Orbifold Family Unification on 6Dimensions

後藤裕平 （信州大）

共同研究者:川村嘉春(信州大) 、三浦貴司(神戸大)

(Y. Goto, Y. Kawamura, and T. Miura, arXiv:1307.2631 [hep-ph])

1、Introduction

本研究の目的

6次元時空$M^4\times(T^2/Z_M)$上でのSU(N)ゲージ理論において、世代・フレーバー数の統一の可能性を探求する.

標準模型における未解決の問題

- ・階層性問題
- ・自然さの問題
- ・世代数の問題 ➡ 高次元理論でうまくいく? *[1]
- ・暗黒物質の存在

etc…

・高次元理論のメリット

ミラー粒子を含む余分な物質を余剰次元による対称性の破れにより排除できる.

2、Z_M orbifold breaking

T^2:2次元格子の構成 $(z\to z+e_1,\ z\to z+e_2)$

Z_M変換:$Z\to\rho Z$ $(\rho^M=1、\rho=e^{2\pi i/M})$

T^2/Z_Nの性質 *[2]

N	Basis vectors	Rep. matrices	Transformation properties
2	$1,i$	$P_0,\ P_1,\ P_2$	$z\to -z,\ z\to e_1-z,\ z\to e_2-z$
3	$1,e^{2\pi i/3}$	$\Theta_0,\ \Theta_1$	$z\to e^{2\pi i/3}z,\ z\to e^{2\pi i/3}z+e_1$
4	$1,i$	$Q_0,\ P_1$	$z\to iz,\ z\to e_1-z$
6	$1,(-3+i\sqrt{3})/2$	$\Xi_0,\ P_1$	$z\to e^{\pi i/3}z,\ z\to e_1-z$

ex) T^2/Z_2の場合

$$\Phi(x,-z)=T_\Phi[P_0]\Phi(x,z)$$
$$\Phi(x,e_1-z)=T_\Phi[P_1]\Phi(x,z)$$
$$\Phi(x,e_2-z)=T_\Phi[P_2]\Phi(x,z)$$

($T_\Phi[P_i]$:表現行列)

$$P_0=\mathrm{diag}([+1]_{p_1},[+1]_{p_2},[+1]_{p_3},[+1]_{p_4},[-1]_{p_5},[-1]_{p_6},[-1]_{p_7},[-1]_{p_8})$$
$$P_1=\mathrm{diag}([+1]_{p_1},[+1]_{p_2},[-1]_{p_3},[-1]_{p_4},[+1]_{p_5},[+1]_{p_6},[-1]_{p_7},[-1]_{p_8})$$
$$P_2=\mathrm{diag}([+1]_{p_1},[-1]_{p_2},[+1]_{p_3},[-1]_{p_4},[+1]_{p_5},[-1]_{p_6},[+1]_{p_7},[-1]_{p_8})$$

表現行列$T_\Phi[P_i]$の固有値→Z_2パリティ

奇パリティを含む→ゼロモードなし

偶パリティのみ →ゼロモードあり

↳ 4次元massless場

➡ **Orbifold breaking mechanism**

・考える場

6次元Diracフェルミオン(スピン1/2)

=異なるカイラリティを持つWeylフェルミオン

$$\begin{cases}\Psi_+=\dfrac{1+\Gamma_7}{2}\Psi=\begin{pmatrix}\frac{1-\gamma_5}{2} & 0\\ 0 & \frac{1+\gamma_5}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi^1\\ \Psi^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Psi^1_L\\ \Psi^2_R\end{pmatrix}\\ \Psi_-=\dfrac{1-\Gamma_7}{2}\Psi=\begin{pmatrix}\frac{1+\gamma_5}{2} & 0\\ 0 & \frac{1-\gamma_5}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi^1\\ \Psi^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Psi^1_R\\ \Psi^2_L\end{pmatrix}\end{cases}$$

共変微分の変換則は、

$$D_z\to\overline{\rho}D_z,\ D_{\overline{z}}\to\rho D_{\overline{z}}$$

これより、$\Psi^1_{L(R)}$と$\Psi^2_{R(L)}$の間の関係が分かる.

Dirac eq.の運動項から、それぞれの場のZ_M要素(Z_2変換の場合は Z_2パリティ)の間に

$$\mathcal{P}_{\Psi^2_R}=\rho\mathcal{P}_{\Psi^1_L}\ ,\quad \mathcal{P}_{\Psi^1_R}=\overline{\rho}\mathcal{P}_{\Psi^2_L}$$

という関係があることが分かる.

