相対論的流体力学方程式の微視的導出に関する最近の試み[1]

国広悌二[2]
京都大学大学院理学研究科

概 要

津村享佑氏および大西一聡氏との共同研究に基づく相対論的流体力学方程式の微視的導出に関する最近の試みについて報告する。散逸系に対する相対論的流体方程式をめぐる基本的な問題を我々の観点で整理した後、現象論および微視的解析によるそれら課題への「解」を与える。相対論的ボルツマン方程式を力学系とみたとき、その漸近的赤外有効理論として相対論的流体方程式を導く。力学系の強力な縮約理論として「くりこみ群法」を用いる。イスラエル-スチュアート型の方程式の導出の結果も示す。「くりこみ群法」の詳しい説明も加えた。

1 はじめに

相対論的な流体方程式は宇宙論あるいは超高エネルギー重イオン衝突の物理において広く使われている。特に、RHIC のデータの完全流体模型による記述の成功 [1] は大きな意味を持つこととして多くの議論がされている [2]。しかし、完全流体の模型の成功はその後むしろ顕な散逸の効果の考慮そして散逸効果を含む輸送方程式への興味を刺激した。特にゲージ理論で記述される系の散逸の機構とともに散逸系の相対論的流体方程式への興味を増大させている [3]。現象論的にも、たとえばハドロンコロナのような希薄な物質では必然的に散逸は顕著になる [4]。このような場合、散逸流体方程式を用いるか、あるいは、より微視的な運動学的理論（ボルツマン方程式）に依拠しなければならない。さらに言えば、一般に、散逸の効果が小さいことを示すには顕にその効果を取り入れた解析が必要である。

しかしながら驚くべきことに、散逸流体に対する相対論的流体方程式の理論は完全に確立しているとは言いがたい状況である。

よく知られた散逸流体に対する相対論的流体方程式は、エッカルト [5] のものとランダウ-リフシッツ [6] のものであるが、これらはローレンツ共変性と局所的なエントロピー増大則を要請として現象論的に導出されたものである。それらを基礎付ける一つの方法は下の階層の輸送方程式、すなわち、相対論的運動学的方程式から赤外の有効理論として流体方程式を導くことである。ここではくりこみ群法 [7] を相対論的ボルツマン方程式に適用して相対論的流体方程式を導く試み [8, 9] を簡単に紹介する。この問題は van Kampen が彼の縮約法 [10] を適用して扱っている [11] が、得られた方程式がローレンツ共変性を持っていないので相対論的理論としては不適である。

2 散逸流体の相対論的流体方程式を巡る基本問題

散逸流体に対する相対論的流体方程式に関する基本的な問題を説明するために、二つの代表的な相対論的な散逸流体方程式 [5, 6] を紹介する。

流体方程式はエネルギー-運動量保存則と粒子数保存則を局所的に表現した式であり、次のように書

[1]「原子核研究」(流体特集号— 相対論的流体力学と高エネルギー重イオン反応: 来し方行く末) Vol.54 Supplement 3, 2010 年 4 月, p.37-57.

[2]e-mail address: kunihiro@ruby.scphys.kyoto-u.ac.jp

ける:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu N^\mu = 0. \tag{1}$$

ここで、$T^{\mu\nu}$ と N^μ はそれぞれエネルギー-運動量テンソルと粒子数流束であり、それらは流速ベクトル $u^\mu(x)$ $(\mu = 0, 1, 2, 3;\ u^\mu u_\mu = 1)$ を用いて次のように表される。

$$T^{\mu\nu} = \epsilon u^\mu u^\nu - p\Delta^{\mu\nu} + \delta T^{\mu\nu}, \quad N^\mu = nu^\mu + \delta N^\mu. \tag{2}$$

ここで、$\Delta^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu$ は空間的ベクトルへの射影演算子である。ϵ と p は系の局所内部エネルギーと圧力であり、$\delta T^{\mu\nu}$ と δN^μ はそれぞれ散逸によるエネルギー-運動量テンソルと粒子流束である。散逸があれば熱が発生する。熱はエネルギーの一種あり、相対論においてはエネルギーと質量の同等性が成り立つために質量流とエネルギー流の定義が曖昧になる。そのため流速ベクトル $u^\mu(x)$ を定義する局所静止系（Local Rest Frame; 以後 LRF と略記するかあるいは単にフレームと呼ぶ）の取り方に連続的な不定性が生じる。具体的には、この散逸項の形がフレームによって異なる。

一つの流儀は流体の速度ベクトルを熱流に平行に取るものである。すなわち、u^μ を次のように定義する;

$$u^\mu = T^{\mu\nu}u_\nu / \sqrt{T^{\alpha\beta}u_\beta T_{\alpha\sigma}u^\sigma}. \tag{3}$$

このときの LRF をエネルギーフレームと呼ぶ。ランダウ-リフシッツ [6] が提案した方程式はこのフレームのものであり、散逸項は次のように与えられる;

$$\begin{aligned} \delta T^{\mu\nu} &= 2\eta\frac{1}{2}[\nabla^\mu u^\nu + \nabla^\nu u^\mu - \frac{2}{3}\Delta^{\mu\nu}\nabla\cdot u] + \zeta\Delta^{\mu\nu}\nabla\cdot u, & (4)\\ \delta N^\mu &= -\lambda\frac{nT}{\epsilon+p}\left(\frac{1}{T}\nabla^\mu T - \frac{1}{\epsilon+p}\nabla^\mu p\right). & (5) \end{aligned}$$

ここで、η、ζ、λ はそれぞれ、ずり粘性率、体積粘性率、そして熱伝導率である。このとき、次の関係式が満たされることに注意する;

$$\delta T^{\mu\nu}u_\nu = 0, \tag{6}$$

および

$$u_\mu \delta N^\mu = 0. \tag{7}$$

第一の式 (6) は散逸によるエネルギー密度もエネルギー流もないことを意味している。一方、第二の式 (7) は散逸による粒子密度が存在しないことを意味している。逆に、今考えている流体の速度流 u^μ は散逸によるエネルギー密度・流れおよび粒子密度が観測されないような局所静止系 (LRF) で定義されているのである。

もう一つの典型的なフレームは粒子フレームと呼ばれるもので、そのとき速度ベクトルは次のように定義される;

$$u^\mu = N^\mu / \sqrt{N^\nu N_\nu}. \tag{8}$$

問題はこのフレームでエネルギー散逸項 $\delta T^{\mu\nu}$ はどのような条件を満たすかということである。エッカルト [5] は

$$u_\mu \delta T^{\mu\nu} u_\nu = 0, \tag{9}$$

且つ,

$$\delta N^\mu = 0, \tag{10}$$

と**仮定**した。(9) は、粒子フレームでの LRF のエネルギー密度が熱平衡状態のものと同じであることを要請していることと等価である；

$$u_\mu T^{\mu\nu} u_\nu = \epsilon. \tag{11}$$

この仮定の基に現象論的に導き出された散逸項は

$$\begin{aligned}\delta T^{\mu\nu} = \; &= 2\eta\frac{1}{2}[\nabla^\mu u^\nu + \nabla^\nu u^\mu - \frac{2}{3}\Delta^{\mu\nu}\nabla\cdot u] + \zeta\Delta^{\mu\nu}\nabla\cdot u \\ &+\lambda u^\mu T\left(\frac{1}{T}\nabla^\nu T - Du^\nu\right) + \lambda u^\nu T\left(\frac{1}{T}\nabla^\mu T - Du^\mu\right),\end{aligned} \tag{12}$$

である [5]。

実は、粒子フレームにおいてエネルギーの散逸項をどうとるべきかはいわゆる 1 次の方程式であろうとイスラエル-スチュアートレベル [12] の 2 次の方程式であろうと確立していない。以下で見るように我々の主張 [8, 13, 9] は散逸エネルギー密度に対する仮定 (9) は ad hoc であり、下の階層のダイナミクスである相対論的ボルツマン方程式と相容れないということである。

さらに、粒子流フレームでの典型的方程式であるエッカルト方程式を用いて熱平衡状態まわりの揺らぎを解析すると、揺らぎが指数関数的に増大し熱平衡状態が不安定という病的な振る舞いをする [14]。このことは、エッカルト方程式の拡張として構成されているイスラエル-スチュアート方程式 [12] にも持ち越されており、緩和時間の大きさによってはこの病的な不安定性が起こるという問題がある [14, 15]。

ランダウ方程式やエッカルト方程式はいわゆる 1 次の方程式であり、熱拡散や速度の横方向の伝播が放物型（拡散方程式型）になり、信号が無限大のスピードで伝わることになり、この意味で因果律を満たさない。この問題を避ける方法としていくつかのアイデアが提案されているが、未だ最終解決には至っていない。特に、イスラエル-スチュアート型の方程式もその形は未だ確定していない。ここで強調すべきことは、上記エッカルト方程式の不安定性の問題と因果律の問題は独立な問題であるということである。それは、これらの流体方程式を用いて密度およびエネルギー揺らぎを系統的に解析した研究 [13, 15] で具体的に示されている。

津村、大西および筆者 [8] はくりこみ群法と呼ばれる力学系の縮約法 [7, 16, 17, 18, 19, 20, 21] を用いて、相対論的ボルツマン方程式の流体力学極限を取ることにより、散逸を含む相対論的流体方程式の導出を行った。そこでは、時間および空間の粗視化を自動的に行うために巨視的流れベクトル $\boldsymbol{a}_p^\mu$ が導入される。唯一の仮定は、非相対論的な場合のナビエ-ストークス方程式を導出する場合 [20, 21] の自然な拡張として空間的な非一様性が散逸の起源であるというものである。そこで導出された方程式は、温度 $T(x)$、密度 $n(x)$ および流速ベクトル $u^\mu(x)$ だけで書かれた、いわゆる「標準解 (normal solution)」のレベルのものであり、1 次の方程式といわれるものである。これら 5 個の変数は線形化された衝突演算子のゼロモードであるエネルギー-運動量および粒子数カレントに対応している。

興味深いのは、$\boldsymbol{a}_p^\mu$ の選択により様々のフレームの流体方程式が帰結される一般的な相対論的散逸流体方程式になっていることである。実際、エネルギーフレームの方程式は $\boldsymbol{a}_p^\mu = u^\mu$ と選ぶことで得られる。結果はランダウ-リフシッツの方程式に完全に一致する [8]。

