解析力学 問題

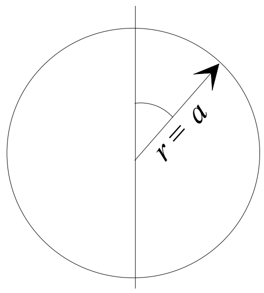
[1]. 運動エネルギーが $K = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(q^\ell)\dfrac{dq^i}{dt}\dfrac{dq^j}{dt}$ で与えられる系に関して, ポテンシャルエネルギーを $U(q^i)$ として Euler-Lagrange 方程式を書き下せ.

[2]. 変分原理は運動方程式を導くだけでなく, 様々な状況で有効である. 例えば幾何光学におけるフェルマーの原理は「点 P から点 Q への光の伝播は, それに要する時間が極小となる経路を通る」である. 今, 屈折率が場所の関数 $n(\boldsymbol{r})$ で与えられるとすると, 各地点での瞬間的な光速は $\dfrac{c}{n(\boldsymbol{r})}$ である. そこで, 点の座標 P を $\boldsymbol{r}_\mathrm{P}$, 点 Q の座標を $\boldsymbol{r}_\mathrm{Q}$ として, 点 P から点 Q への光の経路を $\boldsymbol{r}(\lambda) = \big(x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)\big)$ $\big(\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{r}_\mathrm{P}, \boldsymbol{r}(1) = \boldsymbol{r}_\mathrm{Q}\big)$ と経数 λ でパラメトライズすると, 経路上の無限小区間の距離 $d\ell = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}d\lambda$ $(\dot{x} = dx/d\lambda$, etc.) を進む間に要する時間 dt は $dt = \dfrac{n(\boldsymbol{r})}{c}d\ell$ で与えられる. この考察の下に, 点 P から点 Q へ到達するのに要する時間 T を λ を積分変数とする作用積分と見なしてフェルマーの原理を変分原理で表し, 光の経路が満たす方程式を導出せよ.

[3]. 鉛直に固定された半径 a の滑らかな円周上を質量 m の質点が頂上から初速度 0 で滑り落ちるときを考える. 重力加速度を g とする.

(a) 図のように極座標をとり, 拘束条件を $C(r) = r - a = 0$, それに対する Lagrange 未定乗数を λ として, Lagrangean を書き下せ.

(b) r と θ に対する Euler-Lagrange 方程式を書き下し, それらを解け。また質点に働く拘束力（抗力）を求め、質点が円周を離れる位置を求めよ.



[4]. 質量 m の質点が一端を固定された長さ ℓ の紐につけられた振り子の運動（平面内にあるとは限らない）を, 重力加速度を g として次の方法で記述せよ.

(a) 紐の固定端を原点とし, 鉛直下方を z 軸として球座標を張り, 質点の位置の座標を (r, θ, φ) とする. この時, 拘束条件を $C(r) := r - \ell = 0$, それに対する Lagrange multiplier を λ としてこの系の Lagrangean を書け.

(b) (r, θ, φ) に対する Euler-Lagrange 方程式を書き下し, それに拘束条件を代入して, 質点に加わる抗力（紐に掛かる張力）を θ とエネルギー E の関数として求めよ. なお振り子の静止状態をエネルギーのゼロ点とする.

(c) $\varphi = 0, \pi$ (xz 平面) に運動が制限されている場合を考える. このとき, エネルギーがある値（E_{c1} とする）より小さければ質点は振動し, E_{c1} より大きな別のある値（E_{c2} とする）より大きければ回転する. また $E_{c1} < E < E_{c2}$ のとき, ある角度で紐が緩む. これらのエネルギー臨界値 E_{c1}, E_{c2} を求め, $E_{c1} < E < E_{c2}$ のときに紐が緩む角度を求めよ.

[5]. Lagrangean $L(q^i, \dot{q}^i, t)$ $\left(\dot{q}^i \equiv \dfrac{dq^i}{dt},\ i = 1, 2, \cdots, n\right)$ を考える.

(a) 作用汎関数 $S[q^i(\cdot)] = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q^i, \dot{q}^i, t)$ に変分原理（Hamilton の原理）を適用し, Euler-Lagrange 方程式を導け.