対角型の表現行列により、SU(N)ゲージ群は

$$SU(N)\to SU(p_1)\times SU(p_2)\times\cdots\times SU(p_n)\times U(1)^{n-m-1}$$

のように破れる. $\left(N=\sum_{i=1}^{n}p_i\right)$

SU(N)の表現を

$$\begin{cases}[N,0]={}_NC_0=\mathbf{1} & \text{singlet}\\ [N,1]={}_NC_1=\mathbf{N} & \text{基本表現}\\ \vdots & \\ [N,k]={}_NC_k & \\ \vdots & \\ [N,N-1]={}_NC_{N-1}=\overline{\mathbf{N}} & \\ [N,N]={}_NC_N=\overline{\mathbf{1}} & \end{cases}$$

ex) SU(5)

$$[5,2]={}_5C_2=\mathbf{10}$$
$$[5,4]={}_5C_4=\overline{\mathbf{5}}$$

のように表すことにする.

このとき、SU(N)の[N,k]表現は

$$[N,k]=\sum_{l_1=0}^{k}\sum_{l_2=0}^{k-l_1}\cdots\sum_{l_{n-1}=0}^{k-l_1-\cdots-l_{n-2}}({}_{p_1}C_{l_1},{}_{p_2}C_{l_2},\cdots,{}_{p_n}C_{l_n})$$

$$\left(N=\sum_{i=1}^{n}p_i,\ k=\sum_{i=1}^{n}l_i\right)$$

[T^2/Z_2:n=8、T^2/Z_3:n=9、T^2/Z_4:n=8、T^2/Z_6:n=12]

のように分解される.

[N,k]は基本表現**N**のk乗を反対称化し得られる

$$[N,k]=(\boldsymbol{N}\times\cdots\times\boldsymbol{N})_{\mathrm{A}}$$

これをZ_M変換すると、

$$(\boldsymbol{N}\times\cdots\times\boldsymbol{N})_{\mathrm{A}}\to\eta^a_k(R_a\boldsymbol{N}\times\cdots\times R_a\boldsymbol{N})_{\mathrm{A}}$$

(η^a_k :固有Z_M要素)

Diracフェルミオンのカイラリティの異なる成分に対して、同じ固有Z_M要素を持つ必要はない.

・Anomaly

偶数次元時空でのWeylフェルミオンを含むカイラルゲージ理論

➡ 一般にAnomaly が存在

異なるカイラリティを持つフェルミオンからの寄与による相殺

➡ Anomaly cancellation *[3]

$[N,k]_+ + [N,k]_-$(Diracフェルミオン)を用いる.

3、Formulae for number of species

2つのbreaking patternについて考察する.

(i)

$$SU(N)\to SU(5)\times SU(p_2)\times\cdots\times SU(p_n)\times U(1)^{n-m-1}$$

(ii)

$$SU(N)\to SU(3)\times SU(2)\times SU(p_3)\times\cdots\times SU(p_n)\times U(1)^{n-m-1}$$

このとき、SU(N)の[N,k]表現は、

(i)
$$[N,k]=\sum_{l_1=0}^{k}\sum_{l_2=0}^{k-l_1}\cdots\sum_{l_{n-1}=0}^{k-l_1-\cdots-l_{n-2}}({}_5C_{l_1},{}_{p_2}C_{l_2},\cdots,{}_{p_n}C_{l_n})$$

(ii)
$$[N,k]=\sum_{l_1=0}^{k}\sum_{l_2=0}^{k-l_1}\sum_{l_3=0}^{k-l_1-l_2}\cdots\sum_{l_{n-1}=0}^{k-l_1-\cdots-l_{n-2}}({}_3C_{l_1},{}_2C_{l_2},{}_{p_3}C_{l_3},\cdots,{}_{p_n}C_{l_n})$$

のように分解される.