それでは、粒子流フレームの場合はどうであろうか？　我々の理論では、それは $\boldsymbol{a}_p^\mu = mu^\mu/p\cdot u$ と選ぶことに対応していて、散逸項は以下のようになる：

$$\begin{aligned}
\delta T^{\mu\nu} &= -\frac{1}{(4-3\gamma)^2}\zeta\nabla\cdot u(3u^\mu u^\nu - \Delta^{\mu\nu}) + \lambda T(u^\mu \tilde{X}^\nu + u^\nu \tilde{X}^\mu) \\
&\quad +2\eta\frac{1}{2}(\nabla^\mu u^\nu + \nabla^\nu u^\mu - \frac{2}{3}\Delta^{\mu\nu}\nabla\cdot u), \\
\delta N^\mu &= 0. \qquad (13)
\end{aligned}$$

ここに、$\tilde{X}^\mu \equiv \nabla^\mu \ln T$。粒子フレームに対して津村ら [8] が得たこの方程式を著者の頭文字を取って TKO 方程式と呼ぶことにする。ここで、TKO 方程式においては散逸エネルギー運動量テンソルが次の式を満たしていることに注意する：

$$\delta T^\mu_\mu = 0. \qquad (14)$$

一方、

$$u_\mu \delta T^{\mu\nu} u_\nu = -\zeta\nabla\cdot u/(4-3\gamma)^2 \neq 0. \qquad (15)$$

これは局所静止系でのエネルギー密度に散逸による寄与があることを意味する：

$$u_\mu T^{\mu\nu} u_\nu = \epsilon - \zeta\nabla\cdot u/(4-3\gamma)^2. \qquad (16)$$

TKO 方程式は粒子流フレームの方程式としての定義 (8) と散逸粒子流に対する自然な条件 (10) を満たしているが、散逸エネルギー運動量テンソルについての関係式 (14) および (16) はエッカルトが仮定した散逸によるエネルギー密度への条件 (9) と相容れない。実は、条件 (14) は Marle[22] および Stewart[23] が Grad[24] の 14 モーメント法によりボルツマン方程式から流体方程式を導く際に設定したものである。注意すべきは、モーメント法でもあるフレームの流体方程式を導くには LRF に関して何らかの（ad hoc な）仮定が必要になるということである。津村らの方法では、最初に LRF の設定を方程式の書きかえで行っており、ad hoc な仮定は必要ない。実はもっと強く、粒子流フレームでのボルツマン方程式と整合的な散逸流体方程式はエッカルトの仮定 (9) と整合的では有り得ないことが証明できる [8]。粒子流フレームでの Marle-Stewart（M-S) の方程式 [22, 23] と TKO 方程式は下層の輸送方程式であるボルツマン方程式と整合的である。

興味深いことにこの条件（14）を満たす方程式は一意的ではなく、M-S 方程式と TKO 程式は形が決定的に異なっている。大きな違いは散逸項に時間的微分 Du^μ を含むかどうかということである。TKO 方程式の散逸項は空間的微分 ∇ のみからなっている。どちらがより望ましいのかは、Hiscock-Lindblom[14] の指摘した問題をクリアーするかで調べることができる [13]。TKO 方程式により記述される場合、熱平衡状態は安定である [13, 15]。それに対して、時間的微分項のために M-S 方程式は安定ではない。TKO 方程式は 1 次の粒子流フレームでの安定な初めての方程式ということになる。

さらに、不変多様体を線形化衝突演算子のゼロモードの作る空間から拡張し、「第一励起モード」まで取り入れることで 2 次の方程式が導出できる [9]。

以下はこれらの研究結果の解説である。

3　現象論的導出との整合性

TKO 方程式においては、局所静止系において圧力だけではなく内部エネルギーに散逸の効果による付加的な寄与 (16) が存在する。これは微視的に導かれる結果である。（後の節を参照。）一方、現象論的な導出によるエッカルトの場合は (11) に見られるように、そのような項はない。そこで、現象論的導出においては一般的には TKO 方程式に含まれるような散逸による内部エネルギーへの寄与を排除できないことを示そう [9]。

$T^{\mu\nu}$ および N^{μ} に対してテンソル分解すると、一般的には次のように書ける：

$$
\begin{aligned}
T^{\mu\nu} &= (\epsilon+\delta\epsilon)\,u^{\mu}\,u^{\nu} - (p+\delta p)\,\Delta^{\mu\nu} + q^{\mu}\,u^{\nu} + q^{\nu}\,u^{\mu} + \pi^{\mu\nu}, && (17)\\
N^{\mu} &= (n+\delta n)\,u^{\mu} + \nu^{\mu}. && (18)
\end{aligned}
$$

ここで、q^{μ} と ν^{μ} はそれぞれ u^{μ} に対するエネルギー流および粒子流であり、$\pi^{\mu\nu}$ はずりストレステンソルである：

$$
q^{\mu} \equiv T_{ab}\,u^{a}\,\Delta^{b\mu}, \quad \nu^{\mu} \equiv N_{a}\,\Delta^{a\mu}, \quad \pi^{\mu\nu} \equiv T_{ab}\,\Delta^{ab\mu\nu}. \tag{19}
$$

ただし、$\Delta^{\mu\nu\rho\sigma} \equiv 1/2\cdot(\Delta^{\mu\rho}\,\Delta^{\nu\sigma} + \Delta^{\mu\sigma}\,\Delta^{\nu\rho} - 2/3\,\Delta^{\mu\nu}\,\Delta^{\rho\sigma})$. 次の関係式が成り立っていることに注意する：

$$
q^{\mu}\,u_{\mu} = 0, \quad \nu^{\mu}\,u_{\mu} = 0, \quad \pi^{\mu\nu} = \pi^{\nu\mu}, \quad u_{\mu}\,\pi^{\mu\nu} = \pi^{\mu}{}_{\mu} = 0. \tag{20}
$$

$\epsilon+\delta\epsilon$, $p+\delta p$ と $n+\delta n$ はそれぞれ、散逸系における内部エネルギー、圧力、粒子数密度である;

$$
\begin{aligned}
\epsilon+\delta\epsilon &\equiv T_{ab}\,u^{a}\,u^{b}, && (21)\\
p+\delta p &\equiv -\frac{1}{3}\,T_{ab}\,\Delta^{ab}, && (22)\\
n+\delta n &\equiv N_{a}\,u^{a}. && (23)
\end{aligned}
$$

ただし、 $\epsilon=\epsilon(T,\,\mu)$, $p=p(T,\,\mu)$ そして $n=n(T,\,\mu)$ はそれぞれの温度 T、化学ポテンシャル μ で特徴付けられる局所平衡状態における値である。通常は、散逸効果によるこれらの量へに寄与は圧力に対してのみ考慮（仮定）されている。実際、それは体積圧力 Π である。しかし、内部エネルギーや粒子数密度が散逸からの寄与を受けないという説得的な議論も存在しない、ということを強調しておく。

(17) において、散逸による寄与を取り出して書いておくと

$$
\begin{aligned}
\delta T^{\mu\nu} &= \delta\epsilon\,u^{\mu}\,u^{\nu} + \delta p\,\Delta^{\mu\nu} + q^{\mu}\,u^{\nu} + q^{\nu}\,u^{\mu} + \pi^{\mu\nu}, && (24)\\
\delta N^{\mu} &= \delta n\,u^{\mu} + \nu^{\mu}. && (25)
\end{aligned}
$$

各フレームの定義 (3) および (8) からわかるように、エネルギーフレームでは $q^{\mu}=0$ であり、粒子流フレームでは $\nu^{\mu}=0$ である。

さて、拘束 (20) のために、q^{μ}, ν^{μ}, そして $\pi^{\mu\nu}$ の独立な成分の数は 11 である。一方、 $T^{\mu\nu}$ と N^{μ} 全体での自由度は 14 であるから、T、μ と合わせると $\delta\epsilon$, δp そして δn 全体では独立な変数の数は 1 つしかない。そこで自然な選択として $\delta p=\Pi$ を独立な成分とすると、T と μ のみの関数 $f_e=f_e(T,\,\mu)$、$f_n=f_n(T,\,\mu)$ を用いて $\delta\epsilon=f_e\,\Pi$、 $\delta n=f_n\,\Pi$ と書けるであろう。この比例関係を設定したことは、$\delta\epsilon$ と δn への散逸の効き方が δp と高々同じオーダーであると仮定したことを意味する。注意すべきこ

とは、現象論的には f_e と f_n が存在することまでは言えるが、それらの温度と化学ポテンシャルへの具体的な依存性は微視的に計算しないと求まらないということである。

これまでの文献にある解析はすべて暗黙のうちに $f_e = f_n = 0$ を仮定していたのであるが、現象論にもとづく標準的な流体方程式の導出においてはこれらが一般にはゼロでなくてもよいことを示そう。これは、[9] で始めて指摘されたことである。実は、２次の方程式においても言えるのであるが、簡単のためにここでは１次の方程式について議論する。

エントロピー流は次のように書ける；

$$T\,S^\mu = p\,u^\mu + u_\nu\,T^{\mu\nu} - \mu\,N^\mu. \tag{26}$$

現象論的導出においては、次の局所化された熱力学の第二法則を課す；

$$\partial_\mu S^\mu \geq 0. \tag{27}$$

さて、流体方程式 (1) と熱力学第一法則 $D(p/T) + \epsilon\,D(1/T) - n\,D(\mu/T) = 0$ を用いるとエントロピーの発散は次のようになることが分かる：

$$\partial_\mu S^\mu = \Pi\left[f_e\,D\frac{1}{T} - \frac{1}{T}\,\nabla^\mu u_\mu - f_n\,D\frac{\mu}{T}\right] + q^\mu\left[\frac{1}{T}\,Du_\mu + \nabla_\mu\frac{1}{T}\right] - \nu^\mu\,\nabla_\mu\frac{\mu}{T} + \pi^{\mu\nu}\,\frac{1}{T}\,\nabla_\mu u_\nu. \tag{28}$$

ただし、 $D \equiv u^a\,\partial_a$、$\nabla^\mu \equiv \Delta^{\mu a}\,\partial_a$.