(b) L が q^i の $q^i \to q^i + \epsilon\, u^i$ $(\epsilon \ll 1)$ なる無限小変位に対して

$$L(q^i, \dot{q}^i, t) \to L(q^i, \dot{q}^i, t) + \epsilon \frac{d}{dt} W(q^i, \dot{q}^i, t)$$

のように, ある関数 W の時間に関する全微分だけ変化するとき, 系には保存量が存在する（Neother の定理）. これを示せ.

(c)$u^i = \dot{q}^i$ のときの保存量はなにか. これは系のどのような対称性（不変性）を反映したものか.

[6]. 平面上を運動する質量 m の質点が, ある力学変数 A と次の Lagrangean のように結合した系を考える.

$$L = \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 + r^2 (\dot{\varphi} - A)^2 \right] - V(r) + \frac{1}{2} \dot{A}^2 - U(A)$$

ここで $V(r)$, $U(A)$ はそれぞれ r, A のある関数である。このとき以下の問いに答えよ.

(a) この系のエネルギー E の表式を求めよ.

(b) この系の φ 方向の運動量（z 軸回りの角運動量）p_φ の表式を求めよ.

(c) この系には E と p_φ 以外にもう一つの保存量がある. すなわち Lagrangean は

$$r \to r\,, \quad \varphi \to \varphi + \epsilon\, A\,, \quad A \to A + \epsilon\, \dot{A}\,,$$

なる無限小変換で

$$L \to L + \epsilon \frac{d}{dt} W$$

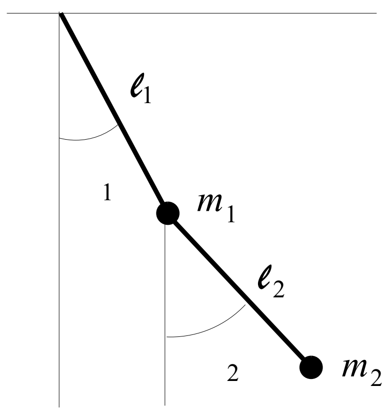
のように変換する. よって Noether の定理によりある保存量 Q が存在する. W を計算し Q の表式を求めよ. また, この Q の表式に p_φ の表式を使うことによって, A の運動が r, φ と独立に積分可能であることを示せ.

(d) p_φ と Q の表式を使ってエネルギー E の表式を変形し, この系が完全に積分可能であることを示せ.

[7]. 図のように長さ ℓ_1 と ℓ_2 の糸の先に，質量がそれぞれ m_1 と m_2 の質点をつるした系（２重振子）を考える.

(a) 重力加速度を g として，この系の Lagrangean を書き下し，Euler-Lagrange の運動方程式を求めよ.

(b) 振幅の小さい微小振動 $(|\phi_1| \ll 1, |\phi_2| \ll 1)$ の場合についてこの系の基準振動数を求めよ.



[8]. Poisson 括弧式の Jacobi Identity:

$$\{\{A,B\},C\}+\{\{B,C\},A\}+\{\{C,A\},B\}\equiv 0\,,$$

を証明せよ.（ヒント：symplectic metric を使い

$$\{\{A,B\},C\}=\sum_{i,j,k,\ell} J^{ij}J^{k\ell}\left(A_{,i}\,B_{,j}\right)_{,k}C_{,\ell}=\sum_{i,j,k,\ell} J^{ij}J^{k\ell}\left(A_{,ik}B_{,j}C_{,\ell}+A_{,i}B_{,jk}C_{,\ell}\right)$$

となることを利用すると簡単.）

[9]. 次の Lagrangean で与えられる系（問題 [6] で考察した系）を考える.

$$L=\frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2+r^2(\dot{\varphi}-A)^2\right]-V(r)+\frac{1}{2}\dot{A}^2-U(A)$$

(a) (r,φ,A) に対する共役運動量をそれぞれ (p_r,p_φ,p_A) として, この系の Hamiltonian H を求めよ.

(b) この系の Hamilton の運動方程式を書き下せ.

[10]. Hamiltonian が $H(p,q)=\dfrac{1}{2}\,p^2+\alpha\,p\,q$ で与えられる系を考える. ここで α は定数である.

