Self-force in terms of the tensor harmonics

Here, we give the self-force in an arbitrary gauge expressed in terms of the tensor harmonics coefficients. The formulas are valid for general orbits. We assume that the particle is located at $r = r_0$, $\theta = \pi/2$ and $\phi = \phi_0$ at time t_0 and its four velocity is $\{u_\alpha\} = \{-\mathcal{E},\, u_r,\, 0,\, \mathcal{L}\}$, where $\mathcal{E}$ and $\mathcal{L}$ are the energy and angular momentum of the particle, respectively. It is noted that the θ-component of the force vanishes because of the symmetry, and the ϕ-component is given by

$$F^\phi = \frac{1}{\mathcal{L}}\left(\mathcal{E}\,F^t - u_r\,F^r\right)\,, \tag{0.1}$$

which follows from the fact that the force is orthogonal to the four velocity.

$$\begin{aligned}
F^t_{(\mathrm{even})} \;=\; & \sum_{\ell m}\mu\left[-\frac{\mathcal{C}_1\,\mathcal{L}^2}{2\,r_0\,(r_0-2\,M)^2}\,\partial_t K_{\ell m}(t_0,\,r_0)\right.\\
& -\frac{i}{2\,r_0^3\,(r_0-2\,M)^2}(-r_0^3\,\mathcal{L}\,m + 2\,i\,r_0^3\,u_r\,\mathcal{E}^2\,M - r_0\,\mathcal{L}^3\,m\\
& \quad +r_0^3\,\mathcal{L}\,m\,\mathcal{E}^2 - 2\,i\,r_0^2\,u_r\,\mathcal{L}^2 + 2\,r_0^2\,\mathcal{L}\,m\,M + 8\,i\,r_0\,u_r\,\mathcal{L}^2\,M\\
& \quad +2\,\mathcal{L}^3\,m\,M - 8\,i\,u_r\,\mathcal{L}^2\,M^2)\mathcal{E}\,H_{2\ell m}(t_0,\,r_0)\\
& -\frac{u_r\,\mathcal{E}^3\,r_0^2}{(r_0-2\,M)^2}\,\partial_t H_{1\ell m}(t_0,\,r_0)\\
& -\frac{i\,(-2\,r_0\,\mathcal{L}\,m + r_0\,\mathcal{L}\,m\,\mathcal{E}^2 + 2\,i\,r_0\,u_r\,\mathcal{E}^2\,M + 4\,\mathcal{L}\,m\,M)\,\mathcal{E}}{2\,r_0\,(r_0-2\,M)^2}H_{0\ell m}(t_0,\,r_0)\\
& -\frac{(-2\,r_0 + r_0\,\mathcal{E}^2 + 4\,M)\,\mathcal{E}\,u_r}{2\,(r_0-2\,M)}\,\partial_r H_{0\ell m}(t_0,\,r_0)\\
& -\frac{i}{r_0^3\,(r_0-2\,M)^3}(-i\,M\,r_0^4 - i\,r_0^4\,M\,\mathcal{E}^2 + 2\,i\,\mathcal{E}^4\,r_0^4\,M\\
& \quad +\mathcal{L}\,\mathcal{E}^2\,u_r\,m\,r_0^4 - u_r\,\mathcal{L}\,m\,r_0^4 + i\,\mathcal{L}^2\,r_0^3 - i\,\mathcal{L}^2\,\mathcal{E}^2\,r_0^3 + 2\,i\,r_0^3\,M^2\,\mathcal{E}^2\\
& \quad -4\,\mathcal{L}\,\mathcal{E}^2\,u_r\,m\,r_0^3\,M + 4\,i\,r_0^3\,M^2 + 6\,u_r\,\mathcal{L}\,m\,r_0^3\,M - 4\,i\,r_0^2\,M^3\\
