2017年9月21日　研究会「生物から宇宙までの非線形現象」＠京大人・環

# Extremal CFTと BTZブラックホール

栗田泰生（神奈川工科大学）

# 簡単に自己紹介

- 1995年総合人間学部へ
  （4年生では植松研）
- 1999年人間・環境学研究科入学
- 青山研、早田研を経て
  阪上研に 2001～2004まで博士課程院生として在籍
- 大阪市大等でポスドク(2007年まで）.

（この間、阪大横山さんに5か月、湯川奨学生として基研に半年間お世話になりました）

- 関学で岡村さんのお世話に(2008年度）
- 神奈川工科大学に着任

# はじめに

- 量子重力は謎である.
- ブラックホールは熱力学的物体(熱輻射が予想されていて、エントロピーも)で、量子重力のヒントになりそう.
(エントロピーは微視的自由度を想起させ、量子論から説明されるのでは？と期待)
- BTZブラックホール($AdS_3$重力)は比較的シンプルで良い道標になりそう(期待).
- 私自身、2003～04年頃、この辺りのことを阪上さんと共同研究していました.

CFT description of three-dimensional Hawking Page transition
Yasunari Kurita, Masa-aki Sakagami (Kyoto U., HES Grad. Sch.). Mar 2004. 20 pp.
Published in Prog.Theor.Phys. 113 (2005) 1193-1213
DOI: 10.1143/PTP.113.1193
e-Print: hep-th/0403091 | PDF

- 今日は、主にその後の発展についてお話しします.

# なんで3次元AdS重力？？

- ３次元以上を考えたい.

理由：ブラックホールのエントロピー（ホライズン面積）は3次元以上で有限サイズ

- ４次元以上は豊か

局所的自由度（重力波）がある. ５次元以上では、多くのブラック解が見つかっている. （現段階では、まだ難しそうに見える）

- ３次元

重力波がなく自明っぽい. でも、AdS（負の宇宙項）重力ならブラックホール解が存在（BTZ, 1992)

- <u>$AdS_3$重力とBTZブラックホールを考える</u>

# AdS/CFT対応

- ３次元AdS重力の物理的ヒルベルト空間には、２次元共形(conformal)対称性が作用（Brown Henneaux 1986）

$$c_L = c_R = \frac{3\ell}{2G}$$

2次元共形対称性のcentral charge. 理論のパラメータ

- AdS 量子重力は boundary CFT（共形場理論）である！（Maldacena 1998)

AdS/CFT対応

- AdS/CFT対応を認めると、３次元AdS pure重力に双対な２次元CFTを探す問題に帰着
- Zamolodchikovのc-定理 ⇒ central charge は離散的（ $\ell/G$ も離散的）
- その値は？

Witten, arXiv:0706.3359

# Wittenの考察

- $\mathrm{AdS}_3$重力は，(ゲージ不変な)ゲージ理論（Chern-Simons理論）としても表現可能．（高次元だとゲージ不変ではない）
- 具体的には： $\mathcal{I}_{\mathrm{grav}}=\frac{1}{16\pi G}\int d^3x\sqrt{g}\left[\mathcal{R}+\frac{2}{\ell^2}\right]$

$$\mathcal{I}_{\mathrm{grav}}=\frac{k_L}{4\pi}\mathcal{I}_{\mathrm{CS}}\left(\mathcal{A}_L\right)-\frac{k_R}{4\pi}\mathcal{I}_{\mathrm{CS}}\left(\mathcal{A}_R\right)$$

ここで

$$\mathcal{I}_{\mathrm{CS}}\left(\mathcal{A}\right)=\int \mathrm{Tr}\left[\mathcal{A}\wedge d\mathcal{A}+\frac{2}{3}\mathcal{A}\wedge\mathcal{A}\wedge\mathcal{A}\right]$$

$$k_L=k_R=\underline{k=\ell/16G}$$

gauge group : SO(2,1) × SO(2,1)

- 「$k$」の決定 ⇒ central charge の決定！
- Diracの量子化条件っぽい議論を適用 ⇒ $k$ は integer

  ⇒ $c_L=c_R=24k$
- しかも理論は left-right で完全に分離するのでは？
  （ holomorphic factorization） そう仮定して話を進めよう！

Witten考察の続き

# $k$=1 の場合

$c = 24k = 24$

- $c$=24 holomorphic $\mathrm{CFT}_2$は正確に 71個（数学的には予想？）
- pure 重力 (物質場が無い)

⇒ FLM 模型，　唯一つに決まる (これ以外ない)

Frenkel, Lepowsky, Meurman('88)