粒子流フレームを取ると、(28) は

$$\partial_\mu S^\mu = \Pi\left[f_e\,D\frac{1}{T} - \frac{1}{T}\,\nabla^\mu u_\mu - f_n\,D\frac{\mu}{T}\right] + q^\mu\left[\frac{1}{T}\,Du_\mu + \nabla_\mu\frac{1}{T}\right] + \pi^{\mu\nu}\,\frac{1}{T}\,\nabla_\mu u_\nu, \tag{29}$$

となる。するとこのとき、局所エントロピー増大則を満たすためには、次の比例関係が成り立てばよいことが分かる：

$$\Pi = \zeta\,T\left[f_e\,D\frac{1}{T} - \frac{1}{T}\,\nabla^\mu u_\mu - f_n\,D\frac{\mu}{T}\right], \tag{30}$$

$$q^\mu = -\lambda\,T^2\left[\frac{1}{T}\,Du^\mu + \nabla^\mu\frac{1}{T}\right], \tag{31}$$

$$\pi^{\mu\nu} = 2\,\eta\,\Delta^{\mu\nu\rho\sigma}\,\nabla_\rho u_\sigma. \tag{32}$$

実際このとき、

$$\partial_\mu S^\mu = \frac{\Pi^2}{\zeta T} - \frac{q^\mu q_\mu}{\lambda T^2} + \frac{\pi^{\mu\nu}\pi_{\mu\nu}}{2\eta T} \geq 0. \tag{33}$$

注意すべきは、熱力学第二法則に抵触することなく f_e と f_n が有限でよいこと、したがって、散逸による内部エネルギー密度 δe および粒子数密度 δn が一般には有限であり得る、ということである。

一方、エネルギーフレームでは $q^\mu = 0$ であることを用いて上と同様の計算をすると、熱力学第二法則は (30) と (32) および次の条件により保証される；

$$\nu^\mu = \lambda\,\hat{h}^{-2}\,\nabla^\mu\frac{\mu}{T}. \tag{34}$$

ここに、 $\hat{h} \equiv (\epsilon + p)/nT$ はエンタルピーである。ランダウ-リフシッツの方程式は $f_e = f_n = 0$ と置いた場合に得られる。

Π, q^μ, ν^μ および $\pi^{\mu\nu}$ について 2 次までとった解析を行っても一般的には f_e と f_n が有限であり得るという結論は変わらない。

f_e と f_n を有限に残したまま、散逸による内部エネルギー密度とエネルギー-運動量流を計算すると、

$$u_\mu \, \delta T^{\mu\nu} \, u_\nu = \delta\epsilon = f_e \, \Pi, \quad \delta T^\mu_{\ \mu} = \delta\epsilon - 3\,\delta p = (f_e - 3)\,\Pi, \tag{35}$$

となる。

上で強調したように、現象論的解析ではこれ以上のことは言えない。f_e と f_n がどのような値を取るかは微視的理論（たとえば、ボルツマン方程式などの運動学的理論）によってしか分からない。後の節で、相対論的ボルツマン方程式を用いた解析によりエネルギーフレームでは $f_e = f_n = 0$ であるが、粒子流フレームでは $f_e = 3$ 且つ $f_n = 0$ となることを示す。したがって、粒子流フレームでは $\delta T^\mu_{\ \mu} = 0$ そして $u_\mu \, \delta T^{\mu\nu} \, u_\nu = 3\,\Pi \neq 0$ としなければ微視的運動学的理論と矛盾することになる。

4　くりこみ群法

ボルツマン方程式から流体方程式を導く問題は漸近解析としての力学系の縮約といわれる問題の一種である。まず、「力学系の縮約」とは何か、ということを簡単な力学の問題を用いて説明し、くりこみ群法を一般的な方程式を用いて説明する。

4.1　簡単な例を通して見る「ゼロモード」、「永年項」、「くりこみ」、「摂動展開の総和」

次の減衰振動の方程式を考える：

$$\mathcal{L}x \equiv \left[\frac{d^2}{dt^2} + 1\right] x = -\epsilon \frac{dx}{dt}. \tag{36}$$

ここで ϵ は正の小さなパラメタ。この厳密解は定数 $\bar{A}$、 $\bar{\theta}$ を用いて

$$x(t) = A(t) \sin\phi(t); \quad A(t) = \bar{A} \exp(-\epsilon t/2), \, \phi(t) = \sqrt{1 - \epsilon^2/4} \cdot t + \bar{\theta}. \tag{37}$$

と書ける。ϵ に比例する減衰項のために角速度は小さくなり、振幅 $A(t)$ は時間と共にゆっくりと減小する。

単純な摂動展開 $x = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon x_2 + \cdots$ を行ってこの方程式を解くとどんなことになるか見てみよう。非摂動解は一般性を失うことなく $x_0 = A \sin(t + \theta)$ と書ける。すると、1 次の摂動方程式は、$\mathcal{L}x_1 = -A \cos(t + \theta)$. この方程式は減衰のないときの強制振動の方程式と同じである。しかも外力の振動数が固有振動数と一致するので「共鳴」が起こり、振幅は時間とともに単調に増大する：

$$x_1 = -\frac{A}{2} t \sin(t + \theta). \tag{38}$$

この時間 t に比例して振幅が増大する項は歴史的に「永年項」と呼ばれている。2 次の摂動でも同様のことが起こり、結局 2 次の摂動解は

$$x(t) = A \sin(t + \theta) - \epsilon \frac{A}{2} t \sin(t + \theta) + \epsilon^2 \frac{A}{8} \{t^2 \sin(t + \theta) - t \cos(t + \theta)\}, \tag{39}$$

と書ける。永年項の存在のため摂動項の振幅は t の冪で時間と共に大きくなり、減衰とはほど遠い結果となっている！永年項の出現は左辺の線形演算子 $\mathcal{L}$ の**ゼロモード**が非斉次項になっていることが原因である。一方で (39) は厳密解 (37) を ϵ について展開した式になっている：

$$x \simeq A(1-\epsilon/2\cdot t+\epsilon^2/8\cdot t^2)\sin((1-\epsilon^2/8)t+\theta) \sim A\mathrm{exp}(-\epsilon t/2)\sin(\sqrt{1-\epsilon^2/4}\cdot t+\theta). \tag{40}$$

ここに摂動展開による解析の典型的な問題が現れ、課題を読み取ることができる: 斉次方程式を与える線形演算子 $\mathcal{L}$ のゼロモードが存在するとき、摂動展開の高次項に永年項が出現し摂動展開が破綻する。しかし、この摂動展開級数を**総和 (resum)** するとこの破綻は回避できる。しかも、「総和」された項は小さいパラメータに依存しているので、少なくとも一部の摂動の効果は振幅や位相などの**ゆっくりした運動に「くり込める」**ことが予想される。できれば、そのようなゆっくりした運動を分離し、明示的な方程式が得られることが望ましい。そうすれば系の運動の特徴を端的に表現できることになるからである。実際、減衰振動の場合、振幅 $A(t)$ は次の簡単な微分方程式を満たしている；

$$\dot{A} = -\frac{\epsilon}{2}\cdot A. \tag{41}$$

運動学的方程式から流体方程式を導くために我々が採用した**「くり込み群法」**と呼ばれる方法 [7] は、これらの課題を初等的かつ明快な手続きで実行する方法である [16, 17, 18, 19]。

4.2 微分方程式への適用をめざした包絡線理論の定式化

くりこみ群法を初等的に理解するために包絡線の数理を整理しておく [25, 16]。

今、パラメーター τ で区別される曲線群 $\mathcal{C}_\tau$: $F(x,\,y;\tau,C(\tau))=0$ を考える。ただし、微分方程式の解への応用を考え、F は関数 $C(\tau)$ を通してもパラメータ依存性があるとした [16]。これら曲線群すべてと接線を共有する曲線（包絡線 E）の方程式 $G(x,y)=0$ は次のようにして求められる。包絡線 E 上の任意の点に対して曲線群 $\mathcal{C}_\tau$ のあるメンバー $F(x\,y;\tau,C(\tau))=0$ と接点を共有するのでその座標は $(x(\tau),\,y(\tau))\equiv(\phi(\tau),\,\psi(\tau))$ と書ける:

$$F(x(\tau),\,y(\tau);\tau,C(\tau))=0. \tag{42}$$

τ が変化すると $(\phi(\tau),\,\psi(\tau))$ は E 上を動くので、接ベクトルは $(d\phi/d\tau,\,d\psi/d\tau)$ に平行である。したがって、この点で曲線群 $\mathcal{C}_\tau$ と接線を共有するので、その法線ベクトル $\boldsymbol{\nabla}F=(F_x,\,F_y)$ と直交する; $0=F_x\frac{dx}{d\tau}+F_y\frac{dy}{d\tau}$. 一方、(42) を τ で微分すると、$F_x\phi'+F_y\psi'+\frac{dF}{d\tau}=0$.　したがって、包絡線上の点では

$$\frac{dF}{d\tau}=\frac{\partial F}{\partial\tau}+\frac{\partial F}{\partial C}\frac{dC}{d\tau}=0, \tag{43}$$

が満たされなければならない。これから、τ を解いて得られる $\tau=\tau(x,\,y)$ を F に代入して、包絡線の方程式（の候補）

$$G(x,\,y)\equiv F(x,\,y;\,\tau(x,\,y),C(\tau(x,\,y)))=0, \tag{44}$$

が得られる。

微分方程式への応用においては [16]、$x \sim \tau$ における（摂動的）局所解から大域的に妥当な解をの構成することに使われる。そのときには、τ は接点に選ばれる:$\tau = x$. すると、包絡線方程式 (43) は未知関数 $C(\tau = x)$ に関する方程式と:

$$\frac{dC}{dx} = -\left(\frac{\partial F}{\partial C}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \tau}\Big|_{\tau = x}. \tag{45}$$

n 次元空間の軌道群 $\boldsymbol{X}(t; \tau, C(\tau))$ (τ は軌道を指定するパラメータ) の「包絡軌道」$\boldsymbol{X}_E(t)$ も同様にして得られる [18]。また、包絡面の構成も同様にできる [17]。

4.3 包絡線方程式とくりこみ群法:減衰振動の例

最初に取り上げた減衰振動の方程式を例に取り、くりこみ群法とはどういう方法か説明する [16]。摂動解を曲線群とみなし、その包絡線を構成する。このとき、包絡線方程式は振幅 $A(t)$ と位相 $\phi(t)$ の従う運動方程式をあたえる。そして、この方程式を厳密に解くことにより摂動級数の総和（resummation）が得られる。

任意の初期時刻 $t = t_0$ 付近での局所解 $\tilde{x}(t, t_0)$ を摂動展開で求めてみると、

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t, t_0) \quad = \quad & A\sin(t + \theta)) - \epsilon A/2 \cdot (t - t_0)\sin(t + \theta) \\ & + \epsilon^2 A/8 \cdot \{(t - t_0)^2 \sin(t + \theta) - (t - t_0)\cos(t + \theta)\}, \end{aligned} \tag{46}$$

