S part outside of the particle location

Here, we summarize the mode decomposition of the S part outside of the particle location. The mode decomposition of the S part under the harmonic gauge is calculated to yield

$$
\begin{aligned}
h^{\mathrm{S,H}}_{0\ell m}(t,\,r) \;&=\; \frac{2}{L}\,\pi\,\mu\biggl[\frac{4\,i\,m\,T\,r_0\,(L^2-2)\,(u^\phi)^2}{\mathcal{L}^{(2)}\,(L^2-1)} - (8\,r_0 - 6\,m^2\,r_0 - 18\,r_0\,L^2 \\
&\quad +4\,r_0\,L^4 - 4\,R - 16\,R\,L - 13\,R\,m^2 - 7\,R\,L^2 + 20\,R\,L^3 + 2\,R\,L^4 - 4\,R\,L^5)u^\phi \\
&\quad /(\mathcal{L}^{(2)}\,(L^2-1)\,(L^2-4))\biggr]\partial_\theta\,Y^*_{\ell m}(\theta_0,\,\phi_0)\,, \\
h^{\mathrm{S,H}}_{1\ell m}(t,\,r) \;&=\; \frac{2}{L}\,\pi\,\mu\biggl[\frac{-2\,i\,r_0\,m\,(2\,r_0+R)\,(u^\phi)^2}{\mathcal{L}^{(2)}\,(L^2-1)}\biggr]\partial_\theta\,Y^*_{\ell m}(\theta_0,\,\phi_0)\,, \\
h^{\mathrm{S,H}}_{2\ell m}(t,\,r) \;&=\; \frac{2}{L}\,\pi\,\mu\biggl[-\frac{1}{6}\,m\,r_0(-192\,R^2\,L + 84\,r_0\,R\,L^2 - 192\,r_0\,R\,L - 1147\,R^2\,L^2 - 456\,r_0^2\,L^2 \\
&\quad +1056\,r_0^2 + 4108\,R^2 - 48\,R^2\,m^2\,L^2 - 288\,r_0\,R\,m^2 - 66\,R^2\,L^4 + 24\,R^2\,L^6 \\
&\quad +1392\,R^2\,m^2 + 240\,r_0\,R\,L^3 - 48\,r_0\,R\,L^5 + 72\,r_0\,R\,L^4 - 48\,R^2\,L^5 + 240\,R^2\,L^3 \\
&\quad +48\,r_0^2\,L^4 + 288\,m^2\,r_0^2 - 1488\,r_0\,R)(u^\phi)^2/(\mathcal{L}^{(4)}\,(L^2-1)\,(L^2-4))\biggr]\partial_\theta\,Y^*_{\ell m}(\theta_0,\,\phi_0)\,, \\
H^{\mathrm{S,H}}_{0\ell m}(t,\,r) \;&=\; \frac{2}{L}\,\pi\,\mu\biggl[\frac{1}{4}(144\,m^2\,r_0 - 170\,r_0\,L^4 + 614\,r_0\,L^2 + 12\,r_0\,L^6 + 4\,r_0\,m^2\,L^4 \\
&\quad -52\,r_0\,m^2\,L^2 - 62\,R\,m^2\,L^2 + 2\,R\,m^2\,L^4 + 432\,R\,L - 529\,R\,L^2 - 588\,R\,L^3 \\
&\quad +396\,R\,m^2 + 143\,R\,L^4 + 168\,R\,L^5 - 10\,R\,L^6 - 12\,R\,L^7 + 40\,R\,m^4 - 504\,r_0 + 468\,R)(u^\phi)^2 \\
&\quad /((L^2-1)\,(L^2-4)\,(L^2-9)) - \frac{2\,i\,T\,m\,u^\phi}{r_0} \\
&\quad +\frac{1}{4}\,\frac{(R + 8\,R\,L - 8\,R\,L^3 + 2\,r_0)\,M}{r_0^3\,(L^2-1)} + \frac{(2\,r_0 - R - 2\,R\,L)}{r_0^2}\biggr]Y^*_{\ell m}(\theta_0,\,\phi_0)\,, \\
H^{\mathrm{S,H}}_{1\ell m}(t,\,r) \;&=\; \frac{2}{L}\,\pi\,\mu\biggl[-2\frac{T\,(-108 - 20\,m^4 + 111\,L^2 - 234\,m^2 + 44\,m^2\,L^2 - 2\,m^2\,L^4 - 29\,L^4 + 2\,L^6)\,(u^\phi)^2}{(L^2-1)\,(L^2-4)\,(L^2-9)} \\
&\quad +\frac{2\,i\,(2\,r_0 - R)\,m\,u^\phi}{(L^2-1)\,r_0} + \frac{4\,T\,M}{r_0^3}\biggr]Y^*_{\ell m}(\theta_0,\,\phi_0)\,, \\
