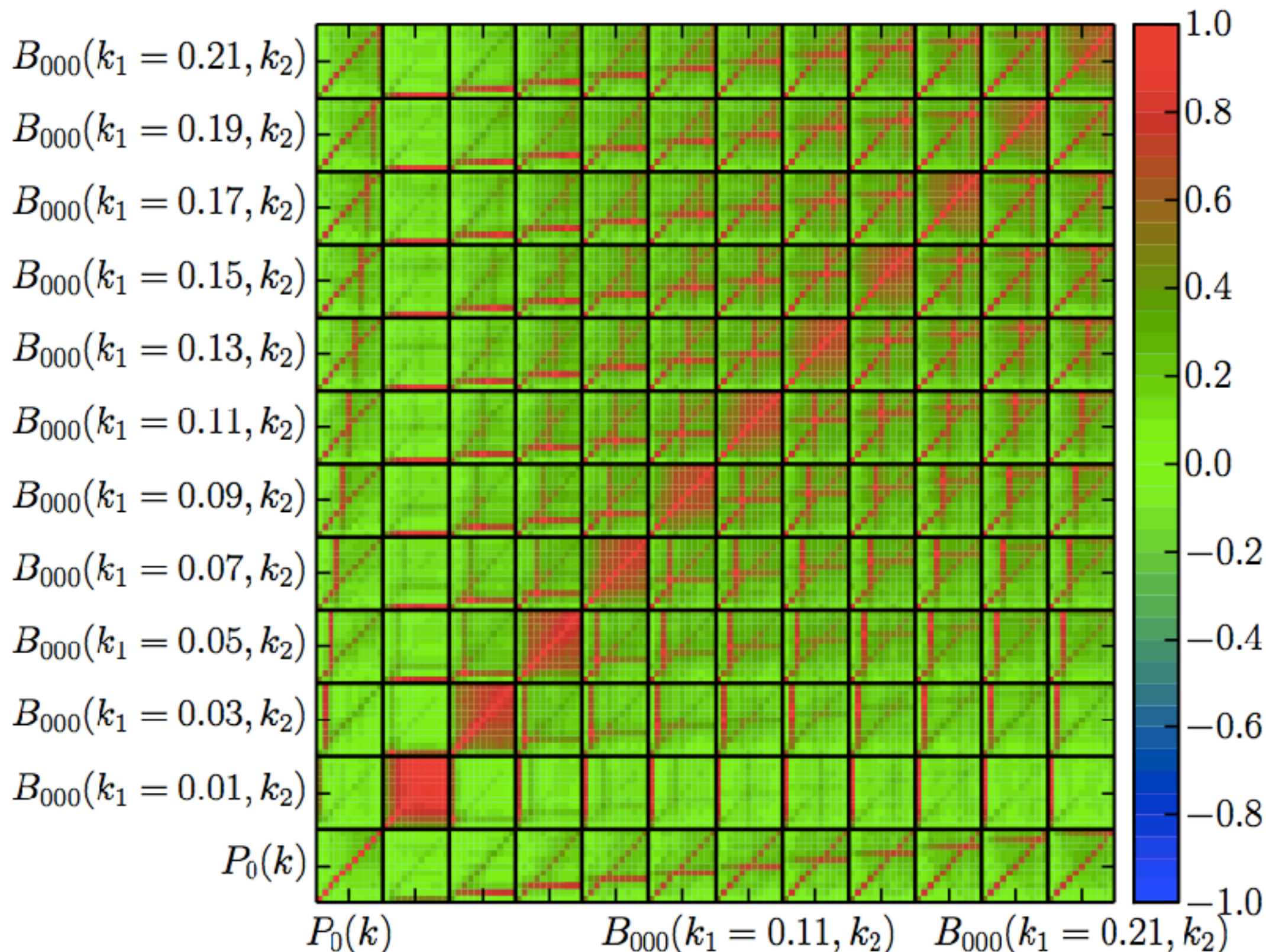
2次元の図は好きじゃない。

$$B_{000}(k_1, k_2)$$

**SDSS DR12 BOSS
CMASS North
mocks**



Covariance の場合はどうしようもない。



Covariance: 強相関の条件

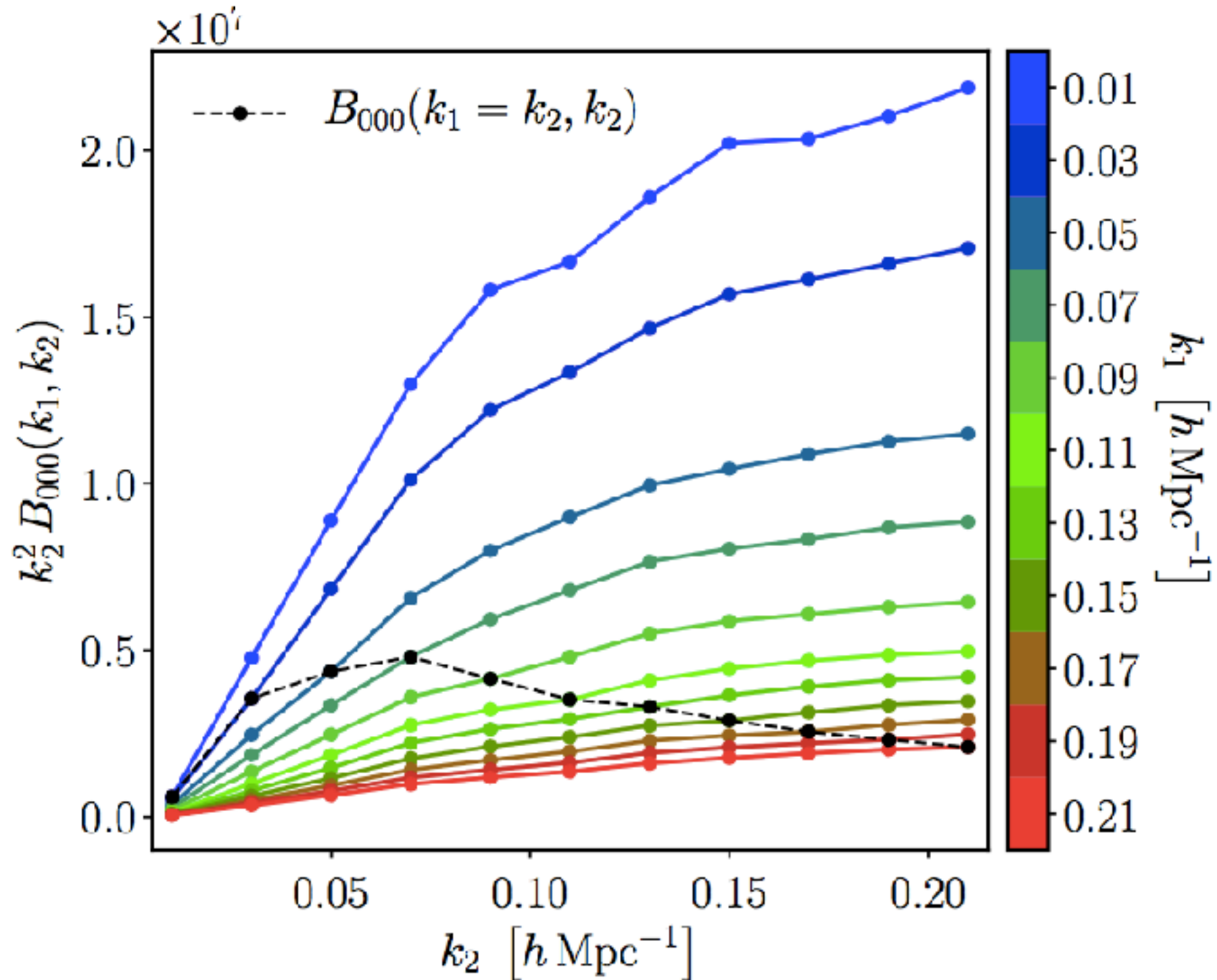
$$k_2 \neq k'_2$$

$$\text{Cov} \left(B_{\ell_1 \ell_2 L}(k_1, k_2), B_{\ell'_1 \ell'_2 L'}(k'_1, k'_2) \right)$$