となる。この摂動解は、(39) と違って初期時間 t_0 に特別の形で依存している。このように摂動解を以下の規則で決めるのがこの定式化のポイントである [19]：$t = t_0$ において、(A) 非摂動解が高次項に現れないようにする。 (B) 速い運動を記述する項が消える。前者は高次の効果をあらかじめ非摂動解の定数にくりこんでおくことに相当し、後者は解の存在する安定多様体のゆがみを高次項として取り入れ、解がその多様体内のゆっくりした運動となるための条件である。具体的には、規則 (A) に整合的に、$t = t_0$ での初期値は 0 次解が厳密解にできるだけ近いと想定しているので、摂動項のうち $t = t_0$ で非摂動解（0 次解）を用いて消せる項は消せるように摂動解の形を選んでいる。これは、高次項が 0 次解の振幅 A と θ にくり込んでいることに相当する。

しかし、ここで得られた解も永年項のために t が「初期時刻」t_0 から離れると、振幅が単調増加し、減衰振動とはかけ離れた悲惨な結果を与える。ここで観点を変えてみる。$t \sim t_0$ での局所解 $\tilde{x}(t, t_0)$ は t_0 をパラメータとする曲線群を表しおり、しかもそれぞれの曲線は $t \sim t_0$ では厳密解に等しいと想定されている。そこで、この局所解としての曲線群の**包絡線**を構成すれば大域的に妥当な解が得られると期待できる。そのとき、局所解の構成の仕方から要請されるようにパラメータ t_0 は接点の座標 t に取るべきである。以上をまとめると次の簡単な包絡線方程式に帰着する：

$$\frac{d\tilde{x}(t, t_0)}{dt_0}\Big|_{t_0 = t} = \frac{\partial \tilde{x}(t, t_0)}{\partial t_0}\Big|_{t_0 = t} + \frac{\partial \tilde{x}(t, t_0)}{\partial A}\frac{dA}{dt_0}\Big|_{t_0 = t} + \frac{\partial \tilde{x}(t, t_0)}{\partial \theta_0}\frac{d\theta_0}{dt_0}\Big|_{t_0 = t} = 0. \tag{47}$$

これは、「くりこみ群」方程式である。すなわち、「くりこみ群」方程式は「包絡線」方程式である。

独立な関数の係数をそれぞれ 0 と置くことより、

$$\frac{dA}{dt} = -\epsilon A, \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\epsilon^2}{8}, \tag{48}$$

を得る。ただし、 $dA/dt = O(\epsilon)$ であることを用いて、$O(\epsilon^3)$ の項を無視した。これを解いて、

$$A(t) = \bar{A}\mathrm{e}^{-\epsilon t/2}, \quad \theta(t) = -\epsilon^2/8 \cdot t + \bar{\theta}, \tag{49}$$

を得る。こうして、初期値は包絡線として、

$$x_E(t) = \tilde{x}(t,t) = x(t) = \bar{A}\exp(-\epsilon/2 \cdot t)\sin((1-\epsilon^2/8)t + \bar{\theta}), \tag{50}$$

となり、大域的に妥当な近似解となる[3]。

まとめると、くりこみ群（包絡線）方程式 (49) によって振幅と位相のゆっくりした運動を記述する**縮約された運動方程式**を取り出すことができた。また、くりこみ群（包絡線）方程式を厳密に解くことにより、ϵ について無限次の項の**総和**が実現できた。

4.4 くりこみ群法による発展方程式の縮約と不変多様体の構成

この節では前節の簡単な減衰振動の場合の解析を一般化しくりこみ群法をより一般的な条件の下で定式化する。具体的には、漸近解として不変多様体 [26, 27] がある比較的一般的な方程式を例として用いて漸近解析としての「くりこみ群法」を説明する。くりこみ群法が安定多様体とその上の縮約方程式の構成の自然で簡便な方法を与えることを見るであろう。そこでは包絡線の概念が直感的な理解を与える。以下の解説は多くを [19] に依っている。

次の一般的方程式にくりこみ群法を適用してスローモードの従う方程式と解空間（不変多様体と呼ばれる）を構成してみよう [19]：

$$\partial_t \boldsymbol{X} = \mathcal{L}\boldsymbol{X} + \epsilon \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}), \tag{51}$$

ただし、 $\partial_t \boldsymbol{X} = \partial \boldsymbol{X}/\partial t$、$\mathcal{L}$ は線形演算子、$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ は $\boldsymbol{X}$ の非線形関数、そして ϵ は小さな展開パラメタである ($|\epsilon| < 1$)。$\mathcal{L}$ は必ずしも対称でもエルミートでもない。ただし、$\mathcal{L}$ は対角化可能で、m 重に縮退した 0 固有値を持ち、他の固有値は負の実部を持つとしよう。これでも十分一般的である。このような 0 固有値を持つ線形演算子が現れる物理的な状況は一般的に現れる: 系の持つ対称性を反映している場合や相転移の臨界点でゼロモードが発生する場合などがある。また我々の主眼であるボルツマン方程式の流体力学極限を議論するときにも、5 個の衝突不変量に対応して 5 重に縮退したゼロモードが現れる[4]。$\mathcal{L}\boldsymbol{U}_i = 0,\ (i = 1, 2, \ldots, m),\ \mathcal{L}\boldsymbol{U}_\alpha = \lambda_\alpha \boldsymbol{U}_\alpha,\ (\alpha = m+1, m+2, \cdots, n)$. ただし、 $\mathrm{Re}\lambda_\alpha < 0$。$\boldsymbol{U}_i$ と $\boldsymbol{U}_\alpha$ は線形独立に選ぶ。共役演算子 $\mathcal{L}^\dagger$ は次の性質を持つ; $\mathcal{L}^\dagger \tilde{\boldsymbol{U}}_i = 0$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, $\mathcal{L}^\dagger \tilde{\boldsymbol{U}}_\alpha = \lambda_\alpha^* \tilde{\boldsymbol{U}}_\alpha$, $(\alpha = m+1, m+2, \cdots, n)$. $\tilde{\boldsymbol{U}}_i$ と $\tilde{\boldsymbol{U}}_\alpha$ は線形独立に選ばれているものとする。　また、一般性を失うことなく

$$\langle \tilde{\boldsymbol{U}}_i, \boldsymbol{U}_\alpha \rangle = 0 = \langle \tilde{\boldsymbol{U}}_\alpha, \boldsymbol{U}_i \rangle, \tag{52}$$

とできる。ただし、$1 \le i \le m, \quad m+1 \le \alpha \le n$. $\mathrm{Ker}\mathcal{L}$、すなわちゼロモードが作る空間への射影演算子を P、そして、$Q = 1 - P$ と書こう。

[3] $\sqrt{1-\epsilon^2/4} = 1 - \epsilon^2/8 + O(\epsilon^4)$, に注意する。
[4] $\mathcal{L}$ が半単純でなくジョルダン細胞を持つ場合 [19] は省略する。

我々は $t \to \infty$ での系の**漸近的な振る舞い**に興味がある。この漸近的振る舞い記述する縮約された方程式をくりこみ群法で求めてみよう。それは結局 、不変多様体 [26, 27]M とその上での縮約された運動方程式を求めることに他ならない。

厳密解を $\boldsymbol{X}(t)$ として、任意の初期時間 $t = t_0$ で $\boldsymbol{X}(t_0)$ を初期値とする**初期条件**を設定する。この初期条件のもとでの（厳密) 解を $\tilde{\boldsymbol{X}}(t;t_0)$ とする; $\tilde{\boldsymbol{X}}(t=t_0;t_0) = \boldsymbol{X}(t_0)$. これを摂動展開で解いてみよう: $\tilde{\boldsymbol{X}}(t;t_0) = \tilde{\boldsymbol{X}}_0(t;t_0) + \epsilon\tilde{\boldsymbol{X}}_1(t;t_0) + \epsilon^2\tilde{\boldsymbol{X}}_2(t;t_0) + \cdots$, 初期値自体も同様に展開しておく；$\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}_0(t_0) + \epsilon\boldsymbol{X}_1(t_0) + \epsilon^2\boldsymbol{X}_2(t_0) + \cdots = \boldsymbol{X}_0(t_0) + \boldsymbol{\rho}(t_0)$.

最低次の方程式は

$$(\partial_t - \mathcal{L})\tilde{\boldsymbol{X}}_0 = 0. \tag{53}$$

0 固有値以外の固有値はすべて負の実部を持つので、$t \to \infty$ での最低次の漸近解の初期値として**ゼロモード**であるとするのが自然である: $\tilde{\boldsymbol{X}}(t=t_0;t_0) = \boldsymbol{X}_0(t_0) = \sum_{i=1}^m C_i(t_0)\boldsymbol{U}_i = \boldsymbol{X}_0[\boldsymbol{C}]$. このとき、解は定常状態にある；

$$\tilde{\boldsymbol{X}}_0(t;t_0) = \mathrm{e}^{(t-t_0)\mathcal{L}}\boldsymbol{X}_0(t_0) = \sum_{i=1}^m C_i(t_0)\boldsymbol{U}_i. \tag{54}$$

このとき、0 次の不変多様体 M_0 の自然な座標は積分定数 $\boldsymbol{C} = {}^t(C_1, C_2, \cdots, C_m)$ で与えられている。

１次の方程式は

$$(\partial_t - \mathcal{L})\tilde{\boldsymbol{X}}_1 = \boldsymbol{F}(\tilde{\boldsymbol{X}}_0). \tag{55}$$

初期値を $\boldsymbol{X}_1(t_0)$ としたとき、解は

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{X}}_1(t;t_0) &= \mathrm{e}^{(t-t_0)\mathcal{L}}[\boldsymbol{X}_1(t_0) + \mathcal{L}^{-1}Q\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_0(t_0))] \\ &\quad +(t-t_0)P\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_0(t_0)) - \mathcal{L}^{-1}Q\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_0(t_0)).\end{aligned} \tag{56}$$

摂動により P 空間に属する永年項が出現したことに注意する。右辺第１項はゼロモード空間からはずれた速い運動を含んでいる。この速い運動は避けるべきであり、実際、未だ決められていない初期値 $\boldsymbol{X}_1(t_0)$ を次のように選ぶことで消すことができる；$\boldsymbol{X}_1(t_0) = -\mathcal{L}^{-1}Q\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_0(t_0))$. このとき、$\boldsymbol{X}_1(t_0)$ はゼロモード空間と独立であり、しかも $\boldsymbol{C}(t_0)$ のみの関数である。こうして１次の摂動項は

$$\tilde{\boldsymbol{X}}_1(t;t_0) = (t-t_0)P\boldsymbol{F} - \mathcal{L}^{-1}Q\boldsymbol{F}, \tag{57}$$

と選ばれる。摂動により必然的に現れる永年項が、この解の構成においてはこの項は $t = t_0$ で消えるように設定されている。このとき、不変多様体は次のものに変更されている；

$$\mathrm{M}_1 = \{\boldsymbol{X} | \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_0 - \epsilon\mathcal{L}^{-1}Q\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_0)\}. \tag{58}$$

