格子シミュレーションによる細谷機構の解明

野秋淳一　(KEK)

in collaboration with　G. Cossu　(KEK)
幡中久樹　(大阪大 →　KIAS)
細谷裕　(大阪大)
伊藤悦子　(KEK)

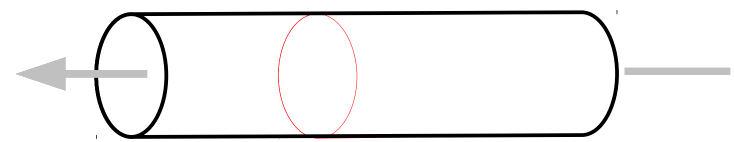
paper in preparation

細谷機構 Hosotani, 1983

- 余剰次元がコンパクト化された（非可換）ゲージ理論
  - Aharonov-Bohm 位相がゲージ場､フェルミオン場に質量を与える
  - AB 位相の 4 次元的ゆらぎ = Higgs 場
  - BSM の可能性 (gauge-Higgs unification)

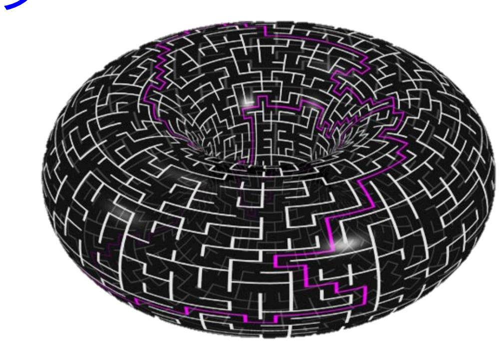
    Hatanaka,Inami and Lim,1998; etc.

$$\theta_{AB} = g\oint dy\, A_y$$



- 細谷機構 = AB 位相のダイナミクス
  - 摂動 (1-loop): $V_{\mathrm{eff}}(\theta_{AB})$ → ゲージ対称性の破れを予言 Hatanaka& Hosotani 2011
  - 非摂動的な解明: 格子ゲージ理論による数値シミュレーション
    - コンパクト化された格子上で

      Polyakov loop $P = N^{-1}\,\mathrm{Tr}\,\exp(i\,\theta_{AB})$ を計算



SU(N) gauge theory on $R^{d-1} \times S^1$

- 連続理論 (adjoint + fundamental representations)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\, F_{MN}F^{MN} + \bar{\psi}_{\mathrm{f}}(\mathcal{D}_{\mathrm{f}} - m_{\mathrm{f}})\psi_{\mathrm{f}} + \mathrm{Tr}\,\bar{\psi}_{\mathrm{ad}}(\mathcal{D}_{\mathrm{ad}} - m_{\mathrm{ad}})\psi_{\mathrm{ad}}$$

mass of KK modes

(j,k = 1,..,N)

$$(A_M^{(n)})_{jk} \ : \ m_n^2 = \frac{1}{R^2}\left(n + \frac{\theta_j - \theta_k}{2\pi}\right)^2 ,$$

$\theta_j \neq \theta_k \rightarrow$ gauge ~~symm~~

$$(\psi_{\mathrm{f}})_j \ : \ m_n^2 = \frac{1}{R^2}\left(n + \frac{\theta_j + \alpha_{\mathrm{f}}}{2\pi}\right)^2 + m_{\mathrm{f}}^2 ,$$

$$(\psi_{\mathrm{ad}})_{jk} \ : \ m_n^2 = \frac{1}{R^2}\left(n + \frac{\theta_j - \theta_k + \alpha_{\mathrm{ad}}}{2\pi}\right)^2 + m_{\mathrm{ad}}^2$$

- 格子理論: 2 つの独立な焦点
  - 格子上の 4+1 次元 gauge 理論 : 定式化、連続極限、コスト、etc.
  - 細谷機構の有無 (時空次元に依らない、場の理論としての性質)
    - d =4, N=3 による数値シミュレーション (non-trivial で最も簡単 , cf. 有限温度 QCD)
    - Polyakov loop のふるまいを調べ、パラメータ空間で相図を描く
    - 摂動による予言との比較

もくじ

- イントロダクション
- ゲージ対称性の破れと Polyakov loop
- 数値シミュレーション
- 摂動論との比較、相図
- 議論および今後の可能性

AB 位相と Polyakov loop

- SU(3) : $\theta_1, \theta_2, \theta_3 = -\theta_1 - \theta_2$
  - Wilson line $W = P\exp\left\{ig\int_0^{2\pi R} dy\, A_y\right\} \to \mathrm{diag}\left\{e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3}\right\}$
    - fundamental rep. $P_3 = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}\, W_3 = \frac{1}{3}\left\{e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} + e^{i\theta_3}\right\}$
    - adjoint rep. $P_8 = \frac{1}{8}\mathrm{Tr}\, W_8 = \frac{1}{4}\left\{1 + \cos(\theta_1 - \theta_2) + \cos(\theta_2 - \theta_3) + \cos(\theta_3 - \theta_1)\right\}$