& \quad -7\,i\,\mathcal{L}^2\,r_0^2\,M + 3\,i\,\mathcal{L}^2\,\mathcal{E}^2\,r_0^2\,M + 4\,\mathcal{L}\,\mathcal{E}^2\,u_r\,m\,r_0^2\,M^2 - 12\,u_r\,\mathcal{L}\,m\,r_0^2\,M^2\\
& \quad +16\,i\,\mathcal{L}^2\,r_0\,M^2 - 2\,i\,\mathcal{L}^2\,\mathcal{E}^2\,r_0\,M^2 + 8\,u_r\,\mathcal{L}\,m\,r_0\,M^3 - 12\,i\,\mathcal{L}^2\,M^3)\,H_{1\ell m}(t_0,\,r_0)\\
& +\frac{(2\,u_r\,r_0 - 4\,u_r\,M - i\,\mathcal{L}\,m)\,\mathcal{L}^2\,\mathcal{E}}{2,r_0^3\,(r_0-2\,M)}K_{\ell m}(t_0,\,r_0) - \frac{\mathcal{L}^2\,u_r\,\mathcal{E}}{2\,r_0^2}\,\partial_r K_{\ell m}(t_0,\,r_0)\\
& -\frac{\mathcal{E}^2\,r_0^2\,(-r_0 + r_0\,\mathcal{E}^2 + 2\,M)}{2\,(r_0-2\,M)^3}\,\partial_t H_{0\ell m}(t_0,\,r_0) - \frac{i\,r_0\,\mathcal{E}^3\,\mathcal{L}\,m}{(r_0-2\,M)^3}\,\partial_t h^{(\mathrm{e})}_{0\ell m}(t_0,\,r_0)\\
& -\frac{i\,(-r_0 + r_0\,\mathcal{E}^2 + 2\,M)\,u_r\,\mathcal{L}\,m}{r_0^2\,(r_0-2\,M)}\,\partial_r h^{(\mathrm{e})}_{0\ell m}(t_0,\,r_0) - \frac{i\,\mathcal{C}_1\,u_r\,\mathcal{L}\,m}{r_0^2\,(r_0-2\,M)}\,\partial_t h^{(\mathrm{e})}_{1\ell m}(t_0,\,r_0)\\
& -\frac{i\,\mathcal{C}_2\,\mathcal{E}\,\mathcal{L}\,m}{r_0^4\,(r_0-2\,M)}\,\partial_r h^{(\mathrm{e})}_{1\ell m}(t_0,\,r_0)\\
& +\frac{i}{r_0^3(r_0-2\,M)^2}(-2\,u_r\,r_0^2 + 2\,r_0^2\,\mathcal{E}^2\,u_r + i\,r_0\,\mathcal{L}\,m + 8\,r_0\,u_r\,M\\
& \quad -2\,r_0\,u_r\,\mathcal{E}^2\,M - i\,r_0\,\mathcal{L}\,m\,\mathcal{E}^2 - 2\,i\,\mathcal{L}\,m\,M - 8\,u_r\,M^2)\mathcal{L}\,m\,h^{(\mathrm{e})}_{0\ell m}(t_0,\,r_0)\\
& +\frac{i}{(r_0-2\,M)\,r_0^5}(2\,\mathcal{E}^2\,r_0^3 - 2\,r_0^3 - i\,r_0^2\,u_r\,\mathcal{L}\,m + 5\,r_0^2\,M - 3\,r_0\,\mathcal{L}^2\\
& \quad +2\,i\,r_0\,u_r\,\mathcal{L}\,m\,M + 7\,\mathcal{L}^2\,M)\mathcal{L}\,\mathcal{E}\,m\,h^{(\mathrm{e})}_{1\ell m}(t_0,\,r_0)\\
& -\frac{(-r_0 + r_0\,\mathcal{E}^2 + 2\,M)\,\mathcal{C}_2}{r_0^2\,(r_0-2\,M)^2}\,\partial_r H_{1\ell m}(t_0,\,r_0) - \frac{\mathcal{C}_1\,\mathcal{C}_2}{2\,r_0\,(r_0-2\,M)^3}\,\partial_t H_{2\ell m}(t_0,\,r_0)\\
& -\frac{\mathcal{C}_2\,u_r\,\mathcal{E}}{2\,r_0^2\,(r_0-2\,M)}\,\partial_r H_{2\ell m}(t_0,\,r_0)\\