モンスター対称性を持つ

- 分配関数も知られている

$$Z_1(\tau) = |J(\tau)|^2 = \left| \frac{41 E_4(\tau)^3 + 31 E_6(\tau)^2}{72\ \eta(\tau)^{24}} \right|^2$$

境界トーラスのモジュライ変数

$$J(\tau) = 1728\, j(q) - 744 \qquad q = e^{2\pi i \tau}$$

Klein's modular j invariant

後ほど、熱力学っぽいことを議論したいので
Euclideanを考える（CFT的にも便利）
AdSの境界はゼロ温度でシリンダー
有限温度でトーラス

# $k$=1 分配関数の $q$-展開

Witten, arXiv:0706.3359

$$J(q) = q^{-1} + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + 20245856256q^4 + \cdots$$

- 展開係数のLog： $\ln 196883 = 12.1904\cdots$

  $4\pi = 12.5664\cdots$に近い

- 196883 は primary 場の数 (FLMの解釈)
- BTZ のBekenstein-Hawkingエントロピー

$$S = \pi\left(\frac{\ell}{2G}\right)^{1/2}\left(\sqrt{M\ell - J} + \sqrt{M\ell + J}\right) = 4\pi\sqrt{k}\left(\sqrt{L_0} + \sqrt{\bar{L}_0}\right)$$

$$\boxed{M\ell = L_0 + \bar{L}_0, \quad J = L_0 - \bar{L}_0, \quad c = \frac{3\ell}{2G} = 24k}$$

primary場によりBTZの微視的状態が生成されるイメージ

- Petersson-Rademacher 公式

$$J(q) = \sum_{m=-1}^{\infty} c_m q^m \quad \Longrightarrow \quad \ln c_m \sim 4\pi\sqrt{m} - \frac{3}{4}\ln m - \frac{1}{2}\ln 2 + \ldots.$$

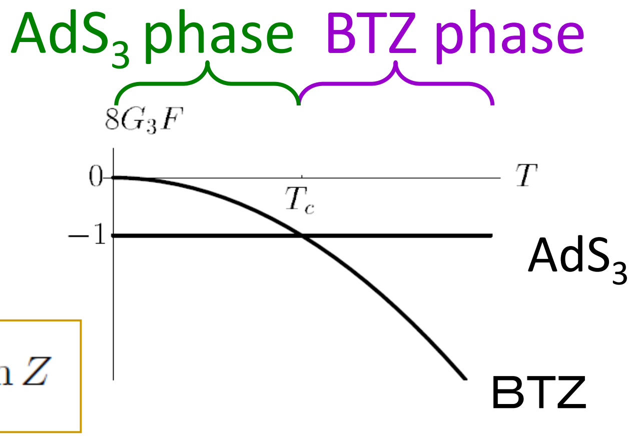
$$4\pi - \frac{1}{2}\ln 2 = 12.2198\cdots$$

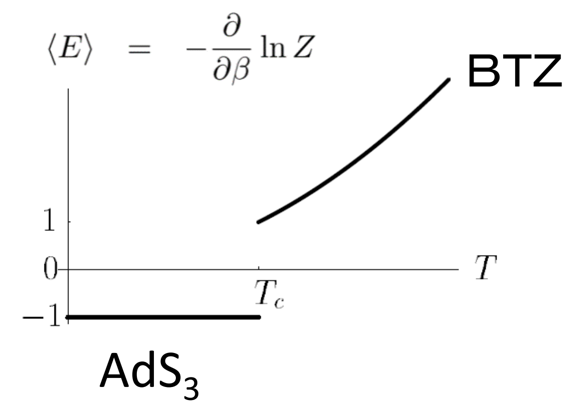
# Hawking-Page 相転移(AdS重力の相転移）

- 3次元版

**準古典論**

$$Z \approx e^{-I_E[\hat{g}]} \quad \Rightarrow \quad F = -\frac{1}{\beta}\ln Z$$