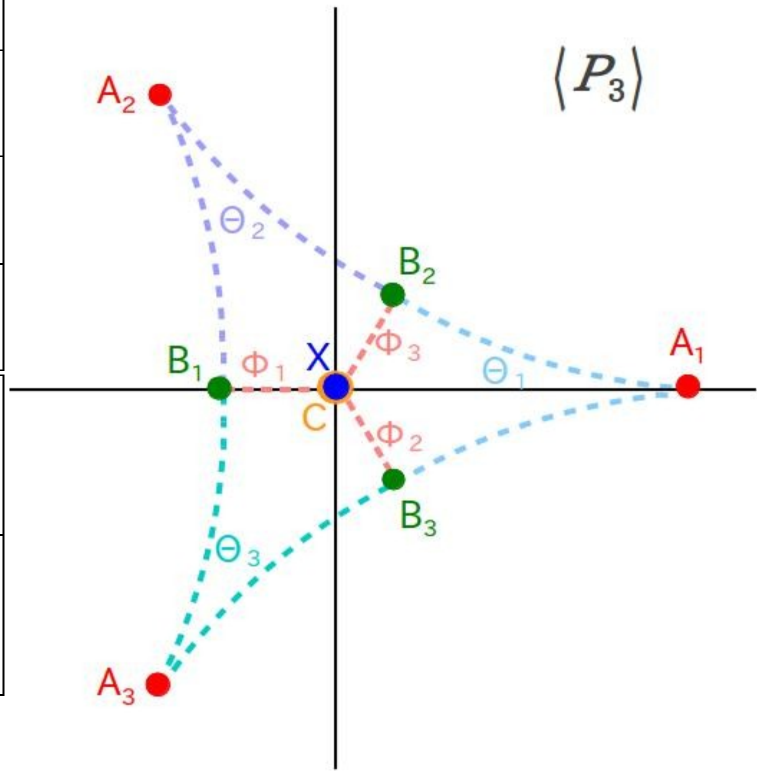
$$\boxed{(A_M^{(n)})_{jk} \ : \ m_n^2 = \frac{1}{R^2}\left(n + \frac{\theta_j - \theta_k}{2\pi}\right)^2}$$

- 可能な破れのパターン
  - A: SU(3)　　$(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (0, 0, 0), (\pm 2\pi/3, \pm 2\pi/3, \pm 2\pi/3)$
  - B: SU(2)xU(1)　$(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (0, \pi, \pi), (\pm 2\pi/3, \mp\pi/3, \mp\pi/3)$
  - C: U(1)xU(1)　$(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (0, 2\pi/3, -2\pi/3)$

それぞれに　P_3, P_8　の値も決まる

Polyakov loop による相分類

	$(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ with permutations	P_3	P_8	Symmetry Phase
X	Large quantum fluctuations	0	$-\frac{1}{8}$	$SU(3)$ confined
A_1 $A_{2,3}$	$(0,0,0)$ $(\pm\frac{2}{3}\pi, \pm\frac{2}{3}\pi, \pm\frac{2}{3}\pi)$	1 $e^{\pm 2\pi i/3}$	1	$SU(3)$ deconfined
B_1 $B_{2,3}$	$(0,\pi,\pi)$ $(\pm\frac{2}{3}\pi, \mp\frac{1}{3}\pi, \mp\frac{1}{3}\pi)$	$-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}e^{\mp\pi i/3}$	0	$SU(2)\times U(1)$ split
C	$(0, \frac{2}{3}\pi, -\frac{2}{3}\pi)$	0	$-\frac{1}{8}$	$U(1)\times U(1)$ reconfined
$\Theta_1(a)$ $\Theta_{2,3}(a)$	$(-2a, a, a)$ $(-2a \pm \frac{2}{3}\pi, a \pm \frac{2}{3}\pi, a \pm \frac{2}{3}\pi)$ $(0 < \lvert a\rvert < \frac{1}{3}\pi)$	$\frac{1}{3}(2e^{ia} + e^{-2ia})$ $\frac{1}{3}e^{\pm 2\pi i/3}(2e^{ia} + e^{-2ia})$	$\frac{1}{2}(1+\cos 3a)$	$SU(2)\times U(1)$
$\Phi_1(b)$ $\Phi_{2,3}(b)$	$(0, b, -b)$ $(\pm\frac{2}{3}\pi, b \pm \frac{2}{3}\pi, -b \pm \frac{2}{3}\pi)$ $(\frac{2}{3}\pi < b < \pi)$	$\frac{1}{3}(1 + 2\cos b)$ $\frac{1}{3}e^{\pm 2\pi i/3}(1 + 2\cos b)$	$\frac{1}{2}\cos b\,(1+\cos b)$	$U(1)\times U(1)$



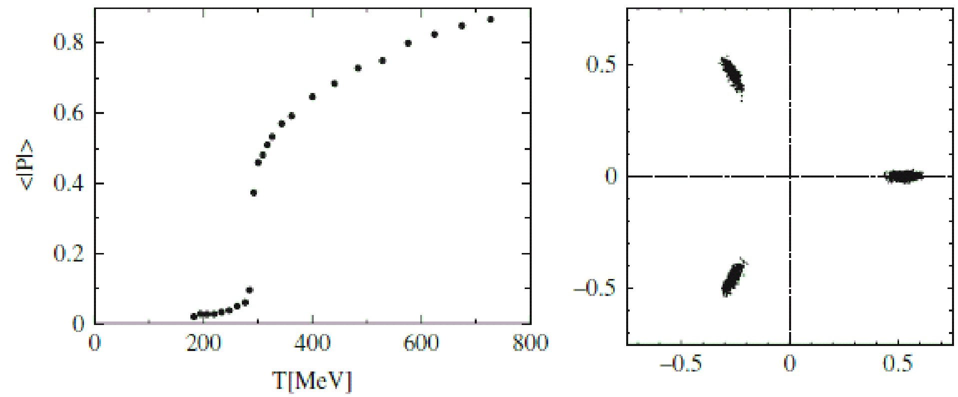
格子上で求めた $<P_3>, <P_8>$ から $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ を読みとることができる。