ここで、$-\epsilon\mathcal{L}^{-1}Q\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_0) \equiv \boldsymbol{\rho}_1(\boldsymbol{X}_0)$ は不変多様体の M_0 からの「歪み」を表している。

結局、1 次の摂動解は、

$$\tilde{\boldsymbol{X}}(t;t_0) = \boldsymbol{X}_0 + \epsilon\{(t-t_0)P\boldsymbol{F} - \mathcal{L}^{-1}Q\boldsymbol{F}\}, \tag{59}$$

となる。　この解にくりこみ群方程式 $d\tilde{\boldsymbol{X}}/dt_0|_{t_0=t} = 0$ をかけると、縮約された方程式

$$\dot{\boldsymbol{X}}_0(t) = \epsilon P\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_0(t)), \tag{60}$$

が得られる。実際この方程式は $\boldsymbol{C}(t)$ についての m 次元連立方程式である；

$$\dot{C}_i(t) = \epsilon\langle\tilde{\boldsymbol{U}}_i, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_0[\boldsymbol{C}])\rangle, \quad (i = 1, 2, \cdots, m). \tag{61}$$

$dC_i/dt \sim O(\epsilon)$ なので、$\boldsymbol{C}(t)$ の運動は「ゆっくり」であることが分かる。この $\boldsymbol{C}(t)$ を用いて、大域的領域で妥当な解は次のように初期値として得られる；

$$\boldsymbol{X}(t) = \tilde{\boldsymbol{X}}(t; t_0 = t) = \sum_{i=1}^{m} C_i(t)\boldsymbol{U}_i + \boldsymbol{\rho}_1[\boldsymbol{C}]. \tag{62}$$

不変多様体 M_0、そして M 全体の座標 $\boldsymbol{s}$ が非摂動解の積分定数 $\boldsymbol{C}$ で与えられていることを強調しておく。

以上の作業はどこまでも高次項まで進めていくことができる。たとえば、２次の摂動方程式は、

$$(\partial_t - \mathcal{L})\tilde{\boldsymbol{X}}_2 = \boldsymbol{F}'(\tilde{\boldsymbol{X}}_0)\tilde{\boldsymbol{X}}_1. \tag{63}$$

ただし、$(\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{X}_0)\boldsymbol{X}_1)_i = \sum_{j=1}^{n}\{\partial(F'(\boldsymbol{X}_0))_i/\partial(X_0)_j\}(X_1)_j$. ２次の摂動まで取り入れた、大域的領域で妥当な軌道を与える解は以下のようになる [19]：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}(t) &= \boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}_0[\boldsymbol{C}] + \boldsymbol{\rho}[\boldsymbol{C}] \\ &= \boldsymbol{X}_0[\boldsymbol{C}] - \epsilon\mathcal{L}^{-1}Q\boldsymbol{F} + \epsilon^2\{\mathcal{L}^{-1}Q\boldsymbol{F}'\mathcal{L}^{-1}Q\boldsymbol{F} - \mathcal{L}^{-2}Q\boldsymbol{F}'P\boldsymbol{F}\}.\end{aligned} \tag{64}$$

そして系のスローモードを記述する $\boldsymbol{C}(t)$ についての方程式は次のように与えられる：

$$\dot{C}_i = \epsilon\langle\tilde{U}_i, \boldsymbol{F} - \epsilon\boldsymbol{F}'\mathcal{L}^{-1}Q\boldsymbol{F}\rangle, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{65}$$

上式において $\boldsymbol{F}$ と $\boldsymbol{F}'$ の引数はすべて $\boldsymbol{C}$ であることは強調に値する：すなわち、$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}[\boldsymbol{C}]$. このように、高次項を取り入れても**不変多様体の座標が非摂動解の積分定数 $\boldsymbol{C}$ で与えられる**ことに変更はない。ここで与えた表式 (65) および (64) は縮約方程式として普遍的であり、多くの個別の縮約の問題はこれらの方程式に具体的な射影子 P および Q を代入するだけで得られる。

くりこみ群法に基づいて構成した発展方程式の縮約の構造は非線形振動子に対する Krilov-Bogoliubov-Mitropolsky[28] の摂動理論を拡張したものとみなすこともできる。また、ボゴリュウボフらの理論を力学系の縮約理論に拡張し整備した蔵本の理論 [29] の初等的で簡明な実現でであると言える。興味深いことに、Bogoliubov は彼らの摂動論を Liouville 方程式に適用してハミルトン方程式の縮約としてボルツマン方程式を導き、さらに、ボルツマン方程式を縮約して流体方程式を導いた [30]。

5　相対論的ボルツマン方程式の流体力学極限：　相対論的散逸流体力学の導出

ここで定式化したくり込み群法によりボルツマン方程式と流体方程式（オイラーおよびナビエ-ストークス方程式）が導かれている [20, 21]。この問題はたとえば、Bogoliubov の方法 [30] のほかに Chapman-Enskog の方法 [31] というものがよく知られた方法である。以下では、上記のくりこみ群法をボルツマン方程式に適用して相対論的流体方程式を導く試み [8] を紹介する。

相対論的ボルツマン方程式は次のように書かれる：

$$p^\mu\,\partial_\mu f_p(x) = C[f]_p(x). \tag{66}$$

ここで、$f_p(x)$ は位相空間 $(x^\mu\,,\,p^\mu)$ で定義された 1 体分布関数であり、p^μ はオン-シェルのエネルギー-運動量である；$p^\mu\,p_\mu\,\equiv\,p^2\,=\,m^2$ and $p^0\,\geq\,0.$ (66) の右辺は衝突積分と呼ばれ、以下のように書かれる；

$$C[f]_p(x) \equiv \frac{1}{2}\sum_{p_2}\frac{1}{p_2^0}\sum_{p_3}\frac{1}{p_3^0}\,\omega(p\,,\,p_1|p_2\,,\,p_3)\,(f_{p_2}(x)\,f_{p_3}(x) - f_p(x)\,f_{p_1}(x)). \tag{67}$$

衝突積分は微視的な 2 体-2 体衝突を表し、時間反転不変性を破り散逸を引き起こす原因である。遷移確率 $\omega(p\,,\,p_1|p_2\,,\,p_3)$ はエネルギー-運動量保存則と共に粒子数保存則、および粒子の交換可能性と微視的散乱過程での時間反転不変性による対称性を持っている。

$$\omega(p\,,\,p_1|p_2\,,\,p_3) = \omega(p_2\,,\,p_3|p\,,\,p_1) = \omega(p_1\,,\,p|p_3\,,\,p_2) = \omega(p_3\,,\,p_2|p_1\,,\,p). \tag{68}$$

衝突積分におけるエネルギー-運動量と粒子数保存のために次の関係式が成立することを意味する：

$$\sum_p\frac{1}{p^0}\,C[f]_p(x) = \sum_p\frac{1}{p^0}\,p^\mu\,C[f]_p(x) = 0. \tag{69}$$

すなわち、**5 個の量** $(1\,,\,p^\mu)$ が**衝突不変量**になる。

このように衝突によってエネルギー-運動量および粒子数が保存されるので、次の対応する連続方程式が常に成り立つ：

$$\partial_\nu\sum_p\frac{1}{p^0}\,p^\mu\,p^\nu\,f_p(x) \equiv \partial_\nu T^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu\sum_p\frac{1}{p^0}\,p^\mu\,f_p(x) \equiv \partial_\mu N^\mu = 0. \tag{70}$$

これらの方程式は形式に流体方程式と同じ形をしているが、分布関数 $f_p(x)$ が解かれていないかぎり流体の動的な性質については何の情報も持っていないということである。我々は、(66) の局所平衡近傍の解 $f_p(x)$ を温度 T や密度 n および流速ベクトル $u^\mu(x)$ で表現することにより、これらの発展方程式として流体方程式を得るであろう。

局所平衡を特徴付けるためにエントロピー流を定義すると都合がよい。エントロピー流は次のように定義される；

$$S^\mu \equiv -\sum_p\frac{1}{p^0}\,p^\mu\,f_p(x)\,(\ln f_p(x) - 1). \tag{71}$$

エントロピーは $\ln f_p(x)$ が衝突不変量のとき保存される。すなわち、基本衝突不変量の線形結合である；

$$\ln f_p(x) = \alpha(x) + p^\mu\,\beta_\mu(x). \tag{72}$$

ここで、 $\alpha(x)$ と $\beta_\mu(x)$ は任意の関数である。これは、分布関数が局所平衡分布関数（Juetner 分布関数という）で表されることを意味する。

この方程式から流体方程式を導出する道筋の概略を説明する。そこでのポイントは 5 個の衝突不変量の存在に対応して、線形化した衝突演算子が 5 重に縮退したゼロ固有値を持つということである。ただし、運動学的方程式と流体方程式の時空間 x^μ のスケールが異なることを、ローレンツ不変に表現する工夫が必要になる。

後者の問題は巨視的流れベクトル $\boldsymbol{a}_p^\mu$ を用いて疎視化した座標 (τ, σ^μ) を構成することで実現できる [8]：

$$\mathrm{d}\tau = \boldsymbol{a}_p^\mu \mathrm{d}x_\mu, \quad \mathrm{d}\sigma^\mu = \Delta_p^{\mu\nu}\mathrm{d}x_\nu. \tag{73}$$

ただし、$\Delta_p^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} - \boldsymbol{a}_p^\mu \boldsymbol{a}_p^\nu / \boldsymbol{a}_p^2$ は空間的ベクトルへの射影演算子である。これらの座標を用いて (66) を書き直すと、

$$\partial f_p(\tau,\sigma)/\partial\tau = (\boldsymbol{a}_p \cdot p)^{-1}[C[f_p] - p \cdot \nabla f_p(\tau,\sigma)], \tag{74}$$

となる。ここで、$\nabla^\mu \equiv \Delta_p^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial\sigma^\nu}$.