H^{\mathrm{S,H}}_{2\ell m}(t,\,r) \;&=\; \frac{2}{L}\,\pi\,\mu\biggl[-\frac{1}{4}(-576\,m^2\,r_0 - 70\,r_0\,L^4 + 378\,r_0\,L^2 + 4\,r_0\,L^6 - 4\,r_0\,m^2\,L^4 \\
&\quad +100\,r_0\,m^2\,L^2 + 134\,R\,m^2\,L^2 - 2\,R\,m^2\,L^4 + 144\,R\,L + 241\,R\,L^2 - 196\,R\,L^3 \\
&\quad -1044\,R\,m^2 - 39\,R\,L^4 + 56\,R\,L^5 + 2\,R\,L^6 - 4\,R\,L^7 - 40\,R\,m^4 - 648\,r_0 - 468\,R) \\
&\quad (u^\phi)^2/((L^2-1)\,(L^2-4)\,(L^2-9)) - \frac{2\,i\,T\,m\,u^\phi}{r_0} \\
&\quad +\frac{1}{4}\,\frac{(R + 8\,R\,L - 8\,R\,L^3 + 2\,r_0)\,M}{r_0^3\,(L^2-1)} + \frac{(2\,r_0 - R - 2\,R\,L)}{r_0^2}\biggr]Y^*_{\ell m}(\theta_0,\,\phi_0)\,, \\
h^{\mathrm{(e)S,H}}_{0\ell m}(t,\,r) \;&=\; \frac{2}{L}\,\pi\,\mu\biggl[T(-828\,m^2\,r_0 + 106\,r_0\,L^4 - 314\,r_0\,L^2 - 8\,r_0\,L^6 - 120\,r_0\,m^4 \\
&\quad +48\,R\,m^4\,L^2 + 288\,R\,m^2\,L + 112\,R\,m^2\,L^5 - 392\,R\,m^2\,L^3 + 8\,r_0\,m^2\,L^6 - 8\,R\,m^2\,L^7 \\
&\quad +4\,R\,m^2\,L^6 - 100\,r_0\,m^2\,L^4 + 344\,r_0\,m^2\,L^2 + 172\,R\,m^2\,L^2 - 50\,R\,m^2\,L^4 - 941\,R\,L^2 \\
&\quad -414\,R\,m^2 + 277\,R\,L^4 - 20\,R\,L^6 - 612\,R\,m^4 + 72\,r_0 + 612\,R)(u^\phi)^2 \\
&\quad /(2\,\mathcal{L}^{(2)}\,(L^2-1)\,(L^2-4)\,(L^2-9)) \\
&\quad +i(8\,R^2\,L^6 - 16\,r_0\,R\,L^5 + 8\,r_0\,R\,L^4 + 16\,r_0^2\,L^4 - 46\,R^2\,L^4 + 80\,r_0\,R\,L^3 - 52\,r_0\,R\,L^2 \\
&\quad +55\,R^2\,L^2 - 56\,r_0^2\,L^2 - 64\,r_0\,R\,L + 16\,r_0\,R\,m^2 - 32\,r_0^2 + 40\,R^2\,m^2 + 4\,R^2 \\
&\quad +80\,r_0\,R)\,m\,u^\phi/(4\,r_0\,\mathcal{L}^{(2)}\,(L^2-1)\,(L^2-4)) \\
&\quad +\frac{T\,(2\,r_0 - R)\,M}{r_0^3\,\mathcal{L}^{(2)}}\biggr]Y^*_{\ell m}(\theta_0,\,\phi_0)\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h^{(\mathrm{e})\mathrm{S,H}}_{1\ell m}(t,\,r) \;=\; & \frac{2}{L}\,\pi\,\mu\Big[-(-260\,r_0\,R\,L^2+993\,R^2\,L^2-104\,r_0^2\,L^2+288\,r_0^2-756\,R^2 \\
& -464\,r_0\,R\,m^2\,L^2+560\,r_0\,R\,m^4+8\,r_0\,R\,m^2\,L^4-16\,R^2\,m^4\,L^2-8\,R^2\,m^2\,L^6 \\
& -388\,R^2\,m^2\,L^2+102\,R^2\,m^2\,L^4+160\,m^4\,r_0^2+3528\,r_0\,R\,m^2-281\,R^2\,L^4 \\
& +20\,R^2\,L^6+1062\,R^2\,m^2+20\,r_0\,R\,L^4+684\,R^2\,m^4+8\,r_0^2\,L^4-352\,r_0^2\,m^2\,L^2 \\
& +1872\,m^2\,r_0^2+720\,r_0\,R+16\,r_0^2\,m^2\,L^4)(u^\phi)^2 \\
& /(4\,\mathcal{L}^{(2)}\,(L^2-1)\,(L^2-4)\,(L^2-9))\Big]\,Y^*_{\ell m}(\theta_0,\,\phi_0)\,, \\