格子計算

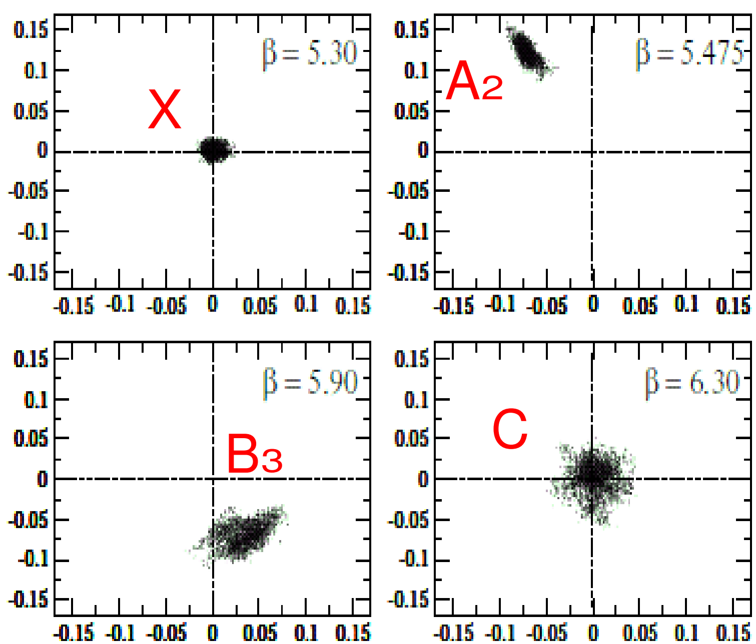
- Polyakov loop ＝ リンクの積

$$P_3 = \frac{1}{3N_x^3}\sum_x \mathrm{Tr}\, W_3 = \frac{1}{3N_x^3}\sum_x \mathrm{Tr} \prod_{y=1}^{N_y} \underbrace{U_{(x,y),4}}_{\text{リンク変数}}$$

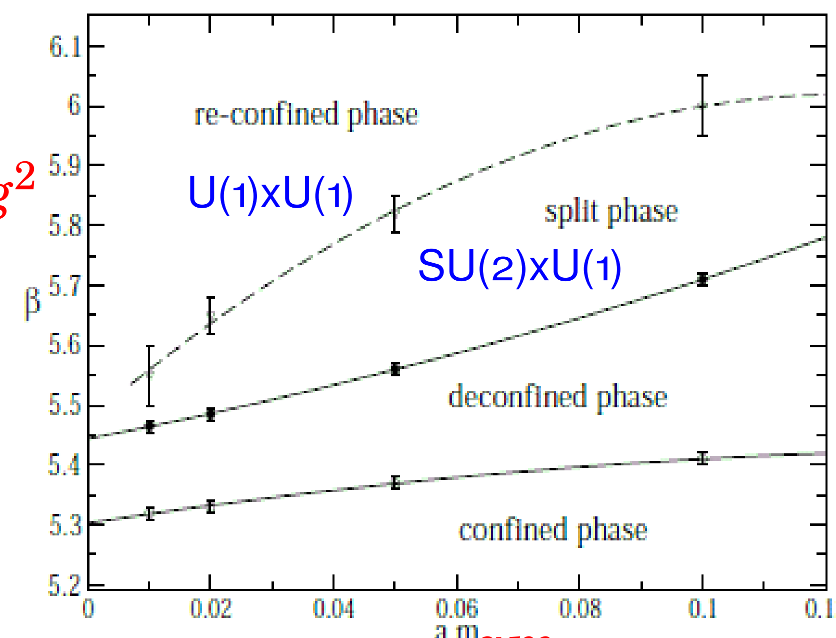
cf. pure gauge： confined / deconfined transision



- 先行研究 (?) Cossu & D'Elia 2010
  - (Nad,Nf) = (2,0), staggered fermion



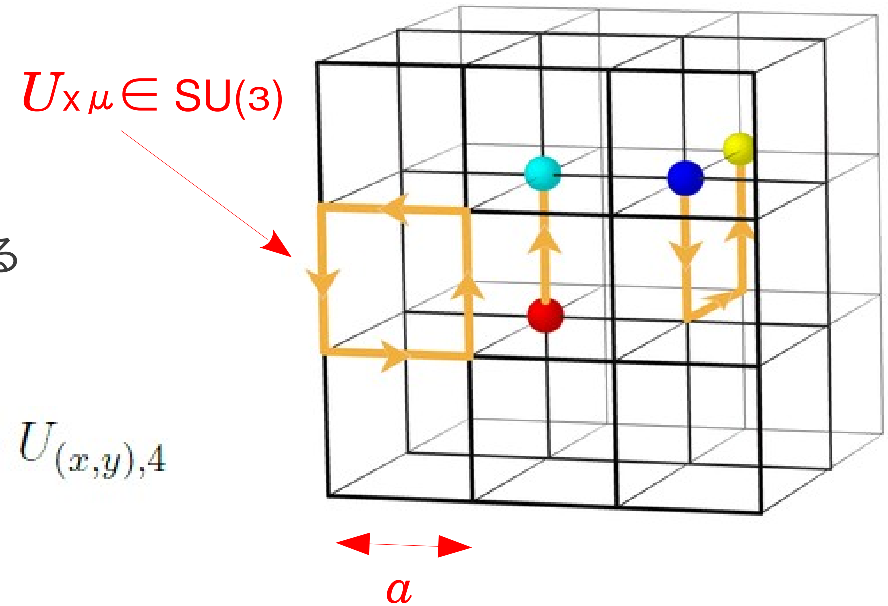
$\beta = 6/g^2$



am

戦略

- 2 種類の数値シミュレーション（第一原理計算）
  - adjoint case: $(N_{ad}, N_f) = (2,0)$
    - gauge symmetry breaking を起こす源
    - Coss & D'Elia と同様のセットアップからはじめる
  - fundamental case: $(N_{ad}, N_f) = (0,4)$
    - non-trivial な境界条件 $e^{-i\alpha} U_{(x,y+N_y),4} = U_{(x,y),4}$
    - α ： orbifold 余剰次元に関係



- セットアップ
  - 格子体積 16^3x4 に固定 → 弱結合領域で極端に狭い
  - 格子フェルミオン: staggered fermions
    → フレーバーの選択肢が少ない