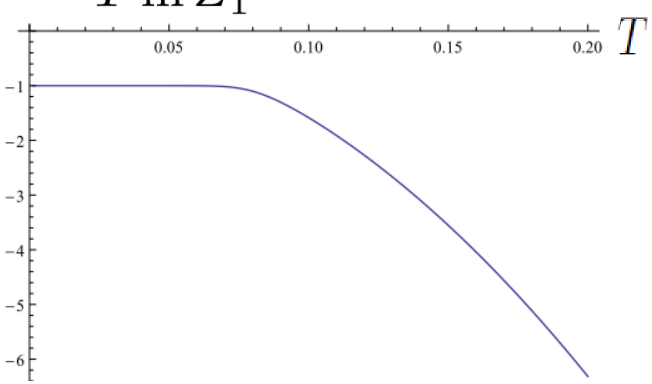


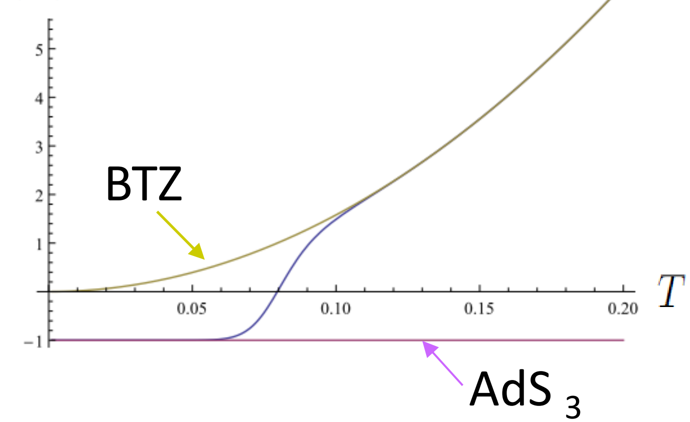

**FLM模型 ($k$=1 CFT)**

自由エネルギー

$$F = -T\ln Z_1$$




$$\langle E\rangle = T^2\partial_T \ln Z_1$$




**AdS$_3$重力と対応はよい**

# $k \geq 2$への拡張

- $k \to \infty$が準古典極限　⇒　$k \geq 2$ への拡張を考えたい
- $AdS_3$量子重力を調べる上でも、$k \geq 2$ の場合を知りたい

- 観察：　FLM 模型($k$=1)では，the Lowest (scaling or mass) dimension of primary field (other than identity)　is　2 ( = $k$+1)

$c$=24$k$ の場合、非自明な primary 場の最小次元は「$k$+1以下」が示せる．非自明なprimary場の最小次元が $k$+1の CFT ($c$=24$k$) を extremal CFT　という

# $k$+1？

雰囲気です

## 基底状態と最小BTZの mass gap ！

- 基底状態のエネルギー： $L_0 = \bar{L}_0 = -\frac{c}{24} = -k$
- BTZの質量 ： $Ml = L_0 + \bar{L}_0$
- $M > 0 \Rightarrow L_0 \geq 1$
- 基底状態と 最小(有限サイズ) BTZ の差は $k + 1$

Witten も論文で "This may sound like magic" と･･･.

"A Black hole Farely Tail" (Diagraaf, Maldacena, Moore, Verlinde '00) とも関連？

Witten, arXiv:0706.3359

# Wittenの予想

Pure $\mathrm{AdS}_3$ 量子重力は extremal CFT では？

- $c$=24 $k$ のCFTで，非自明なprimary場の最小次元が $k$+1 .

$k$: positive integer

- $k$=1: **FLM 模型** が存在
- $k\geq 2$ : extremal CFT は未発見 （後ほど議論）
- 大きな特徴として分配関数(トーラス上)が一意に決まる

# Extremal CFTの分配関数(holomorphic のみ書くと)

$$Z(\tau) = \mathrm{Tr}\left[q^{L_0}\right] = q^{-k}\left[\prod_{n=2}^{\infty}\frac{1}{1-q^n} + \mathcal{O}(q^{k+1})\right]$$

基底状態とVirasoro descendants からの寄与

BTZ ($L_0 \geq 1$) からの寄与

数学的にわかること: holomorphic＆modular inv.
⇒「 $Z(\tau)$ は $J$-function の多項式」

$$J(q) = 1728\, j(q) - 744 = q^{-1} + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + \cdots$$

Klein’s modular invariant

$$q = e^{2\pi i\tau}$$

境界トーラスのモジュライ変数

**Extremal CFTの分配関数は一意に決まる**

# 種数1トーラス上の ECFT の分配関数

- 最初のいくつかの $k$ に対して

添字は $k$

FLM('84) で計算されていた

$$Z_1(q) = |J(q)|^2 = \left| \frac{41E_4(\tau)^3 + 31E_6(\tau)^2}{72\eta(\tau)^{24}} \right|^2$$

$$Z_2(q) = |J(q)^2 - 393767|^2$$

$$Z_3(q) = |J(q)^3 - 590651J(q) - 64481279|^2$$

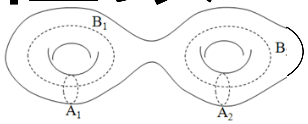
$$Z_4(q) = |J(q)^4 - 787535J(q)^2 - 85975039J(q) + 74069025266|^2$$