系が平衡状態に近く、（非相対論のときと同様に）系の空間的非一様性が散逸の起源であるとしよう。このとき、(74) の右辺第 2 項は摂動として扱うことができる。すなわち、$\nabla \to \epsilon\nabla$ と考え、ϵ についての摂動展開を考える。

前節の一般論と同様、$\tau \sim \tau_0$ 付近の摂動解を $\tilde{f}_p$ と書き、$\tilde{f}_p = \tilde{f}_p^{(0)} + \epsilon\tilde{f}_p^{(1)} + \epsilon^2\tilde{f}_p^{(2)} + \cdots,$ と展開する。

0 次の方程式は

$$\partial\tilde{f}_p^{(0)}/\partial\tau = (\boldsymbol{a}_p \cdot p)^{-1}C[\tilde{f}_p^{(0)}], \tag{75}$$

である。前節で展開した縮約の一般論に従い、$t \to \infty$ での漸近的な定常解 $\partial\tilde{f}_p^{(0)}/\partial\tau = 0$ を取ろう。これは、$\tilde{f}_p^{(0)}$ が衝突不変量になっていることを意味する。すなわち、$\tilde{f}_p^{(0)}$ は局所平衡分布である；

$$\tilde{f}_p^{(0)} = (2\pi)^{-3}\exp[\{\mu(\sigma;\tau_0) - p^\mu u_\mu(\sigma;\tau_0)\}/T(\sigma;\tau_0)] \equiv f_p^{eq}(\sigma;\tau_0), \quad (u^\mu u_\mu = 1). \tag{76}$$

ここで、$\tilde{f}_p^{(0)}$ は「空間座標」σ に依存している 5 個のパラメータ $\mu,\ T,\ u^\mu$ に依存していることに注意しよう。

ベクトル $\tilde{\boldsymbol{f}}$ の p 成分を $\tilde{\boldsymbol{f}}_p = \tilde{f}_p^{(1)}$ で定義すると、1 次の摂動方程式は

$$[\partial/\partial\tau - \mathcal{L}]\tilde{\boldsymbol{f}}^{(1)}|_p = -p \cdot \nabla f_p^{eq} \equiv F_p, \tag{77}$$

と書ける。ここに、$\mathcal{L}$ は、その pq 成分が $\mathcal{L}_{pq} = 1/(p \cdot \boldsymbol{a}_p) \cdot \partial C[f]_p/\partial f_q|_{f=f^{eq}}$ で定義される線形演算子である。

ここで、線形演算子 L を次のように定義しよう：

$$L_{pq} \equiv f_p^{eq-1}\mathcal{L}f_q^{eq}. \tag{78}$$

さらに、運動量の関数 φ_p と ϕ_p に対する内積 $\langle\varphi,\psi\rangle$ を

$$\langle\varphi,\psi\rangle \equiv \sum_{p_0}(p \cdot \boldsymbol{a}_p)f_p^{eq}\varphi_p\psi_p, \tag{79}$$

で定義しておこう。このとき、L は微視的遷移確率の時間反転不変性と粒子の入れ替えに対する不変性のために、次の著しい性質を持っていることを示すことができる：

(i) 対称性; $\langle\varphi,\, L\psi\rangle = \langle L\varphi,\, \psi\rangle$.

(ii) 半負定値性; $\langle\varphi,\, L\varphi\rangle \le 0, \quad \forall\varphi$.

(iii)　5 個のゼロモード φ_{0p}^{α} を持ち、他の固有値は負である。ゼロモードは衝突不変量であるエネルギー-運動量と粒子数に対応する: $L\varphi_{op}^{\alpha}=0$. ($\varphi_{op}^{\mu}=p^{\mu}$, $\varphi_{0p}^{4}=m$.) これらの性質のために、前節の一般論が適用することができる。

　ゼロモードの張る空間を P 空間と呼ぶ。注意すべきことは上で定義したゼロモード φ_{0p}^{α} は必ずしも直交しないことである。そこで、メトリックテンソル $\eta^{\alpha\beta}\equiv\langle\varphi_0^{\alpha},\,\varphi_0^{\beta}\rangle$ を定義すると、P 空間への射影演算子 P は

$$[P\,\psi]_p\equiv\sum_{\alpha\beta}\varphi_{0p}^{\alpha}\,\eta^{-1}_{\alpha\beta}\,\langle\varphi_0^{\beta}\,,\,\psi\,\rangle, \tag{80}$$

と表される。$Q=1-P$ は P の補空間 Q への射影演算子である。

　以下の計算は前節の一般論と同様に遂行することができて、1 次の摂動解は、

$$\tilde{f}^{(1)}(\tau\,;\,\tau_0)=(\tau-\tau_0)\,\bar{P}\,F-\mathcal{L}^{-1}\,\bar{Q}\,F \tag{81}$$

となる。ただし、$\bar{P}\equiv f^{\mathrm{eq}}\,P\,f^{\mathrm{eq}\text{-}1}$ $\bar{Q}\equiv f^{\mathrm{eq}}\,Q\,f^{\mathrm{eq}\text{-}1}$. 結局、1 次までの近似解は、

$$\tilde{f}(\tau\,;\,\tau_0)=f^{eq}+\epsilon\Big((\tau-\tau_0)\bar{P}F-\mathcal{L}^{-1}\bar{Q}F\Big). \tag{82}$$

そして、$\tau=\tau_0$ での「初期値」は

$$\tilde{f}(\tau_0\,;\,\tau_0)=f^{eq}-\mathcal{L}^{-1}\,\bar{Q}\,F, \tag{83}$$

となる。線形演算子 L のゼロモードのために永年項が出現することに注意しよう。この作業はより高次まで続けることができる。2 次までの解は [8] に与えられている。

　このようにして得られた摂動解を τ_0 でパラメトライズされる曲線群とみなしてくりこみ群/包絡線方程式を作用させる:

$$\frac{d\tilde{f}}{d\tau_0}\Big|_{\tau=\tau_0}=0. \tag{84}$$

これは、$\tilde{f}(\tau\,;\,\tau_0)$ をパラメトライズしている温度 $T(\tau,\sigma)$、 化学ポテンシャル $\mu(\tau,\sigma)$、そして流速ベクトル $u^{\mu}(\tau,\sigma)$ に対する発展方程式、すなわち流体方程式を導く。化学ポテンシャルは密度に変換できることを注意する。このときの時間について大域的な解 $f(\tau)$ は「初期値」によって与えられる: $f(\tau)=\tilde{f}(\tau,\,\tau)$。1 次までの近似であれば、(83) を用いて

$$f(\tau)\simeq f^{eq}-\mathcal{L}^{-1}\,\bar{Q}\,F, \tag{85}$$

となる。

　実は、くりこみ群方程式をかけて得られる流体方程式は、簡便に次のように 1 次の摂動の結果 (85) をバランス方程式 (70) に代入したものと一致する：

$$T^{\mu\nu}\;=\;\sum_p\frac{1}{p_0}p^{\mu}p^{\nu}\{f_p^{eq}-[\mathcal{L}^{-1}QF]_p\}, \tag{86}$$

$$N^{\mu}\;=\;\sum_p\frac{1}{p_0}p^{\mu}\{f_p^{eq}-[\mathcal{L}^{-1}QF]_p\}. \tag{87}$$

ここで、Q 演算子を含む項が散逸効果を表している。すなわち、

$$\delta T^{\mu\nu} = -\sum_p \frac{1}{p_0} p^\mu p^\nu [\mathcal{L}^{-1} QF]_p, \quad \delta N^\mu = -\sum_p \frac{1}{p_0} p^\mu [\mathcal{L}^{-1} QF]_p. \tag{88}$$

明らかに、散逸効果は次の量に集約されている：$\mathcal{L}^{-1}\,\bar{Q}\,F$.

第 2 節で述べたように、$\boldsymbol{a}_p^\mu = u^\mu$ のときランダウの方程式 (5) が得られ、$\boldsymbol{a}_p^\mu = \frac{m}{p\cdot u} u^\mu$ と選ぶと、粒子フレームの方程式 (13) が得られる。

以下の議論では簡単のために、上記二つの場合を少し一般化して、巨視的流れベクトル $\boldsymbol{a}_p^\mu$ が定数 θ で特徴付けられ、次の形を取るときに限ることにする[5]：

$$\boldsymbol{a}_p^\mu = \frac{1}{p\cdot u}\{(p\cdot u)\cos\theta + m\sin\theta\} u^\mu \equiv \theta_p^\mu. \tag{89}$$

この場合、$\boldsymbol{\Delta}_p^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - u^\mu\, u^\nu \equiv \Delta^{\mu\nu}$、と $\boldsymbol{a}_p^\mu$ 依存性が消えるので、$(p\cdot u)^{-1}\,\{(p\cdot u)\,\cos\theta + m\,\sin\theta\}\,\frac{\partial}{\partial\tau} = u^\mu\,\partial_\mu \equiv D$、および $\boldsymbol{\nabla}^\mu = \Delta^{\mu\nu}\,\partial_\nu \equiv \nabla^\mu$、と簡単になる。

このとき、既約なテンソル構造に注意しながら計算すると次の表式が得られる

$$[\mathcal{L}^{-1}\,\bar{Q}\,F]_p = f_p^{\mathrm{eq}} \sum_q \mathcal{A}_{pq}^{-1} \frac{1}{T}\Big(\Pi_q\, X_\theta + Q_q^\mu\, X_{\theta\mu} + \Pi_q^{\mu\nu}\, X_{\mu\nu}\Big). \tag{90}$$

ただし、 $\mathcal{A}_{pq} \equiv (p\cdot\theta_p)\, L_{pq}$. この演算子は $\theta_p^\mu = \boldsymbol{a}_p^\mu$ に依存していないことを注意する。ここで、Π_p、Q_p^μ、$\Pi_p^{\mu\nu}$ はそれぞれ体積圧力、熱流および応力テンソルの微視的表示であり、具体的には次のように与えられる:

$$\Pi_p \equiv (4/3-\gamma)\,(p\cdot u)^2 + [(\gamma-1)\,T\,\hat{h} - \gamma\,T]\,(p\cdot u) - \frac{1}{3}m^2, \tag{91}$$

$$Q_p^\mu \equiv -[(p\cdot u) - T\,\hat{h}]\,\Delta^{\mu\nu}\,p_\nu, \tag{92}$$

$$\Pi_p^{\mu\nu} \equiv 1/2\,(\Delta^{\mu\rho}\,\Delta^{\nu\sigma} + \Delta^{\mu\sigma}\,\Delta^{\nu\rho} - 2/3\,\Delta^{\mu\nu}\,\Delta^{\rho\sigma})\,p_\rho\,p_\sigma. \tag{93}$$

ただし、γ、$\hat{h} = (\epsilon + nT)/nT$ はそれぞれ比熱比と簡約されたエンタルピーである。(n は粒子数密度。) X_θ、$X_{\theta\mu}$、$X_{\mu\nu}$ は対応する散逸的熱力学的力である [8] が、具体的な表式はここでは省略する。

我々の理論は統計力学に対応するので輸送係数の微視的な表式を与えることができる。平衡分布を用いて次の内積を定義する：

$$\langle\,\varphi\,,\,\psi\,\rangle_{\mathrm{eq}} \equiv \sum_p \frac{1}{p^0}\, f_p^{\mathrm{eq}}\,\varphi_p\,\psi_p. \tag{94}$$