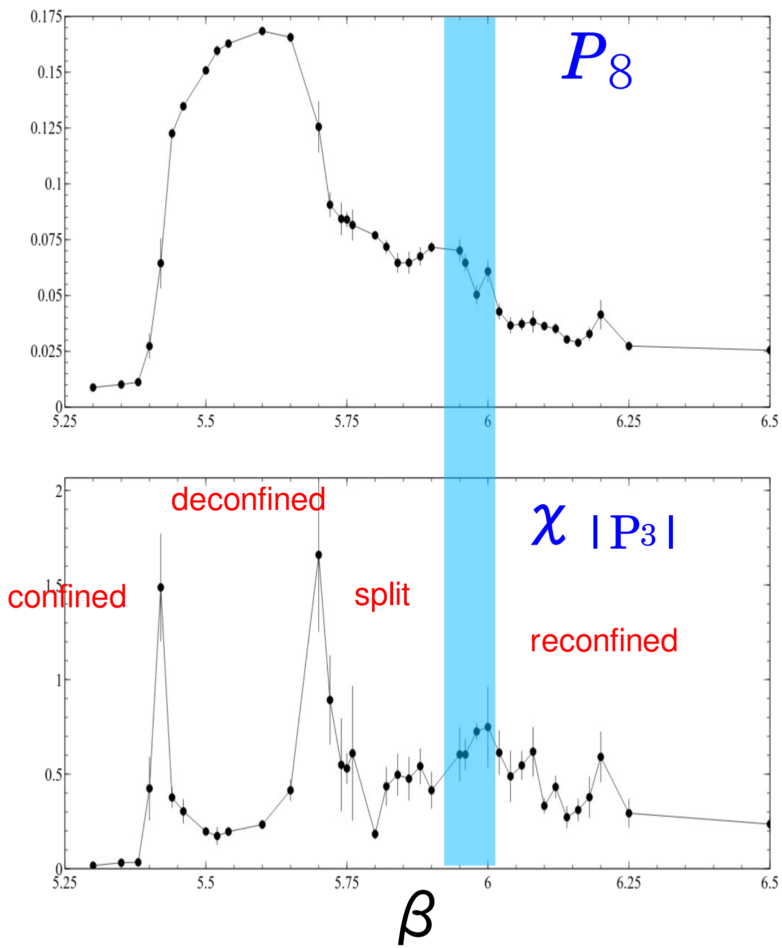
IROIRO++

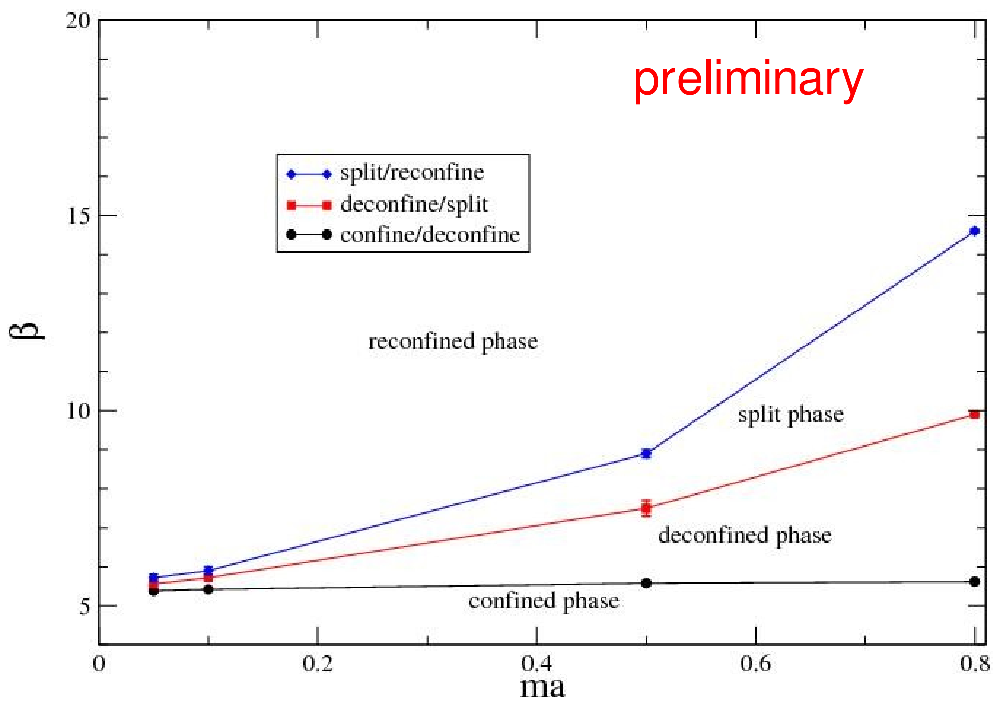
A C++ code system for lattice gauge theory
http://suchix.kek.jp/guido_cossu/documents/DoxyGen/html/index.html

Adjoint case

- Polyakov loop　および（大きさの）感受率ピークで相の境目を決める

$ma = 0.10$



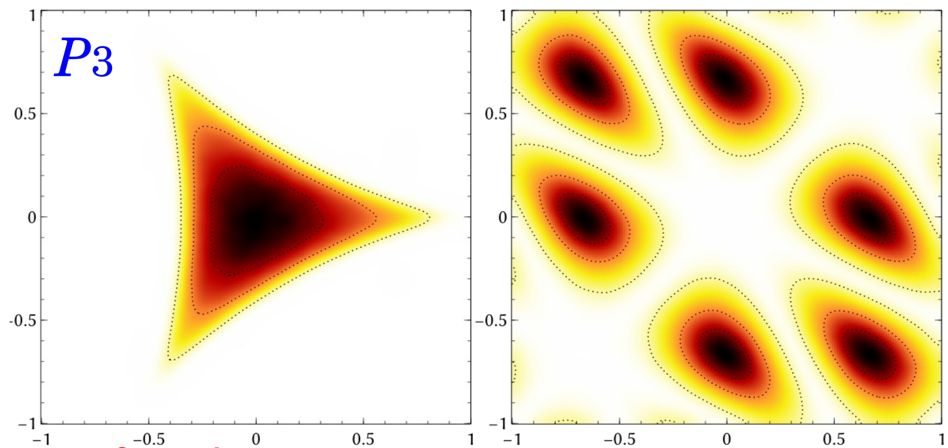


Adjoint case (2)

