(Gauge) String Field Theory

九後 汰一郎

Taichiro Kugo *

(京都大学大学院理学研究科)

25-26, July, 1997 (1997 年夏の学校)

講義録作成：野口, 森山, 岸本, 道下, 橋本, 村上 (豊), 村上 (公一)

*e-mail address : kugo@gauge.scphys.kyoto-u.ac.jp

目 次

1 Introduction

stringの場の理論に対していろんなtrialがあってですね, まあ部分的に成功している。その状況を理解するための紹介をしたいわけです。

なぜstringの場の理論をやりたいかというと, 最近string理論がdualityをkey wordとして非常に発展していますけれども, そのときにstringの多体問題, stringの場の理論が必要な場合がもちろんあるからです。たとえばdualityが場の理論として成り立つかということを示そうと思ったら, stringの場の理論が本当は必要なんですね。ですけれどもそれがないので, みんなどうしているかというと, stringのlow energy effective theoryつまりmassless modeだけをkeepした場の理論, すなわちsupergravityでdualityがあることを確かめているわけです。で, massive modeについてはdualityがあるかどうかを適当にσ modelやら何やら非常な苦労をして議論するわけです。それはひとえにstringの場の理論がないからで, もしstringの場の理論があれば, そこで直接dualityを議論することができる。

実際に例えばT-dualityについては, 不完全ながらもstringの場の理論があり, その中でstringのdualityを議論している (僕がZwiebachとやった) 論文があります [1]。ところがstringの場の理論はあまり完全なのがないのと, あまり知られていないというのもあって, あまり使われていないわけです。だけどやはりこれからdualityを軸としてstringの理論を考える場合に, (最近はM(atrix) theoryなど非常に新しいformulationも出ていますが, そういうことを考える場合にも,)stringの場の理論という観点を持ってると, 何かまた質的に新しいことが判るかも知れない。

ということで, そういう知識を知ってもらうためにこの講義をやります。

まず, referenceを挙げます[1] 。

(1) M. E. Peskin, "*Introduction to String and Superstring Theory II*", in *"From the Planck Scale to the Weak Scale"*, TASI 1986, ed. by H. Haber, *World Scientific* (1987) 277.

(2) T. Kugo, "*String Field Theory*", in *"The Superworld II"*, Erice 1987, ed. by A. Zichichi, *Plenum Press* (1990) 165.

(3) E. Witten, *"Non-commutative Geometry and String Field Theory"*, *Nucl. Phys.* **B268** (1986) 253.

(4) H. Kunitomo and K. Suehiro, *"A New Method of Constructing Gauge String Field Theory"*, *Nucl. Phys.* **B289** (1987) 157.

(5) A. LeClair, M. E. Peskin and C. R. Preitschopf, *"String Field Theory on the Conformal Plane (I). Kinematical Principles"*, *Nucl. Phys.* **B317** (1989) 411.

(6) K. Suehiro, *"Operator Formulation of Witten's String Field Theory"*, Ph. D. thesis.

一言ずつ言いますと,

[1] 講義中に登場する他の文献は最後に載せてあります。

(1) は, M. E. Peskin が 86 年に行なった TASI lecture です。(これは II と書いてありますが, Peskin が担当したのが II で, I というのはその時に同じ所で M. B. Green がやった講義です。) この Peskin の講義は非常に良いですね。conformal field theory と string の関係を非常に clear に議論している。是非読んでもらいたい。これを読むと僕の講義は多分いらないかも知れない。半分ぐらいはいらないかも知れない。いや, 3分の1ぐらいですね。

(2) は, 僕が Erice で 86 年頃 String Field Theory という題名でやった講義がありまして, これも場の理論を手っ取り早く非常に初等的に理解するためには良い講義です。これは Superworld II という本に入っています。

(3) それから E. Witten の string field theory では, この open string field theory の論文が良いですね。

(4) 国友君と末廣君が, 場の理論における vertex の作り方, つまり三つの string が集まってきたときに vertex をどうするか, あるいは 4 string vertex はどうするか, そういう作り方について言った論文があります。これも良い論文です。

(5) はもっといい論文で, LeClair-Peskin-Preitschopf という 3 人の論文です。string の場の理論を conformal field theory からどういうふうに作れるかということを議論して, conformal field theory の power を示しました。これも vertex の構成法を与えた非常に良い論文です。

(6) それからこの辺のことをもうちょっと手っ取り早く supersymmetry までいれて紹介したのが, 末廣君の Ph.D.thesis ですが, それを読むと非常に勉強になります。この Ph.D.thesis を欲しいときには, 多分末廣君に e-mail か何かを打てば TEX file か何かをくれるんじゃないかと思いますが[2] 。

ええと, この reference を全部自分で読んだら, 僕の講義は全部いらないと思います。それでは, はじめます。

2 String の一体問題

2.1 Action と gauge 固定

String 一体系の action はよく知られた Polyakov action:

$$S = T \int dt d\sigma \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2}\right) g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} \tag{2.1}$$

ですが, これは基本的に 2 次元重力理論と同じで, よく知られた action です。ここで, world sheet 上の metric を $g_{\alpha\beta}$ とします。また, target space の方は最初から flat metric $\eta_{\mu\nu}$ にし

[2] 九後さんの講義録作成の担当者のところに, 末廣さんの Ph.D.thesis の copy があります (但し英語)。欲しい方は郵送しますので, 橋本@京大まで mail で連絡してください。address は, hasshan@gauge.scphys.kyoto-u.ac.jp です。

ておきます。string action (2.1) の前に付いている係数 T は string tension で,

$$T = \frac{1}{\pi l^2} \tag{2.2}$$

と書けます。 ここで l は string の基本的な長さです[3] 。これ以後 string の長さ l は 1 にとります。$\eta_{\mu\nu}$ は時間成分が -1 で空間成分が全部 $+1$ という diagonal の metric をとります (これは僕の教科書 [2] とは違うのでちょっと恐縮なのですが $\cdots$)。いろんな業界があってその業界にいくとその業界の慣習があるわけですが, 多分 string があると 26 次元で, そのうち空間方向が 25 個もあるので, 空間成分の方を minus にするのに非常に抵抗があるんだと思います。それで時間の方を minus にとります。

action (2.1) は world sheet の reparametrization に対して gauge 不変性があります。ですからこの系を量子化しようと思ったら, gauge を固定したい。gauge 固定として $g_{\alpha\beta}$ を,

$$g_{\alpha\beta} = e^{\phi}\eta_{\alpha\beta} \tag{2.3}$$

ととります。ここで,

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

この gauge 固定ができる理由は, 2 次元の world sheet parameter ξ^α ($\xi^1 = t, \xi^2 = \sigma$) に対する一般座標変換

$$\delta\xi^\alpha = f^\alpha(\xi) \qquad f^\alpha(\xi) : \text{任意の関数} \tag{2.5}$$

の下で action が不変だからです。つまり, ξ^1 を変換する自由度と ξ^2 を変換する自由度の 2 つがありますから, この gauge 自由度を使うと, $g_{\alpha\beta}$ は

$$g_{12} = 0\ , \qquad \frac{g_{11}}{g_{22}} = -1 \tag{2.6}$$

と gauge 固定できます。

二つの条件 (2.6) を置いた後の $g_{\alpha\beta}$ で, (2.3) のように Minkowski metric に場所に依存する scale factor e^ϕ がついているものを, conformally flat metric という。またこの gauge (2.6) を conformal gauge と呼びます。

さて, ここで僕の教科書 [2] の gauge 理論の一般論は知ってることにします。つまり, gauge 不変性が何かあって, それを Faddeev-Popov 流に gauge 固定をしたとき, FP ghost というのが元の gauge 不変性を引き継いで, BRS 対称性というのが出てくる, ということは知っているとします。そうしますと action (2.1) は gauge を固定した後は

$$S = \frac{1}{\pi}\int dt d\sigma \left[\frac{1}{2}\partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu + \frac{1}{2} b_{\alpha\beta}\partial^\alpha c^\beta\right] \tag{2.7}$$

となります (ここで先程言いましたように $l = 1$ にしましたから, tension は $\frac{1}{\pi}$ になっています)。 (2.7) が gauge 固定された action です。ここで b, c というのは, まず c^α が FP ghost

[3] 昔, Regge slope の parameter といわれた α' を使うと, $l = \sqrt{2\alpha'}$ と書けます。

でこれは元の一般座標の gauge 変換の変換 parameter を場に昇格させたやつ, 次にそれに対応する antighost が $b_{\alpha\beta}$ です。$b_{\alpha\beta}$ は (α, β) について symmetric で traceless です。

これで gauge 固定ができましたからあらゆる計算ができるわけです。Hamiltonian も計算できれば, まあ量子論は単純にできますね。これは, 完全に free ですからなんの問題もない。また, action (2.1) には, conformal factor e^{ϕ} は出てこないんですね, 少なくとも classical には。これを説明しましょう。action (2.1) の $g_{\alpha\beta}$ は, conformal factor e^{ϕ} を含んでます。$g^{\alpha\beta}$ はこれの逆行列ですから, $e^{-\phi}$ を含んでます。g には

$$g = \det(g_{\alpha\beta}) = \det(e^{\phi}\eta_{\alpha\beta}) = -e^{2\phi} \tag{2.8}$$

のように $e^{2\phi}$ が含まれている。従って,

$$\underbrace{\sqrt{-g}}_{e^{\phi}}\,\underbrace{g^{\alpha\beta}}_{e^{-\phi}}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu \quad = \quad \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu \tag{2.9}$$

となって e^{ϕ} と $e^{-\phi}$ が消えますから, conformally flat metric (2.3) だとあたかも action (2.1) は完全に flat に見えているわけです。

2.2 Energy momentum tensor

この flat な system の energy momentum tensor を計算する方法として, まず gauge 固定した world sheet 上の重力場 $g_{\alpha\beta}$ を action の中にもう一ぺん復活させ, 完全に covariant な形で書いて, 次にその action を $g_{\alpha\beta}$ で変分をとって, そして $g_{\alpha\beta}$ を flat に持ってくる, というやり方をします。canonical にやるよりも symmetry が manifest ですから, これでやります。(2.7) をもう一ぺん covariant に書きましょう:

$$S = \frac{1}{\pi}\int dt d\sigma \sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}b_{\alpha\gamma}\nabla_\beta c^\gamma\right] . \tag{2.10}$$

ここで,

$$\nabla_\beta c^\gamma = \partial_\beta c^\gamma + \Gamma^\gamma_{\delta\beta}c^\delta \tag{2.11}$$

と書けますね。$T_{\alpha\beta}$ を計算するには, この action (2.10) を $g_{\alpha\beta}$ で 変分したあと, flat にするので

$$T_{\alpha\beta} = (-4)\pi \left.\frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}}\right|_{g=\eta} . \tag{2.12}$$

ここで, convention で -4 を掛けておきます。右辺の計算をしましょう。まず, string coordinate X からの寄与 $T^X_{\alpha\beta}$ は,

$$T^X_{\alpha\beta} = -2\partial_\alpha X \cdot \partial_\beta X + \eta_{\alpha\beta}(\partial_\gamma X \cdot \partial^\gamma X). \tag{2.13}$$

ここで"·"は target space の $\mu\nu$ の足について $\eta_{\mu\nu}$ でつぶしたという意味です。上式の右辺第二項は trace part です。それから, (2.10) 右辺第二項の FP ghost b, c からの寄与 $T^{bc}_{\alpha\beta}$ は,

$$T^{bc}_{\alpha\beta} = -[b_{\alpha\gamma}\partial_\beta c^\gamma + b_{\beta\gamma}\partial_\alpha c^\gamma - \eta_{\alpha\beta}(b_{\gamma\delta}\partial^\gamma c^\delta) - \underbrace{\partial_\gamma(b_{\alpha\beta}c^\gamma)}_{\text{from }\Gamma} + \underbrace{b_{\alpha\beta}\partial_\gamma c^\gamma}_{B\text{ の trace part}}]. \tag{2.14}$$

右辺の第四項はどっから出るかというと, 共変微分の中に Christoffel connection がありますが, この connection 自身が例の公式

$$, ^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\delta}\left(\partial_\gamma g_{\delta\beta} + \partial_\beta g_{\delta\gamma} - \partial_\delta g_{\beta\gamma}\right) \tag{2.15}$$

で metric g で書けていますから, connection , を経由して g 微分されて出るというわけです。それから, (2.14) の最後の項が出てこないと正しくないのですが, この項がどっから出てくるかというと, (これは自分で check しないと決して気付かないところなんですが) $b_{\alpha\gamma}$ が traceless であることからでる。traceless っていうのは

$$g^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta} = 0 \tag{2.16}$$

ですから, metric g に依っている概念です。そうすると $b_{\alpha\beta}$ を次のように書くのが一番良いですね:

$$b_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(g^{\gamma\delta}B_{\gamma\delta}). \tag{2.17}$$

こうすると, 新しく定義された場 B には traceless という条件がないわけです。このように constraint がない形にしておいてから $g_{\alpha\beta}$ で変分すると, (2.14) の最後の項が出ます。ちょっと technical なところに入りましたが, これは聴いておくと自分で本当に check するときに役に立ちます。

2.3 Euclid 化

ここで, 記号をもっと refine したい。それでこれから Euclid 化します。今, 時間を t とかいていますけれど, t を $-i\tau$ として, 普通に Euclid 化します。そうしますと,

$$i(t+\sigma) \quad \rightarrow \quad (\tau + i\sigma) \equiv \rho. \tag{2.18}$$

これは left mover と呼ばれるやつですよね。このように complex variable ρ を導入します。同様に $\bar\rho$ を,

$$i(t-\sigma) \quad \rightarrow \quad (\tau - i\sigma) \equiv \bar\rho \tag{2.19}$$