さらに、微視的な散逸流の時間発展が次の表式で与える：$[\Pi(s)]_p \equiv \sum_q\,[\mathrm{e}^{s\,\mathcal{L}}]_{pq}\,\Pi_q$、等。すると、各輸送係数は次の「久保公式」の形に表すことができる：

$$\zeta \equiv (1/T)\int_0^\infty \mathrm{d}s\langle\,\Pi(0)\,,\,\Pi(s)\,\rangle_{\mathrm{eq}}, \tag{95}$$

$$\lambda \equiv -(1/3T^2)\int_0^\infty \mathrm{d}s\langle\,Q^\mu(0)\,,\,Q_\mu(s)\,\rangle_{\mathrm{eq}}, \tag{96}$$

$$\eta \equiv (1/10T)\int_0^\infty \mathrm{d}s\langle\,\Pi^{\mu\nu}(0)\,,\,\Pi_{\mu\nu}(s)\,\rangle_{\mathrm{eq}}. \tag{97}$$

これらの表式から輸送係数がフレームに依存しないことが言える。

[5] ここで、因子 m は表式が次元を持たないようにするために導入したものであり、ここで展開している理論は質量を持たない粒子の系にも適用できることを注意する。

6　イスラエル-スチュアート型の方程式

散逸について２次まで取り入れた流体方程式もくりこみ群法で導くことができる。ただし、その導出はかなり技術的なので以下には (89) で定義した巨視的流速ベクトルに対応する一般的フレームに対する結果だけ示す [9]。

２次の方程式では新たに次の緩和方程式が加わる：

$$
\begin{aligned}
\Pi &= X_\Pi - \tau_\Pi\, D\Pi - \ell_{\Pi J}\, \nabla^a J_a + X_{\Pi\Pi}\, \Pi + X^a_{\Pi J}\, J_a + X^{ab}_{\Pi\pi}\, \pi_{ab}, && (98)\\
J^\mu &= X^\mu_J - \tau_J\, \Delta^{\mu a}\, DJ_a - \ell_{J\Pi}\, \nabla^\mu \Pi - \ell_{J\pi}\, \Delta^{\mu abc}\, \nabla_a \pi_{bc} + X^\mu_{J\Pi}\, \Pi + X^{\mu a}_{JJ}\, J_a + X^{\mu ab}_{J\pi}\, \pi_{ab}, && (99)\\
\pi^{\mu\nu} &= X^{\mu\nu}_\pi - \tau_\pi\, \Delta^{\mu\nu ab}\, D\pi_{ab} - \ell_{\pi J}\, \Delta^{\mu\nu ab}\, \nabla_a J_b + X^{\mu\nu}_{\pi\Pi}\, \Pi + X^{\mu\nu a}_{\pi J}\, J_a + X^{\mu\nu ab}_{\pi\pi}\, \pi_{ab}. && (100)
\end{aligned}
$$

ここで, X_Π, X^μ_J, $X^{\mu\nu}_\pi$ は熱力学的力である。Π, J^μ, $\pi^{\mu\nu}$ に対する緩和方程式は緩和時間 τ_Π, τ_J, τ_π および緩和長 $\ell_{\Pi J}$, $\ell_{J\Pi}$, $\ell_{J\pi}$, $\ell_{\pi J}$ で特徴付けられている。熱力学的力 X_Π, X^μ_J, $X^{\mu\nu}_\pi$ に対する補正は $X_{\Pi\Pi}$, $X^a_{\Pi J}$, $X^{ab}_{\Pi\pi}$, $X^\mu_{J\Pi}$, $X^{\mu a}_{JJ}$, $X^{\mu ab}_{J\pi}$, $X^{\mu\nu}_{\pi\Pi}$, $X^{\mu\nu a}_{\pi J}$ および $X^{\mu\nu ab}_{\pi\pi}$ で与えられる。

以下では一般の θ による複雑さを避けて、エネルギーフレームと粒子流フレームに限ることにする。

エネルギーフレームでは、

$$
T^{\mu\nu} = \epsilon\, u^\mu\, u^\nu - (p + \Pi)\, \Delta^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu}, \quad N^\mu = n\, u^\mu + J^\mu, \tag{101}
$$

と書ける。このとき、熱力学的力は $X_\Pi = -\zeta\, \nabla^a u_a$, $X^\mu_J = \lambda\, \hat{h}^{-2}\, \nabla^\mu(\mu/T)$, $X^{\mu\nu}_\pi = 2\,\eta\, \Delta^{\mu\nu ab}\, \nabla_a u_b$ となる。すでに触れておいたように、$f_n = 0$ および $f_e = 0$ となっている。

粒子流フレームでは、

$$
T^{\mu\nu} = (\epsilon + 3\,\Pi)\, u^\mu\, u^\nu - (p + \Pi)\, \Delta^{\mu\nu} + u^\mu\, J^\nu + u^\nu\, J^\mu + \pi^{\mu\nu}, \quad N^\mu = n\, u^\mu. \tag{102}
$$

ここに、$X_\Pi = -\zeta\,(3\,\gamma - 4)^{-2}\,(\nabla^a u_a - 3\,T\,DT^{-1})$, $X^\mu_J = -\lambda T^2\,(\nabla^\mu T^{-1} + T^{-1}\, Du^\mu)$, $X^{\mu\nu}_\pi = 2\,\eta\, \Delta^{\mu\nu ab}\, \nabla_a u_b$ である。この場合も確かに予期したように、$f_e = 3$ 且つ $f_n = 0$ となっている。すなわち、散逸による内部エネルギーが存在する。

次にそれぞれのフレームでの散逸力 Π, J^μ および $\pi^{\mu\nu}$ を書き下しておく[6]。

(A) エネルギーフレーム：

$$
\begin{aligned}
\Pi &= -\zeta\, \nabla^a u_a - \tau_\Pi\, D\Pi - \ell_{\Pi J}\, \nabla^a J_a \\
&\quad - \frac{1}{2}\, \tau_\Pi \left\{ \kappa_\Pi\, \nabla^a u_a + \frac{\zeta\, T}{\tau_\Pi}\, \partial_a\Big(\frac{\tau_\Pi}{\zeta\, T}\, u^a\Big) \right\} \Pi \\
&\quad - \frac{1}{2}\, \ell_{\Pi J} \left\{ \kappa^{(0)}_{\Pi J}\, \nabla^a \frac{\mu}{T} - \kappa^{(1)}_{\Pi J}\, Du^a + \frac{\zeta\, T}{\ell_{\Pi J}}\, \partial_b\Big(\frac{\ell_{\Pi J}}{\zeta\, T}\, \Delta^{bc}\Big)\, \Delta_c{}^a \right\} J_a \\
&\quad - \frac{1}{2}\, \ell_{\Pi\pi} \left\{ -\kappa_{\Pi\pi}\, \Delta^{abcd}\, \nabla_c u_d \right\} \pi_{ab}, && (103)\\
J^\mu &= \lambda\, \hat{h}^{-2}\, \nabla^\mu \frac{\mu}{T} - \ell_{J\Pi}\, \nabla^\mu \Pi - \tau_J\, \Delta^{\mu a}\, DJ_a - \ell_{J\pi}\, \Delta^{\mu abc}\, \nabla_a \pi_{bc} \\
&\quad - \frac{1}{2}\, \ell_{J\Pi} \left\{ \kappa^{(0)}_{J\Pi}\, \nabla^\mu \frac{\mu}{T} - \kappa^{(1)}_{J\Pi}\, Du^\mu + \frac{\lambda\, \hat{h}^{-2}}{\ell_{J\Pi}}\, \Delta^\mu{}_a\, \partial_b\Big(\frac{\ell_{J\Pi}}{\lambda\, \hat{h}^{-2}}\, \Delta^{ab}\Big) \right\} \Pi
\end{aligned}
$$

[6] プレプリント [9] の最初の版には渦度の部分にエラーがあった。以下の式では訂正されている。

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\,\tau_J \left\{ \Delta^{\mu a} \left[\kappa_J^{(0)}\, \nabla^b u_b + \frac{\lambda\,\hat{h}^{-2}}{\tau_J}\,\partial_b\Big(\frac{\tau_J}{\lambda\,\hat{h}^{-2}}\,u^b\Big)\right] - 2\,\kappa_J^{(1)}\,\Delta^{\mu abc}\,\nabla_b u_c - 2\,\omega^{\mu a} \right\} J_a \\
& -\frac{1}{2}\,\ell_{J\pi} \left\{ \Delta^{\mu cab} \left(\kappa_{J\pi}^{(0)}\,\nabla_c \frac{\mu}{T} - \kappa_{J\pi}^{(1)}\,Du_c\right) + \frac{\lambda\,\hat{h}^{-2}}{\ell_{J\pi}}\,\Delta^{\mu}{}_{c}\,\partial_d\Big(\frac{\ell_{J\pi}}{\lambda\,\hat{h}^{-2}}\,\Delta^{cdef}\Big)\,\Delta_{ef}{}^{ab} \right\} \pi_{ab}, \qquad (104)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\pi^{\mu\nu} \;=\;& 2\,\eta\,\Delta^{\mu\nu ab}\,\nabla_a u_b - \ell_{\pi J}\,\Delta^{\mu\nu ab}\,\nabla_a J_b - \tau_\pi\,\Delta^{\mu\nu ab}\,D\pi_{ab} \\
& -\frac{1}{2}\,\ell_{\pi\Pi} \left\{ -\kappa_{\pi\Pi}\,\Delta^{\mu\nu ab}\,\nabla_a u_b \right\} \Pi \\
& -\frac{1}{2}\,\ell_{\pi J} \left\{ \Delta^{\mu\nu ba} \left(\kappa_{\pi J}^{(0)}\,\nabla_b \frac{\mu}{T} - \kappa_{\pi J}^{(1)}\,Du_b\right) + \frac{\eta\,T}{\ell_{\pi J}}\,\Delta^{\mu\nu}{}_{bc}\,\partial_d\Big(\frac{\ell_{\pi J}}{\eta\,T}\,\Delta^{bcde}\Big)\,\Delta_e{}^a \right\} J_a \\
& -\frac{1}{2}\,\tau_\pi \left\{ \Delta^{\mu\nu ab} \left[\kappa_\pi^{(0)}\,\nabla^c u_c + \frac{\eta\,T}{\tau_\pi}\,\partial_c\Big(\frac{\tau_\pi}{\eta\,T}\,u^c\Big)\right] - 4\,\kappa_\pi^{(1)}\,\Delta^{\mu\nu ce}\,\Delta_e{}^{dab}\,\Delta_{cd}{}^{fg}\,\nabla_f u_g \right. \\
& \left. -4\,\Delta^{\mu\nu ce}\,\Delta_e{}^{dab}\,\omega_{cd} \right\} \pi_{ab}. \qquad (105)
\end{aligned}
$$