- あるゲージ配位について、P_3 とその固有値の density plot

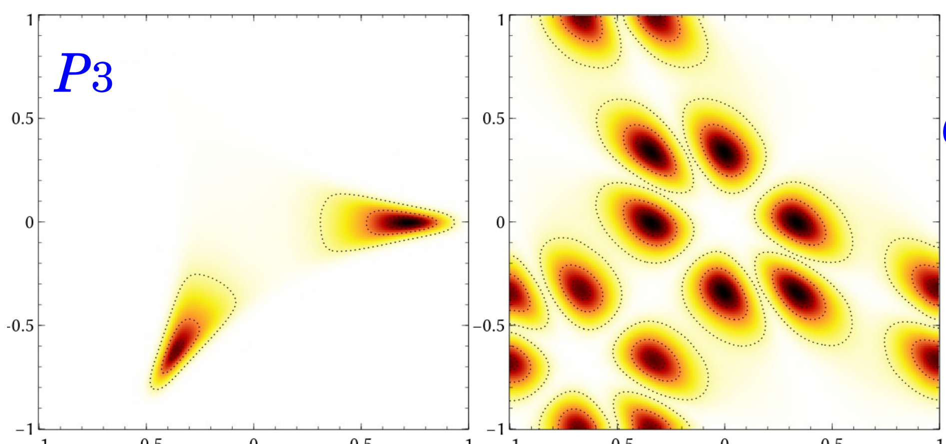
N.B. Harr measure $\prod_{j>k} \sin^2 \frac{\theta_j - \theta_k}{2}$ のため、$\theta_i \neq \theta_j$

$\beta = 5.30$, confined

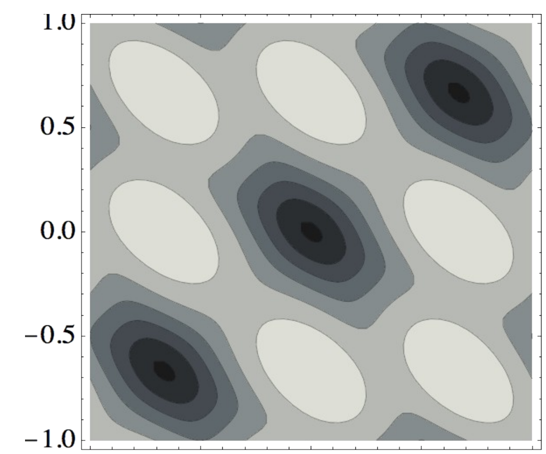


[摂動で扱えない]