荷電共役の等価性と生き残り仮説を課すことにより、それぞれの表現の数は、

(i)
$$n_{\overline{5}}\equiv\sharp({}_5C_4)_L-\sharp({}_5C_1)_L+\sharp({}_5C_1)_R-\sharp({}_5C_4)_R$$
$$n_{10}\equiv\sharp({}_5C_2)_L-\sharp({}_5C_3)_L+\sharp({}_5C_2)_R-\sharp({}_5C_3)_R$$
$$n_1\equiv\sharp({}_5C_0)_L+\sharp({}_5C_5)_L+\sharp({}_5C_5)_R+\sharp({}_5C_0)_R$$

(ii)
$$n_{\bar{d}}\equiv\sharp({}_3C_2,{}_2C_2)_L-\sharp({}_3C_1,{}_2C_0)_L+\sharp({}_3C_1,{}_2C_0)_R-\sharp({}_3C_2,{}_2C_2)_R$$
$$n_l\equiv\sharp({}_3C_3,{}_2C_1)_L-\sharp({}_3C_0,{}_2C_1)_L+\sharp({}_3C_0,{}_2C_1)_R-\sharp({}_3C_3,{}_2C_1)_R$$
$$n_{\bar{u}}\equiv\sharp({}_3C_2,{}_2C_0)_L-\sharp({}_3C_1,{}_2C_2)_L+\sharp({}_3C_1,{}_2C_2)_R-\sharp({}_3C_2,{}_2C_0)_R$$
$$n_{\bar{e}}\equiv\sharp({}_3C_0,{}_2C_2)_L-\sharp({}_3C_3,{}_2C_0)_L+\sharp({}_3C_3,{}_2C_0)_R-\sharp({}_3C_0,{}_2C_2)_R$$
$$n_q\equiv\sharp({}_3C_1,{}_2C_1)_L-\sharp({}_3C_2,{}_2C_1)_L+\sharp({}_3C_2,{}_2C_1)_R-\sharp({}_3C_1,{}_2C_1)_R$$
$$n_{\bar{\nu}}\equiv\sharp({}_3C_0,{}_2C_0)_L+\sharp({}_3C_3,{}_2C_2)_L+\sharp({}_3C_3,{}_2C_2)_R+\sharp({}_3C_0,{}_2C_0)_R$$

・生き残り仮説(survival hypothesis)
あるスケールで対称性が破れるとき、生き残った対称性の下で質量項を組むことができるフェルミオンは対称性の破れのスケールの質量を獲得する. *[4]

で与えられる. さらに、ゼロモードを取り出す射影演算子Pを用いることにより、

例えば、T^2/Z_2の場合

(i)
$$n_{\bar{5}}=\sum_{\pm}\sum_{l_1=1,4}\sum_{l_2=0}^{k-l_1}\cdots\sum_{l_7=0}^{k-l_1-\cdots-l_6}(-1)^{l_1}\left(P^{(1,1,1)}-P^{(-1,-1,-1)}\right){}_{p_2}C_{l_2}\cdots{}_{p_8}C_{l_8}$$

(ii)
$$n_{\bar{d}}=\sum_{\pm}\sum_{(l_1,l_2)=(2,2),(1,0)}\sum_{l_2=0}^{k-l_1}\cdots\sum_{l_7=0}^{k-l_1-\cdots-l_6}(-1)^{l_1+l_2}\left(P^{(1,1,1)}-P^{(-1,-1,-1)}\right){}_{p_3}C_{l_3}\cdots{}_{p_8}C_{l_8}$$

$$P^{(\rho,\rho,\rho)}_{\pm}\equiv\frac{1}{8}(1+\rho\mathcal{P}_{0\pm})(1+\rho\mathcal{P}_{1\pm})(1+\rho\mathcal{P}_{2\pm})$$

のように書き表される. このとき、Z_2パリティは

$$\mathcal{P}_{0\pm}=(-1)^{l_1+l_2+l_3+l_4}(-1)^k\eta^0_{k\pm}=(-1)^{l_1+l_2+l_3+l_4+\alpha_\pm}$$
$$\mathcal{P}_{1\pm}=(-1)^{l_1+l_2+l_5+l_6}(-1)^k\eta^1_{k\pm}=(-1)^{l_1+l_2+l_5+l_6+\beta_\pm}$$
$$\mathcal{P}_{2\pm}=(-1)^{l_1+l_3+l_5+l_7}(-1)^k\eta^2_{k\pm}=(-1)^{l_1+l_3+l_5+l_7+\gamma_\pm}$$

で与えられる. 他の表現やT^2/Z_3、Z_4、Z_6に関しても同様に具体的な公式を書き下すことができる

4、結果

(i)において、$n_{\overline{5}}=n_{10}=3$

(ii)において、$n_{\overline{d}}=n_l=n_{\overline{u}}=n_{\overline{e}}=n_q=3$

つまりsinglet以外が4次元時空で3個ずつ(3世代の物質粒子)を導く解を求めたところ、

(i)