$$k_1 = k'_1$$

$$\mathbf{k_1 = k_2}$$

$$B_{000}(k_1, k_2)$$



Covariance: 強相関の条件

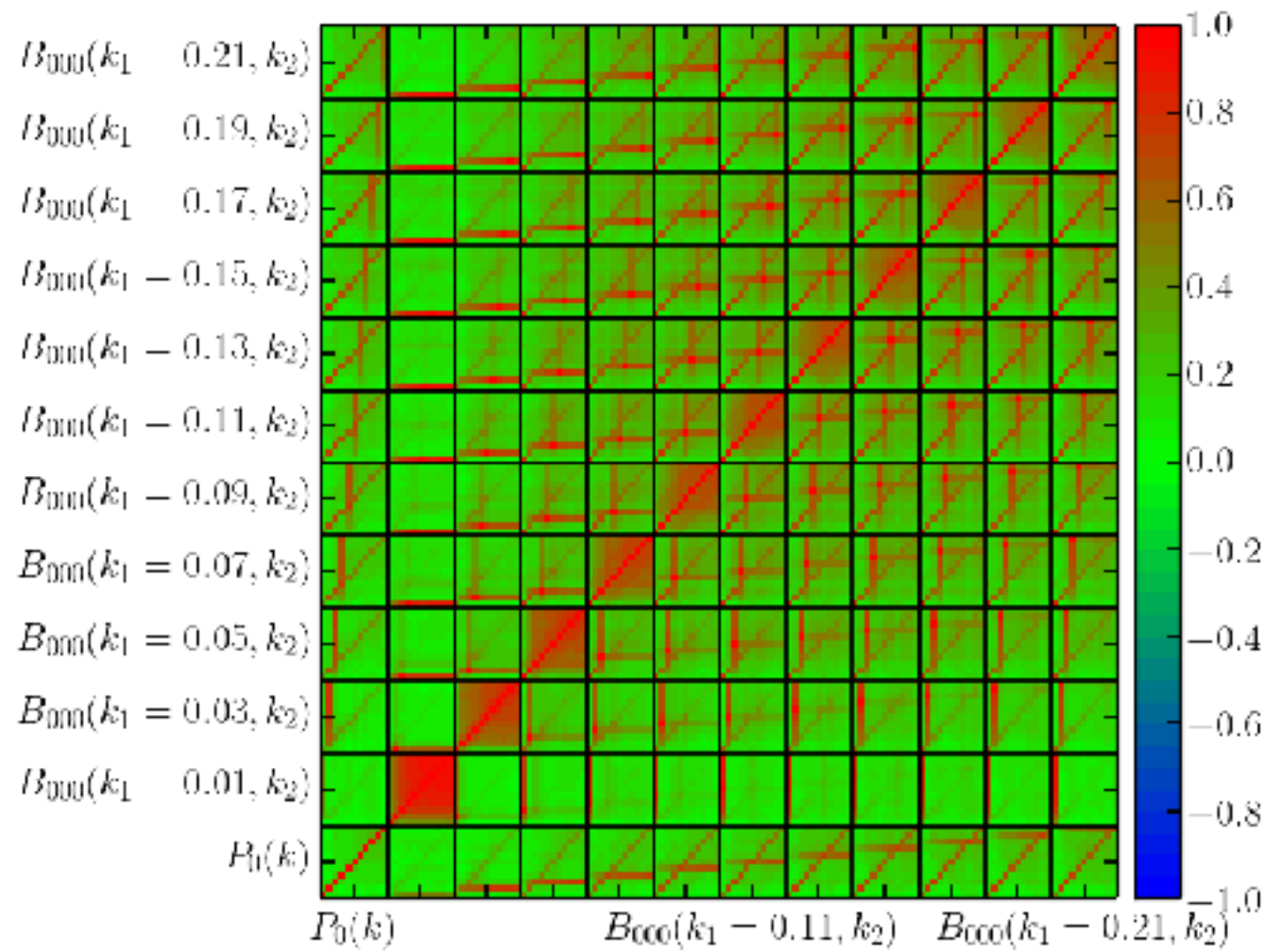
$$\text{Cov} \left(B_{\ell_1 \ell_2 L}(k, k), B_{\ell'_1 \ell'_2 L'}(k', k') \right)$$