K^{\mathrm{S,H}}_{\ell m}(t,\,r) \;=\; & \frac{2}{L}\,\pi\,\mu\Big[\frac{1}{192}(-648\,m^2\,r_0-144\,R\,L^9-120\,R\,L^8+144\,r_0\,L^8+9438\,r_0\,L^4 \\
& -15402\,r_0\,L^2-2172\,r_0\,L^6+960\,r_0\,m^4-288\,R\,m^4\,L^2-6912\,R\,m^2\,L \\
& -2688\,R\,m^2\,L^5+9408\,R\,m^2\,L^3-144\,r_0\,m^2\,L^6+192\,R\,m^2\,L^7+120\,R\,m^2\,L^6 \\
& +1764\,r_0\,m^2\,L^4-4140\,r_0\,m^2\,L^2+6462\,R\,m^2\,L^2-1758\,R\,m^2\,L^4-7056\,R\,L \\
& +16455\,R\,L^2+14788\,R\,L^3-3240\,R\,m^2-9453\,R\,L^4-9800\,R\,L^5+1938\,R\,L^6 \\
& +2212\,R\,L^7+7272\,R\,m^4+12744\,r_0-7884\,R)(2\,L-1)\,(2\,L+1)\,(u^\phi)^2 \\
& /(\mathcal{L}^{(4)}\,(L^2-1)\,(L^2-4)\,(L^2-9))-\frac{2\,i\,T\,m\,u^\phi}{r_0} \\
& +\frac{1}{4}\,\frac{(R+8\,R\,L-8\,R\,L^3+2\,r_0)\,M}{r_0^3\,(L^2-1)}+\frac{(2\,r_0-R-2\,R\,L)}{r_0^2}\Big]\,Y^*_{\ell m}(\theta_0,\,\phi_0)\,, \\
G^{\mathrm{S,H}}_{\ell m}(t,\,r) \;=\; & \frac{2}{L}\,\pi\,\mu\Big[\frac{1}{48}(29052\,R^3+496\,R^3\,L^{10}-8064\,r_0^3\,m^2\,L^2+28200\,R^3\,m^4-2592\,r_0^2\,R\,m^2 \\
& +15536\,r_0^2\,R\,L^3+13416\,r_0^2\,R\,L^2+16704\,r_0^2\,R\,m^4-384\,r_0^3\,m^2\,L^6 \\
& +4416\,r_0^3\,m^2\,L^4-192\,r_0^2\,R\,L^9-96\,r_0^2\,R\,L^8+2864\,r_0^2\,R\,L^7+1560\,r_0^2\,R\,L^6 \\
& -11872\,r_0^2\,R\,L^5-32\,R^3\,L^{11}-7680\,r_0^2\,R\,L^4-6336\,r_0^2\,R\,L+43266\,r_0\,R^2\,L^2 \\
& +40464\,r_0\,R^2\,m^4+39816\,R^3\,L+384\,r_0^2\,R\,m^2\,L^7+2430\,R^3\,L^7+96\,r_0\,R^2\,L^{10} \\
& -42674\,R^3\,L^3+80\,R^3\,L^9-6360\,R^3\,L^8+192\,r_0^2\,R\,m^2\,L^6+8742\,r_0\,R^2\,L^6 \\
& -24816\,r_0\,R^2\,L^4-5376\,r_0^2\,R\,m^2\,L^5+20732\,R^3\,L^4-1584\,r_0\,R^2\,L^8 \\
& -2784\,r_0^2\,R\,m^2\,L^4+18816\,r_0^2\,R\,m^2\,L^3+9792\,r_0^2\,R\,m^2\,L^2+15423\,R^3\,L^6 \\
& -13824\,r_0^2\,R\,m^2\,L+62856\,r_0\,R^2\,m^2-53168\,r_0\,R^2\,L^3-3632\,r_0\,R^2\,L^7 \\
& -56895\,R^3\,L^2-772\,R^3\,L^5-112644\,R^3\,m^2+22624\,r_0\,R^2\,L^5+1920\,r_0^3\,m^4 \\
& -1104\,r_0^3\,L^2-28296\,r_0\,R^2+192\,r_0^3\,L^8+33984\,r_0\,R^2\,L+7488\,r_0^3\,L^4 \\
& -2544\,r_0^3\,L^6-8144\,R^3\,m^2\,L^3-19020\,R^3\,m^2\,L^4+100104\,R^3\,m^2\,L^2 \\
& +192\,r_0\,R^2\,L^9-4416\,r_0\,R^2\,m^4\,L^2-1560\,R^3\,m^2\,L^6-976\,R^3\,m^2\,L^7 \\
& -9480\,r_0\,R^2\,m^2\,L^4-11088\,r_0\,R^2\,m^2\,L^2-192\,r_0\,R^2\,m^2\,L^8-9184\,R^3\,m^4\,L^2 \\
& -18720\,R^3\,m^2\,L-1536\,r_0^2\,R\,m^4\,L^2+4736\,R^3\,m^2\,L^5-10048\,R^3\,m^4\,L \\