自然数「$k$」を与えれば分配関数は計算可能 （暇さえあれば）

例： $k$=10

$$\begin{aligned} Z_{10} \;=\; & \big|J^{10} - 1968839J^8 - 214937599J^7 + 1348071256190J^6 \\ & +253704014739574J^5 - 361538450036076764J^4 \\ & -82414308102793025330J^3 + 3012337307231543841608 5J^2 \\ & +6219705565173520637592236J - 264390492553551717748100292\big|^2 \end{aligned}$$

# 種数2のトーラス上の分配関数




- g=2 のECFT分配関数も k=1,2,3 の場合に一意に決定された.

Gaiotto, Yin　JHEP08(2007)029

- 分配関数の具体形:

For k=1

$$Z_{k=1,g=2}(\Omega) = \frac{\text{const.}}{\chi_{10}} \left( \frac{41}{4608}\psi_4^3 + \frac{31}{1152}\psi_6^2 - \frac{3813}{2048}\chi_{12} \right)$$

For k=2

$$Z_{k=2,g=2}(\Omega) = \frac{A_2}{\chi_{10}^2} \Big( \frac{574489}{12230590464}\psi_4^6 + \frac{1125863}{1528823808}\psi_4^3\psi_6^2 + \frac{159769}{764411904}\psi_6^4 - \frac{17809159}{905969664}\psi_4^3\chi_{12} - \frac{6550529}{226492416}\psi_6^2\chi_{12} + \frac{91785533041}{154618822656}\chi_{12}^2 - \frac{393767}{1572864}\psi_4^2\psi_6\chi_{10} + \frac{229938936071}{9663676416}\psi_4\chi_{10}^2 \Big)$$

周期行列
（moduli parameter）

$\psi_4, \psi_6$ is Siegel modular form with weight4,6

$\chi_{10}, \chi_{12}$ is Igusa Cusp form

この分配関数は multi-BTZ に対応すると考えられる.
周期行列をmulti-BTZパラメータで表現した(YK, 椎野 2014)

# Witten予想は本当か？（其の壱）

$k\geq 2$ のextremal CFTの存在について、多くの議論があった（数学っぽい議論が多かった）.

飯塚、田中、寺嶋('15)

- Chern-Simons理論の分配関数を局所化の方法で計算した.
  （holomorphic factorization等を仮定）
- 収束性とmodular不変性から「$k$ 整数」が要求される
- $k$=1 で extremal CFT と一致.
- $k$=2 で、pure gravity に対応するCFTの存在に黄色信号
  (fermion等の寄与が必要かもしれない）

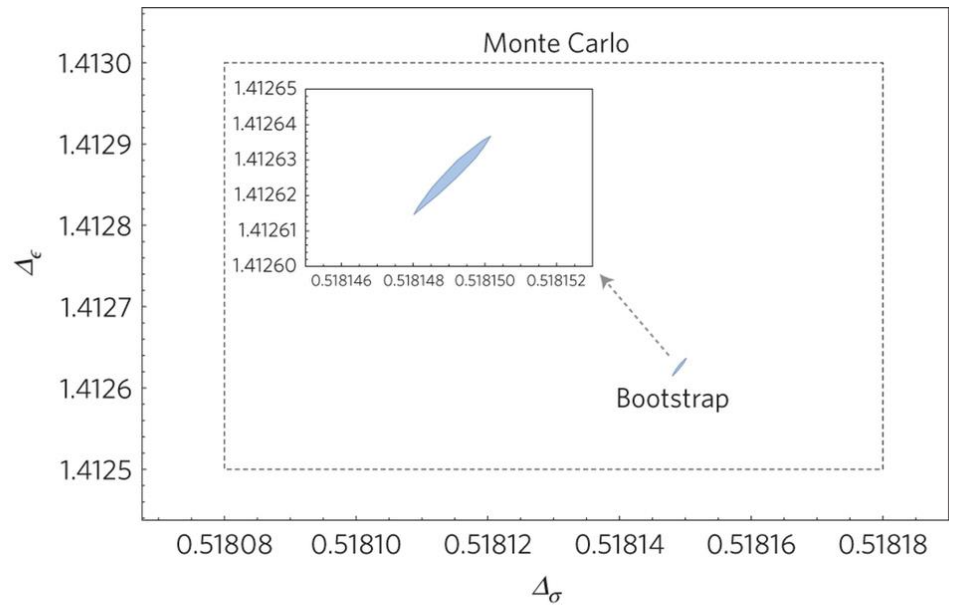
本田、飯塚、田中、寺嶋('15)