& +\frac{\mathcal{C}_1\,\mathcal{L}^2\,m^2}{2\,r_0\,(r_0-2\,M)^2}\,\partial_t G_{\ell m}(t_0,\,r_0) + \frac{m^2\,\mathcal{L}^2\,u_r\,\mathcal{E}}{2\,r_0^2}\,\partial_r G_{\ell m}(t_0,\,r_0)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{(2\,u_r\,r_0 - 4\,u_r\,M - i\,\mathcal{L}\,m)\,m^2\,\mathcal{L}^2\,\mathcal{E}}{2\,r_0^3\,(r_0-2\,M)} G_{\ell m}(t_0,\,r_0)\Big]\,Y_{\ell m}(\pi/2,\,\phi_0)\,,\\
& \mathcal{C}_1 := r_0\,\mathcal{E}^2 + r_0 - 2\,M\,,\\
& \mathcal{C}_2 := \mathcal{E}^2\,r_0^3 - r_0^3 + 2\,r_0^2\,M - r_0\,\mathcal{L}^2 + 2\,\mathcal{L}^2\,M\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F^r_{(\mathrm{even})} \;=\; & \sum_{\ell m}\mu\,\Big[-\frac{\mathcal{L}^2\,u_r\,\mathcal{E}}{2\,r_0^2}\,\partial_t K_{\ell m}(t_0,\,r_0)\\
& -\frac{i}{2\,r_0^6\,(r_0-2\,M)^2}(2\,i\,\mathcal{E}^4\,r_0^6\,M + u_r\,\mathcal{L}\,m\,r_0^6 + \mathcal{L}\,\mathcal{E}^2\,u_r\,m\,r_0^6\\
& \quad -4\,\mathcal{L}\,\mathcal{E}^2\,u_r\,m\,r_0^5\,M - 6\,u_r\,\mathcal{L}\,m\,r_0^5\,M - 2\,i\,\mathcal{L}^2\,\mathcal{E}^2\,r_0^5\\
& \quad +4\,\mathcal{L}\,\mathcal{E}^2\,u_r\,m\,r_0^4\,M^2 + 6\,i\,\mathcal{L}^2\,\mathcal{E}^2\,r_0^4\,M - r_0^4\,u_r\,\mathcal{L}^3\,m + 12\,u_r\,\mathcal{L}\,m\,r_0^4\,M^2\\
& \quad -8\,u_r\,\mathcal{L}\,m\,r_0^3\,M^3 + 2\,i\,r_0^3\,\mathcal{L}^4 - 4\,i\,\mathcal{L}^2\,\mathcal{E}^2\,r_0^3\,M^2 + 6\,r_0^3\,u_r\,\mathcal{L}^3\,m\,M\\
& \quad -12\,r_0^2\,u_r\,\mathcal{L}^3\,m\,M^2 - 12\,i\,r_0^2\,\mathcal{L}^4\,M + 8\,r_0\,u_r\,\mathcal{L}^3\,m\,M^3 + 24\,i\,r_0\,\mathcal{L}^4\,M^2\\
& \quad -16\,i\,\mathcal{L}^4\,M^3)\,H_{2\ell m}(t_0,\,r_0)\\
& -\frac{\mathcal{C}_5\,\mathcal{E}^2}{r_0\,(r_0-2\,M)^2}\,\partial_t H_{1\ell m}(t_0,\,r_0)\\
& -\frac{i}{2\,r_0^3\,(r_0-2\,M)^2}(2\,i\,r_0^3\,M\,\mathcal{E}^2 + r_0^3\,u_r\,\mathcal{L}\,m - 4\,r_0^2\,u_r\,\mathcal{L}\,m\,M\\
& \quad -2\,i\,r_0\,\mathcal{L}^2\,M + 4\,r_0\,u_r\,\mathcal{L}\,m\,M^2 + 4\,i\,\mathcal{L}^2\,M^2)\,\mathcal{E}^2\,H_{0\ell m}(t_0,\,r_0)\\
& -\frac{\mathcal{C}_3\,\mathcal{E}^2}{2\,r_0^2\,(r_0-2\,M)}\,\partial_r H_{0\ell m}(t_0,\,r_0)\\
& -\frac{i}{r_0^4\,(r_0-2\,M)}(i\,u_r\,r_0^3\,M + 2\,i\,r_0^3\,u_r\,\mathcal{E}^2\,M + r_0^3\,\mathcal{L}\,m\,\mathcal{E}^2\\