& -18816\,r_0\,R^2\,m^2\,L^3+288\,R^3\,m^2\,L^8+2832\,r_0\,R^2\,m^2\,L^6+64\,R^3\,m^2\,L^9 \\
& +256\,R^3\,m^4\,L^4-128\,R^3\,m^4\,L^3+5376\,r_0\,R^2\,m^2\,L^5+13824\,r_0\,R^2\,m^2\,L-1728\,r_0^3 \\
& -6048\,r_0^2\,R-384\,r_0\,R^2\,m^2\,L^7-5184\,r_0^3\,m^2)(u^\phi)^2 \\
& /(r_0^2\,\mathcal{L}^{(4)}\,(L^2-1)\,(L^2-4)\,(L^2-9))\Big]\,Y^*_{\ell m}(\theta_0,\,\phi_0)\,. \qquad (0.1)
\end{aligned}
$$

The r-component of the S-force in the harmonic gauge is

$$
\begin{aligned}
F^{r(+)}_{\mathrm{S,H}}\Big|_\ell \;=\; \sum_m \frac{2\,\pi\,\mu^2}{L}\Big[\Big(& -\frac{2\,L+1}{2\,r_0^2}-\frac{M\,(10\,L^3-11\,L^2-10\,L+17)}{4\,r_0^3\,(L^2-1)} \\
& +\frac{M\,(64\,L^5-28\,L^4-320\,L^3+695\,L^2+256\,L-442)\,m^2}{16\,r_0^3\,\mathcal{L}^{(2)}\,(L^2-1)(L^2-4)} \\
& -\frac{M\,(156\,L^2-179)\,m^4}{4\,r_0^3\,\mathcal{L}^{(2)}\,(L^2-1)(L^2-4)(L^2-9)}\Big)\,|Y_{\ell m}(\theta_0,\,\phi_0)|^2
\end{aligned}
$$

$$+\left(\frac{13\,M\,m^2}{r_0^3\,\mathcal{L}^{(2)}\,(L^2-1)(L^2-4)}\right.$$
$$\left.+\frac{M\,(2\,L+1)(2\,L^2-2\,L-1)}{r_0^3\,\mathcal{L}^{(2)}\,(L^2-1)}\right)|\partial_\theta\,Y_{\ell m}(\theta_0,\,\phi_0)|^2\Big]\,. \tag{0.2}$$

The generators of the gauge transformation from the harmonic gauge to the RW gauge is given as

$$\begin{aligned}
M_{0\ell m}^{\mathrm{S,H}\to\mathrm{RW}}(t,\,r) \;=\; & \frac{2}{L}\,\pi\,\mu\Big[-T(-828\,m^2\,r_0+106\,r_0\,L^4-314\,r_0\,L^2-8\,r_0\,L^6-120\,r_0\,m^4\\
&+48\,R\,m^4\,L^2+288\,R\,m^2\,L+112\,R\,m^2\,L^5-392\,R\,m^2\,L^3+8\,r_0\,m^2\,L^6-8\,R\,m^2\,L^7\\
&+4\,R\,m^2\,L^6-100\,r_0\,m^2\,L^4+344\,r_0\,m^2\,L^2+172\,R\,m^2\,L^2-50\,R\,m^2\,L^4-941\,R\,L^2\\
&-414\,R\,m^2+277\,R\,L^4-20\,R\,L^6-612\,R\,m^4+72\,r_0+612\,R)(u^\phi)^2\\
&/(2\,\mathcal{L}^{(2)}\,(L^2-1)\,(L^2-4)\,(L^2-9))-i(8\,R^2\,L^6\\
&-16\,r_0\,R\,L^5+8\,r_0\,R\,L^4+16\,r_0^2\,L^4-46\,R^2\,L^4+80\,r_0\,R\,L^3-52\,r_0\,R\,L^2\\
&+55\,R^2\,L^2-56\,r_0^2\,L^2-64\,r_0\,R\,L+16\,r_0\,R\,m^2-32\,r_0^2+40\,R^2\,m^2+4\,R^2\\
&+80\,r_0\,R)\,m\,u^\phi/(4\,r_0\,\mathcal{L}^{(2)}\,(L^2-1)\,(L^2-4))\\
&-\frac{T\,(2\,r_0-R)\,M}{r_0^3\,\mathcal{L}^{(2)}}\Big]Y_{\ell m}^*(\theta_0,\,\phi_0)\,,\\
M_{1\ell m}^{\mathrm{S,H}\to\mathrm{RW}}(t,\,r) \;=\; & \frac{2}{L}\,\pi\,\mu\Big[-\frac{1}{96}(-249048\,R^2\,L-144684\,r_0\,R\,L^2-55296\,r_0\,R\,L+55971\,R^2\,L^2\\