(a) Hamilton の運動方程式を書き下し, 時刻 $t=0$ での (p,q) の初期値を (p_0,q_0) として運動の一般解を求めよ.

(b) 母関数 F が $F_2(q,P;t)=e^{-\alpha t}\,q\,P$ で与えられる正準変換 $(p,q)\to(P,Q)$ （母関数 $F=F_2-PQ$）を実行し, 新しい Hamiltonian $H_2(P,Q;t)$ を求めよ.

(c) (b) で求めた $H_2(P,Q;t)$ に関する Hamilton の運動方程式を解き, その解が (a) で求めた解と一致することを確かめよ.

[11]. Lagrangean が $L=\dfrac{1}{2}a(q)\dot{q}^2-V(q)$ で与えられる一次元系を考える.

(a) Hamilton の原理（変分原理）を適用し，Euler-Lagrange 方程式を書き下せ.

(b) (a) で考えた系は Lagrangean が $\tilde{L}=\dfrac{1}{2}a(q)\dot{q}^2+b(q)\dot{q}-V(q)$ で与えられる系と等価な力学系であることを示せ.

(c) この系のエネルギーを E とする. q の運動可能領域 $(E\geq V(q))$ が $q_1\leq q\leq q_2$ $(V(q_1)=V(q_2)=E)$ に束縛されている時，その運動の周期 T の表式を求めよ.

[12]. 中心力場中の質点の Lagrangean $L=\dfrac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)-V(r)$ を考える. ここで，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

(a) (x,y,z) の共役運動量を (p_x,p_y,p_z) として, この系の Hamiltonian を求めよ.

(b) 原点まわりの角運動量成分，$J_x=yp_z-zp_y$, $J_y=zp_x-xp_z$, $J_z=xp_y-yp_x$ と Hamiltonian との Poisson 括弧式を計算し，それらが保存することを確かめよ.

(c) J_x, J_y, J_z に関して，$\{\ ,\ \}$ を Poisson 括弧式として，次の関係式が成り立つことを示せ.

$$\{J_x\,,J_y\}=J_z\,,\quad \{J_y\,,J_z\}=J_x\,,\quad \{J_z\,,J_x\}=J_y\,.$$

[13]. Hamiltonian が $H = \dfrac{1}{2m(t)}\, p^2 + \dfrac{1}{2} m(t)\omega^2 q^2$ で与えられる系を考える．ここで $m(t)$ は時間の関数である．

(a) 母関数 F が $F_2(q, P; t) = \sqrt{m(t)}\, q\, P$ で与えられる（(2) 型の）正準変換 $(p, q) \to (P, Q)$（母関数 $F = F_2 - PQ$）を実行し, 新しい Hamiltonian $H_2(P, Q; t)$ を求めよ．（$m(t)$ が時間の関数であることに注意せよ.）

(b) $m(t) = m_0\, e^{\alpha t}$ の場合, (a) で求めた Hamiltonian H_2 は時間に陽に依存しない．この事を示し, これから得られる保存量 E を元の変数 (p, q) で表せ.

[14]. 変数 (q, p) から変数 (Q, P) へのつぎのような変換を考える：

$$Q = q^\alpha \cos \beta p\,, \qquad P = q^\alpha \sin \beta p\,.$$

これが正準変換であるためには，α, β の値はいくらでなければならないか.

[15]. 単振動の Hamiltonian $H = \dfrac{1}{2m} p^2 + \dfrac{1}{2} m\omega^2 q^2$ に対して, $F = F_1(q, Q) = \dfrac{m\omega q^2}{2} \cot Q$ を母関数とする正準変換 $(q, p) \to (Q, \Pi)$ を考える.

(a) この正準変換を実行し, 新しい変数 (Q, Π) に対する Hamiltonian $H_1(Q, \Pi)$ を求めよ.

(b) 変数 (Q, Π) についての正準方程式を解き, 新しい運動量 Π が作用変数 I （$I := \dfrac{1}{2\pi} \oint p\, dq$) に等しいことを確かめよ.

(c) 角振動数 ω が時間の関数としてゆっくりと変化するとき系のエネルギーはどのように変化するか，答えよ.