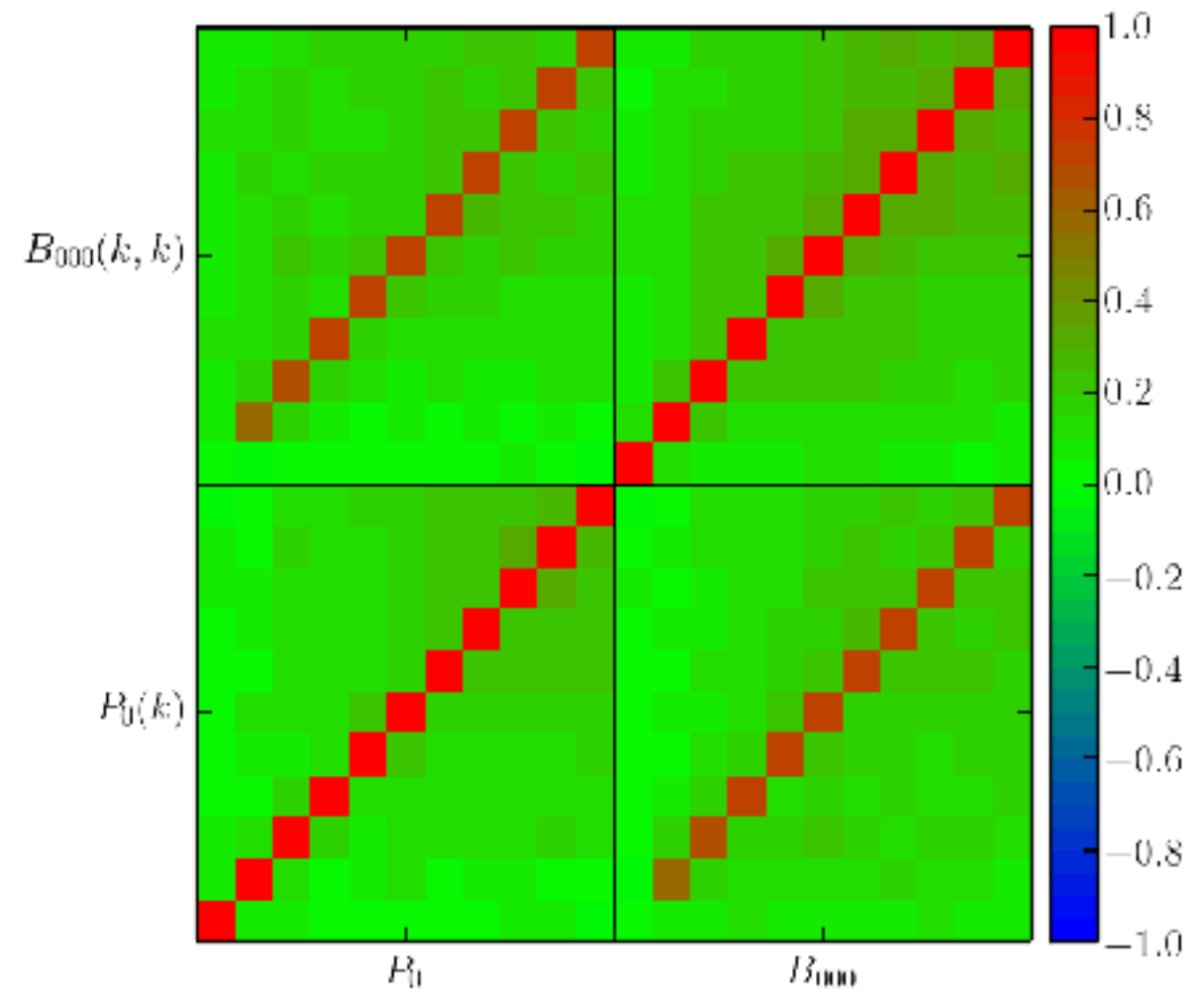
$$k = k'$$

比較: B000

Full

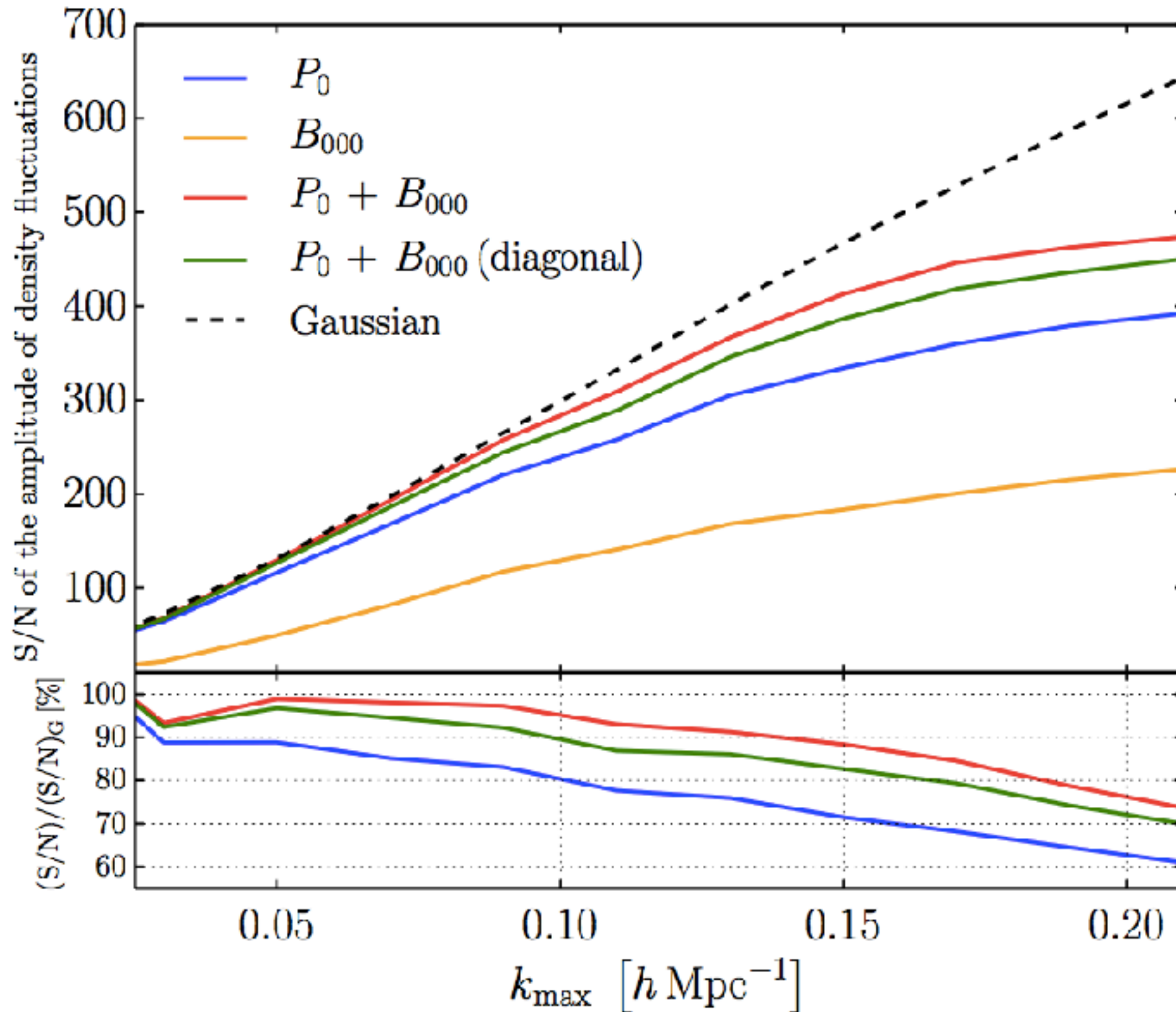


Diagonal



Cumulative S/N:

CMASS North (観測量！)



Covariance まとめ (1)

$z=0.5$ で、 $k=0.1$ ならば、90%以上の情報が回復する。

$k=0.2$ の場合は、70-80%.