とします。この ρ と $\bar\rho$ を使いますと, metric は

$$\eta_{\rho\bar\rho} = \frac{1}{2}, \qquad \eta^{\rho\bar\rho} = 2. \tag{2.20}$$

g 自身についてはこれ以外に conformal factor が付きます[4] 。

この座標 $\rho, \bar\rho$ を導入しますと, gauge fixed action は次のように書けます:

$$S = \frac{1}{\pi}\int d^2\rho \left[\frac{1}{2}\partial_\rho \boldsymbol{X}\cdot\partial_{\bar\rho}\boldsymbol{X} + (b_{\rho\rho}\partial_{\bar\rho}c^\rho + b_{\bar\rho\bar\rho}\partial_\rho c^{\bar\rho})\right]. \tag{2.21}$$

ここで $\boldsymbol{X}$ は前の X の 2 倍です:

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{X} \equiv X. \tag{2.22}$$

ちょっと魂胆があるので, こうしておいてください。あとで right mover と left mover を定義するときにこの $\frac{1}{2}$ をつけて定義しますので, その weight に合うような形にしてやります。

また, よく次のような記号を使います。∂_ρ を単に ∂ と書いて, $\partial_{\bar\rho}$ を $\bar\partial$ と書く。それから b は symmetric traceless ですから $\rho\rho$ と $\bar\rho\bar\rho$ 成分しかないわけですが, これらをそれぞれ b と $\bar b$ と書きます。また FP ghost c は vector だったから c^ρ と $c^{\bar\rho}$ 成分がありますが, c^ρ 成分を c と書いて, $c^{\bar\rho}$ 成分を $\bar c$ と書きます。こういう complex coordinate を導入しますとすべての表式がきれいになります。T も symmetric traceless だったので, b と同様に,

$$T_{\rho\rho} = T, \qquad T_{\bar\rho\bar\rho} = \overline{T}. \tag{2.23}$$

T の X からの寄与はどうなるかというと,

$$T^X = -\frac{1}{2}\partial\boldsymbol{X}\cdot\partial\boldsymbol{X} \tag{2.24}$$

ですね。T の bc ghost からの寄与は,

$$T^{bc} = -2b\partial c - \partial b\, c. \tag{2.25}$$

$\overline{T}$ の方はこれらに bar をつけたやつですね。

ここまでまだ運動方程式を解いてないですが, 運動方程式は今や単純です。action が,

$$S = \frac{1}{\pi}\int d^2\rho \left[\frac{1}{2}\,\partial\boldsymbol{X}\cdot\bar\partial\boldsymbol{X} + \left(b\bar\partial c + \bar b\partial\bar c\right)\right] \tag{2.26}$$

ですから, これを X で変分しますと X の運動方程式は

$$\partial\bar\partial\boldsymbol{X} = 0. \tag{2.27}$$

これから, X は ρ だけの関数と $\bar\rho$ だけの関数に分けられる:

$$\boldsymbol{X} = X(\rho) + \overline{X}(\bar\rho). \tag{2.28}$$

これが解。また b, c の方は

$$\bar\partial b = 0\ , \qquad \bar\partial c = 0 \tag{2.29}$$

ですから, これから b, c は ρ の関数。逆に $\bar b$, $\bar c$ は $\bar\rho$ だけの関数となる。

この解 (2.28) を energy momentum tensor (2.24) に代入しますと,

$$T^X = -\frac{1}{2}\partial X\cdot\partial X. \tag{2.30}$$

T は, ρ にしか依存しない部分を pick up して ρ の関数となります。$\overline{T}$ は $\bar\rho$ の関数。

[4] この講義での数式は, だいたい factor は合ってますが, 符号と $\pm i$ は信用してはいけない。だから, modulo $\sqrt[4]{1}$ ぐらいで信用してください。

2.4 Conformal symmetry

action (2.26) には conformal symmetry というのがあります。どういう symmetry かといいますと, 今, 2次元座標を ρ で parametrize しましたが, ρ を,

$$
\begin{aligned}
\rho &\rightarrow \rho' = f(\rho)\ , \\
\bar{\rho} &\rightarrow \bar{\rho}' = \bar{f}(\bar{\rho}) = \overline{(f(\rho))}
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

という一般の holomorphic な関数 $f(\rho)$ に変換する, そういう symmetry です。(ここで holomorphic な変換というのは ρ と $\bar{\rho}$ は混ぜないという意味です。) こういう変換をしますと, 線要素は,

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= e^{\phi} d\rho d\bar{\rho} \qquad (2.32)\\
&= e^{\phi} \left| \frac{df(\rho)}{d\rho} \right|^{-2} d\rho' d\bar{\rho}' \qquad (2.33)
\end{aligned}
$$

となります。これは何を意味しているかというと, 以前 metric は,

$$
g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{\rho\rho} & g_{\rho\bar{\rho}} \\ g_{\bar{\rho}\rho} & g_{\bar{\rho}\bar{\rho}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}e^{\phi} \\ \frac{1}{2}e^{\phi} & 0 \end{pmatrix}
\tag{2.34}
$$

であったのが,

$$
g'_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g'_{\rho'\rho'} & g'_{\rho'\bar{\rho}'} \\ g'_{\bar{\rho}'\rho'} & g'_{\bar{\rho}'\bar{\rho}'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2}e^{\phi} \left| \dfrac{df(\rho)}{d\rho} \right|^{-2} \\ \dfrac{1}{2}e^{\phi} \left| \dfrac{df(\rho)}{d\rho} \right|^{-2} & 0 \end{pmatrix}
\tag{2.35}
$$

となったということです。$g'_{\alpha\beta}$ も conformally flat になっています。conformal factor はともかく, conformally flatness は変わっていないわけです。また, さっき言いましたようにこの conformal factor は action から落ちます。ですから, conformal factor が変わっても action は変わらない。また X は (2.31) に対して scalar の変換性を持つ:

$$
X'(\rho, \bar{\rho}) = X(\rho, \bar{\rho}).
\tag{2.36}
$$

c は上付きの ρ が一つ隠れているので, $d\rho$ と同じ変換性をもたせたい:

$$
c'^{\rho}(\rho', \bar{\rho}') = \left(\frac{d\rho'}{d\rho} \right) c^{\rho}(\rho, \bar{\rho}).
\tag{2.37}
$$

b の方は下付きの ρ が二つ隠れてるわけですね。そうすると2階の tensor のように変換するわけです:

$$
b'_{\rho\rho}(\rho', \bar{\rho}') = \left(\frac{d\rho}{d\rho'} \right)^2 b_{\rho\rho}(\rho, \bar{\rho}).
\tag{2.38}
$$

こういう変換をやると action (2.26) は不変。これを場の conformal 変換という。この変換に対する action の不変性を conformal 不変性というわけです。

次に conformal dimension という概念を導入します (以下ではしばしば conformal というのを省略します)。一般に場 ϕ を持ってきて (z の方が後で都合がいいので, ここでの次元の定義では ρ の代わりに z と書きます), この ϕ に下付きの z が d_+ 個あり, 上付きの z が d_- 個あるとき, ϕ の次元を $d_+ - d_-$ といいます。z を z' に変数変換したときに ϕ は, 以下のように変換される:

$$\phi'(z') = \left(\frac{dz}{dz'}\right)^d \phi(z), \qquad (d = d_+ - d_-). \tag{2.39}$$

つまり, ϕ は下付きの添字が d 個ある場と思って良いわけです:

$$\phi_{\underbrace{z\cdots z}_{d\ 個}}. \tag{2.40}$$

(2.39) のような変換性を持っている場を dimension d の場と呼ぶわけです。一般には添字に z と $\bar{z}$ が混ざっているものがありますが, 使わないのでやめます。

このように定義しますと, X というのは conformal dimension 0 の場です。ghost c は上付きの添字を一つ持ちますから dimension -1 ですね。それから b は下付き添字を二つ持っていますから dimension 2 だと。これは覚えといてください。この ghost が -1 で antighost が $+2$ というのはしょっちゅう使います。それから, 微分を 1 回しますと下付きの添字が一つ増えますから, dimension が 1 個増えるのは普通の dimension counting に相当している。

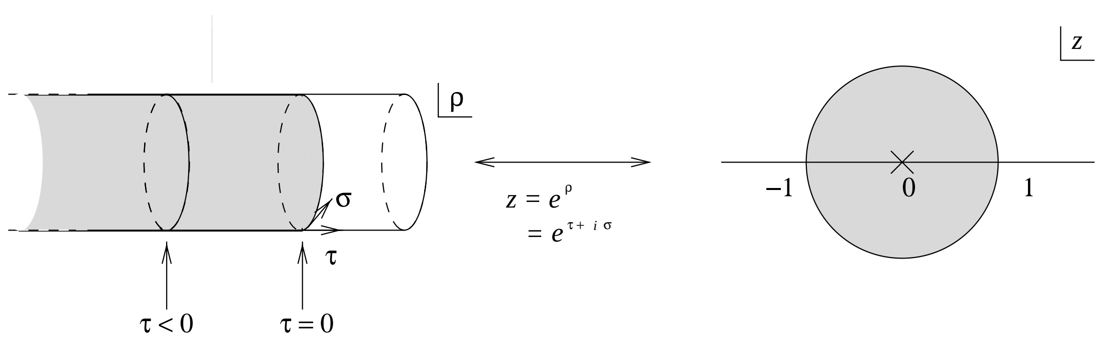

図 1: ρ-plane から z-plane への写像

z の conformal 変換でいろいろな complex plane に写るわけですが, 特徴的で重要な plane を二つ考えます。一つは ρ-plane。ρ-plane を cylinder で書きます。例えば closed string の場合, 円周上に沿って σ 座標をとり, この cylinder の横方向に τ 座標をとります (図 1 左)。ρ は先程いいましたように (2.18) で定義されていますが, この ρ-plane に対して非常に単純な mapping

$$z = e^{\rho} \tag{2.41}$$

を導入します。このとき図 1 の左で影をつけた $-\infty < \tau < 0$ の半無限 cylinder はこの mapping で z-plane の単位円内に写ります。τ が negative な部分は e^{ρ} の絶対値が 1 より

小さいので, z-plane の単位円内, 逆に τ が positiveである部分は単位円の外側に写ります。というわけでこの無限に伸びた cylinder の表面は mapping (2.41) で結局 complex plane 全体を覆います。この mapping は string を考える時の基本的な mapping でよく使いますので覚えておいてください。$\tau=-\infty$ は z-plane の原点になります。この $\tau=-\infty$ の無限遠点から順番に string が時間発展していきますが, その時間発展する closed string は, z-plane に map すると原点からどんどん輪っかが拡がって時間発展していくように見えます。$\tau=0$ での closed string は z-plane 上の単位円の円周になる。τ が正のところに時間発展すればどんどん同心円が出てくるわけです。これもちょっと覚えておいてください。

ρ-plane で oscillator mode を定義します。

$$\phi(\rho)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\phi_n e^{-n\rho}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\phi_n e^{-n(\tau+i\sigma)}. \tag{2.42}$$

これはいわゆる left mover で,

$$\phi(\rho)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\phi_n e^{-in(t+\sigma)} \tag{2.43}$$

を Euclid 化したものですね。この Fourier 変換で定義した係数 ϕ_n を場 ϕ の creation annihilation operator とします。

z-plane へ map して同じことを考えます。今, ϕ は dimension d の場としていますから, ρ の index が下に d 個あり, ϕ は

$$\phi(z)=\left(\frac{d\rho}{dz}\right)^d\phi(\rho) \tag{2.44}$$

という変換則に従います。ここで $\frac{d\rho}{dz}=z^{-1}$ だから,

$$\phi(z)=\sum_n\phi_n z^{-n-d}. \tag{2.45}$$

conformal field theory をやるのに非常に気持ち悪いのはこれです。このように z-plane 上で oscillator を定義するときの係数は z^{-n} だけではなくて z^{-d} という一見わけの分からない factor がでます。先程までしつこく ρ と書いていたのはこの違いがあるからです。z はこっちの意味 ($z=e^\rho$) で使います。だから z-plane で oscillator を展開するときには $-n-d$ 乗ですね。ρ で書いているとこの d のずれはないんです。

それで, この Fourier 逆変換から,

$$\phi_n=\oint_C\frac{dz}{2\pi i}z^{n+d-1}\phi(z). \tag{2.46}$$

要するに (2.45) の ϕ_n を取り出したければ, その係数 z^{-n-d} を消して更に $1/z$ を掛けて, 原点まわりの適当な contour で積分すると, Cauchy の定理でちょうど (2.45) のうち ϕ_n が pick up されますね。これも覚えといてください。

僕はこの公式を決して覚えられない。この d が $+$ だったか $-$ だったか, 覚えられないし, これが $d-1$ ずれていることも決して覚えられない。ほんで, 一回一回見るんです。最初っからやっていくと当たり前ですが, いちいち思い出すのにこの derivation をやっていると面倒臭いです。覚えるのが一番なんですが覚えられないですよね。皆さん若いですから覚えておいてください。

2.5 第一量子化

それで, X 座標はさっきいいましたように conformal dimension 0 ですから, (2.28) の右辺の argument を ρ から z に変えても変な factor が出ない。従って,

$$\boldsymbol{X}(\sigma,\tau) = X(z) + \overline{X}(\bar{z}) \tag{2.47}$$

となります。$X^\mu(z)$ の mode 展開は

$$X^\mu(z) = x^\mu - i\alpha_0^\mu \ln z + i\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^\mu z^{-n} \tag{2.48}$$

で, $\bar{X}^\mu(\bar{z})$ の mode 展開は bar を付ければよく,

$$\overline{X}^\mu(\bar{z}) = \bar{x}^\mu - i\bar{\alpha}_0^\mu \ln \bar{z} + i\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\bar{\alpha}_n^\mu \bar{z}^{-n} \tag{2.49}$$