- Large $k$ （準古典極限）では modular 不変ではなくなる？

→（栗田, 阪上('04)の議論とも整合しそう）

# Conformal bootstrap!

- CFTの存在を調べる方法.
- 数値的に CFT の存在を調べる研究が盛んにおこなわれている.
- 例：3次元 Ising 模型の臨界指数に制限が与えられた. Poland, Simmons-Duffin, Nature Physics2016




- 他にも多くの応用・・

( I don’t know much about this)

# Witten予想は本当か？（其の弐）

Bae, K. Lee, S. Lee (Oct. 2016)

- Conformal bootstrap の方法を用いて extremal CFT の存在を（数値的に）調べた.
- $k \geq 20$ では extremal CFT は存在しないという結果に.

# Discussion

（人・環の先輩：山口哲 さんとの private communication に基づく)

- Holomorphic factorization が強すぎる？

（正則・反正則に分解されなくても、一発で書けるものがあれば・・・）

- $k$=１の FLMは正しい量子重力なのかもしれない

- そもそも pure重力の量子論は存在しない？

（場の理論だと量子論が存在しないことは珍しくない．QEDも・・
"QEDは死んだ" by Landau ） もしやSUSYが必要？

- string理論 を考えるべき？

# 時間があればもう少しお付き合い下さい

- $k \leq 19$では、extremal CFTが存在する可能性がある
- もし存在すれば量子重力の候補

- エントロピーやHawking-Page transition等を少し調べてみます.

- CFTがブラックホールや重力理論の熱力学をどのように表現するのか？に興味がある

# エントロピーについて

- $k$=1,2,4の場合　Witten, arXiv:0706.3359 による

$$Z_1(q) = |q^{-1} + \underline{196884}q + \mathcal{O}(q^2)|^2$$

$$Z_2(q) = |q^{-2} + 1 + \underline{42987520}q + \mathcal{O}(q^2)|^2$$

$$Z_4(q) = |q^{-4} + q^{-2} + q^{-1} + 2 + \underline{81026609428}q + \mathcal{O}(q^2)|^2$$

$$\boxed{S_{BH} = 4\pi\sqrt{k}\left(\sqrt{L_0} + \sqrt{\bar{L}_0}\right)}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $k$=1 | $\ln 196883 \approx 12.19$ | ⟺ | $4\pi\sqrt{1} \approx 12.57$ |
| $k$=2 | $\ln 42987519 \approx 17.58$ | | $4\pi\sqrt{2} \approx 17.77$ |
| $k$=4 | $\ln 81026609426 \approx 25.12$ | | $4\pi\sqrt{4} \approx 25.13$ |

$k$ が大きくなると、一致していくように見える！！･･･

# もう少し調べると

$$S_{BH} = 4\pi\sqrt{k}\left(\sqrt{L_0} + \sqrt{\bar{L}_0}\right)$$

- $k$=6

$$Z_6 \quad = \quad |q^{-6} + q^{-4} + q^{-3} + 2q^{-2} + 2q^{-1} + 4 + \underline{25595802494318}q + \cdots|^2$$

ln 25595802494318 = 30.8734 ... vs $4\pi\sqrt{6} = 30.7812\ldots$

- $k$=10

ln 229253150061482145 = 39.9736 ... vs $4\pi\sqrt{10} = 39.7384\ldots$

- $k \geq 5$ でまたズレてくる. 詳細に調べると

（Petersson-Rademacher 公式等を駆使して…）

$$Z_k(\tau) = \sum_{n=-k}^{\infty} b_{k,n} q^n$$

$$\ln b_{k,n} \sim \underbrace{4\pi\sqrt{kn}}_{} + \underbrace{\frac{1}{4}\ln k - \frac{3}{4}\ln n - \frac{1}{2}\ln 2}_{} + \ldots.$$

$k$=4, n=1 で消える！

↑

Bekenstein-Hawkingエントロピー

$k$=1同様，大きなnでも
Bekenstein-Hawkingに
leadingは一致

# まとめ

- ３次元AdS量子重力について議論した.
- $c$=24$k$ のextremal CFTは有力に思えたが、$k \geq 20$でextremal CFTは非存在(conformal bootstrap!)
- $c$=24 ($k$=1) の場合のFLM模型は有力候補に見える.
- $k \geq 2$ extremal CFT も含めて、分配関数を調べる限り BTZ や $AdS_3$（つまり漸近的$AdS_3$）の熱力学的性質を再現する.

- CFTがブラックホールをどのように表現するのか？ のヒントはあると期待している.　Future work