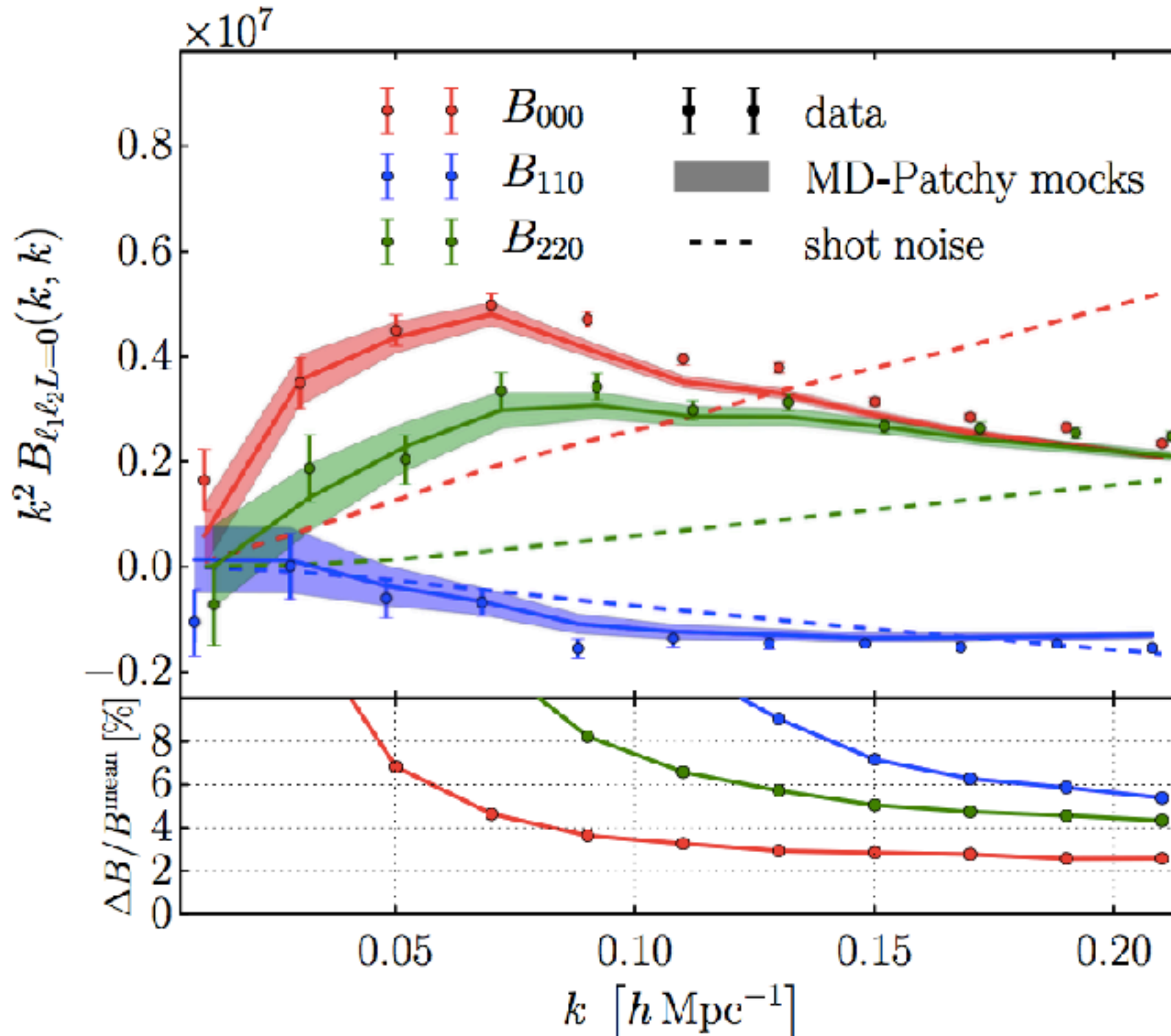
higher-order statistics が必要？

$k_1=k_2$ に主な情報がある。

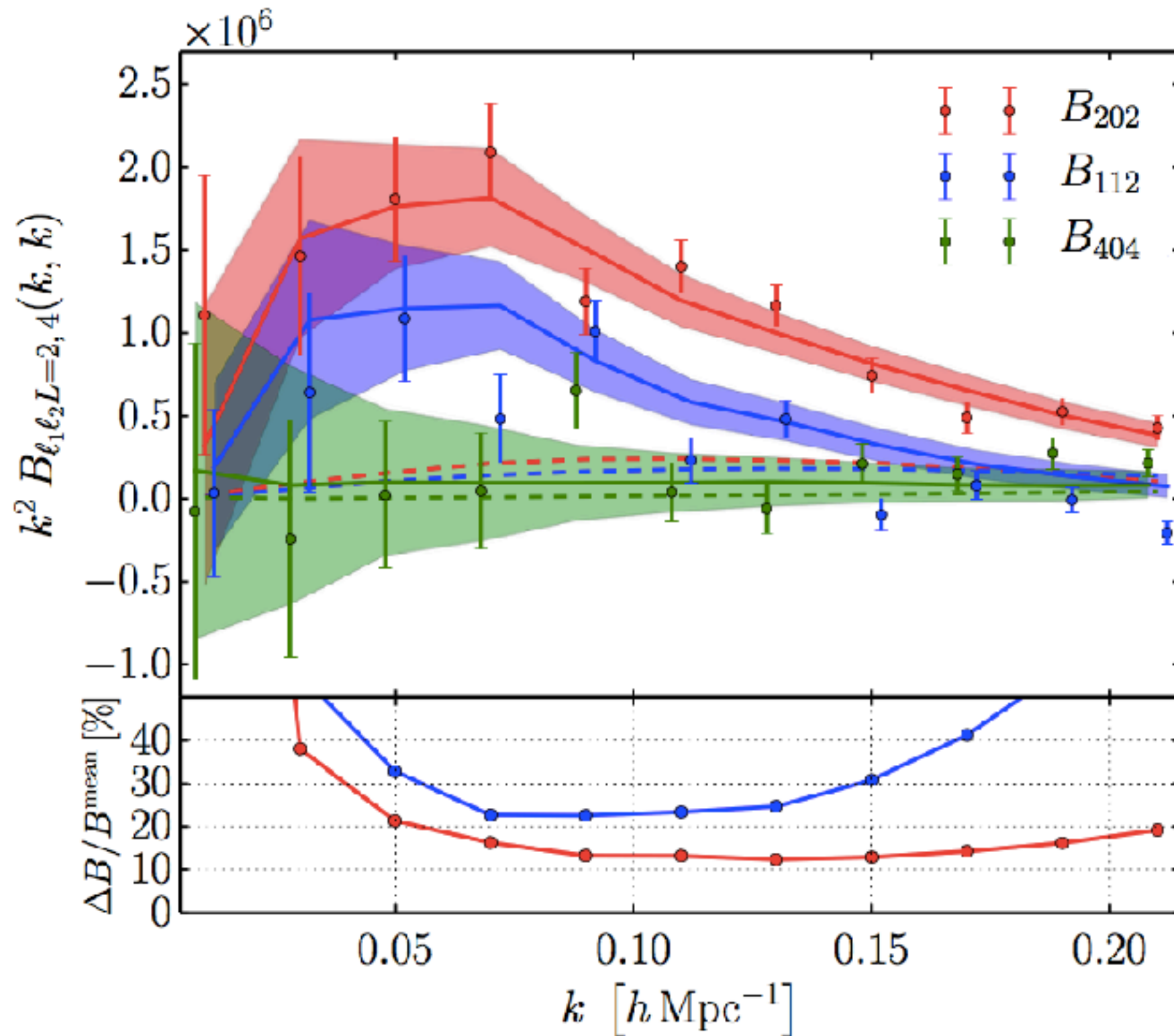
パラメータ縮退を解くという意味では、 $k_1=k_2$ で十分？

(要 Fisher analysis)

Higher Multipoles: $L = 0$ (monopole)



Higher Multipoles: $L = 2, 4$ (quadrupole, hexadecapole)



Covariance まとめ (2)