となります。

この z と $\bar{z}$ はそれぞれ left mover と right mover をあらわしていますが, 今 closed string ですから, 左回りの mode は永久に左回り, 右回りの mode は永久に右回り。この bar 付きの oscillator と bar 無しの oscillator はみな独立。それから, x と $\bar{x}$, α_0 と $\bar{\alpha}_0$ という zero mode ですが, 交換関係は

$$[x^\mu, \alpha_0^\nu] = [\bar{x}^\mu, \bar{\alpha}_0^\nu] = i\eta^{\mu\nu} \tag{2.50}$$

と定義します。この α_0 と $\bar{\alpha}_0$ ですが, 実は等しくなります。closed string の σ 座標は $-\pi$ から $+\pi$ とします。closed string ですから σ を 2π ずらすと同じ点にならないといけない。時空の X 座標でいって同じ点でないといかん。そうしますと, (2.48) の展開の,

$$\ln z = \tau + i\sigma \tag{2.51}$$

の項で $\sigma \mapsto \sigma + 2\pi$ としますと, $\boldsymbol{X}$ は,

$$2\pi(\alpha_0 - \bar{\alpha}_0) \tag{2.52}$$

だけずれますね。従って target space で元の点に戻るためには, (2.52) が zero にならなければいけません[5]。従って,

$$\alpha_0 = \bar{\alpha}_0. \tag{2.53}$$

momentum density P を求めるために, action を $\dot{X}$ で微分しますと,

$$2\pi P(\sigma,\tau) = 2\dot{X}(\sigma,\tau) \tag{2.54}$$

[5] compact 化してますと必ずしも元の値に戻る必要はありません。例えば torus compact 化だとその半径を R とすれば $2\pi R$ だけ, あるいはその整数倍だけずれてもいいのですが, ここでは compact 化していない場合を考えることにします。

だということが分かります。ほいで,

$$2\pi P(\sigma,\tau)=(\alpha_0+\bar{\alpha}_0)+\text{oscillators.} \tag{2.55}$$

これを σ について 0 から 2π まで積分しますと total momentum p が,

$$2\pi p=(\alpha_0+\bar{\alpha}_0)2\pi \tag{2.56}$$

のように得られます。ここで (2.53) を使うと,

$$\alpha_0^\mu=\bar{\alpha}_0^\mu=\frac{1}{2}p^\mu \tag{2.57}$$

となります。それで, x, $\bar{x}$ は (2.50) より p に対して同一の交換関係を満たすので, 等しいとおくことができます:

$$x=\bar{x}=\frac{x+\bar{x}}{2}. \tag{2.58}$$

すなわち x, $\bar{x}$ はいずれも重心 $\frac{1}{2}(x+\bar{x})$ とすることができるわけです。

次に X^μ と P^ν の交換関係は,

$$[X^\mu(\sigma),P^\nu(\tilde{\sigma})]=i\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma-\tilde{\sigma}) \tag{2.59}$$

と設定します。この式より,

$$[\alpha_n^\mu,\alpha_m^\nu]=\eta^{\mu\nu}\cdot n\cdot\delta_{n+m,0} \tag{2.60}$$

となります。X が conformal field と言い難いのは, mode 展開 (2.48) に多価関数 $\ln z$ が含まれているからです。だから, あまり堂々とはいえない。数学者の前では言えない。それに対して ∂X は 堂々と言って良いわけで, というのは ∂X は次のようになっています:

$$\partial X^\mu=-i\sum_n\alpha_n^\mu z^{-n-1}\ . \tag{2.61}$$

だから, α_n というのはむしろ ∂X の展開 mode ですね。先程言いましたように ∂X は dimension 1 の field ですから, α_n の係数が z^{-n-1} となり, z^{-1} だけずれているわけです。

次に ghost $c(z)$ の mode 展開ですが, $c(z)$ は dimension が -1 ですから,

$$c(z)=\sum_n c_n z^{-n+1}. \tag{2.62}$$

antighost $b(z)$ は dimension 2 ですから,

$$b(z)=\sum_n b_n z^{-n-2}. \tag{2.63}$$

$\bar{c}$, $\bar{b}$ の方は皆 bar を付ける。そうすれば oscillator の反交換関係は,

$$\{b_n,c_m\}=\{\bar{b}_n,\bar{c}_m\}=\delta_{n+m,0}. \tag{2.64}$$

open string では右回りと左回りは実は同じものです。なぜかと言いますと, 端がありますから右に飛んでいったやつは必ず跳ね返されて帰ってくるので, 結局安定な mode としては standing mode しかないわけです。左回り mode と右回り mode が同じものであるというのが standing mode でしたので, 従って open string の場合は, closed string のときに得た oscillator mode の bar の付いたものと付いてないものが等しくなる:

$$\bar{\alpha}_n = \alpha_n, \quad \bar{c}_n = c_n, \quad \bar{b}_n = b_n. \tag{2.65}$$

こうしておけば open string の表式がそのまま得られます。それからここで一箇所違うのは, α_0 と p の関係です。先程一生懸命 α_0 と p の関係を出してきたわけですが, もう１度同じことをやります。繰り返しませんが, この α と $\bar{\alpha}$ が等しいということと, 先程の total momentum p を求める際の σ 座標の積分範囲が 0 から π であるために, 結局 open の場合は,

$$\alpha_0^\mu = p^\mu \tag{2.66}$$

という関係になります。

3 Conformal Field Theory

3.1 Conformal vacua

準備の準備が終わりましたので, その続きの conformal field theory (CFT) をやります。ここで conformal field theory の全体を review するつもりは全然ないですけど, conformal field theory をごくごく簡単に, といいながらちょっとかかるんですが, 紹介したいと思います。

で, conformal field theory といってもいろいろありますが, z-plane, つまり, 普通の complex plane 上の conformal field theory をちょっと review したいと思います。それで, ここらへんは Peskin の review が詳しいですので, 詳しい話はそれを参照してください。complex plane と言っても, 無限遠点も含めば, 球面 S^2 ですね。S^2 上の conformal field theory ですが, 今 notation として, こういう記号を使います:

$$\langle X(z)\, Y(w)\, \cdots \rangle \equiv \langle \Omega |\, \mathrm{T}\, X(z)\, Y(w)\, \cdots\, |\Omega \rangle\,. \tag{3.1}$$

ここで, X とか Y とかいうのは, 先程書きました X とか ghost c とかそういう operator です。それから, T は time ordering です。原点から測った距離の log が時間でしたから, time ordering というのは, radial ordering のことですね。この T は紛らわしいことですが往々にして省略されます。$|\Omega\rangle$ とか $\langle\Omega|$ とかいう vacuum は $SL(2,\boldsymbol{C})$ vacuum, あるいは conformal vacuum といいます。その名前の由来はあとで分かります。(3.1) の $X(z)Y(w)\cdots$ を oscillator 表示して, 普通に計算すればいいのですが, これを具体的にやります。

まず dimension d の場 ϕ の ϕ_n は,

$$\phi(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n w^{-n-d}, \tag{3.2}$$

$$\phi_n = \oint \frac{dw}{2\pi i} w^{n+d-1} \phi(w) \tag{3.3}$$

ですが, この ϕ_n が vacuum $|\Omega\rangle$ にかかったときにいつ消えるかというと, 答えはこうです:

$$\phi_n |\Omega\rangle = 0 \quad \text{for} \quad n \geq 1-d. \tag{3.4}$$

これを説明します。(3.1) から

$$\left\langle X(z_1)Y(z_2)\cdots \oint_C \frac{dz}{2\pi i} z^{n+d-1}\phi(z) \right\rangle = \langle\Omega| \, \mathrm{T} X(z_1)Y(z_2)\cdots\phi_n |\Omega\rangle \tag{3.5}$$

のような式が出るわけですが, この contour C を充分小さくとって, $z_1, z_2, \cdots$ を含まないようにします。つまり, この contour C の中にはもはや $\phi(z)$ 以外の field は何もなくて, radial ordering で ϕ_n が一番右側に来ているときを考えます。ここで, $\phi(z)$ は $|\Omega\rangle$ の上では $z=0$ で regular になっているということを要請します。そうすると, $n+d-1 \geq 0$ のとき, つまり $n \geq 1-d$ ならば (3.5) の contour 積分は消える。だから ket vacuum $|\Omega\rangle$ は条件 (3.4) で指定されます。逆にこうしておけばこの $\phi(z)$ は $z=0$ で regular になっているということが実現できる。

同様に bra vacuum $\langle\Omega|$ に対して同じことをやります。同じことといってもちょっと違うんですが, 答は,

$$\langle\Omega| \phi_n = 0 \quad \text{for} \quad n \leq d-1 \tag{3.6}$$

となります。これを説明します。(3.5) と同じような記号で書きますと,

$$\left\langle \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+d-1}\phi(z)\cdots \right\rangle \tag{3.7}$$

となりますが, 今この ϕ_n が bra vacuum $\langle\Omega|$ に直接引っかかって, 一番左側にあるということは, この $\phi(z)$ の operator は一番未来つまり $z=\infty$ にあるということです。だからこの表式で z が無限遠にいったときの振る舞いを見ないといけない。で $z=\infty$ でこれが regular であることを要請します。それでその要請でもって bra vacuum $\langle\Omega|$ を定義づけるわけです。そこで, 無限遠点の振る舞いを調べるためにはもちろん z のかわりに $w=1/z$ という変数変換をすればよい。この時 z の無限遠点は w の零点になります。(もっと自然なのは $w=-1/z$ ですが, 今符号は関係ないので $1/z$ でいきます。) そうすると前の話とほとんど同じになります。つまり (3.7) は,

$$\begin{aligned} \left\langle \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+d-1}\phi(z)\cdots \right\rangle &= \left\langle \oint \frac{dw}{2\pi i} w^{-n-d-1} \left(\frac{dw}{dz}\right)^d \phi(w)\cdots \right\rangle \\ &= \left\langle (-1)^d \oint \frac{dw}{2\pi i} w^{-n+d-1}\phi(w)\cdots \right\rangle \end{aligned} \tag{3.8}$$

となる。$w=0$ すなわち $z=\infty$ で $\phi(w)$ が $\langle\Omega|$ にかかったとき regular であると要請します。すると, 結局 $-n+d-1 \geq 0$ のとき消える。そうすると (3.6) になりますね。

(質問) ϕ が無限遠で正則なんですか。

(答) 本当は z-plane ではなくて S^2 を考えているんですね。

(質問) S^2 全体で正則なんですか。そういうものはあるんですか。

(答) 正則というのは他に operator がなければということです。だからさっきの bra の方でいったように (3.5) の contour C 積分があるんですが, この contour C の中に他に operator がなければ正則。

(質問)？

(答) 外側に変な operator があるわけです。だからこの ϕ が外側の operator とひっかかってくると singularity はいっぱい出てきますよ。今何を言っているかというと原点で regular あるいは無限遠点で regular だと要請する。それだけです。S^2 全体で regular だとは要請していません。

それで他に何も operator がなければ, この ϕ が直接 $|\Omega\rangle$ とか $\langle\Omega|$ にかかるわけですが, そのときに field ϕ が regular であるという要請でこの bra vacuum $\langle\Omega|$, ket vacuum $|\Omega\rangle$ を決める。そうすると (3.4),(3.6) のような性質がでてくる。これは, 実はかなり普通の Fock vacuum とは違うんですが, 普通の Fock vacuum をいうのを忘れていたので, まず普通の Fock vacuum を説明します。

最初に Hamiltonian というのを, 次のように定義します:

$$H = \int d\sigma \, \left(T(\sigma) + \overline{T}(\sigma)\right) = L_0 = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha_{-n}\cdot\alpha_n + n(b_{-n}c_n + c_{-n}b_n)). \tag{3.9}$$

この operator が state の energy を与えるので, Hamiltonian といっているわけです。α_n と L_0 の交換関係は

$$[\, L_0,\, \alpha_n \,] = -n\alpha_n \tag{3.10}$$

なので, これを Hamiltonian だと思いますと, 固有値が n 下がるわけですね。ですからこういう oscillator で普通に vacuum $|0\rangle$ を定義しますと

$$\alpha_n\,|0\rangle = 0, \quad b_n\,|0\rangle = 0, \quad c_n\,|0\rangle = 0 \quad \text{for} \quad n > 0. \tag{3.11}$$

つまり $n > 0$ で消える。$n = 0$ を入れるかどうかは好みによりますが, n が nonzero positive だと energy が下がりますから, ground state はもちろん $n > 0$ に対して消えないといけない。で c_n だって同じで, b_n だって同じです。これらが $n > 0$ だと L_0 の値を下げてしまうので ground state の定義としては, n が正の label をもつものは annihilation operator であり, creation operator は逆に $-n$ $(n > 0)$ の label をもつものである。これが普通の解釈です。これを満たす vacuum $|0\rangle$ のことを Fock vacuum といいますが, この Fock vacuum $|0\rangle$ と今定義した $|\Omega\rangle$ とは非常に違います[6] 。

[6] 最初に紹介した Peskin の Lecture note とは, $|0\rangle$ と $|\Omega\rangle$ の記号が逆です。彼はこの Fock vacuum を $|\Omega\rangle$ と書いて, $SL(2,\boldsymbol{C})$ vacuum を $|0\rangle$ と書いていますので, 混乱ないようにしてください。どっちをたくさん使うかの問題ですが, physical には Fock vacuum が素直な vacuum ですからこっちを $|0\rangle$ と書くのがいいでしょう。ただ technical には conformal field theory は非常に強力でですね, そっちの方に重きを置くとしたら, $SL(2,\boldsymbol{C})$ vacuum を $|0\rangle$ と書く方がいいかも知れない。