&+96\,L^8\,r_0^2-25944\,r_0^2\,L^2+6336\,r_0^2\,L+21600\,r_0^2-8748\,R^2-2864\,r_0^2\,L^7\\
&-15536\,L^3\,r_0^2-107136\,r_0\,R\,m^2\,L^2-84096\,r_0\,R\,m^4+36096\,r_0\,R\,m^2\,L^4\\
&+29472\,R^2\,m^4\,L^2-9720\,R^2\,m^2\,L^6-312192\,R^2\,m^2\,L^2+112584\,R^2\,m^2\,L^4\\
&-8064\,m^4\,r_0^2+384\,m^4\,L^3\,R^2+80880\,m^2\,L^3\,R^2-1536\,m^4\,L^2\,r_0\,R\\
&+14688\,m^2\,L\,R^2+30144\,m^4\,L\,R^2-30336\,m^2\,L^5\,R^2+1536\,r_0\,L^7\,R\\
&-21084\,r_0\,L^6\,R+192\,r_0^2\,L^9+69984\,r_0\,R\,m^2+5742\,R^2\,L^4-74973\,R^2\,L^6\\
&+146448\,R^2\,m^2+75264\,r_0\,R\,L^3-21504\,r_0\,R\,L^5+72312\,r_0\,R\,L^4+4374\,L^7\,R^2\\
&-76308\,R^2\,L^5+325158\,R^2\,L^3-226224\,R^2\,m^4+96\,R^2\,L^{11}-192\,R^2\,m^2\,L^9\\
&+96\,R^2\,m^2\,L^8+384\,r_0\,R\,m^2\,L^8+11872\,r_0^2\,L^5+10608\,r_0^2\,L^4-1752\,r_0^2\,L^6\\
&-73728\,r_0^2\,m^2\,L^2+25032\,L^8\,R2+3360\,L^8\,r_0\,R-816\,L^9\,R^2-192\,L^{10}\,r_0\,R\\
&-1872\,L^{10}\,R^2+103680\,m^2\,r_0^2-6240\,r_0\,m^2\,L^6\,R+107568\,r_0\,R+4080\,m^2\,L^7\,R^2\\
&-384\,m^4\,L^4\,R^2+13824\,r_0^2\,m^2\,L+12096\,r_0^2\,m^2\,L^4-18816\,r_0^2\,m^2\,L^3\\
&-384\,m^2\,r_0^2\,L^7-576\,m^2\,r_0^2\,L^6-2304\,m^4\,r_0^2\,L^2+5376\,r_0^2\,m^2\,L^5)(u^\phi)^2\\
&/(\mathcal{L}^{(4)}\,(L^2-1)\,(L^2-4)\,(L^2-9))\Big]Y_{\ell m}^*(\theta_0,\,\phi_0)\,,\\
M_{2\ell m}^{\mathrm{S,H}\to\mathrm{RW}}(t,\,r) \;=\; & \frac{2}{L}\,\pi\,\mu\Big[-\frac{1}{96}(-18036\,R^3+48\,R^3\,L^{10}-8064\,r_0^3\,m^2\,L^2+30792\,R^3\,m^4\\
&-12960\,r_0^2\,R\,m^2+15536\,r_0^2\,R\,L^3+11208\,r_0^2\,R\,L^2+20544\,r_0^2\,R\,m^4\\
&-384\,r_0^3\,m^2\,L^6+4416\,r_0^3\,m^2\,L^4-192\,r_0^2\,R\,L^9+288\,r_0^2\,R\,L^8+2864\,r_0^2\,R\,L^7\\
&-3528\,r_0^2\,R\,L^6-11872\,r_0^2\,R\,L^5-32\,R^3\,L^{11}+7296\,r_0^2\,R\,L^4-6336\,r_0^2\,R\,L\\
&+68994\,r_0\,R^2\,L^2+75792\,r_0\,R^2\,m^4+47304\,R^3\,L+384\,r_0^2\,R\,m^2\,L^7-5746\,R^3\,L^7\\
&+96\,r_0\,R^2\,L^{10}-70146\,R^3\,L^3+656\,R^3\,L^9-216\,R^3\,L^8-576\,r_0^2\,R\,m^2\,L^6\\
&+9318\,r_0\,R^2\,L^6-32688\,r_0\,R^2\,L^4-5376\,r_0^2\,R\,m^2\,L^5+14460\,R^3\,L^4\\
&-1584\,r_0\,R^2\,L^8+6048\,r_0^2\,R\,m^2\,L^4+18816\,r_0^2\,R\,m^2\,L^3-6336\,r_0^2\,R\,m^2\,L^2\\
&-3597\,R^3\,L^6-13824\,r_0^2\,R\,m^2\,L+52488\,r_0\,R^2\,m^2-22096\,r_0\,R^2\,L^3\\
&+2096\,r_0\,R^2\,L^7+5757\,R^3\,L^2+29116\,R^3\,L^5+29484\,R^3\,m^2-1120\,r_0\,R^2\,L^5\\
&+1920\,r_0^3\,m^4-1104\,r_0^3\,L^2-42120\,r_0\,R^2+192\,r_0^3\,L^8+21312\,r_0\,R^2\,L\\