$\beta = 5.54$, deconfined

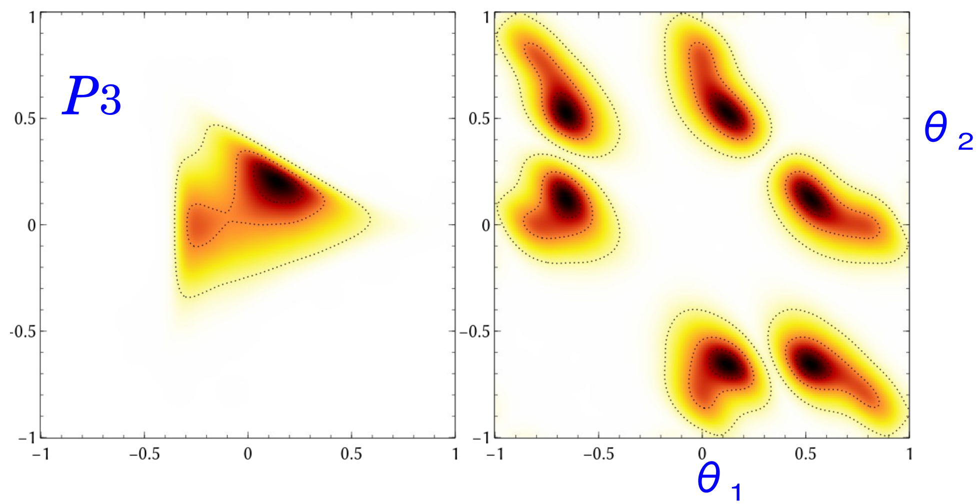


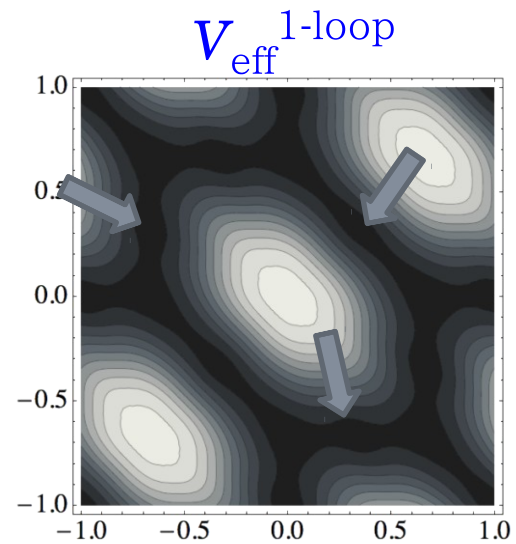
$V_{\mathrm{eff}}^{\text{1-loop}}$



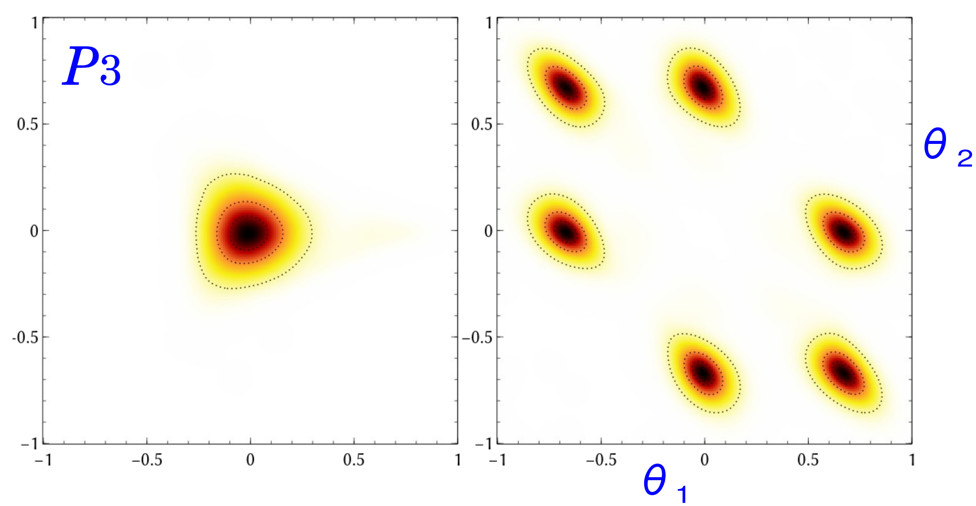
Adjoint case (3)

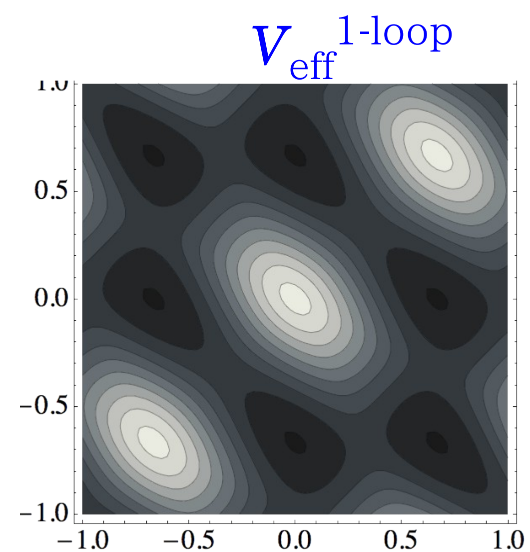
$\beta = 5.95$, split　SU(2)xU(1)





$\beta = 6.50$, reconfined　U(1)xU(1)



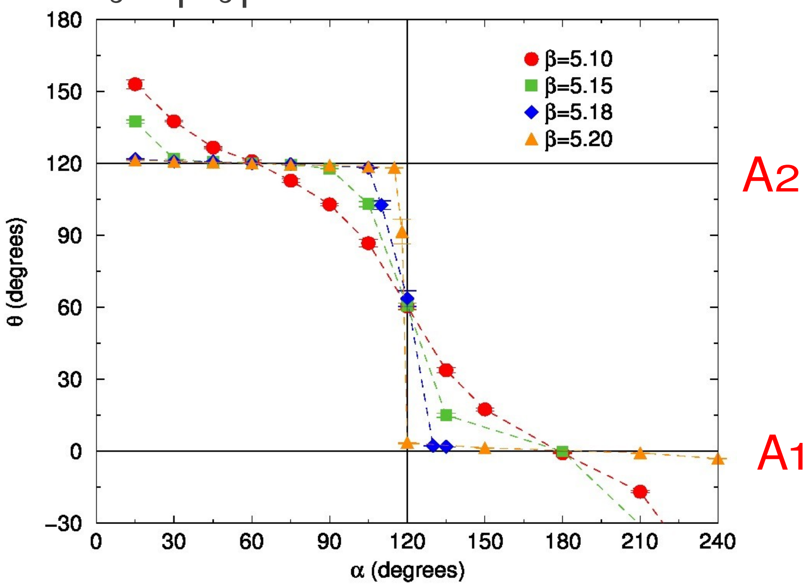


格子データは摂動の予言どおりに振る舞う

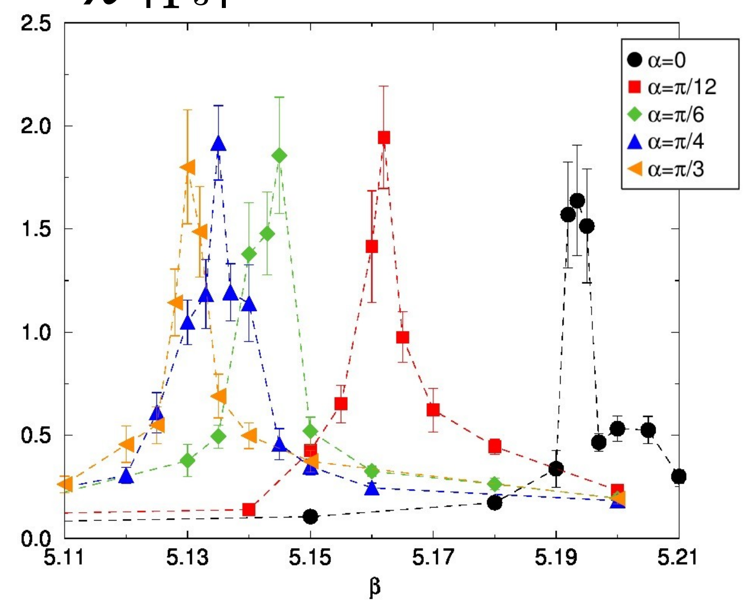
Fundamental case

- 虚数化学ポテンシャルの入った QCD と等価: $\mu_I = (\pi - \alpha)/4$
  - すでに相構造は知られている Roberge & Weiss, 1986
  - 定量的に相図も得られている de Forcrand & Philipsen, 2002; D'Elia & Lombardo, 2003
  - 我々のセットアップにあわせ、Polyakov loop のみで相図を決定し直した