例えば, これはほとんど違わないやつですが, dimension 1 の conformal field である ∂X :

$$\partial X = -i \sum_n \alpha_n^\mu z^{-n-1} \tag{3.12}$$

を考えましょう。∂X の Fourier component α_n が (3.3) の ϕ_n に相当するものですから, α_n はこの $SL(2,\boldsymbol{C})$ vacuum(conformal vacuum) $|\Omega\rangle$ ではどうなっているかというと (3.4),(3.6) より

$$\begin{cases} \alpha_n^\mu |\Omega\rangle = 0 & \text{for } n \geq 0 \\ \langle\Omega| \alpha_n^\mu = 0 & \text{for } n \leq 0 \end{cases} . \tag{3.13}$$

だから Fock vacuum $|0\rangle$ とほとんど同じです。ただこれは α_0 も含んでますね。α_0 は open の場合は total momentum p だし, closed の場合は α_0 も $\bar{\alpha}_0$ も $\frac{1}{2}p$ で, とにかく p なんです。で $SL(2,\boldsymbol{C})$ vacuum(conformal vacuum) $|\Omega\rangle$ は p で消えるということ, momentum も値が決まっているということを覚えておいてください。だけど大して違わないですね。Fock vacuum は oscillator に対してしかものをいってないので, つまり α_0 に対しては何も指定していないので (3.13) の $|\Omega\rangle$ も α_n に対しては Fock vacuum ですね。(3.11) に $n=0$ を入れてもいいから, 入れれば α の mode に対しては (3.13) の $|\Omega\rangle$ と Fock vacuum と同じ概念になりますね。つまり, これも $n=0$ 以上で消えることを要請しますと $SL(2,\boldsymbol{C})$ vacuum と Fock vacuum は同じ概念になります。

だけど本質的に違うのは bc ghost の部分です。bc ghost は, $|\Omega\rangle$ をいつ消すかというと, この b ghost は dimension 2 ですから, (3.4) より n が $1-2=-1$ 以上で消える。それから $\langle\Omega|$ の方は, b_n がいつ消えるかというと, $d=2$ ですから, (3.6) より $2-1=1$ 以下で消える:

$$b = \sum_n b_n z^{-n-2} \quad \Rightarrow \begin{cases} b_n |\Omega\rangle = 0 & \text{for } n \geq -1 \\ \langle\Omega| b_n = 0 & \text{for } n \leq 1 \end{cases} . \tag{3.14}$$

b ghost はこういう性質を持っている。そうしますと非常に変なことになってて b_1, b_0, b_{-1} の三つの mode はどれも $|\Omega\rangle$ と $\langle\Omega|$ の両方で消える。同様に c ghost の方でやりますと

$$c = \sum_n c_n z^{-n+1} \quad \Rightarrow \begin{cases} c_n |\Omega\rangle = 0 & \text{for } n \geq 2 \\ \langle\Omega| c_n = 0 & \text{for } n \leq -2 \end{cases} \tag{3.15}$$

となって, 逆に c_1, c_0, c_{-1} は $|\Omega\rangle$ と $\langle\Omega|$ の両方で消えない, という非常に変なことになります。で, これが非常におもしろいところでもあるんですが, それはもうちょっと後に回します。

3.2 CFT の technique

conformal field theory で非常に重要な概念は, conserved charge がいくつかあり, 普通の current j_α があるんですけども, complex coordinate を使いますと, j_z とか $j_{\bar{z}}$ とかの保存

則はこの j_z が holomorphic function で $j_{\bar{z}}$ は antiholomorphicである, ということです。これが $\partial_\mu j^\mu = 0$ ということですね。それで charge は

$$Q = \oint_C \frac{dz}{2\pi i} j(z) \tag{3.16}$$

です。z-plane で同時刻の線は円に map されたわけですから, この contour C は円周になるわけです。だから同時刻の σ 座標について 2π 積分したということで, chargeが定義されたわけです。open の場合は適当に理解してください。それで, この保存則つまり時間によらないというのは半径をどんな半径にしても良いということですね。ところが (3.16) はもっと強いことをいっています。Cauchy の定理からこの contour C を自由に deform できるわけです。自由に deform できるわけですから, 円にきっちりそって積分しなくても, どこで積分しても同じ値になるわけですね。ですから Cauchy の定理というのは保存則ばかりか, それ以上に自由な deformation を許します。このことだけをとっても, conformal field theory を知っているということが役に立つ。

これだけでもいいんですが, さらに, この非常に便利な性質は, (3.16) の Q という charge operator と何か field operator あるいは composite operator との交換関係を計算すると

$$\langle\Omega|\cdots[Q, \phi(w)]\cdots|\Omega\rangle = \left\langle\cdots \oint_{C_w} \frac{dz}{2\pi i} j(z)\phi(w)\cdots\right\rangle \tag{3.17}$$

が成り立つ, ということです。これが techniqueとして便利なものですね。この contour C_w は w のまわりの contour になります。これを説明します。Q と $\phi(w)$ の交換関係 $Q\phi - \phi Q$ は z-plane で見ますと, Q というのは半径の決まった円周上で積分するわけですから, 今 Q が $\phi(w)$ の左側にあるということは右辺の計算では全部 radial ordering ですから, ϕ の外側の円周上に沿って積分したものです。それから Q が $\phi(w)$ の右側のやつは ϕ の内側の contour に沿ってこの current j を積分すればよい。で, 引き算をしなさいといっているわけですから, 右回りに積分すればいい。つまり, この $\phi(w)$ の直後の円周上と直前の円周上の引き算をやるんですから, $\phi(w)$ のないところは, この間に何も入っていないので, みんな cancel しますね。結局 $\phi(w)$ のところだけ残って, contour を変形すれば w のまわりに積分をすればいいということになります。これは非常に便利な techniqueです。この積分をどう評価するかというと, Operator Product Expansion (OPE) でこの $z - w = 0$ の singularity の pole を pick up するわけですから, その residue を計算するだけでいいわけです。

3.3 Operator product expansion

まず dimensionが d の field ϕ があったとしましょう。実は単に dimensionが d というだけでなくて, もう少し細かい primary field という概念があります。$\phi(w)$ が primary field であるとは, energy momentum tensor $T(z)$ と以下の OPE を満たす場合をいいます:

$$T(z)\phi(w) = \frac{d}{(z-w)^2}\phi(w) + \frac{1}{z-w}\partial\phi(w) + (\text{non-singular}). \tag{3.18}$$

先程計算しましたように,

$$T(z)=-\frac{1}{2}\partial X\cdot\partial X-2b\partial c-\partial bc \tag{3.19}$$

が energy momentum tensor T だったんですが, この右辺で何も書いてない積は normal product です。conformal field theory の中では何も書いていないときは, normal order になっているという了解です。上式の中の $\partial X\cdot\partial X$ は normal order $:\partial X\cdot\partial X:$ がとられています。normal order というのはどういう normal order かというと, dimension d の field の Fourier component で $n\geq 1-d$ の label を持つものは, annihilation operator, $n\leq -d$ の label を持つものは creation operator だと思って, creation は左側に, annihilation は右側に, という意味の normal order です。(3.4) より, この概念は conformal vacuum $|\Omega\rangle$ に refer した normal order です。(3.18) の ϕ として ∂X をとったときこの ∂X 自身は single field だから normal order も何もないのですが, (3.18) の掛け算しますと, z と w が同じ点にいくとき, $T(z)$ の中の ∂X と $\phi(w)$ に相当する ∂X の間は normal order がとられてないので, singularity が発生します。

その singularity は, propagator を用いて計算できます。propagator は operator の言葉で正確に言うと,

$$\langle\tilde{\Omega}|\mathrm{T}X(z)X(w)\,|\Omega\rangle \tag{3.20}$$

になります[7]。これを

$$\langle X(z)X(w)\rangle \tag{3.21}$$

と書くことにします。Wick の定理ではこの propagator の概念を

$$\overbracket{X(z)X}(w) \tag{3.22}$$

とも書いたわけですね。oscillator 展開はすでに定義されていたし, vacuum も定義されていますから, propagator は簡単に計算できます。計算しますと,

$$\langle X(z)X(w)\rangle \;=\; -\ln(z-w) \tag{3.23}$$

になります。同様に, bc ghost も propagator:

$$\langle b(z)c(w)\rangle \;=\; \frac{1}{z-w} \tag{3.24}$$

を持ってます。

それで $-\frac{1}{2}:\partial X\cdot\partial X(z):$ と $\partial X(w)$ の積は z と w が近づくと書き直さないといけないわけですね。singularity を pick up して, 全体の normal order に書き直す。全体の normal order に書き直せれば, 残りは regular です。normal order に直しますと, 単なる積のやつとは概念が違うわけですね。そこで Wick の定理が何をいっているかというと, 何か normal

[7] 後に分かるように, (3.57) が初めて non-zero であるので, propagator の定義には $\langle\Omega|$ のかわりに $\langle\tilde{\Omega}|\equiv\langle\Omega|\,c_{-1}c_0c_1$ を用いなければなりません。次の bc ghost の propagator についても同様です。

order に直すという操作です。contraction の部分が (3.23) のように singularity を作るわけですが, それを pick up すると

$$
\begin{aligned}
T(z)\partial X(w) &= -\tfrac{1}{2}:\partial \overbracket{X(z)\cdot\partial X(z):\partial X}(w) - \tfrac{1}{2}:\partial X(z)\cdot\partial \overbracket{X(z):\partial X}(w) + \cdots \\
&= \frac{1}{(z-w)^2}\partial X(w) + \frac{1}{z-w}\partial\partial X(w) + (\text{non-singular})
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

のようになります。一般にこういう形になるやつを primary field といいます。dimension d の primary field は (3.18) になる。primary field でないやつはどういうやつのことかといいますと, これ以上に singular なやつですね。 例えば,

$$
\frac{1}{(z-w)^4} \tag{3.26}
$$

とか, もっと singular なやつ, そういうのが T との OPE で出てきた場合, primary field ではない。

(3.18) の意味ですが, これは単純な意味を持っています。

$$
z \mapsto \tilde{z} = z + \epsilon(z) \tag{3.27}
$$

という無限小の変数変換を考えると, energy momentum tensor T は一般の translation の generator ですから, それに $\epsilon(z)$ を掛け算して, 積分したものはこの変数変換を起こす generator T_ε になるわけです:

$$
T_\varepsilon \equiv \oint \frac{dz}{2\pi i}\varepsilon(z)T(z). \tag{3.28}
$$

この変換を考えましょう。そうしますと, 先程のこれだけ知っていれば conformal field theory を知っている価値があると言ったあの technique からこの T_ϵ と ϕ の交換関係を計算できます。そのためには, 単に (3.18) に $\epsilon(z)$ をぶっかけて, w のまわりに contour 積分をやれば良いわけですね。そうすれば左辺は, 交換関係。で右辺ですが, $\epsilon(z)$ をこの w のまわりで Taylor 展開しますと,

$$
\epsilon(z) = \epsilon(w) + \partial\epsilon(w)(z-w) + \cdots. \tag{3.29}
$$

それで (3.18) の初項が double pole ですから, $\epsilon(z)$ の展開の 1 次の項を引っぱってくれば simple pole になって, その residue が $d\partial\epsilon(w)\phi(w)$, それから第 2 項, これはいきなり pole ですから, pole residue は $\epsilon(w)\partial\phi(w)$ ですね。だから (3.18) の OPE の singularity 構造は, operator に直すとこういう交換関係を持っていることを意味します。

$$
[T_\epsilon, \phi(w)] = d\partial\epsilon(w)\phi(w) + \epsilon(w)\partial\phi(w). \tag{3.30}
$$

この交換関係は $z \mapsto \tilde{z}$ という変数変換をやったときの ϕ という field の変化分ですが, この式は実は ϕ が dimension d の field であるということを言っているに過ぎません。すなわち, いちいちこう考えないと分からないのですが, dimension d の field ϕ は, index z が下に d 個あるから, z から $\tilde{z}$ に変数変換しますと,

$$
\phi(z) = \left(\frac{d\tilde{z}}{dz}\right)^d \phi(\tilde{z}). \tag{3.31}
$$

$\tilde{z}$ の z からのずれが $\epsilon(z)$ ですから, $\phi(\tilde{z})$ のずれが $\epsilon(z)\partial\phi(z)$ ですね。$\left(\frac{d\tilde{z}}{dz}\right)^d = \left(1+\frac{\partial\epsilon}{\partial z}\right)^d$ のずれは, $d\partial\epsilon(z)\phi$ です。だから (3.31) の変換則だったとすると, $\phi(\tilde{z})$ から出る変化分が $\frac{1}{z-w}\partial\phi(w)$ で $\left(\frac{d\tilde{z}}{dz}\right)^d$ から出る変化分が $\frac{d}{(z-w)^2}\phi(w)$ です。二つを足したものが, まさに (3.18) に出ていますね。だから (3.18) の OPE はなんのことはない, (3.31) の変換則を言っているだけです。だからまとめますと, (3.18) の第 2 項は argument の変化分, $\epsilon(z)$ だけ argument を translation した部分です。それから, 第 1 項は dimension d を表している。それぞれの項の意味がそういうように理解できます。逆に, ある field と $T(z)$ の OPE をみて, その singularity がこういう構造になっているということを確かめたら, その field が primary field であることが分かり, residue をみたら, dimension が分かります。