& \quad -2\,i\,u_r\,r_0^2\,M^2 - i\,r_0^2\,u_r\,\mathcal{L}^2 + 3\,i\,r_0\,u_r\,\mathcal{L}^2\,M - r_0\,\mathcal{L}^3\,m\\
& \quad -2\,i\,u_r\,\mathcal{L}^2\,M^2 + 2\,\mathcal{L}^3\,m\,M)\,\mathcal{E}\,H_{1\ell m}(t_0,\,r_0)\\
& +\frac{(2\,\mathcal{E}^2\,r_0^3 - i\,r_0^2\,u_r\,\mathcal{L}\,m + 2\,i\,r_0\,u_r\,\mathcal{L}\,m\,M - 2\,r_0\,\mathcal{L}^2 + 4\,\mathcal{L}^2\,M)\,\mathcal{L}^2}{2\,r_0^6}\,K_{\ell m}(t_0,\,r_0)\\
& -\frac{\mathcal{C}_3\,\mathcal{L}^2}{2\,r_0^5}\,\partial_r K_{\ell m}(t_0,\,r_0) - \frac{r_0\,u_r\,\mathcal{E}^3}{2\,(r_0-2\,M)}\,\partial_t H_{0\ell m}(t_0,\,r_0)\\
& -\frac{i\,u_r\,\mathcal{L}\,m\,\mathcal{E}^2}{(r_0-2\,M)\,r_0}\,\partial_t h^{(\mathrm{e})}_{0\ell m}(t_0,\,r_0) - \frac{i\,\mathcal{C}_3\,\mathcal{E}\,\mathcal{L}\,m}{r_0^4\,(r_0-2\,M)}\,\partial_r h^{(\mathrm{e})}_{0\ell m}(t_0,\,r_0)\\
& -\frac{i\,\mathcal{C}_5\,\mathcal{E}\,\mathcal{L}\,m}{r_0^4\,(r_0-2\,M)}\,\partial_t h^{(\mathrm{e})}_{1\ell m}(t_0,\,r_0) - \frac{i\,(r_0-2\,M)\,\mathcal{C}_4\,u_r\,\mathcal{L}\,m}{r_0^6}\,\partial_r h^{(\mathrm{e})}_{1\ell m}(t_0,\,r_0)\\
& +\frac{i}{r_0^5\,(r_0-2\,M)^2}(2\,\mathcal{E}^2\,r_0^4 - 2\,r_0^4 + 6\,r_0^3\,M - i\,r_0^3\,u_r\\
& \quad \mathcal{L}\,m - 2\,r_0^3\,M\,\mathcal{E}^2 - 4\,r_0^2\,M^2 + 4\,i\,r_0^2\,u_r\,\mathcal{L}\,m\,M - 4\,i\,r_0\,u_r\,\mathcal{L}\,m\,M^2\\
& \quad -2\,r_0^2\,\mathcal{L}^2 + 6\,r_0\,\mathcal{L}^2\,M - 4\,\mathcal{L}^2\,M^2)\mathcal{L}\,\mathcal{E}\,m\,h^{(\mathrm{e})}_{0\ell m}(t_0,\,r_0)\\
& +\frac{i}{r_0^7}(2\,u_r\,\mathcal{E}^2\,r_0^4 - 4\,r_0^3\,u_r\,\mathcal{E}^2\,M - i\,r_0^3\,\mathcal{L}\,m\,\mathcal{E}^2 + u_r\,r_0^3\,M\\
& \quad -2\,u_r\,r_0^2\,M^2 - 3\,r_0^2\,u_r\,\mathcal{L}^2 + i\,r_0\,\mathcal{L}^3\,m + 13\,r_0\,u_r\,\mathcal{L}^2\,M - 2\,i\,\mathcal{L}^3\,m\,M\\
& \quad -14\,u_r\,\mathcal{L}^2\,M^2)\mathcal{L}\,m\,h^{(\mathrm{e})}_{1\ell m}(t_0,\,r_0)\\
& -\frac{\mathcal{C}_4\,u_r\,\mathcal{E}}{r_0^3}\,\partial_r H_{1\ell m}(t_0,\,r_0)\\
& -\frac{(\mathcal{E}^2\,r_0^3 + r_0^3 - 2\,r_0^2\,M - r_0\,\mathcal{L}^2 + 2\,\mathcal{L}^2\,M)\,u_r\,\mathcal{E}}{2\,r_0^2\,(r_0-2\,M)}\,\partial_t H_{2\ell m}(t_0,\,r_0)\\