ここで、 $\omega^{\mu\nu} \equiv (\nabla^\mu u^\nu - \nabla^\nu u^\mu)/2$ は渦度である。

(B) 粒子流フレーム：

$$
\begin{aligned}
\Pi \;=\;& -\zeta\,(3\,\gamma-4)^{-2}\left(\nabla^a u_a - 3\,T\,D\frac{1}{T}\right) - \tau_\Pi\,D\Pi - \ell_{\Pi J}\,\nabla^a J_a \\
& -\frac{1}{2}\,\tau_\Pi \left\{ \kappa_\Pi\,\nabla^a u_a + \frac{\zeta\,(3\,\gamma-4)^{-2}\,T}{\tau_\Pi}\,\partial_a\Big(\frac{\tau_\Pi}{\zeta\,(3\,\gamma-4)^{-2}\,T}\,u^a\Big) \right\} \Pi \\
& -\frac{1}{2}\,\ell_{\Pi J} \left\{ \kappa_{\Pi J}^{(0)}\,\nabla^a \frac{\mu}{T} - \kappa_{\Pi J}^{(1)}\,Du^a + \frac{\zeta\,(3\,\gamma-4)^{-2}\,T}{\ell_{\Pi J}}\,\partial_b\Big(\frac{\ell_{\Pi J}}{\zeta\,(3\,\gamma-4)^{-2}\,T}\,\Delta^{bc}\Big)\,\Delta_c{}^a \right\} J_a \\
& -\frac{1}{2}\,\ell_{\Pi\pi} \left\{ -\kappa_{\Pi\pi}\,\Delta^{abcd}\,\nabla_c u_d \right\} \pi_{ab}, \qquad (106)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J^\mu \;=\;& -\lambda\,T^2\left(\nabla^\mu \frac{1}{T} + \frac{1}{T}\,Du^\mu\right) - \ell_{J\Pi}\,\nabla^\mu \Pi - \tau_J\,\Delta^{\mu a}\,DJ_a - \ell_{J\pi}\,\Delta^{\mu abc}\,\nabla_a \pi_{bc} \\
& -\frac{1}{2}\,\ell_{J\Pi} \left\{ \kappa_{J\Pi}^{(0)}\,\nabla^\mu \frac{\mu}{T} - \kappa_{J\Pi}^{(1)}\,Du^\mu + \frac{\lambda T^2}{\ell_{J\Pi}}\,\Delta^\mu{}_a\,\partial_b\Big(\frac{\ell_{J\Pi}}{\lambda T^2}\,\Delta^{ab}\Big) \right\} \Pi \\
& -\frac{1}{2}\,\tau_J \left\{ \Delta^{\mu a} \left[\kappa_J^{(0)}\,\nabla^b u_b + \frac{\lambda\,T^2}{\tau_J}\,\partial_b\Big(\frac{\tau_J}{\lambda\,T^2}\,u^b\Big)\right] - 2\,\kappa_J^{(1)}\,\Delta^{\mu abc}\,\nabla_b u_c - 2\,\omega^{\mu a} \right\} J_a \\
& -\frac{1}{2}\,\ell_{J\pi} \left\{ \Delta^{\mu cab} \left(\kappa_{J\pi}^{(0)}\,\nabla_c \frac{\mu}{T} - \kappa_{J\pi}^{(1)}\,Du_c\right) + \frac{\lambda\,T^2}{\ell_{J\pi}}\,\Delta^\mu{}_c\,\partial_d\Big(\frac{\ell_{J\pi}}{\lambda\,T^2}\,\Delta^{cdef}\Big)\,\Delta_{ef}{}^{ab} \right\} \pi_{ab}. \qquad (107)
\end{aligned}
$$

これに (105) が加わる。ここで、粒子流フレームでの実効体積粘性率 $\zeta_{\rm eff} \equiv \zeta\,(3\,\gamma-4)^{-2}$ を用いた。

上式において、 T および μ の関数である以下の係数を導入したが、それらの具体的関数系は複雑なので省略する；$\ell_{\Pi\pi}$, $\ell_{\pi\Pi}$, κ_Π, $\kappa_{\Pi J}^{(0)}$, $\kappa_{\Pi J}^{(1)}$, $\kappa_{\Pi\pi}$, $\kappa_{J\Pi}^{(0)}$, $\kappa_{J\Pi}^{(1)}$, $\kappa_J^{(0)}$, $\kappa_J^{(1)}$, $\kappa_{J\pi}^{(0)}$, $\kappa_{J\pi}^{(1)}$, $\kappa_{\pi\Pi}$, $\kappa_{\pi J}^{(0)}$, $\kappa_{\pi J}^{(1)}$, $\kappa_\pi^{(0)}$, $\kappa_\pi^{(1)}$.

7　まとめと結語

まず、散逸流体に対する相対論的流体方程式に関する基本的な問題を説明した。ここで紹介した問題は、「接合問題」といわれるもので一般の文献ではあまり意識されていないことである。くり込み群

法を用いた散逸を含む相対論的流体方程式の導出方法と主な結果を紹介した。くりこみ群法は力学系の強力な縮約法であり、ここでの流体方程式の導出はほとんど仮定無しのものである。そのため、これまでの「導出」で曖昧に設定されていた「接続条件」が必ずしも正しくないことが判明した。すなわち、エッカルトに由来しイスラエル-スチュアートらも採用している局所静止系の定義が下部のボルツマン方程式と整合的でないことが明らかにされた。この導出の背景にある次の事実は他の微視的導出方法においても重要であると信ずる：微視的な（運動学的理論の）時空間のスケールとその赤外理論としての流体方程式の時空スケールは異なる。後者は前者を粗視化したものである。したがって、流速ベクトルを定義する局所静止系ごとに時空座標をあらためて導入する必要がある。ここで紹介した理論では巨視的流ベクトル $\boldsymbol{a}_p^\mu$ を導入することによってその問題が解決されている。

くりこみ群法により多成分系の流体方程式を導出することもできる [32] ことを明記してこの論考を終る。

謝辞

この原稿の流体方程式に関する主要な部分は [8] および [9] に基づいて書かれていることをお断りします。ここで紹介した相対論的流体方程式の導出に関する研究、特に後者の文献に関係した部分は津村享佑氏（現、富士フィルム）が中心になって進めたものであることを明記しておきます。ただし、この原稿自体の最終責任は著者にあります。このような原稿をまとめる機会を与えて下さった「原子核研究」編集委員会、特に、初田哲男さんに感謝します。この研究は科研費 (No.20540265) の補助を受けています。

参考文献

[1] P.Huovinen, in “Quark Gluon Plasma 3”, ed. R.C.Hwa and X.N.Wang, (World Scientific, Singapore), p.600.

[2] M.Gyulassy and L.McLerran, Nucl.Phys.A **750**(2005)30.

[3] たとえば、以下の論文およびこれを引用している多数の論文；R. Baier, P. Romatschke, D. T. Son, A. O. Starinets and M. A. Stephanov, JHEP **0804**, 100 (2008)

[4] T. Hirano, U. W. Heinz, D. Kharzeev, R. Lacey and Y. Nara, Phys. Lett. B **636** (2006) 299

[5] C. Eckart, Phys. Rev. **58** (1940), 919.

[6] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, (Pergamon Press, London, 1959).

[7] L. Y. Chen, N. Goldenfeld and Y. Oono, Phys. Rev. Lett. **73**, 1311 (1994); Phys. Rev. E **54**, 376 (1996).

[8] K. Tsumura, T. Kunihiro and K. Ohnishi, Phys. Lett. B **646**, 134 (2007).

[9] K. Tsumura and T. Kunihiro, arXiv:0906.0079 [hep-ph].

[10] N. G. van Kampen, Phys. Rep. **124**, 69 (1985).

[11] N. G. van Kampen, J. Stat. Phys. **46**, 709 (1987).

[12] W. Israel and J. M. Stewart, Ann. Phys. **118** (1979) 341.

[13] K. Tsumura and T. Kunihiro, Phys. Lett. B **668**,425 (2008).

[14] W. A. Hiscock, L. Lindblom, Phys. Rev. D **31**(1985)725.

[15] Y. Minami and T. Kunihiro, Prog. Theor. Phys. **122**, 881 (2010).

[16] T. Kunihiro, Prog. Theor. Phys. **94**, 503 (1995); **95**, 835 (1996) (E).

[17] T. Kunihiro, Jpn. J. Ind. Appl. Math. **14** ,51 (1997).

[18] T. Kunihiro, Prog. Theor. Phys. **97**, 179 (1997).

[19] S.-I. Ei, K. Fujii and T. Kunihiro, Ann. Phys. **280**, 236 (2000).

[20] Y. Hatta and T. Kunihiro, Ann. Phys. **298**, 24 (2002).

[21] T. Kunihiro and K. Tsumura, J. Phys. A **39**, 8089 (2006).

[22] C. Marle, Ann. Inst. H. Poincare, **10**, 67, 127 (1969).

[23] M. Stewart, *Non-Equilibrium Relativistic Kinetic Theory* (Lecture Notes in Physics No. 10; Springer, Berlin, 1971).

[24] H. Grad, Comm. Pure Appl. Math. **2** (1949) 331.

[25] たとえば、高木貞治著「解析概論」（岩波書店）p.318.

[26] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillators, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (Springer-Verlag, 1983).

[27] 俣野　博、「微分方程式　I」岩波講座 **応用数学**、（岩波書店、１９９３）; 藤井 宏、岡本 久、「非線型力学」岩波講座 **応用数学**、（岩波書店、１９９３）;
J. D. Crawford, Rev. Mod. Phys. **63**, 991 (1991).

[28] N. N. Bogoliubov and Y. A. Mitropolsky, *Aymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations*, (Gordon and Breach, 1961).

[29] Y. Kuramoto, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **99**, 244 (1989); 蔵本 由紀、物性研究 **49**, 299 (1987); 岩波講座「現代の物理学　15 散逸構造とカオス」（森肇・蔵本由紀著）の中の第５章.(1994 年)

[30] N.N. Bogoliubov, *in* “ Studies in Statistical Mechanics”, vol.1, (J. de Boer and G.E. Uhlenbeck Ed.)North-Holland.

[31] S. Chapman and T.G. Cowling, “The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases” (3rd ed.) Cambridge U.P., 1970.

[32] K. Ohnishi, K. Tsumura and T. Kunihiro, (2006),unpublished;
K. Tsumura, K. Ohnishi, T. Kunihiro, 原稿準備中.