それから Virasoro operator という大事な operator を定義します。Virasoro operator L_n というのは, energy momentum tensor の Fourier 成分です。

$$L_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z). \tag{3.32}$$

それで, singularity の構造を, Virasoro operator に対する交換関係に書き直せますね。$\epsilon(z)$ を特に z^{n+1} ととりますと, $T_\epsilon = L_n$ ですから,

$$[\, L_n,\, \phi(w)\,] = d(n+1)w^n\phi(w) + w^{n+1}\partial\phi(w) \tag{3.33}$$

となりますね。さらに両辺に w^{m+d-1} を掛け算して, dw contour 積分しますと, 次の式から L_n と ϕ_n の一般的な交換関係が計算できますね。

$$\phi_m = \oint \frac{dw}{2\pi i} w^{m+d-1}\phi(w). \tag{3.34}$$

そうすると答えは,

$$[\, L_n,\, \phi_m\,] = (n(d-1)-m)\,\phi_{n+m}. \tag{3.35}$$

それでどうしても後で出てくるので dimension を計算したい operator があります:

$$e^{ik\cdot X(w)}. \tag{3.36}$$

これがなんで必要かといいますと, さっき言いましたように conformal vacuum は momentum p で消えたわけですよね。だから conformal vacuum は momentum 0 の状態だけど, momentum を運んでいる string state が欲しいわけですから, それを作るためには $\exp(ikx)$ が必要ですね。x とは p をずらす演算子ですから, $\exp(ikx)$ を掛けると momentum k を運んでいる状態になります。この x を大文字の X にしといてもいいわけですから, そういう operator の次元を計算したい。それには先程の公式に従って T との OPE を計算すればいい。つまり

$$T(z)\, e^{ik\cdot X(w)} \tag{3.37}$$

を計算して (3.18) の形にまとまることをみて, 2 次の singularity を見たらいいわけです。これを真面目に計算しましょう。T の中の X 部分が問題です。それ以外は singularity をだ

しませんから。この conformal field theory はまったくの free ですから, normal order に直すのはさっきも言いましたように, 要するに Wick の定理ですね:

$$
\begin{aligned}
T(z)\, e^{ik\cdot X(w)} &= -\frac{1}{2} : \partial X(z)\cdot\partial X(z) : : e^{ik\cdot X(w)} : \\
&= -\frac{1}{2} : \partial X(z)\cdot\partial X(z) \ \exp(ik\cdot X(w)) : \\
&\qquad -\frac{1}{2}\times 2 \ : \partial X(z)\cdot\partial X(z)\exp(ik\cdot X(w)) : \\
&\qquad\qquad -\frac{1}{2} \ : \partial X(z)\cdot\partial X(z)\exp(ik\cdot X(w)) : \ . \qquad (3.38)
\end{aligned}
$$

$\partial X(z)$ と $e^{ik\cdot X(w)}$ を 2 回 contraction したやつと, それから 1 回 contraction したやつがあります。1 回 contraction したやつはどっちの $\partial X(z)$ をつぶすかで 2 通りあるわけですから, 2 倍でます。これでもう終りですね:

$$
\begin{aligned}
T(z)\, e^{ik\cdot X(w)} &= -\frac{1}{2}\left(ik\frac{-1}{z-w}\right)^2 : e^{ik\cdot X(w)} : -\left(\frac{-1}{z-w}\right) : ik\cdot\partial X(z) e^{ik\cdot X(w)} : \\
&\qquad -\frac{1}{2} \ : \partial X(z)\cdot\partial X(z) e^{ik\cdot X(w)} : \\
&= \frac{k^2/2}{(z-w)^2} e^{ik\cdot X(w)} + \frac{1}{z-w}\,\partial(e^{ik\cdot X(w)}) + (\text{non-singular}). \qquad (3.39)
\end{aligned}
$$

これは (3.18) とちょうど同じ形ですね。(3.39) の $e^{ik\cdot X(w)}$ が (3.18) の $\phi(w)$ に対応しますので, $\partial(e^{ik\cdot X(w)})$ が $\partial\phi$ になりますね。そういうふうに見ると (3.39) の右辺第 2 項が translation term で, 右辺第 1 項が dimension term であることが分かります。ですからこの計算で何が分かったかというと, $e^{ik\cdot X(w)}$ の dimension は $k^2/2$ ということです。これもちょっと覚えておいてください。これがこの講義で具体的にやる唯一の計算で, このたぐいの他の計算は自分でやって下さい。

3.4 Central charge

同様に, $T(w)T(z)$ を今の contraction の公式を使って計算しますと, 一般に次のような形になります:

$$
T(w)T(z) \sim \frac{c/2}{(w-z)^4} + \frac{2}{(w-z)^2}T(z) + \frac{1}{w-z}\partial T(z) + (\text{non-singular}). \qquad (3.40)
$$

つまり, (3.18) の形にまとまりません。だから T はこういう意味で primary field ではありません。僕が勝手に付けているだけかもしれませんが, それぞれ名前があります。右辺第 2 項は dimension term で dimension が 2 だということをいっています。energy momentum tensor は下の添字を二つ持っていたことからも想像がつくように, dimension 2 です。それから右辺第 3 項はさっきの translation term ですね。ここまでは primary field の変換則とまったく同じですが, 右辺第 1 項が出ます。この項を central charge term といいます。

なぜこれが central charge term といわれるかということを説明しましょう。そのためにまた w^{n+1} と z^{m+1} を (3.40) に掛けての w と z 両方の contour 積分をやります。そうする

と, 先程言いましたように operator の積は operator の交換関係になります。$T(w)$ が L_n を出して $T(z)$ が L_m を出しますね。左辺は $[\,L_n,\,L_m\,]$ になって, 右辺の singularity は contour 積分で Cauchy の積分を使ってやりますと,

$$[\,L_n,\,L_m\,] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n+1)(n-1)\delta_{n+m,0} \tag{3.41}$$

になります。これ計算をやったことのない人はやって慣れておいてください。そうするとこういう techniqueがいかに便利かということが痛感できます。もしこういう technique を知らないと, この交換関係を計算するだけでも大変な労力です。ちょっと想像してもらったらいいんですが, L_n の表式を oscillator で書くと, L_n の X 部分からの寄与は,

$$T^X \to L_n^X = \sum_m \frac{1}{2} : \alpha_{n-m} \cdot \alpha_m : \tag{3.42}$$

で, L_n の bc ghost からの寄与は,

$$T^{bc} \to L_n^{bc} = \sum_m (n+m) : b_{n-m} c_m : \tag{3.43}$$

のような normal product の式になっていますが, これの交換関係を計算してもう一ぺん同じ形の normal product に直さんといけない。それはものすごく大変で, 一ぺんやろうとしてみてください。なんか気が狂うほどの計算です。あの加藤-小川 [3] はそれでやっていますよね! だから彼らは大変な計算をしたんですよ!! で僕は全然 check できなかったんです。ほいで, いまの OPE を計算するのは先程いったように自明な計算です。singularity をどんどん contraction するたびに (3.23) と (3.24) を入れて計算するだけですから, ものすごく簡単な計算です。最後にそれをいともたやすく contour 積分にぽんとほうりこめば, 答がぱっと出てくるわけです。これはすごいんですね。ここらへんだけでも conformal field theory がいいんですが, だけど僕の講義の本題はここじゃなくてこれはまだ準備なんです。

(3.41) の右辺第 2 項が出てくることを conformal anomaly といいます。今 normal ordering とか一切言わないで, classical な理論でこの energy momentum tensor の Fourier 成分を L_n と思って, その Poisson bracket を計算しますと, この第 2 項が出てきません。ひとえにこの項は normal ordering を定義して, quantum theory としてちゃんと定義したときに初めて出てくる項で, これを conformal anomaly といいます。central charge 項と呼ばれるのは, L_n の全ての generator と可換な演算子 $\mathbf{1}$ (すなわち center) の項だからです。

この conformal anomaly の寄与を二つに分離して計算しましょう。energy momentum tensor T^X と T^{bc} はすでに (3.19) で与えているので, これを使って conformal anomaly が計算できます。いま L_n^X と L_n^{bc} は互いに交換するので, conformal anomaly は結局 X の寄与と bc の寄与に分けられます。

まず conformal anomaly の係数 $c/2$ を X の場合に計算してやりますと, $c = D$ になります。D というのは, D 次元のことです。今次元 μ の分だけ場があるわけですから, 場が D 個あることになります。このときそれぞれの場に対して, $c = 1$ の寄与があることを言えばいいですね。具体的にそれぞれの場に対して, ∂X あるいは X の singularity(3.23) を使って c を計算します。(3.23) より,

$$\overbrace{\partial X(z)\partial X}(w) = -\partial_z\partial_w \ln(z-w) = \frac{1}{(z-w)^2} \tag{3.44}$$

となりますから, $1/(z-w)^4$ の寄与は,

$$\frac{1}{4}:(\partial X(z)\partial X(z))::(\partial X(w)\partial X(w)):$$

$$+\frac{1}{4}:(\partial X(z)\partial X(z))::(\partial X(w)\partial X(w)):=\frac{1/2}{(z-w)^4} \qquad (3.45)$$

です。よって $c=1$ を与えます。そうすると, 各次元の寄与は 1 ですので, $c=D$ になります。

次に bc ghost を考えるんですが, bc ghost は非常に変な形をしています。

$$T(z)=-2b\partial c-\partial bc \qquad (3.46)$$

という形をしているんですが, これをもうちょっと一般化して言いましょう。今 b field を dimension j, つまり z が下に j 個ついていて, c field を dimension が $1-j$, つまり z が上に $j-1$ 個ついているというふうに一般化しますと, その bc ghost の energy momentum tensor T は,

$$T(z)=-j\,b\partial c+(1-j)\,\partial bc \qquad (3.47)$$

になります。もちろん今の場合は $j=2$ なんですけど。先程 (3.24) で与えた bc ghost の propagator を用いて, この $T(z)$ の OPE (3.40) を計算しましょう。この場合もほとんど明らかな計算なんですが, ghost が fermion になっていることに注意して, contraction で奇数個跳び越すとマイナスが出ることをちゃんと評価すれば, central charge c は,

$$c=-2(6j(j-1)+1) \qquad (3.48)$$

となります。今 bc ghost の system は $j=2$ ですから,

$$c=-26. \qquad (3.49)$$

total の central charge は, X の寄与と bc ghost の寄与を足したものですが, それぞれの寄与は, X が D で, bc ghost が -26 なので, total の central charge は $D-26$ になります。ですから, $D=26$ つまり target space の次元が 26 の場合に, central charge が消える, ということになります。

3.5 $SL(2,\boldsymbol{C})$ invariance

ところで, (3.41) の右辺第 2 項の anomaly term は, $n=-1,0,+1$ では消えます。消えるということは何を言っているかというと, 要するに, L_{-1} と L_0 と L_1 という三つの generator は central term のない普通の交換関係を満たします。これは $c\neq 0$ の場合でも, anomaly がないのです。それで, 先程言いましたように, L_n は, $\delta z=z^{n+1}$ の変換の generator なので,

$$\alpha L_{-1}+\beta L_0+\gamma L_1 \qquad (3.50)$$

という generator はどういう変数変換に対応するかというと, z の 2 次まで, つまり

$$\delta z = \alpha + \beta z + \gamma z^2 \tag{3.51}$$

の変数変換ですね。closed の場合は, $\bar{L}$ も一緒に考えます。

$$\bar{\alpha}\bar{L}_{-1} + \bar{\beta}\bar{L}_0 + \bar{\gamma}\bar{L}_1 \tag{3.52}$$

という generator は, $\bar{z}$ の 2 次まで, つまり

$$\delta\bar{z} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}\bar{z} + \bar{\gamma}\bar{z}^2 \tag{3.53}$$

の変数変換に対応します。この六つの generator, L_{-1} と L_0 と L_1 とその bar 全体で, 何を作っているかというと, それは, $SL(2,\boldsymbol{C})$ subgroup をなしていますが, full conformal group のなかで, この $SL(2,\boldsymbol{C})$ subgroup は anomaly が出てきていないわけです。この $SL(2,\boldsymbol{C})$ subgroup の無限小変換 (3.51) と (3.53) に対応する有限変換は,

$$z \quad \to \quad z' = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{with} \quad ad-bc=1 \tag{3.54}$$

になります。で, a, b, c, d に total に同じ scale 変換するのは, 分母分子で cancel するから意味がないのです。そこで, a, b, c, d の条件として $ad-bc=1$ をとります。そうすると, この変換群には三つの parameter があります。この変換を $SL(2,\boldsymbol{C})$ 変換といいます。あるいは一次分数変換とか, いっぱい名前があります。linear fractional transformation(一次分数変換), Möbius 変換, projective 変換, どれか好きなやつで呼んでください。linear fractional transformation が一番正統的な気がします。linear fractional transformation の group は anomaly がなく, 常に対称性が破れずに存在する。ほいでですね, このことと非常に関係が深いことがあります。b_{-1}, b_0, b_1 は $|\Omega\rangle$ と $\langle\Omega|$ を両方消しましたが, この性質は, antighost が dimension 2 だけから出てきた結論ですね。energy momentum tensor T も dimension 2 ですから, b を T に置き換えて, その Fourier component L_{-1}, L_0, L_1 の三つは先程言いましたように $SL(2,\boldsymbol{C})$ の generator ですが, この三つも両方消します。それで, 両方消すということはどういうことをいっているかというと, conformal field theory の correlation function $\langle\cdots\rangle = \langle\Omega|\cdots|\Omega\rangle$ は, 次の性質を満たします。つまり,

$$U = \exp(\alpha L_{-1} + \beta L_0 + \gamma L_1) \tag{3.55}$$

という $SL(2,\boldsymbol{C})$ の有限変換を真空ではさんでみると, $|\Omega\rangle$ も $\langle\Omega|$ もどちらもこれで不変です。従って,

$$\langle\Omega|\,\phi(z_1)\phi(z_2)\cdots|\Omega\rangle = \langle\Omega|\,U\phi(z_1)U^{-1}\,U\phi(z_2)U^{-1}\cdots|\Omega\rangle \tag{3.56}$$

のように U と U^{-1} を勝手にはさんでも, 最初と最後の U は真空にかかって 1 だから, 変わらない。つまり, こういう correlation function は場 $\phi(z)$ を勝手に $SL(2,\boldsymbol{C})$ 変換しても, 全く不変であるということが, anomaly の存在に関係せずに常に成り立つ。