&+7488\,r_0^3\,L^4-2544\,r_0^3\,L^6+11088\,R^3\,m^2\,L^3-9084\,R^3\,m^2\,L^4+2664\,R^3\,m^2\,L^2\\
&-192\,r_0\,R^2\,L^9-7488\,r_0\,R^2\,m^4\,L^2+1800\,R^3\,m^2\,L^6-1040\,R^3\,m^2\,L^7
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-10632\,r_0\,R^2\,m^2\,L^4+432\,r_0\,R^2\,m^2\,L^2-192\,r_0\,R^2\,m^2\,L^8-12000\,R^3\,m^4\,L^2\\
&-62208\,R^3\,m^2\,L-1536\,r_0^2\,R\,m^4\,L^2+3712\,R^3\,m^2\,L^5-57088\,R^3\,m^4\,L\\
&+18816\,r_0\,R^2\,m^2\,L^3-96\,R^3\,m^2\,L^8+2832\,r_0\,R^2\,m^2\,L^6+64\,R^3\,m^2\,L^9\\
&+768\,R^3\,m^4\,L^4+5632\,R^3\,m^4\,L^3-5376\,r_0\,R^2\,m^2\,L^5-13824\,r_0\,R^2\,m^2\,L\\
&-1728\,r_0^3-9504\,r_0^2\,R+384\,r_0\,R^2\,m^2\,L^7-5184\,r_0^3\,m^2)(u^\phi)^2\\
&/(\mathcal{L}^{(4)}\,(L^2-1)\,(L^2-4)\,(L^2-9))\Big]\,Y^*_{\ell m}(\theta_0,\,\phi_0)\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Lambda^{\rm S,H\to RW}_{\ell m}(t,\,r) \;=\;& \frac{2}{L}\,\pi\,\mu\Big[-\frac{1}{12}\,i(-192\,R^2\,L+84\,r_0\,R\,L^2-192\,r_0\,R\,L-1147\,R^2\,L^2-456\,r_0^2\,L^2\\
&+1056\,r_0^2+4108\,R^2-48\,R^2\,m^2\,L^2-288\,r_0\,R\,m^2-66\,R^2\,L^4+24\,R^2\,L^6\\
&+1392\,R^2\,m^2+240\,r_0\,R\,L^3-48\,r_0\,R\,L^5+72\,r_0\,R\,L^4-48\,R^2\,L^5+240\,R^2\,L^3\\
&+48\,r_0^2\,L^4+288\,m^2\,r_0^2-1488\,r_0\,R)r_0\,m\,(u^\phi)^2\\
&/(\mathcal{L}^{(4)}\,(L^2-1)\,(L^2-4))\Big]\,\partial_\theta\,Y^*_{\ell m}(\theta_0,\,\phi_0)\,. \qquad (0.3)
\end{aligned}
$$

Finally, we obtain the S part of the metric perturbation in the RW gauge as

$$
\begin{aligned}
h^{\rm S,RW}_{0\ell m}(t,\,r) \;=\;& \frac{2}{L}\,\pi\,\mu\Big[\frac{4\,i\,m\,T\,r_0\,(L^2-2)\,(u^\phi)^2}{\mathcal{L}^{(2)}\,(L^2-1)}-(8\,r_0-6\,m^2\,r_0-18\,r_0\,L^2\\
&+4\,r_0\,L^4-4\,R-16\,R\,L-13\,R\,m^2-7\,R\,L^2+20\,R\,L^3+2\,R\,L^4-4\,R\,L^5)u^\phi\\
&/(\mathcal{L}^{(2)}\,(L^2-1)\,(L^2-4))\Big]\,\partial_\theta\,Y^*_{\ell m}(\theta_0,\,\phi_0)\,,\\
h^{\rm S,RW}_{1\ell m}(t,\,r) \;=\;& \frac{2}{L}\,\pi\,\mu\Big[\frac{1}{3}\,i\,r_0\,m(216\,m^2\,r_0-60\,r_0\,L^3-6\,r_0\,L^4-174\,r_0\,L^2+48\,L\,r_0\\
&+12\,r_0\,L^5+24\,R\,m^2\,L^2+881\,R\,L^2-984\,R\,m^2+39\,R\,L^4-12\,R\,L^6+792\,r_0\\
&-3380\,R)(u^\phi)^2/(\mathcal{L}^{(4)}\,(L^2-1)\,(L^2-4))\Big]\,\partial_\theta\,Y^*_{\ell m}(\theta_0,\,\phi_0)\,,\\
H^{\rm S,RW}_{0\ell m}(t,\,r) \;=\;& \frac{2}{L}\,\pi\,\mu\Big[\frac{1}{16}(13104\,m^2\,r_0-48\,R\,L^9-40\,R\,L^8+48\,r_0\,L^8+930\,r_0\,L^4+2394\,r_0\,L^2\\