& -\frac{\mathcal{C}_5\,\mathcal{C}_4}{2\,r_0^5\,(r_0-2\,M)}\,\partial_r H_{2\ell m}(t_0,\,r_0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{m^2\,u_r\,\mathcal{L}^2\,\mathcal{E}}{2\,r_0^2}\,\partial_t G_{\ell m}(t_0,\,r_0)+\frac{\mathcal{C}_3\,\mathcal{L}^2\,m^2}{2\,r_0^5}\,\partial_r G_{\ell m}(t_0,\,r_0)\\
&-\frac{(2\,\mathcal{E}^2\,r_0^3-i\,r_0^2\,u_r\,\mathcal{L}\,m+2\,i\,r_0\,u_r\,\mathcal{L}\,m\,M-2\,r_0\,\mathcal{L}^2+4\,\mathcal{L}^2\,M)\,m^2\,\mathcal{L}^2}{2\,r_0^6}\,G_{\ell m}(t_0,\,r_0)\Big]\\
&\times Y_{\ell m}(\pi/2,\,\phi_0)\,,\\
&\mathcal{C}_3:=-2\,r_0^3+\mathcal{E}^2\,r_0^3+4\,r_0^2\,M-r_0\,\mathcal{L}^2+2\,\mathcal{L}^2\,M\,,\\
&\mathcal{C}_4:=\mathcal{E}^2\,r_0^3-r_0^3+2\,r_0^2\,M-r_0\,\mathcal{L}^2+2\,\mathcal{L}^2\,M\,,\\
&\mathcal{C}_5:=\mathcal{E}^2\,r_0^3-r_0\,\mathcal{L}^2+2\,\mathcal{L}^2\,M\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F^t_{(\mathrm{odd})}\;=\;&\sum_{\ell m}\mu\Big[-\frac{m\,\mathcal{E}\,u_r\,\mathcal{L}^2}{2\,r_0^4}\,\partial_r h_{2\ell m}(t_0,\,r_0)\\
&+\frac{1}{r_0^3\,(r_0-2\,M)^2}(-2\,u_r\,r_0^2+2\,r_0^2\,\mathcal{E}^2\,u_r+i\,r_0\,\mathcal{L}\,m+8\,r_0\,u_r\,M-2\,r_0\,u_r\,\mathcal{E}^2\,M\\
&\quad-i\,r_0\,\mathcal{L}\,m\,\mathcal{E}^2-2\,i\,\mathcal{L}\,m\,M-8\,u_r\,M^2)\mathcal{L}\,h_{0\ell m}(t_0,\,r_0)\\
&+\frac{1}{r_0^5\,(r_0-2\,M)}(2\,\mathcal{E}^2\,r_0^3-2\,r_0^3-i\,r_0^2\,u_r\,\mathcal{L}\,m+5\,r_0^2\,M\\
&\quad-3\,r_0\,\mathcal{L}^2+2\,i\,r_0\,u_r\,\mathcal{L}\,m\,M+7\,\mathcal{L}^2\,M)\,\mathcal{E}\,\mathcal{L}\,h_{1\ell m}(t_0,\,r_0)\\
&+\frac{(4\,u_r\,r_0-8\,u_r\,M-i\,\mathcal{L}\,m)\,\mathcal{E}\,\mathcal{L}^2\,m}{2\,r_0^5\,(r_0-2\,M)}\,h_{2\ell m}(t_0,\,r_0)\\
&-\frac{r_0\,\mathcal{L}\,\mathcal{E}^3}{(r_0-2\,M)^3}\,\partial_t h_{0\ell m}(t_0,\,r_0)-\frac{(-r_0+r_0\,\mathcal{E}^2+2\,M)\,u_r\,\mathcal{L}}{r_0^2\,(r_0-2\,M)}\,\partial_r h_{0\ell m}(t_0,\,r_0)\\
&-\frac{(r_0\,\mathcal{E}^2+r_0-2\,M)\,u_r\,\mathcal{L}}{r_0^2\,(r_0-2\,M)}\,\partial_t h_{1\ell m}(t_0,\,r_0)\\
&-\frac{(\mathcal{E}^2\,r_0^3-r_0^3+2\,r_0^2\,M-r_0\,\mathcal{L}^2+2\,\mathcal{L}^2\,M)\,\mathcal{L}\,\mathcal{E}}{r_0^4\,(r_0-2\,M)}\,\partial_r h_{1\ell m}(t_0,\,r_0)\\