さっき $|\Omega\rangle$ を conformal vacuum あるいは $SL(2,\boldsymbol{C})$ vacuum といったのは, これが, $SL(2,\boldsymbol{C})$ invariant だからです。

3.6 Ghost number anomaly

もっと凄まじい関係があります。上で述べたことに dual な関係式がありまして, それはなにかと言いますと, c_{-1}, c_0, c_1 は両方とも消さないという関係式です。さらに,

$$\langle\Omega|\, c_{-1} c_0\, c_1 \,|\Omega\rangle \tag{3.57}$$

が初めて 0 でない。これはちょっと落ち着いて考えれば, 分かります。これが初めて消えないというのは, ghost が 1 個も入ってないとか, 1 個しかないとか, 2 個しかないとかいうのは全部消えるという意味です。これは nonzero ですから, $|\Omega\rangle$ と $\langle\Omega|$ の scale を適当に取りかえますと, 1 にできます。(3.57) が non-zero であることは何を意味しているかというと, 結局 conformal vacuum は ghost number を 3 だけ保存していないということです。実際にこれは ghost number anomaly として理解できます。ghost number は 3 だけ保存していない。で, ghost number current を cb として定義して, これの divergence を考えますと, もし anomaly がなければ, j は z だけの関数で, $\bar{j}$ は $\bar{z}$ だけの関数のはずなんですが, ここでは計算しませんが, これが破れまして,

$$\bar{\partial} j = 3 \cdot \frac{1}{8\pi} R. \tag{3.58}$$

一般にこういう答が出てきます。これを genus g の一般の面上で d^2z 積分します。左辺の積分が σ 積分で ghost number charge $N(\tau) \equiv \oint d\sigma j_\tau$ を出して,

$$N(\infty) - N(-\infty) = 3(g-1). \tag{3.59}$$

こういう ghost number anomaly があることが知られている。この計算は, 例えば, 藤川さんの paper[4] でもやっています。彼が一般の genus の面でやったかどうか知りませんが, 少なくとも sphere の場合はやっています。sphere は genus 0 の面ですから, (3.59) の右辺は -3 ということです。ghost number が $|\Omega\rangle$ から, $\langle\Omega|$ に行くときに 3 個減るというわけです。$c_{-1}c_0c_1\,|\Omega\rangle$ は ghost number 3 の状態ですから, ghost number が 3 個減って, それで収支が合うんですね。で, c を 3 個入れとかないと消えちゃう。これが, ghost number anomaly です。

> (質問) 実際やってみるとなにをやったかは分かるのですが, 直観的にどうして曲がっていると ghost number がずれるんですか。

直観的ではなくてもっと高踏的なんですけど (笑), 非常に深い関係式があるんですね。なんで ghost number から anomaly が出るか, という話が昔からあります。bc ghost というのは, 先程の Lagrangian を見れば分かりますが, 一階微分の chiral fermion と同じ形の Lagrangian を持っています。つまり ghost number anomaly は基本的に chiral anomaly ですね。ほいで, 't Hooft の anomaly の話で分かりますように, anomaly の存在と fermion zero mode の存在というのは, ほとんど同じことですね。で, zero mode があるので, $\langle\Omega|$ と $|\Omega\rangle$ の間に, なにも入れないと消えてしまう。で, c を三つ入れないといかんというのは c ghost という fermion の zero mode が三つあるということですね。従って, ghost number は三つ保存しなくなる。

Atiyah-Singer の index theorem によりますと,

$$\dim\ker\nabla_z^{(-j)} - \dim\ker\nabla^z_{(1-j)} = (2j-1)(g-1). \tag{3.60}$$

ここで ker $\nabla^z_{(1-j)}$ というのは, 微分演算子 $\nabla^z_{(1-j)}$ の zero mode solution の空間です。つまり, $\dim\ker\nabla^z_{(1-j)}$ は, $\nabla^z_{(1-j)}$ の zero mode の個数ですね。 $\nabla_z^{(-j)}$ も同様です。この $\nabla_z^{(-j)}$ というのはなにかといいますと, dimension j の b に対してかかる共変微分です。

$$\nabla_z^{(-j)} = \partial_z + j,{}^{z}{}_{zz}. \tag{3.61}$$

complex coordinate を使いますと, Christoffel symbol で残るのは, z ばっかりの時と $\bar{z}$ ばっかりの時ですね。一方, c に対してかかる共変微分 $\nabla^z_{(1-j)}$ の方ですが, これの定義は

$$\nabla^z_{(1-j)} = g^{z\bar{z}}\partial_{\bar{z}} \tag{3.62}$$

です。z と $\bar{z}$ が混ざった Christoffel symbol しか出てこないので単なる微分になります。dim ker $\nabla^z_{(1-j)}$ は単に $\partial_{\bar{z}}$ の zero mode の個数です。実は (3.60) の内容自身は, Atiyah-Singer の index theorem を持ち出さなくても, 数学では古くから知られている Riemann-Roch の定理です。Riemann-Roch の定理の枠内では, 今の場合の bc ghost は $j=2$ の場合ですから, そうすると, 第 1 項は b の zero mode の個数。それから, 第 2 項は ghost c の zero mode の個数ですね。

$$\#(\text{zero modes of } b;\ \bar{\partial}b=0) - \#(\text{zero modes of } c;\ \bar{\partial}c=0) = (2\cdot 2-1)(g-1). \tag{3.63}$$

こういう関係式になっているわけですが, 今それぞれ名前があります。まず左辺第 1 項については, b には z の下付きの index が二つありますから, その zero mode は holomorphic quadratic differential と呼ばれます。それから, 左辺第 2 項で, c^z というのはもともと言いましたように, 一般座標変換の変換 parameter と同じ index 構造を持っていますが, この zero mode には, conformal Killing vector という名前が付いています。要するに holomorphic quadratic differential の個数と conformal Killing vector の個数の差が一般的に $3(g-1)$ で与えられる。全然直観的な説明じゃないですが, より高踏的な話になっておりますが。これを, $g=0$ と $g=1$ と $g\geq 2$ という三つの場合にわけて考えましょう。$g=0$ のは今やっているやつです。c の zero mode が三つある。b の zero mode がない。で $g=1$ の場合は非常に特殊で, b の zero mode も c の zero mode も 1 個ずつある。それから $g\geq 2$ の場合は, b の zero mode がこの関係式を saturate している。すなわち, conformal Killing vector は存在しない。

(3.63) の意味している内容は, b の zero mode の個数と c の zero mode の個数の差が $3(g-1)$ だ, ということです。左辺の各項は, それぞれ以下のような形で実現されています。

まず, genus $g\geq 2$ の場合は, (3.63) は holomorphic quadratic differential の個数が $3(g-1)$ ということです。2 次元のいろんな Riemann 面を考えることができるわけですが, holomorphic quadratic differential というのは, その Riemann 面を特徴づける parameter (moduli parameter) と one-to-one に対応しています。つまりこの個数というのが, Riemann 面の moduli の数と同じです。実際に (3.63) の右辺が $3(g-1)$ というのは, そういう $g\geq 2$ の Riemann 面を特徴づける parameter が, $3(g-1)$ 個あることに対応していると言っています。

それから, $g=1$ の場合は b の個数は1ですが, みなさんよく知っているように, genus 1 というのは, torus です。torus を特徴づける parameter は τ という１個です。c が１個というのは, あまり知らないでしょうが, まあいいことにしまして, $\cdots$

$g=0$ で c の zero modeが三つあるというのは, この場合, 自明でして, zero mode の $c(z)$ の解としては, 1 と z と z^2 で, この三つ。で, なんでこの三つかという事を説明しましょう。今 $c(z)$ にたいしては, $\bar{\partial}c$ が消えればいいわけですが, これを満たす解は, 別に 1, z, z^2 でなくても, $z^n(n\geq 0)$ でもいいじゃないか, ね, 許されそうな気がしますが, 実はそうではない。さっきに言いましたように genus 0 の Riemann 面というのは sphere で, z が無限大でも regular でないといかんわけです。$c(z)=z^n$ の $z=\infty$ での振る舞いを見ましょう。$z=1/w$ と変換をしますと,

$$c(w)=\left(\frac{dw}{dz}\right)c(z)=-z^{n-2}=-w^{2-n}. \tag{3.64}$$

$z=\infty$ が $w=0$ に対応していますが, $w=0$ で regular と要請しますと $2-n\geq 0$ でないといかん。つまり, $n\leq 2$ になりますね。ですからまとめますと, 原点で regular であるために $n\geq 0$ でないといけなかったんですが, その mode を無限遠点に持っていってみますと, $n\leq 2$ でないといかん。ということで, 結局 1 と z と z^2 という三つの mode だけが zero mode と。で, その zero mode が Atiyah-Singer の index theorem (3.60) を saturate している。あるいは, 先程の conformal vacuum では, 後に出る (3.65) がはじめて nonzero ということになります。

genus g	c の zero mode の個数	b の zero mode の個数
$g=0$	3	0
$g=1$	1	1
$g\geq 2$	0	$3(g-1)$

この g が 1 とか 2 とかの Riemann 面の moduli parameter(つまり Riemann 面の deformation に対応する自由度) と, antighost の zero modeが対応しているというのは, 非常に深い意味がありまして, 場の理論を作るときにもその Riemann 面の moduli parameter の１個１個に対して, b の antighost の zero modeがあることは非常に重要な役割をします。(せっかくしゃべったが使わないだろうなきっと。)

さて,

$$\langle\Omega|c(z_1)c(z_2)c(z_3)|\Omega\rangle=\begin{vmatrix}1&1&1\\ z_3&z_2&z_1\\ z_3^2&z_2^2&z_1^2\end{vmatrix}=(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_2-z_3) \tag{3.65}$$

という関係式があります。計算しますと, Vandermonde determinant というやつになります。$c(z)$ の展開 (3.15) がありましたね:

$$c=\sum_n c_n z^{-n+1}. \tag{3.66}$$

この中で c の zero mode は

$$c_1\cdot 1+c_0\cdot z+c_{-1}\cdot z^2 \tag{3.67}$$

という形で入っているわけですね。今 $\langle\Omega|\cdots|\Omega\rangle$ の conformal vacuum を saturate するためには, (3.57) により c_{-1} と c_0 と c_1 が 1 個ずついるわけです。$c(z_1)c(z_2)c(z_3)$ に対して, 展開 (3.66) を入れます。そこには $c_1\cdot 1 + c_0\cdot z + c_{-1}\cdot z^2$ というやつが入っていますが, このどれかから, c_{-1} と c_0 と c_1 を取ってくるわけです。あらゆる可能性は determinant で表現できて, (3.65) の右辺になることが分かりますが, やっといてください。

それで, こういう factor が string の scattering amplitude で $SL(2,\boldsymbol{C})$ の gauge fixing をやったときに出てきますが (こんなのが自動的に入っていることがすごいことですが), それが自動的に (3.65) の右辺のような形になっています。これはまさに $SL(2,\boldsymbol{C})$ の generator に対応している, というわけです。

それから最後に vertex operator と Fock vacuum の話をします。

Fock vacuum $|0\rangle$ の上になんかある vertex operator を演算して, physical state をつくる。この Fock vacuum と conformal vacuum の関係ですが,

$$|0\rangle \equiv c_1\,|\Omega\rangle \tag{3.68}$$

と定義します。$c(z)$ の中に c_{-1} と c_0 は (3.67) の形で入っていましたが, $z=0$ にすると, (3.68) は

$$|0\rangle = c_1\,|\Omega\rangle = c(0)\,|\Omega\rangle \tag{3.69}$$

という形で書いてもいいわけです。これよく使いますので, 覚えておいてください。そして,

$$V(z=0)\,|0\rangle \tag{3.70}$$

のように, $V(z)$ を実際に真空に対して演算します。このようにして state を作っていきます[8] 。

3.7 Physical state

まだ BRS 対称性について一言も言ってないので説明します。もともと一般座標変換不変性があったわけですが, 一般座標変換の変換 parameter, 従って 2 次元 vector ですが, それを ghost 場に置き換えてやった変換, それが BRS 変換ですね。通常のように BRS 対称性に対応して BRS current $j_{\mathrm{B}}(z)$ というのがありまして, BRS charge Q_{B} というのはそれの time component の積分です:

$$Q_{\mathrm{B}} = \oint d\sigma j_{\mathrm{B}\alpha=0}\ , \qquad j_{\mathrm{B}\alpha} = c^{\beta}\left(T^{X}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}T^{bc}_{\alpha\beta}\right). \tag{3.71}$$

BRS current というのは, 今の場合 2 次元の current ですから, 添字 α, β は 0 と 1 です。BRS 対称性は gauge 固定をした後もあるわけです。今の system はそれを持っているわけですが, BRS current は例によって, holomorphic part と antiholomorphic part に分けることができて, その holomorphic な部分を使うとこういう形に書ける:

$$j_{\mathrm{B}}(z) = c(z)\left(T^{X} + \frac{1}{2}T^{bc}\right). \tag{3.72}$$

[8] 詳しくは次の subsection で。

$\bar{j}$ の方はこれに全部 bar をしたやつです。(3.72) を mode 展開しますと, (3.32) で定義しましたように T^X と T^{bc} の Fourier mode が Virasoro generator L_n^X と L_n^{bc} なので, Q_{B} は次のようになります:

$$Q_{\mathrm{B}} = \oint \frac{dz}{2\pi i}\ j_{\mathrm{B}}(z) = \sum_n c_{-n}\left(L_n^X + \frac{1}{2}L_n^{bc}\right)\ . \tag{3.73}$$