**Bispectrum L=2 mode (quadrupole)の検出。
Bispectrum L=4 (hexadecapole)は未検出。
(Power spectrum でも同じ。)**

**Bispectrum と power spectrum は、
L=ell の場合に相関がある。**

**k1=k2 さえ見れば、ビンの数が少なくてもすみ、
経済的。計算時間短縮。**

もちろん、full analysis が一番望ましいけれど。

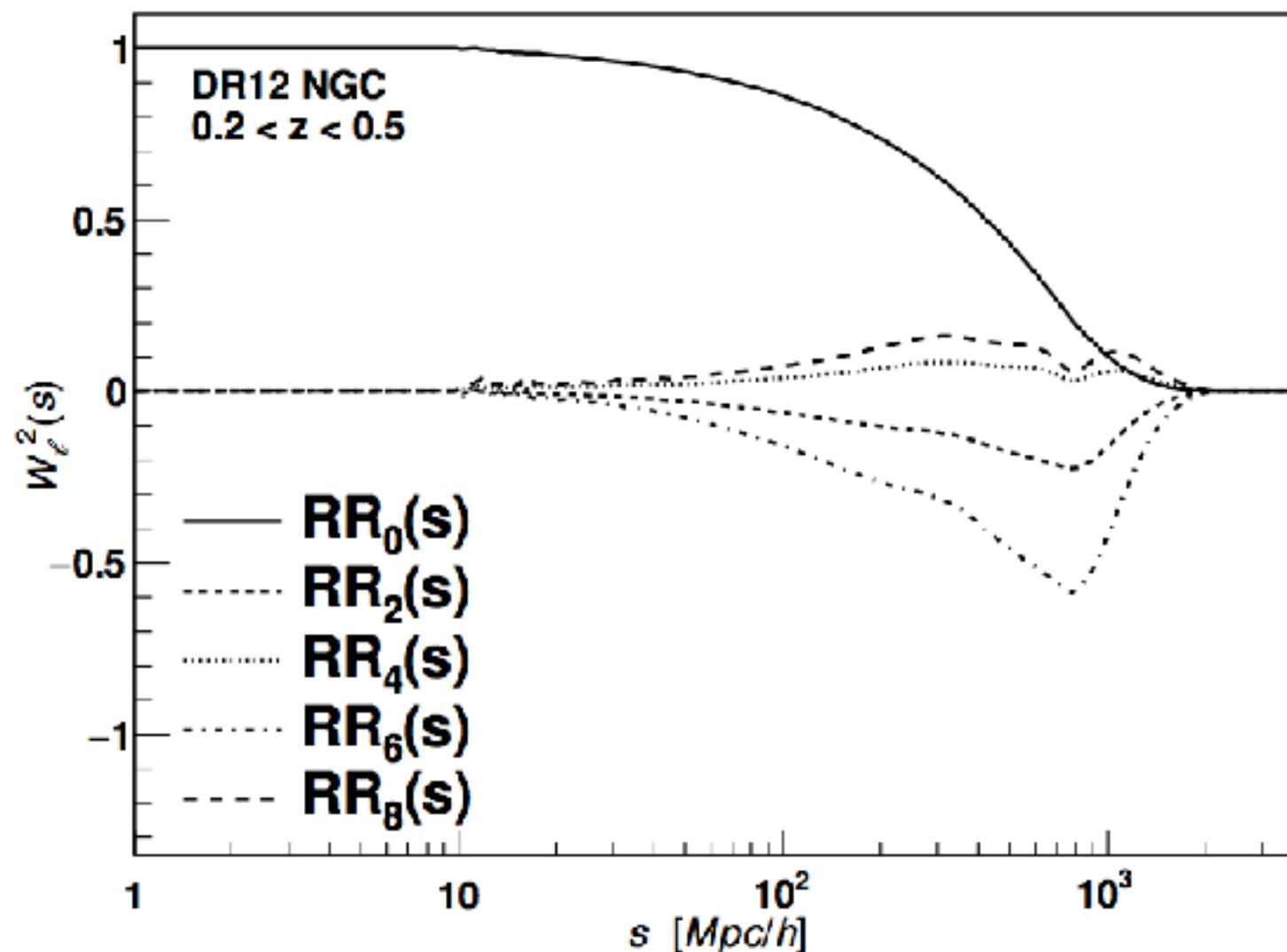
Window function

Largest theoretical uncertainties

Power spectrum (2PCF) の場合

$$\xi_{\text{mask}}(r) = (2\ell + 1) \sum_{\ell_1 \ell_2} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 Q_{\ell_1}(r) \xi_{\ell_2}(r)$$