&-564\,r_0\,L^6+1920\,r_0\,m^4-608\,R\,m^4\,L^2-4608\,R\,m^2\,L-1792\,R\,m^2\,L^5\\
&+6272\,R\,m^2\,L^3-112\,r_0\,m^2\,L^6+128\,R\,m^2\,L^7-56\,R\,m^2\,L^6+1388\,r_0\,m^2\,L^4\\
&-4876\,r_0\,m^2\,L^2-1106\,R\,m^2\,L^2+550\,R\,m^2\,L^4-432\,R\,L+17457\,R\,L^2\\
&+2316\,R\,L^3+6228\,R\,m^2-6691\,R\,L^4-2520\,R\,L^5+902\,R\,L^6+684\,R\,L^7\\
&+9752\,R\,m^4-648\,r_0-10260\,R)(u^\phi)^2\\
&/(\mathcal{L}^{(2)}\,(L^2-1)\,(L^2-4)\,(L^2-9))\\
&-\frac{1}{16}\,\frac{(-62\,r_0+56\,r_0\,L^2+33\,R+8\,R\,L-36\,R\,L^2-40\,R\,L^3+32\,R\,L^5)\,M}{r_0^3\,\mathcal{L}^{(2)}\,(L^2-1)}\\
&-\frac{2\,i\,T\,m\,u^\phi}{r_0}+\frac{(2\,r_0-R-2\,R\,L)}{r_0^2}\Big]\,Y^*_{\ell m}(\theta_0,\,\phi_0)\,,\\
H^{\rm S,RW}_{1\ell m}(t,\,r) \;=\;& \frac{2}{L}\,\pi\,\mu\Big[-T(360-296\,m^4-742\,L^2-90\,m^2-404\,m^2\,L^2+64\,m^2\,L^4\\
&-196\,m^2\,L^3+56\,m^2\,L^5+4\,L^8+375\,L^4-69\,L^6+144\,m^2\,L-16\,m^4\,L^2-4\,m^2\,L^7\\
&-2\,m^2\,L^6)(u^\phi)^2/(\mathcal{L}^{(2)}\,(L^2-1)\,(L^2-4)\,(L^2-9))\\
&+i\,m(-4\,R\,L^6+21\,R\,L^4-19\,R\,L^2-4\,R-20\,R\,m^2+4\,r_0\,L^5+2\,r_0\,L^4\\
&-20\,r_0\,L^3-4\,r_0\,L^2+16\,L\,r_0-16\,r_0-4\,m^2\,r_0)u^\phi\\
&/(r_0\,\mathcal{L}^{(2)}\,(L^2-1)\,(L^2-4))+\frac{4\,T\,L^2\,M}{r_0^3\,\mathcal{L}^{(2)}}\Big]\,Y^*_{\ell m}(\theta_0,\,\phi_0)\,,\\
H^{\rm S,RW}_{2\ell m}(t,\,r) \;=\;& \frac{2}{L}\,\pi\,\mu\Big[\frac{1}{64}(-192\,R\,L^{11}+4960\,R\,L^{10}-448\,r_0\,m^2\,L^8-88128\,m^2\,r_0+1120\,R\,L^9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-66048\,R\,L^8 - 3200\,r_0\,L^8 + 512\,R\,m^2\,L^9 + 192\,r_0\,L^{10} - 80384\,R\,m^4\,L \\
&-224\,R\,m^2\,L^8 + 1664\,R\,m^4\,L^4 - 1024\,R\,m^4\,L^3 - 100352\,r_0\,L^3 - 70298\,r_0\,L^4 \\
&+163590\,r_0\,L^2 + 19228\,r_0\,L^6 + 112128\,r_0\,m^4 + 73728\,L\,r_0 + 28672\,r_0\,L^5 \\
&-80192\,R\,m^4\,L^2 - 39168\,R\,m^2\,L + 80896\,R\,m^2\,L^5 - 215680\,R\,m^2\,L^3 \\
&+2048\,m^4\,L^2\,r_0 + 6560\,r_0\,m^2\,L^6 - 2048\,L^7\,r_0 - 10880\,R\,m^2\,L^7 + 23696\,R\,m^2\,L^6 \\
&-34876\,r_0\,m^2\,L^4 + 118908\,r_0\,m^2\,L^2 + 789546\,R\,m^2\,L^2 - 278142\,R\,m^2\,L^4 \\
&+662832\,R\,L - 170145\,R\,L^2 - 859564\,R\,L^3 - 381132\,R\,m^2 + 2167\,R\,L^4 \\
&+192840\,R\,L^5 + 194494\,R\,L^6 - 6252\,R\,L^7 + 603624\,R\,m^4 - 137592\,r_0 + 27540\,R)(u^\phi)^2 \\