それで BRS 変換を書いときますと,

$$\delta X^\mu(z) = [Q_{\mathrm{B}}, X^\mu(z)] = c(z)\partial X^\mu(z), \tag{3.74}$$

$$\delta c(z) = \{Q_{\mathrm{B}}, c(z)\} = c(z)\partial c(z), \tag{3.75}$$

$$\delta b(z) = \{Q_{\mathrm{B}}, b(z)\} = T(z). \tag{3.76}$$

holomorphic な notation で X^μ の BRS 変換は Q_{B} と X^μ との交換関係をとったもので,

$$[Q_{\mathrm{B}}, X^\mu(z)] = \oint_{\text{around } z} \frac{dw}{2\pi i}\ \ j_{\mathrm{B}}(w)X^\mu(z)\ . \tag{3.77}$$

z の周りに contour 積分すればこの交換関係は計算できる。でこれをやりますと $c\partial X$ となります。これは当たり前で, X が world sheet 上の scalar ですから, scalar が一般座標変換でどう変換を受けるかというと, world sheet 上の場所に dependent な量だけ shift を受けるわけですね。次に同じ要領で ghost に対してやりますと, $c\partial c$ です。それから大事なのは b なのですが, Q_{B} と antighost b の反交換関係, これは T です。T というのは energy momentum tensor。この場合は contour 積分をやらなくても, 本質的に b と c の反交換関係が δ 関数, 1 ですから, (3.73) を見れば, T が出ますね。(3.73) で L_n^{bc} の係数は $\frac{1}{2}$ ですが, $c_{-n}L_n^{bc}$ の中に c が二つあるので b と反交換関係をとるときにどっちの c にひっかかるかでこの $\frac{1}{2}$ が消えて, 普通の足し算 $T = T^X + T^{bc}$ になるわけです。antighost を BRS 変換すると, energy momentum tensor になる。これは非常に大事なことです。

gauge 理論の常で, physical state は BRS invariant な state,

$$Q_{\mathrm{B}}\,|\mathrm{phys}\rangle = 0 \tag{3.78}$$

として選ぶわけです。$|\mathrm{phys}\rangle$ を X の mode で書いた部分 $|\psi\rangle_X$ と bc ghost で書いた部分に分けると, 本当に physical なやつは bc ghost については Fock vacuum です:

$$|\mathrm{phys}\rangle = |\psi\rangle_X \otimes |0\rangle_{\mathrm{FP}}\ \ . \tag{3.79}$$

こういう形の状態にほんとに physical なやつが含まれているわけですが, それに対して Q_{B} を演算してやりますと, Q_{B} が (3.73) の形ですから, bc ghost の creation operator の部分が残ります。ということはその相棒の X の自由度については L_n の n が正の部分が効きますね。そうすると $|\psi\rangle_X$ に対して, L_n^X の n が正のやつは掛けてやると 0 になり, n が 0 のやつは 1 を出す:

$$L_n^X\,|\psi\rangle_X = 0\ , \tag{3.80}$$

$$\left(L_0^X - 1\right)|\psi\rangle_X = 0\ . \tag{3.81}$$

1 だけずれるのはこの L_n^{bc} が Fock vacuum $|0\rangle$ じゃなくって, $SL(2,\boldsymbol{C})$ vacuum $|\Omega\rangle$ に対して normal ordering がとられているからです。Fock vacuum (3.68) に L_0^{bc} がかかりますと, $|0\rangle$ に対して -1 を出します。従って, (3.81) の -1 が出てきますが, これの意味は二つあります。一つはこの状態を作る vertex operator が dimension 1 の primary field, つまり energy momentum tensor との OPE に 2 次を超える singularity がないという意味。 別の意味は on-shell 条件。あるいはもうちょっと physical にいうと, この state を作る polarization vector が, physical polarization になっている。何かそんな意味を持っている。L_0 の X の部分 L_0^X は,

$$L_0^X = \frac{1}{2}p^2 + \sum_{n>0} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n \ . \tag{3.82}$$

第 2 項は mode number counting operator で N と書かれたりするやつです:

$$N \equiv \sum_{n>0} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n \ . \tag{3.83}$$

そうしますと (3.81) は何を言っているかというと, (3.82) から,

$$\frac{1}{2}p^2 = -N + 1 \ . \tag{3.84}$$

p^2 は今の metric では $-(\text{mass})^2$ ですから, $(\text{mass})^2 = [(\text{mode number}) - 1] \times 2$ です。これ on-shell 条件ですね。N は mode を count する演算子ですから, N が 0 のやつが ground state です。N が 0 のやつは m^2 が -2 で tachyon になっている。

それで, この open string の場合の tachyon, つまり Fock vacuum に momentum をつけておかなきゃいかんわけですね。これが momentum k の tachyon,

$$e^{ik\cdot X(0)}\,|0\rangle \equiv |k\rangle \tag{3.85}$$

です。それから, ground state の次の excitation は,

$$\partial X^\mu e^{ik\cdot X(0)}\,|0\rangle = \alpha_{-1}^\mu\,|k\rangle \ . \tag{3.86}$$

この状態は mode number 1 ですから, k^2 は 0。これは massless の Yang-Mills gauge 場の vector ですね。∂X は dimension 1 を持っていて ((3.26) 参照), 今 net に vertex operator は dimension 1 を持っていないといけませんので, $e^{ik\cdot X}$ の dimension は 0 でないといかん。ということはこの k^2 が 0 でないといかん ((3.39) 参照)。というわけで massless になります。右辺の operator でいうともっと naive に mode number が 1 だから, $1-1=0$ で, massless だと。どっちでもいいですが, 好きな言葉で。

それから同様に, closed string の場合, 低い状態だけやりますと,

$$e^{ik\cdot X(0)}\,|0\rangle \equiv |k\rangle \tag{3.87}$$

が tachyon で, それから,

$$\partial X^\mu \bar{\partial}\bar{X}^\nu e^{ik\cdot X(0)}\,|0\rangle \tag{3.88}$$

が graviton。これはなぜかを説明しましょう。$ik \cdot X$ と書いている部分は,

$$ik \cdot X = \frac{1}{2} ik \cdot \left(X + \bar{X} \right) \tag{3.89}$$

のように, X の holomorphic な部分と antiholomorphic な部分, それぞれ考えないといかんわけです。まず holomorphic な部分だけで dimension 1 でないといかん。そうすると ∂X の部分と $e^{ik \cdot X(0)}$ の部分があるわけですが, ∂X の部分で既に dimension 1 ですから $e^{ik \cdot X(0)}$ の dimension は 0 でないといかん。従って $k^2 = 0$ で massless ですね。それから, なぜ $\partial X \bar{\partial} \bar{X}$ とこう X と $\bar{X}$ が 1 個ずつあるか, $\partial X \partial X$ だとか $\bar{\partial} \bar{X} \bar{\partial} \bar{X}$ とかいう状態がなぜないのかというと, closed string の場合は, parameter σ について考えると, σ という parameter は 0 から 2π, ないしは $-\pi$ から π, つまり 1 周分が 2π あるわけですが, この σ の座標の原点だとか π だとかいうのは意味が無いわけですよね。σ 座標の切れ目があるわけではないわけです。だから σ の 0 から 2π ないしは $-\pi$ から π というのは, 勝手に人が名付けた値で, 原点をどこにとるかというのはこれは closed string の対象自身では意味がないわけです。客観的な意味はない。だから, どこに原点を持っていっても継ぎ目無しの 2π の circle のはずなんですね。そういう性質を要求しないといかんわけで, それは次のようにします。σ 座標の原点をずらす演算子は,

$$L_0 - \bar{L_0} = \oint \left(X' \cdot P + \cdots \right) \tag{3.90}$$

で与えられます。これが X のなかの σ の座標をずらす演算子だということはこの表式から分かります。physical な state はこの演算子を掛けて 0 という関係式を満たさなあかん:

$$\left(L_0 - \bar{L_0} \right) |\mathrm{phys}\rangle = 0 \ . \tag{3.91}$$

これが closed string の場合の additional な条件です。あるいは, これを満たす空間への projection operator $\mathcal{P}$ は

$$\mathcal{P} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \ \ e^{i\theta(L_0 - \bar{L}_0)} \tag{3.92}$$

というふうに作れます。こうしますと, この operator は $L_0 - \bar{L}_0 = 0$ の subspace への projection になっています。当たり前ですね, θ について足し上げますから。$L_0 - \bar{L}_0 = 0$ だけが残りますね。ですから, physical な closed string state は translation で不変, すなわちこの projection で元に戻るという条件,

$$\mathcal{P} \, |\mathrm{phys}\rangle = |\mathrm{phys}\rangle \tag{3.93}$$

を置きます。これが要求されますね。ここで,

$$L_0 = \frac{p^2}{8} + N \tag{3.94}$$

でしたが, $L_0 - \bar{L}_0$ は, p^2 の部分は cancel しますから,

$$L_0 - \bar{L_0} = N - \bar{N} \ . \tag{3.95}$$

すなわち (3.93) より，bar 無しの方の oscillator の excitation number と，bar のある方の excitation numberが等しい状態だけが実現されるわけですね。これは oscillator で書きますと，(3.88) で z に 0 が入っていますから，

$$\alpha^{\mu}_{-1}\bar{\alpha}^{\nu}_{-1}|k\rangle \tag{3.96}$$

となっているわけで，barがあるのとないので共に -1 なので，これで balance しているわけです。例えば，

$$\alpha_{-1}\alpha_{-1}|k\rangle \quad , \quad \bar{\alpha}_{-1}\bar{\alpha}_{-1}|k\rangle \tag{3.97}$$

のような状態は無いわけですね。これは禁止される。left-mover, right-mover ともに同じ mode number を持たないといかん。これは closed string の場合の特殊な条件です。これは非常に大事な条件です。後でこの表式が closed string の amplitude 散乱振幅の additional な moduli を与えることが分かります。

4 String Field

4.1 String field

string の場の理論ですから，string の場 (string field) Φ を導入します:

$$\Phi = \Phi[Z;\alpha] \ . \tag{4.1}$$

Φ は関数 $Z(\sigma)$ の汎関数です。ここで Z というのは，

$$Z(\sigma) = [X^{\mu}(\sigma), C(\sigma), B(\sigma)] \tag{4.2}$$

のように，d 次元ないしは 26 次元の X^{μ} 座標と，ghost および antighost を表します。ここでちょっと微妙な書き方をしていますが，上式の C, B は，

$$C(\sigma) \equiv c(\sigma) - \bar{c}(\sigma) \ , \qquad B(\sigma) \equiv b(\sigma) + \bar{b}(\sigma) \tag{4.3}$$

のように定義される field です。詳しいことは言いませんが，なぜこんなことをやらんといかんかというと (これ今 open string の言葉で書いてますが)，(4.2) に c と b を全部入れるのは入れ過ぎです。なぜかというと，string field Φ の argument として X は入れますが，P は入れませんよね。P と X が入ってるとおかしいわけです。P は単にこの汎関数 Φ に対する微分演算子です。この Φ の argument に P が入っているわけではない。それと同じ意味で，c と b を同時に入れるわけにはいきません。つまり c と b はお互いに非可換ですから，c と b を全部入れてしまうと c 変数の微分演算子や b 変数の微分演算子が入ってるということになってしまいます。だから c と b から半分ずつ抜かないといけない。それが (4.3) です。detail には入りたくないのでこれ以上説明しません。どっちみちこの座標表示はすぐ止めます。気になる人は，自分で半分どう選んだらいいか考えてください。(4.3) になります。とにかく C, B はそういう関数です。

Φ はこういう関数 Z の汎関数であるんですが, このような汎関数を扱うのは大変面倒くさい。だから, 汎関数を扱うかわりに oscillator 表示を使います。oscillator 表示というのは, 例えば汎関数ではなくて普通の関数の場合, まず $e^{-\frac{1}{2}kx^2}$ という関数を使う代わりに, vacuum で書く:

$$e^{-\frac{1}{2}kx^2} \qquad \leftrightarrow \qquad |0\rangle \ . \tag{4.4}$$

次にこの前に Hermite polynomial が付いた $H_n(x)e^{-\frac{1}{2}kx^2}$ という関数をあらわに扱う代わりに,

$$H_n(x)e^{-\frac{1}{2}kx^2} \qquad \leftrightarrow \qquad \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n\,|0\rangle \tag{4.5}$$

という ket notation を使うわけです。string の場合では, X^μ, c, b という関数を, α^μ_m, c_m, b_m といった非常にたくさんの oscillator で書くわけです。この oscillator のそれぞれに対して (4.5) の右側のような ket notation を使うわけです。これは我々の知っている普通の Fock 表現ですね。これを使うことによって, 汎関数をもろに書くことを避けられるわけです。また必要とあれば, (4.5) の右側の oscillator 表示から左側の汎関数表示に戻ることもできるわけです。

(質問) 汎関数表示を避ける理由は何かあるのでしょうか？

(答) こういう Hermite polynomial を無限個書くのは嫌だという実用的な理由と, もう一つの理由は oscillator を使ったほうがちゃんとするということです。例えば $\Phi[Z;\alpha]$ にかかる演算子だってですね, 汎関数表示だと微分演算子で書くわけですけれども, ket 表示だとすべての operator が oscillator で書かれる。ほうするとそこで normal ordering をちゃんと定義したり物事がすべて well-defined になります。だけどただ感じが悪いのは oscillator 表示だと基本的に perturbative な感じを与えますね。多分 non-perturbative だと汎関数表示の方が優れているかも知れません。多分それはちゃんと定義してないからいろんなことが自由にできるということに関係してるんですけど。好き好きだと思いますが。厳密性からいうと oscillator 表示の方がすべてのことがちゃんと定義されているんだと思います。

それで, string field Φ を oscillator 表示で書きますが, X の zero mode は X の重心座標 x でしたが, これに関しては依然として座標表示を使います。だから x は残しておきます。まず Φ を c_0 について展開します:

$$|\Phi(x,\alpha)\rangle = |\phi(x,\alpha)\rangle + c_0\,|\psi(x,\alpha)\rangle \ . \tag{4.6}$$