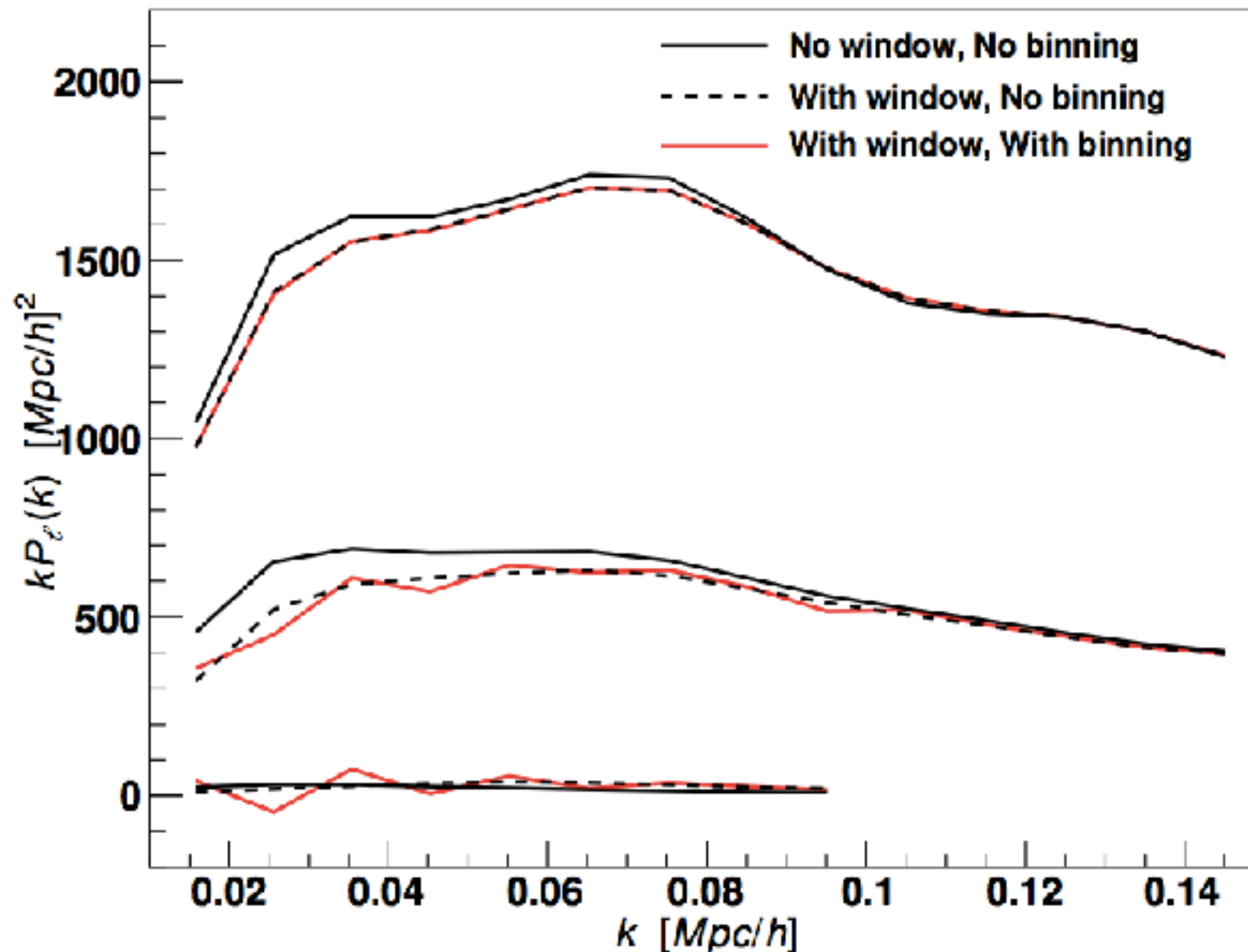
Wilson et al. 2015



Beutler et al. 2016

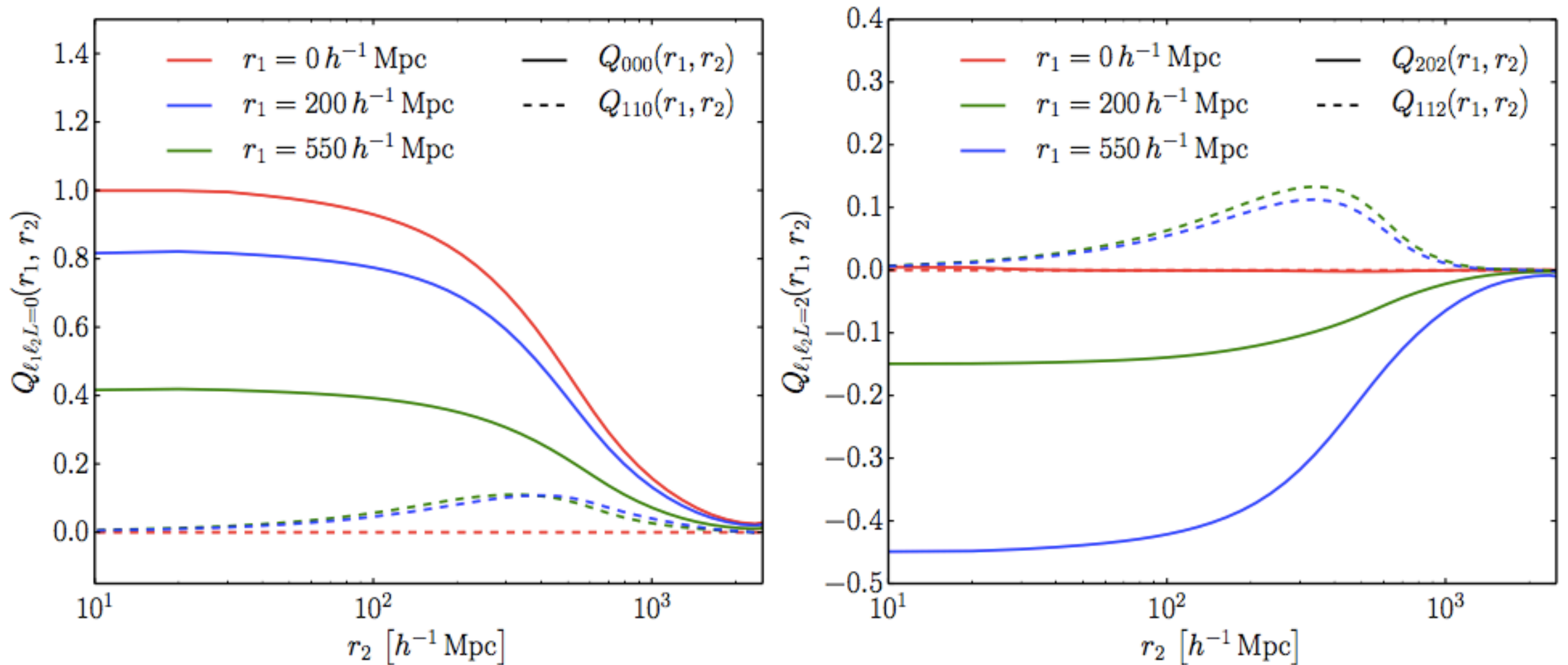
Power spectrum (2PCF) の場合

$$\xi_{\text{mask}}(r) = (2\ell + 1) \sum_{\ell_1 \ell_2} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 Q_{\ell_1}(r) \xi_{\ell_2}(r)$$