$P_3 = |P_3| e^{i\theta_P}$の非解析性

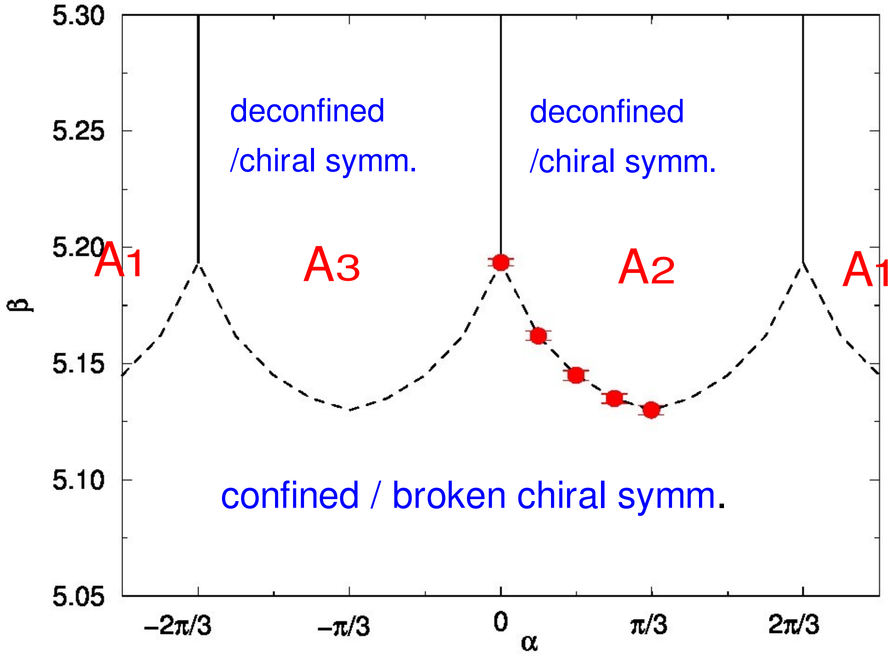


$\chi_{|P_3|}$

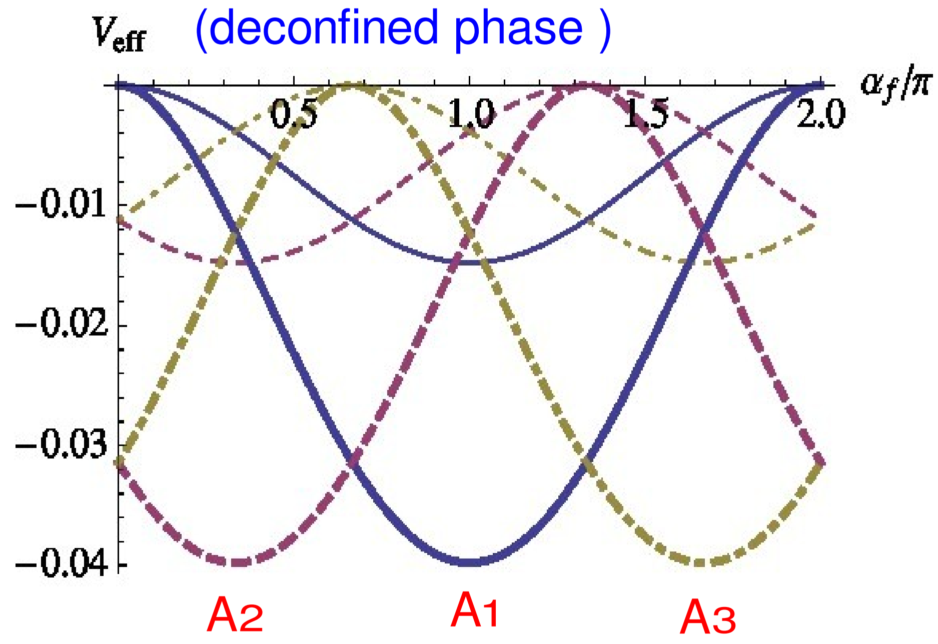


Fundamental case (2)

ma=0.10 の相図



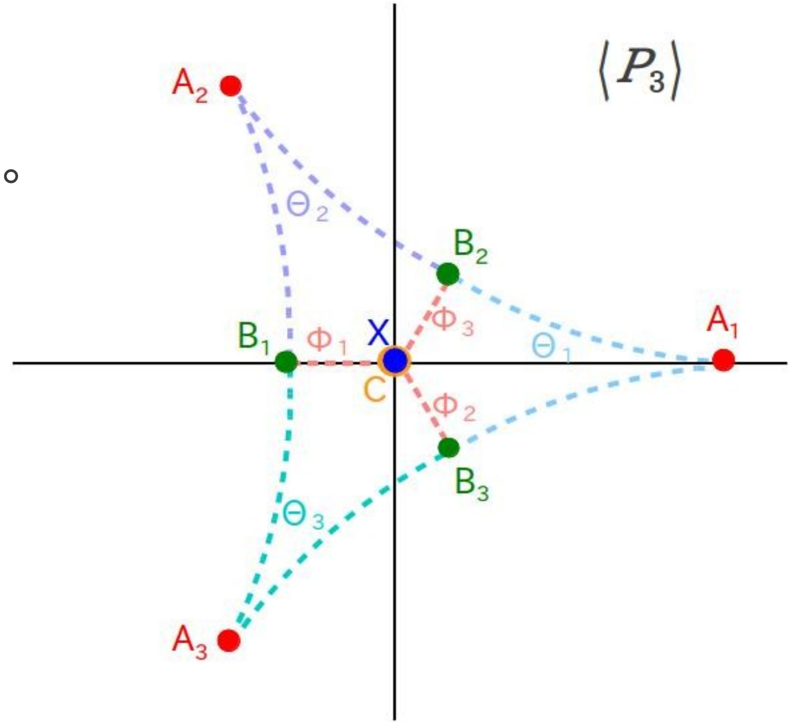
$V_{\rm eff}$ (deconfined phase)