&-\frac{1}{2}\,\frac{(r_0\,\mathcal{E}^2+r_0-2\,M)\,\mathcal{L}^2\,m}{r_0^3\,(r_0-2\,M)^2}\,\partial_t h_{2\ell m}(t_0,\,r_0)\Big]\,\partial_\theta\,Y_{\ell m}(\pi/2,\,\phi_0)\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F^r_{(\mathrm{odd})}\;=\;&\sum_{\ell m}\mu\Big[-\frac{(-2\,r_0^3+\mathcal{E}^2\,r_0^3+4\,r_0^2\,M-r_0\,\mathcal{L}^2+2\,\mathcal{L}^2\,M)\,\mathcal{L}^2\,m}{2\,r_0^7}\,\partial_r h_{2\ell m}(t_0,\,r_0)\\
&+\frac{1}{r_0^5(r_0-2\,M)^2}(2\,\mathcal{E}^2\,r_0^4-2\,r_0^4+6\,r_0^3\,M-i\,r_0^3\,u_r\,\mathcal{L}\,m\\
&\quad-2\,r_0^3\,M\,\mathcal{E}^2-4\,r_0^2\,M^2+4\,i\,r_0^2\,u_r\,\mathcal{L}\,m\,M-4\,i\,r_0\,u_r\,\mathcal{L}\,m\,M^2\\
&\quad-2\,r_0^2\,\mathcal{L}^2+6\,r_0\,\mathcal{L}^2\,M-4\,\mathcal{L}^2\,M^2)\mathcal{E}\,\mathcal{L}\,h_{0\ell m}(t_0,\,r_0)\\
&+\frac{1}{r_0^7}(2\,u_r\,\mathcal{E}^2\,r_0^4-4\,r_0^3\,u_r\,\mathcal{E}^2\,M-i\,r_0^3\,\mathcal{L}\,m\,\mathcal{E}^2+u_r\,r_0^3\,M\\
&\quad-2\,u_r\,r_0^2\,M^2-3\,r_0^2\,u_r\,\mathcal{L}^2+i\,r_0\,\mathcal{L}^3\,m+13\,r_0\,u_r\,\mathcal{L}^2\,M\\
&\quad-2\,i\,\mathcal{L}^3\,m\,M-14\,u_r\,\mathcal{L}^2\,M^2)\mathcal{L}\,h_{1\ell m}(t_0,\,r_0)\\
&+\frac{1}{2\,r_0^8}(-4\,r_0^3+4\,\mathcal{E}^2\,r_0^3-i\,r_0^2\,u_r\,\mathcal{L}\,m+8\,r_0^2\,M\\
&\quad+2\,i\,r_0\,u_r\,\mathcal{L}\,m\,M-4\,r_0\,\mathcal{L}^2+8\,\mathcal{L}^2\,M)\mathcal{L}^2\,m\,h_{2\ell m}(t_0,\,r_0)\\
&-\frac{u_r\,\mathcal{E}^2\,\mathcal{L}}{r_0\,(r_0-2\,M)}\,\partial_t h_{0\ell m}(t_0,\,r_0)\\
&-\frac{(-2\,r_0^3+\mathcal{E}^2\,r_0^3+4\,r_0^2\,M-r_0\,\mathcal{L}^2+2\,\mathcal{L}^2\,M)\,\mathcal{L}\,\mathcal{E}}{r_0^4\,(r_0-2\,M)}\,\partial_r h_{0\ell m}(t_0,\,r_0)\\
&-\frac{(\mathcal{E}^2\,r_0^3-r_0\,\mathcal{L}^2+2\,\mathcal{L}^2\,M)\,\mathcal{L}\,\mathcal{E}}{r_0^4\,(r_0-2\,M)}\,\partial_t h_{1\ell m}(t_0,\,r_0)\\
&-\frac{(r_0-2\,M)\,u_r\,(\mathcal{E}^2\,r_0^3-r_0^3+2\,r_0^2\,M-r_0\,\mathcal{L}^2+2\,\mathcal{L}^2\,M)\,\mathcal{L}}{r_0^6}\,\partial_r h_{1\ell m}(t_0,\,r_0)
\end{aligned}
$$

$$-\frac{m\,\mathcal{E}\,u_r\,\mathcal{L}^2}{2\,r_0^4}\,\partial_t h_{2\ell m}(t_0,\,r_0)\Big]\,\partial_\theta\,Y_{\ell m}(\pi/2,\,\phi_0)\,. \tag{0.2}$$