Bi spectrum (3PCF) の場合

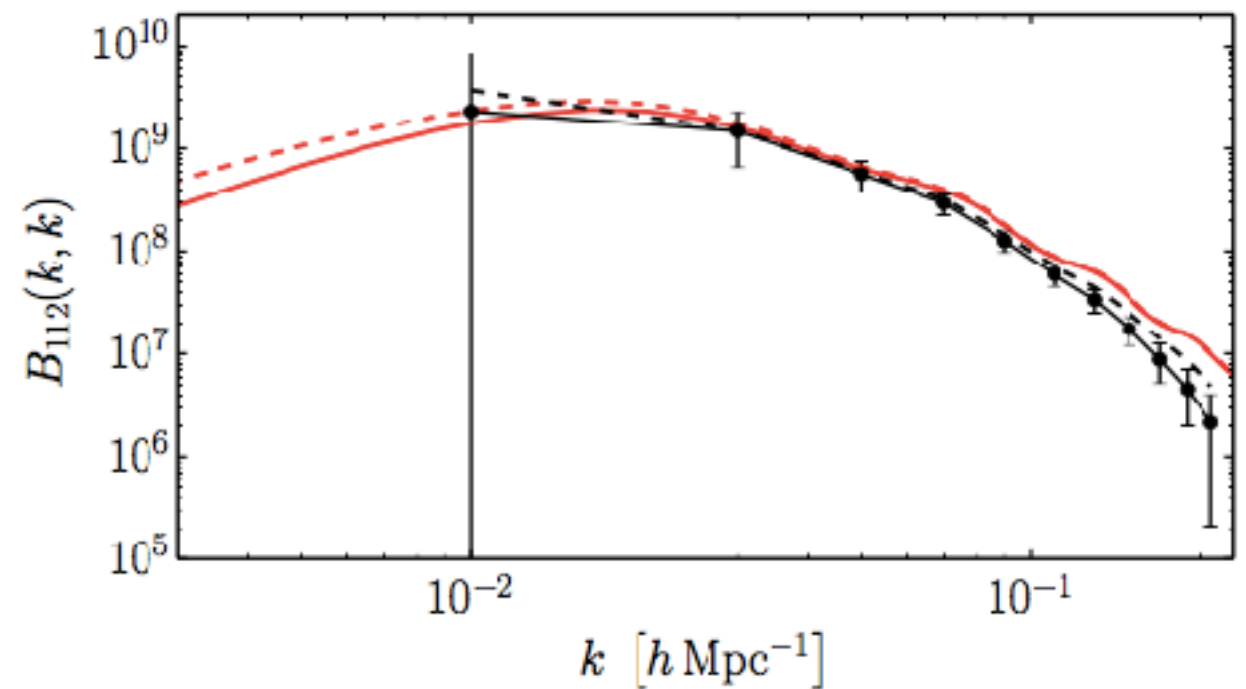
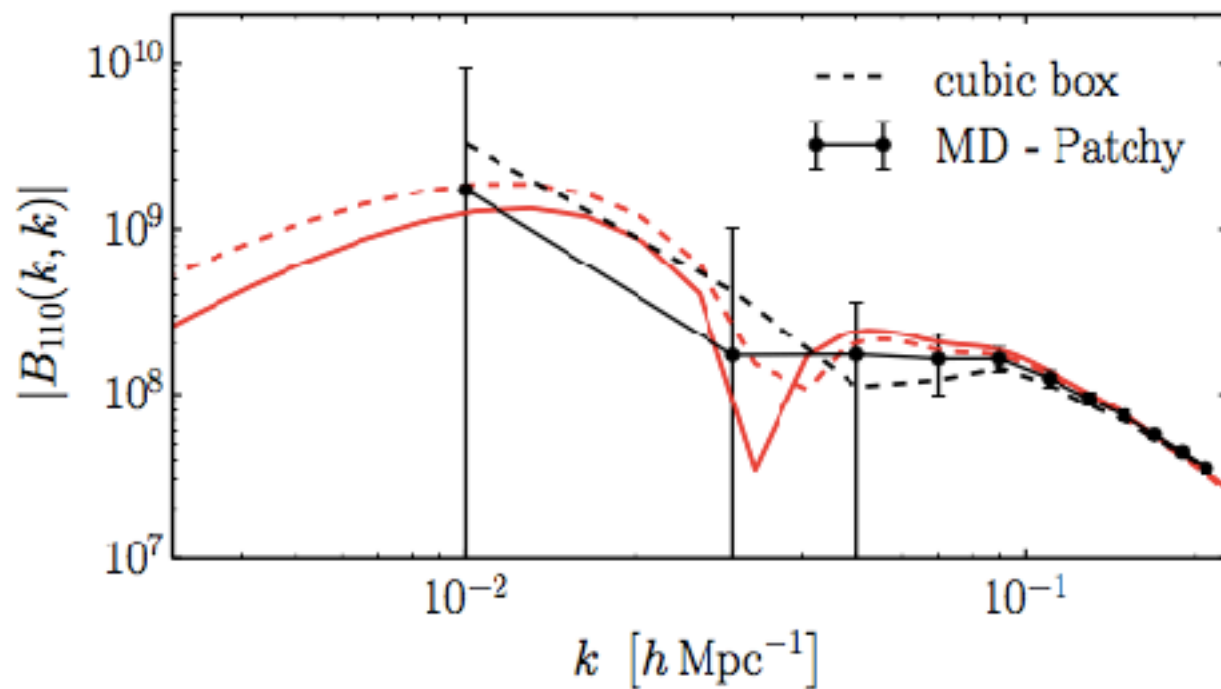
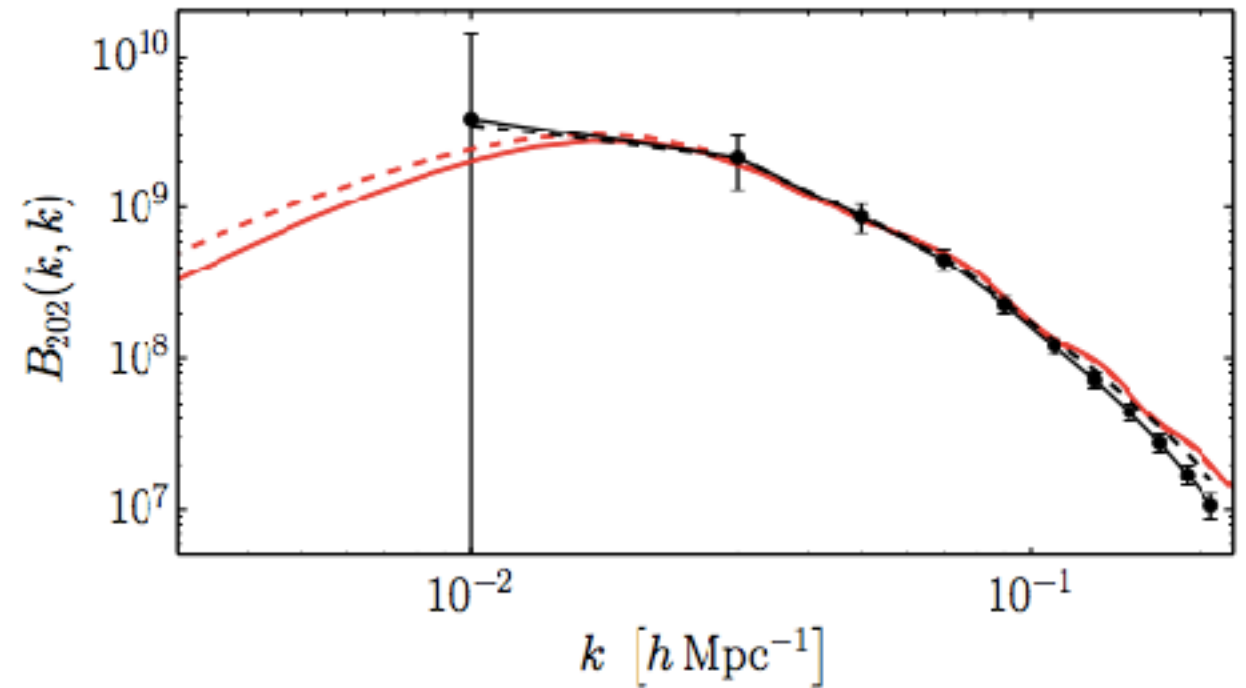
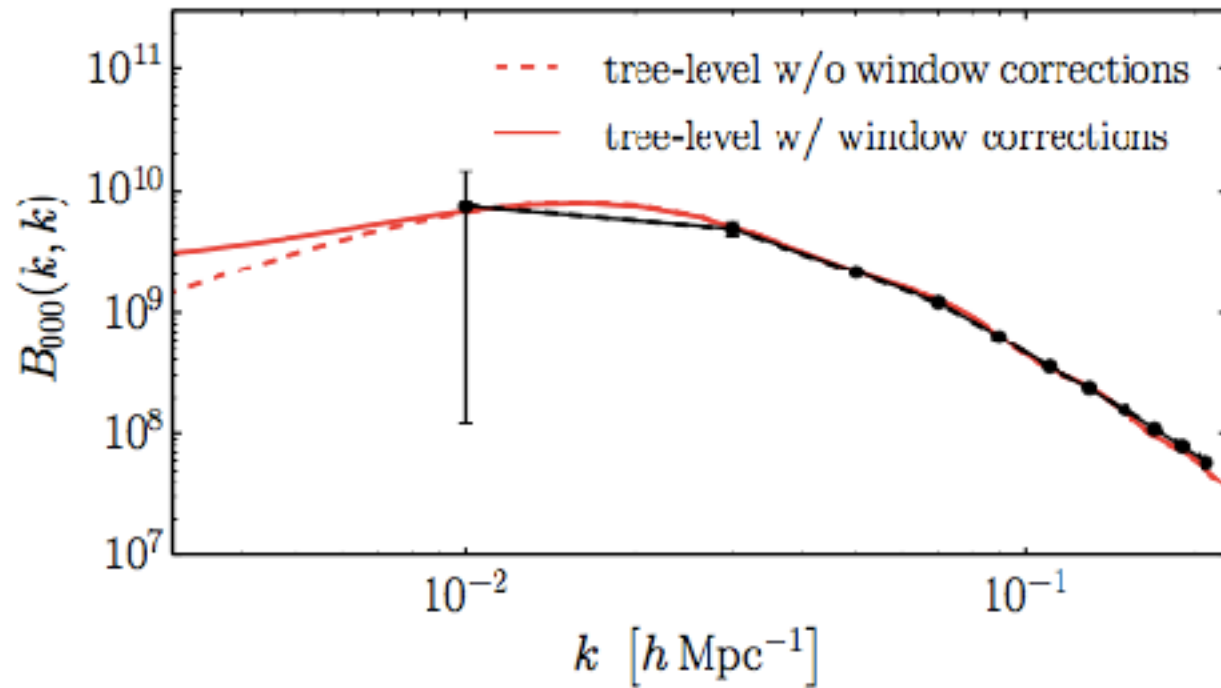
$$Q_{\ell_1 \ell_2 L}(r_1, r_2)$$