	T^2/Z_2	T^2/Z_3	T^2/Z_4	T^2/Z_6
$SU(8)$	-	[8,3]:24 [8,4]:12	[8,3]:14 [8,4]:16	[8,3]:28 [8,4]:20
$SU(9)$	[9,3]:192	[9,3]:182 [9,4]:348	[9,3]:142 [9,4]:32	[9,3]:512 [9,4]:800
$SU(10)$	-	[10,3]:852 [10,4]:1308 [10,5]:48	[10,3]:160 [10,4]:92	[10,3]:2484 [10,4]:2654 [10,5]:1532
$SU(11)$	[11,3]:768 [11,4]:768	[11,3]:1608 [11,4]:1716 [11,5]:1794	[11,3]:456 [11,4]:436 [11,5]:186	[11,3]:6530 [11,4]:6768 [11,5]:5540
$SU(12)$	[12,3]:1104	[12,3]:2214 [12,4]:1020	[12,3]:748 [12,4]:676 [12,5]:534 [12,6]:632	[12,3]:17084 [12,4]:13692 [12,5]:10498 [12,6]:13188

(ii)

	T^2/Z_2	T^2/Z_3	T^2/Z_4	T^2/Z_6
$SU(8)$	-	-	-	-
$SU(9)$	[9,3]:32	-	[9,3]:8	[9,3]:8 [9,4]:32
$SU(10)$	-	-	-	[10,3]:80 [10,4]:108
$SU(11)$	[11,3]:80 [11,4]:80	[11,4]:80	[11,3]:20 [11,4]:20	[11,3]:84 [11,4]:144 [11,5]:156
$SU(12)$	[12,3]:120	[12,3]:80	[12,4]:88 [12,6]:240	[12,3]:392 [12,4]:120 [12,5]:72 [12,6]:552
$SU(13)$	[13,3]:144	-	[13,4]:40	[13,3]:712 [13,4]:88 [13,5]:140 [13,6]:200

という膨大な数の解(モデル)が得られた.

ここで、

[N,k]からの解の数＝[N,N-k]からの解の数

という関係がある.

5、考察

(Ⅰ) Ψ_+とΨ_-の固有Z_2パリティの入れ換えの下で同じ世代数を有するモデルが得られる.

(Ⅱ) p_iと固有Z_N要素の間のある種の入れ換えの下で世代数は不変. 例えば、T^2/Z_2では

$$(p_3,p_4,\alpha_\pm)\Longleftrightarrow(p_5,p_6,\beta_\pm),(p_2,p_6,\beta_\pm)\Longleftrightarrow(p_3,p_7,\gamma_\pm)$$
$$(p_2,p_4,\alpha_\pm)\Longleftrightarrow(p_5,p_7,\gamma_\pm)$$

(Ⅲ) ウィルソンライン位相が導入された場合でも、世代数はウィルソンライン位相の値に依らない. 例えば、T^2/Z_2では、(P_0,P_1,P_2)の2×2の部分行列において、

$$(\tau_3,\tau_3,\tau_3)\sim(\tau_3,\tau_3,-\tau_3)\sim(\tau_3,-\tau_3,\tau_3)\sim(\tau_3,-\tau_3,-\tau_3)$$

という同値関係が存在し、この関係から、

$$p'_2-p_2=p'_7-p_7=p_3-p'_3=p_6-p'_6,$$
$$p'_4=p_4\ ,\quad p'_5=p_5\ ,\quad p'_8=p_8$$

という異なるbreaking patternの間で同じ数の世代数・フレーバー数が導かれる.

・今後の課題

(Ⅲ)の特徴について、さらに詳細に探求することにより、力学的な特徴や世代数・フレーバー数の起源を明らかにする.

数多くの解(モデル)の中から、現象論的な特徴を正しく導くようなモデルを探索することにより、フェルミオン質量の階層性・世代の混合の起源を明らかにする.

*参考文献

[1] Y. Kawamura, T. Kinami, and K. Oda, Phys.Rev.**D76**,035001 (2007).

[2] Y. Kawamura and T. Miura, Prog. Theor. Phys. **122**, 847 (2007).

[3] N. Borghini, Y.Gouvemeur, and M.H.G. Tytgat, Phys.Rev.**D65**,025017 (2001).

[4] H. Georgi, Nucl.Phys.Lett.**B156**,126 (1979).