&/(\mathcal{L}^{(4)}\,(L^2-1)\,(L+2)\,(L-2)\,(L-3)\,(L+3)) - \frac{2\,i\,T\,m\,u^\phi}{r_0} \\
&+\frac{1}{4}\,\frac{(R + 8\,R\,L - 8\,R\,L^3 + 2\,r_0)\,M}{r_0^3\,(L^2-1)} + \frac{(2\,r_0 - R - 2\,R\,L)}{r_0^2}\Bigg]\,Y^*_{\ell m}(\theta_0,\,\phi_0)\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K^{\rm S,RW}_{\ell m}(t,\,r) \;=\; \frac{2}{L}\,\pi\,\mu\Bigg[&\frac{1}{192}(-576\,R\,L^{11} + 288\,R\,L^{10} - 576\,r_0\,m^2\,L^8 - 414072\,m^2\,r_0 + 9760\,R\,L^9 \\
&-5184\,R\,L^8 - 9216\,r_0\,L^8 + 768\,R\,m^2\,L^9 + 576\,r_0\,L^{10} - 1056\,R\,m^2\,L^8 \\
&-1152\,R\,m^4\,L^4 - 768\,r_0\,L^9 + 62144\,r_0\,L^3 - 113478\,r_0\,L^4 + 170154\,r_0\,L^2 \\
&+46932\,r_0\,L^6 + 31296\,r_0\,m^4 - 25344\,L\,r_0 - 47488\,r_0\,L^5 + 75264\,m^2\,L^3\,r_0 \\
&+26304\,R\,m^4\,L^2 + 62208\,R\,m^2\,L + 61824\,R\,m^2\,L^5 - 112320\,R\,m^2\,L^3 \\
&+13056\,m^4\,L^2\,r_0 + 9504\,r_0\,m^2\,L^6 - 55296\,m^2\,r_0\,L + 11456\,L^7\,r_0 \\
&-21504\,m^2\,L^5\,r_0 - 12480\,R\,m^2\,L^7 + 15504\,R\,m^2\,L^6 - 66708\,r_0\,m^2\,L^4 \\
&+296460\,r_0\,m^2\,L^2 + 114210\,R\,m^2\,L^2 - 68394\,R\,m^2\,L^4 + 253584\,R\,L \\
&+426969\,R\,L^2 - 406212\,R\,L^3 + 138024\,R\,m^2 - 171543\,R\,L^4 + 202456\,R\,L^5 \\
&+37578\,R\,L^6 - 59012\,R\,L^7 + 296856\,R\,m^4 + 1536\,r_0\,m^2\,L^7 - 99144\,r_0 - 335988\,R)(u^\phi)^2 \\
&/(\mathcal{L}^{(4)}\,(L^2-1)\,(L^2-4)\,(L^2-9)) \\
&-\frac{2\,i\,T\,m\,u^\phi}{r_0} + \frac{1}{4}\,\frac{(R + 8\,R\,L - 8\,R\,L^3 + 2\,r_0)\,M}{r_0^3\,(L^2-1)} + \frac{(2\,r_0 - R - 2\,R\,L)}{r_0^2}\Bigg]\,Y^*_{\ell m}(\theta_0,\,\phi_0)\,. \qquad (0.4)
\end{aligned}
$$

Then, the r-component of the S-force in the RW gauge is given by

$$
\begin{aligned}
F^{r(+)}_{\rm S,RW}\Big|_\ell \;=\; \sum_m \frac{2\,\pi\,\mu^2}{L}\Bigg[\Bigg(&-\frac{2\,L+1}{2\,r_0^2} - \frac{M\,(10\,L^3 - 11\,L^2 - 10\,L + 17)}{4\,r_0^3\,(L^2-1)} \\
&+\frac{M\,(64\,L^5 - 28\,L^4 - 320\,L^3 + 695\,L^2 + 256\,L - 442)\,m^2}{16\,r_0^3\,\mathcal{L}^{(2)}\,(L^2-1)(L^2-4)} \\
&-\frac{M\,(156\,L^2 - 179)\,m^4}{4\,r_0^3\,\mathcal{L}^{(2)}\,(L^2-1)(L^2-4)(L^2-9)}\Bigg)\,|Y_{\ell m}(\theta_0,\,\phi_0)|^2 \\
+\Bigg(&\frac{13\,M\,m^2}{r_0^3\,\mathcal{L}^{(2)}\,(L^2-1)(L^2-4)} \\
&+\frac{M\,(2\,L+1)(2\,L^2 - 2\,L - 1)}{r_0^3\,\mathcal{L}^{(2)}\,(L^2-1)}\Bigg)\,|\partial_\theta\,Y_{\ell m}(\theta_0,\,\phi_0)|^2\Bigg]\,. \qquad (0.5)
\end{aligned}
$$