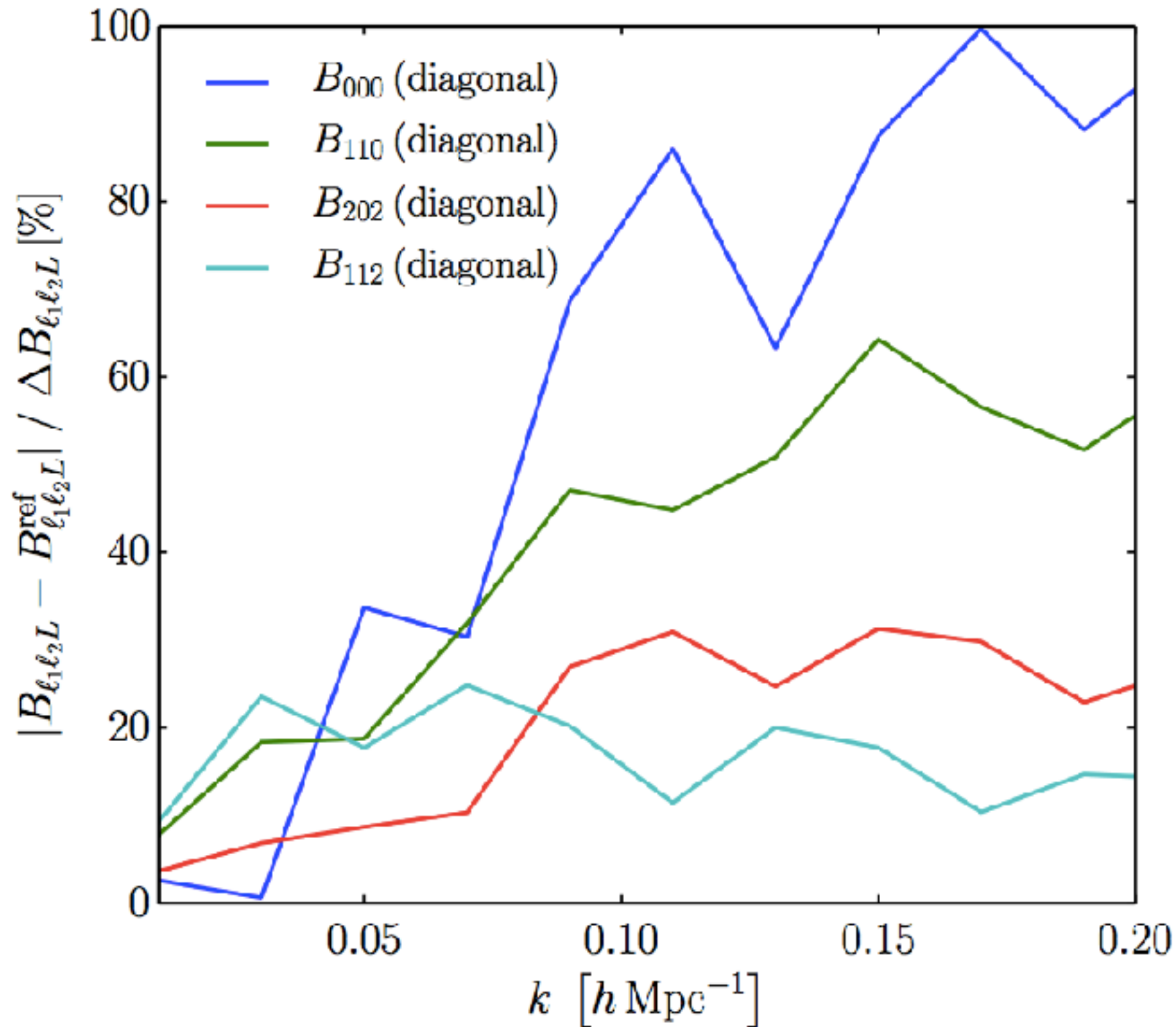
Bi spectrum (3PCF) の場合

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \widehat{\xi}_{\ell_1 \ell_2 L}(r_1, r_2) \right\rangle_{\text{model}} \\
 &= N_{\ell_1 \ell_2 L} \sum_{\ell'_1 + \ell'_2 + L' = \text{even}} \sum_{\ell''_1 + \ell''_2 + L'' = \text{even}} \\
 & \times \begin{Bmatrix} \ell''_1 & \ell''_2 & L'' \\ \ell'_1 & \ell'_2 & L' \\ \ell_1 & \ell_2 & L \end{Bmatrix} \left[\frac{H_{\ell_1 \ell_2 L} H_{\ell_1 \ell'_1 \ell''_1} H_{\ell_2 \ell'_2 \ell''_2} H_{L L' L''}}{H_{\ell'_1 \ell'_2 L'} H_{\ell''_1 \ell''_2 L''}} \right] \\
 & \times Q_{\ell''_1 \ell''_2 L''}(r_1, r_2) \zeta_{\ell'_1 \ell'_2 L'}(r_1, r_2) \\
 & - Q_{\ell_1 \ell_2 L}(r_1, r_2) \bar{\zeta},
 \end{aligned}$$

Bispectrum Window corrections



Bispectrum Window corrections



Summary (1): Theoretical advantage

- 1) **統計的一様等方性+パリティ対称性を満たす。**
- 2) **結果が座標軸に依存しない。**
- 3) **FFT アルゴリズムが使える。**
- 4) **波数が二つなので、コンパクト。計算速い。**
- 5) **Window function 効果が入る。**

Summary (2): Measurements

- 1) $k \sim 0.1 h/\text{Mpc}$ で 90%の情報を回復する。
- 2) $k \sim 0.2 h/\text{Mpc}$ だと4点が必要なのかも。
- 3) 主な情報は $k_1 = k_2$ に存在する。
- 4) **L=2 (anisotropic) mode の first detection (14 sigma) !!**

**測定の観点からは、
もう問題はありません。**

後は理論モデル

**測定の観点からは、
もう問題はありません。**

後は理論モデル

モデルも作ります。

Future works

1) Fisher analysis

(Gaussian limit covariance [auto, cross], AP effect, Primordial non-Gaussian, neutrino mass)

2) non-linear BAO modeling

(exponential damping)

3) anisotropic BAO analysis

4) RSD full shape modeling

5) full RSD analysis

6) Primordial non-Gaussianity

(Reconstruction?)

7) 悔しいけど、Reconstruction には可能性を感じている。

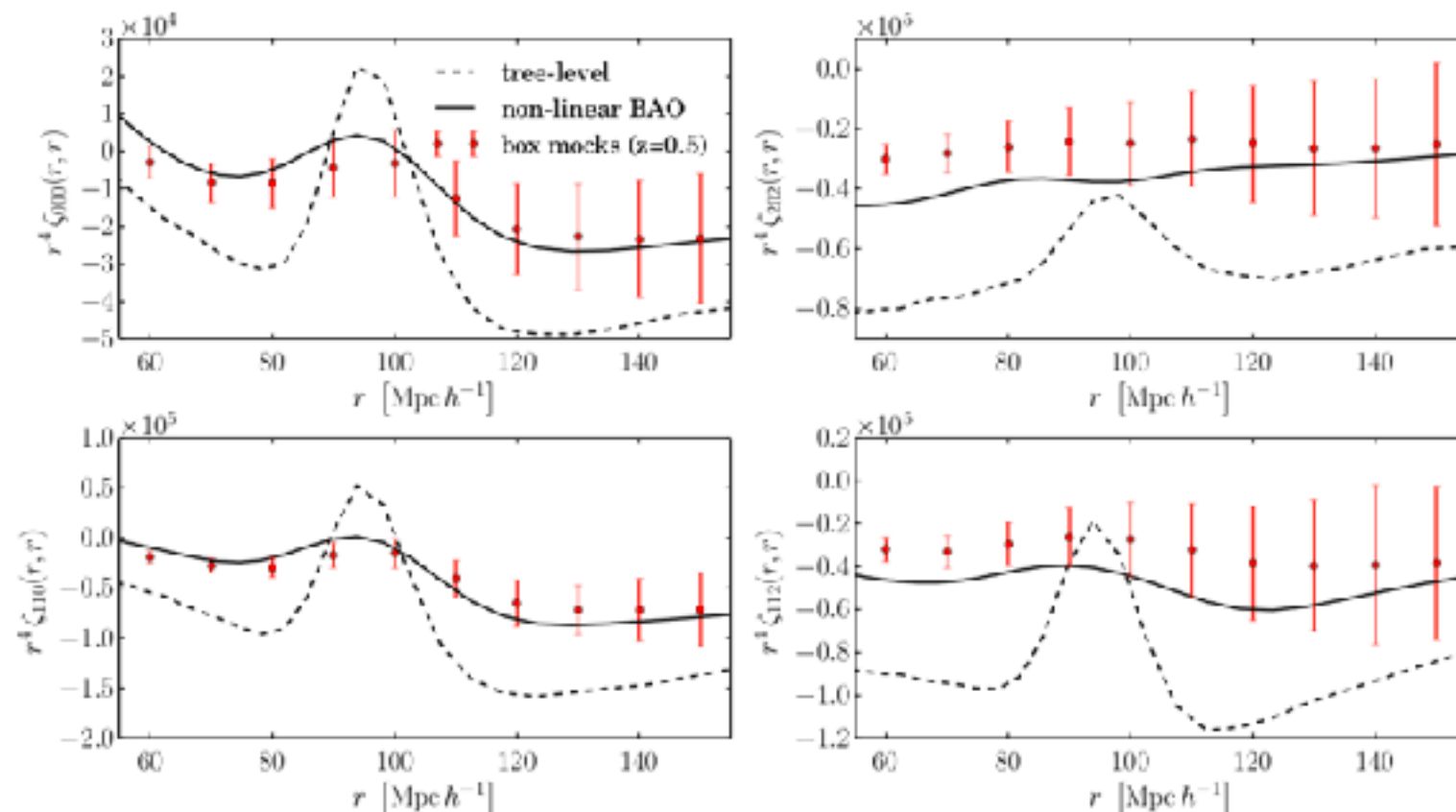
Simplest model for non-linear BAO

Gamma-expansion of LPT with Lagrangian bias

$$B(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3) = e^{-\frac{1}{2}k^2[1+2\mu^2f+\mu^2f^2]\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}k_1^2[1+2\mu_1^2f+\mu_1^2f^2]\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}k_2^2[1+2\mu_2^2f+\mu_2^2f^2]\sigma^2} \\ \times 2Z(\vec{k}_1, \vec{k}_2)Z(\vec{k}_1)Z(\vec{k}_2)P_{\text{lin}}(k_1)P_{\text{lin}}(k_2)$$

Simplest model for non-linear BAO

Comparison with box mocks at $z=0.57$



$b_1 = 1.6, b_2 = 1.8$

The error bars are multiplied by 2.15 in order to correspond to CMASS NGC:

the volume of CMASS NGC $\sim (1.5\text{Gpc})^3$ and the volume of box is $\sim (2.5\text{Gpc})^3$. $(2.5/1.5)^{3/2} \sim 2.15$