Roberge &Weiss の議論は分配関数に基づくので、両者の一致は当然のこと

ここまでのまとめ

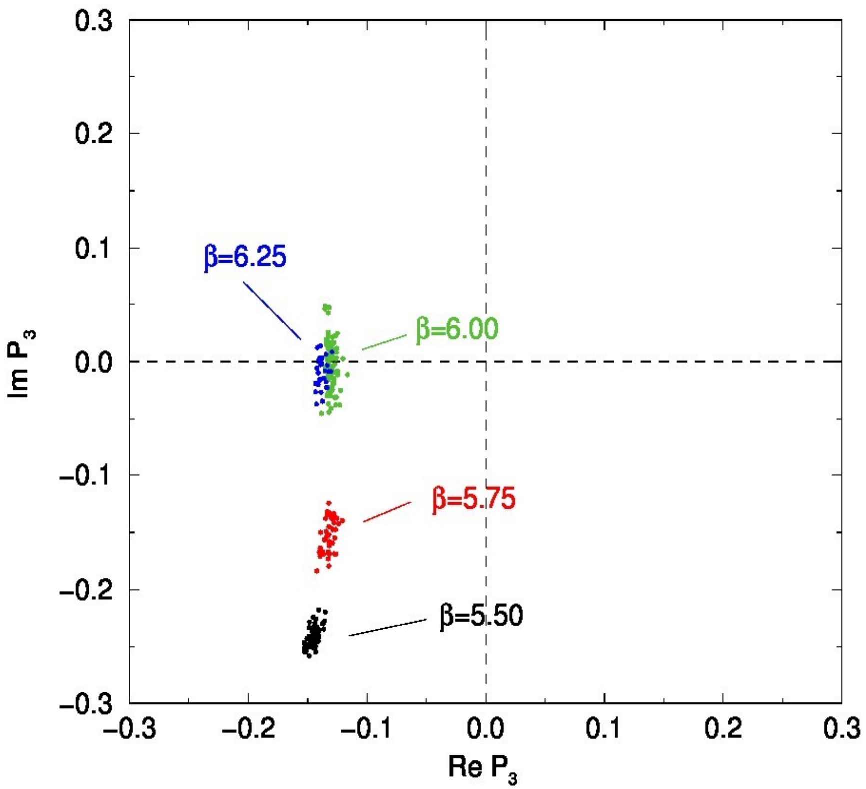
- 非可換ゲージ対称性は細谷機構によって非摂動的に破れるか？
- 格子ゲージ理論による数値シミュレーション
  - 3-dim. spacetime + 1-compact dim. with SU(3)
  - $(N_{ad}, N_f) = (2,0), (0,4)$ それぞれの場合について、AB 位相のふるまいを Polyakov loop によって調べた。
  - 摂動による予言とよく一致するふるまい。
    - 特に重要なのは、split phase (B) と reconfinet phase(C) の存在であった



初動としては、まずまず

今後の方針１：複合的な物質場

- $N_{\rm ad} > 0, N_{\rm f} > 0$ の場合 ongoing
  - 摂動による予言へのケーススタディを増やす
  - Z_3 対称性が陽に破れるので、真空がユニークに決まる
  - パラメータの数と領域が増える分調べるのは大変
    - staggered fermion ：
      $(N_{\rm ad}, N_{\rm f}) = (2,4),(4,4),(2,8),..$
    - β, $am_{\rm ad}$, $am_{\rm f}$, α
    - 図：$(N_{\rm ad}, N_{\rm f}) = (2,4)$,
      $am_{\rm ad} = am_{\rm f} = 0.10$,
      $\alpha = 0.0$



今後の方針 ２：体積効果と連続極限

- " 細谷機構は摂動を越えて存在するか？ " に明確に答えるには？
  - β → large: finer lattice $a \propto \left(\frac{\beta}{6b_0}\right)^{b_1/2b_0^2} \exp\left(-\frac{\beta}{12b_0}\right)$

    単一格子サイズ (16^{3}x4) では物理サイズを一定にできない
  - ステップ１：物理サイズ一定のシミュレーション
    - なんらかの物理量 (eg. string tension) を一定に保つように複数格子サイズでシミュレーションを行う
  - ステップ２：無限体積極限 (ステップ１をくりかえし、外挿)
    - 物理体積に対する感受率のスケーリング → 相転移次数

      cf. 2+1 flavor QCD :有限温度相転移は相転移ではなく、クロスオーバー

      Budapest+Wuppertal Collab. Aoki et al. Nature 443 (2006)
    - 莫大なコスト、われわれのゴールはどこか？

今後の方針 3：発展

$$
\begin{aligned}
(A_M^{(n)})_{jk} &: \quad m_n^2 = \frac{1}{R^2}\left(n + \frac{\theta_j - \theta_k}{2\pi}\right)^2 , \\
(\psi_{\mathrm{f}})_j &: \quad m_n^2 = \frac{1}{R^2}\left(n + \frac{\theta_j + \alpha_{\mathrm{f}}}{2\pi}\right)^2 + m_{\mathrm{f}}^2 , \\
(\psi_{\mathrm{ad}})_{jk} &: \quad m_n^2 = \frac{1}{R^2}\left(n + \frac{\theta_j - \theta_k + \alpha_{\mathrm{ad}}}{2\pi}\right)^2 + m_{\mathrm{ad}}^2
\end{aligned}
$$

- スペクトラム
  - A4 (= Higgs) の質量
    - 有限の質量を持つことが重要
    - 手法 (interpolating operator, gauge etc) を検討中
  - fermionic　な物理量？
    - たとえば split phase (SU(2)xU(1)) では　SU(2) singlet が有限値？
- orbifold コンパクト次元
  - BSM　をより現実的に考えるヒントに
  - しかし、カイラルフェルミオンが必要、何かバイパス？