この c の zero mode c_0 だけは特殊で, $\langle 0|\,c_0\,|0\rangle = 1$ のように[9] Fock vacuum $|0\rangle$ を消しません。また Fock vacuum $|0\rangle$ は b_0 で消える: $b_0\,|0\rangle = 0$ のに対して, $c_0\,|0\rangle$ という状態は b_0 で消えなくなります。それで Φ の成分のうち, ghost の Fock vacuum に c_0 を掛けた方の成

[9] この式で規格化を定義した。

分を ψ と呼び, b_0 で消える方を ϕ と呼んで区別します。これらは各々, Φ の ghost の zero mode c_0 による Taylor 展開の第２項および初項と解釈できます。c_0 は Grassmann 数ですから展開項はこれ以上はないわけですね。それから, (4.6) の ϕ, ψ はそれぞれ oscillator に関して, ket 表示を使ってる。以上が open string の場合です。

closed string の場合は, ghost の zero modeが二つあります: $c_0, \bar{c}_0$。antighost に関しても同様です: $b_0, \bar{b}_0$。closed string の場合はこれらは独立です。ここで次のような記号を導入します:

$$c_0^+ \equiv \frac{1}{2}(c_0 + \bar{c}_0)\ , \quad c_0^- \equiv c_0 - \bar{c}_0\ , \quad b_0^+ \equiv b_0 + \bar{b}_0\ , \quad b_0^- \equiv \frac{1}{2}(b_0 - \bar{b}_0)\ . \tag{4.7}$$

このように定義された $c_0^\pm, b_0^\pm$ を使って, closed string の場合の string field Φ は,

$$|\Phi\rangle = c_0^- \Big(|\phi(x)\rangle + c_0^+ \, |\psi(x)\rangle\Big) + \Big(|\chi(x)\rangle + c_0^+ \, |\eta(x)\rangle\Big) \tag{4.8}$$

と書かれます。ここで, $\Big(|\phi(x)\rangle + c_0^+ \, |\psi(x)\rangle\Big)$ は本質的には open string の場合と全く同じ書き方ですね。$|\phi\rangle$ が c_0^+ が掛ってないので, b_0^+ で消えます。$\Big(|\chi(x)\rangle + c_0^+ \, |\eta(x)\rangle\Big)$ の方は c_0^- を含んでいませんので b_0^- で消える。こういうふうに成分を定義します。ちなみに physical state は, 後で分かりますが, open string の場合 (4.6) の第１項,

$$|\phi(x)\rangle \tag{4.9}$$

になり, closed string の場合は (4.8) の第１項,

$$|\phi(x)\rangle \tag{4.10}$$

になります。例えば open string の場合, physical state は次のような形で $|\phi(x)\rangle$ に入っています:

$$|\phi(x)\rangle = \varphi(x)\,|0\rangle + A_\mu(x)\alpha_{-1}^\mu\,|0\rangle + \cdots\ . \tag{4.11}$$

$|0\rangle$ が ground state, つまり tachyon でしたね。oscillator の first excited state $\alpha_{-1}^\mu\,|0\rangle$ が photon, gauge 場ですね。このように ket 表示しますと, string field の特にこの physical component の部分は, ground state, first excited state, . . . とどんどんあるわけですが, これらの state の係数 $\varphi(x)$, $A_\mu(x)$, . . . が場です。これらが second quantize される普通の場の演算子です。$\varphi(x)$ が tachyon 場。$A_\mu(x)$ が, Yang-Mills gauge 場です。このように係数として, 普通の場が出てきます。後で gauge 固定をしたときもこういう場の展開をやるんですが, gauge 固定をしたときには ghost number が 0 だという要請がなくなるので, その場合には ghost number を持った状態が出てきます。例えば,

$$i\bar{C}(x)c_{-1}\,|0\rangle + C(x)b_{-1}\,|0\rangle + \cdots \tag{4.12}$$

といった状態が出てくるわけです。ここで c_{-1} で excite される状態の係数 $\bar{C}(x)$ が場の理論の antighost 場, つまり場の理論の $\bar{c}$ です。antighost b_{-1} で excite された状態は, ghost 場 $C(x)$ です。こういう ghost の excited state は gauge invariant な action の場合には展開式には現れませんが, gauge 固定されたときにはこのような ghost number を含んでいる状態も現れてます。従って gauge 固定された場の理論には今述べたような普通の場の理論の antighost 場あるいは ghost 場が入ってきます。これはまだ言ってないわけですがすぐ出てきます。

4.2 Constraints

string field Φ に二つほど条件があります。その一つは real であるということです:

$$\Phi^\dagger[Z;\alpha] = \Phi[\tilde{Z};-\alpha] \ , \qquad \tilde{Z} \equiv [X^\mu(\pi-\sigma),\ -C(\pi-\sigma),\ B(\pi-\sigma)] \ . \tag{4.13}$$

今 open string の場合ですが, ここで $\tilde{Z}$ は (4.13) から解るように Z の σ 座標の向きを引っくり返した関数です。つまり, Z の σ が 0 から π まで行くときに, $\tilde{Z}$ は逆に σ が π から 0 に行く。すなわち, 図 2 のように矢印を逆にします。

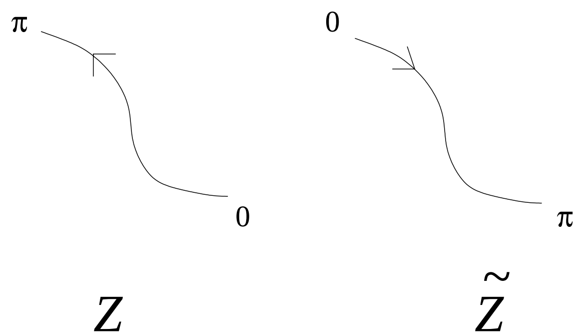

図 2: $\Phi[Z]$ と $\Phi[\tilde{Z}]$ は σ の parametrization の向きが逆になっている。

従いまして, (4.13) は, string field Φ に対して "$\dagger$" をとったときに, このように向きが逆になるべしという要請です。今導入しました $\tilde{Z}$ というのは便利な convention です。ついでに C に $-$ 符号が付いてますが, これは field の conformal dimension に従って決めています。

それから, (4.13) を ket notation で書きますと,

$${}_2\langle\Phi(x_2,\alpha_2)| = \int dx_1 \frac{d\alpha_1}{2\pi}\, {}_{12}\langle R|\, |\Phi(x_1,\alpha_1)\rangle_1 \tag{4.14}$$

と書けます。なんのことか分かるでしょうか? $\langle R|$ は reflector あるいは inversion operator とかいろんな名前で呼びますが, 右に向いている状態 (ket state) を左に向いた状態 (bra state) にし, なおかつ σ 座標をひっくり返す operator です。今 Fock space 1 と Fock space 2 があって, Fock space 1 の ket state $|\Phi(x_1,\alpha_1)\rangle_1$ について (4.14) のように reflector ${}_{12}\langle R|$ と内積をとるわけです。そうすると Fock space 1 の自由度がなくなって 2 の自由度になりますが, このとき 2 の自由度について左向きの bra 状態 ${}_2\langle\Phi(x_2,\alpha_2)|$ になるというわけです。これが (4.14) の意味することで, これは (4.13) と同じ内容です。reflector ${}_{12}\langle R|$ の具体的な表式は,

$$\begin{aligned} {}_{12}\langle R| &= (2\pi)^d \delta^d(p_1+p_2)\, {}_{12}\langle 0| \exp{(E_{12})}(c_0^{(1)}+c_0^{(2)}), \\ E_{12} &= \sum_{n\geq 1}(-)^{n+1}\left(\frac{1}{n}\alpha_n^{(1)}\cdot\alpha_n^{(2)} + c_n^{(1)}b_n^{(2)} - b_n^{(1)}c_n^{(2)}\right) \end{aligned} \tag{4.15}$$

のようになります。ほとんど 1 ですね。ほとんど δ 関数, identity ですね。ただ向きを変えているだけです。(4.15) の E_{12} の定義式で $(-1)^{n+1}$ が付いているのは, この σ の向きを

変えているからです。これが reality condition です。この reality を要請しますと, (4.11) の tachyon 場 φ とか gauge 場 A_μ などの component field が real であるという条件が出てくるわけです。

(質問) (4.14) で x_2 が左辺にあって右辺にないように見えるんですが。

(答) 変ですね, 書き方が。momentum 表示と混用してますね。

$$
{}_2\langle\Phi(p_2,\alpha_2)| = \int dp_1 \frac{d\alpha_1}{2\pi}\, {}_{12}\langle R|\,|\Phi(p_1,\alpha_1)\rangle_1 \tag{4.16}
$$

なら納得しますか？ x_1 を p_1 にして, x_2 を p_2 にすれば納得しますよね。これの Fourier 変換した式がさっきの version(4.14) だと思ってください。momentum 表示だと momentum 積分をやってこの p_1 が $-p_2$ になるんです。そうですね, 普通の field のときも $\phi(p)$ の $\dagger$ をとると $-p$ になりますね。

注意しないといけないのは, open string の場合はこの Φ は matrix でもあるということです。それは open string の場合, 図 3 のように string の左の端と右の端に何か matrix の

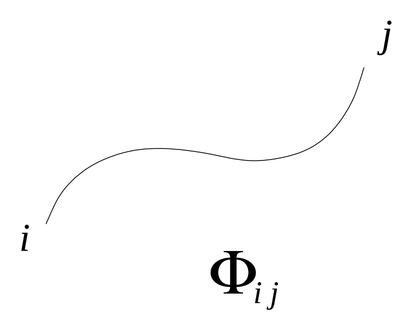

図 3: open string の場合, string の端に matrix の index を持つことができる。

index i, j を各々assign して, string field を Φ_{ij} という matrix valued の field にできるわけです。その場合には, “$\dagger$” はこの matrix index についての Hermite 共役, つまり普通の matrix dagger も意味することになります。

closed string の場合 string field Φ に対してもう一つ重要な条件があります。これは (3.92) で定義しました $\mathcal{P}$ projection に対する不変性です:

$$
\mathcal{P}\,|\Phi\rangle = |\Phi\rangle \qquad \text{or} \qquad (L_0-\bar{L}_0)\,|\Phi\rangle = 0\ . \tag{4.17}
$$

以上に述べました 2 つの条件を満たしてるものを string field といいます。この場を使って, ’85 年ぐらいに string の場の理論, gauge string field theory ができたわけです。

5 String Field Theory — Free Case

5.1 Action and gauge transformation

free の場合は割とまともな理論ができています。supersymmetric な時でも, まあ free の場合は理論がありますね。ただ closed string の場合とかは難しい場合がありますが, 割とまともにできているわけです。今からやる bosonic string の場合は全然問題なく action ができてます。

free action S_0 は今導入した string field Φ で次のように書けます:

$$S_0 \;=\; -\tfrac{1}{2}\Phi\cdot Q_{\mathrm{B}}\Phi\ . \tag{5.1}$$

この $\cdot$(内積) の意味は,

$$-\frac{1}{2}\begin{cases}\displaystyle\int dx\,\mathrm{tr}\left(\langle\Phi(x)|\,Q_{\mathrm{B}}\,|\Phi(x)\rangle\right) & (\text{open の場合})\\ \displaystyle\int dx\,\langle\Phi(x)|\,Q_{\mathrm{B}}b_0^-\,|\Phi(x)\rangle & (\text{closed の場合})\end{cases} \tag{5.2}$$

です。上式のように closed の場合は b_0^- を常に掛け算します。b_0^- をつけてるのは Φ の ghost の zero mode c_0^- の自由度についてもう見ないということをいっているわけです。

少し言葉を用意しましょう。今 ghost zero mode について b_0 で消える状態 $|0\rangle$ と, これに c_0 を演算した状態 $c_0\,|0\rangle$ を考えます。世の中では $|0\rangle$ を b_0 で消える状態だから “down”, それに対して $c_0\,|0\rangle$ を “up” といいます:

$$|0\rangle \qquad (\text{down})\ , \tag{5.3}$$

$$c_0\,|0\rangle \qquad (\text{up})\ . \tag{5.4}$$

“up” は “down” を c_0 で上げた。これ以上あがらないわけですね。このように ghost の zero mode が 1 個ありますと down 状態と up 状態とあるわけですが, いま closed string の場合は ghost の zero mode が c_0 と $\bar{c}_0$ と二つある。それを (4.7) で + と − に分けましたので, + mode と − mode についてそれぞれ up か down かということになりますが, (4.8) の第 1 項は − mode について up 状態, 第 2 項は − mode について down 状態ですね。

内積の式 (5.2) に b_0^- を付けたということは, (4.8) の第 2 項を消したということです。(4.8) の χ, η 成分をやめて, up 状態 (すなわち (4.8) の第 1 項) だけを取り出しなさいということです。こうしたら, open string の場合の (4.6) とほとんど同じことになっているわけですね。

(5.1) はものすごく簡単な action ですが, この action は自明な意味で gauge 不変性を持っています。string field Φ を $Q_{\mathrm{B}}\Lambda$ ずらす,

$$\delta\,|\Phi\rangle = Q_{\mathrm{B}}\,|\Lambda\rangle \tag{5.5}$$

という変換の下で action (5.1) は不変です。ここで Λ は gauge 変換の parameter です。この不変性は自明です。$\langle\Phi|$ のところに $Q_{\mathrm{B}}\Lambda$ を入れますと, Q_{B}^2 が出てきます。あるいは右側

の $|\Phi\rangle$ にいれても $Q_{\rm B}^2$ が出てきますが, $Q_{\rm B}^2=0$ (nilpotency) がありますと action は gauge 不変になります:

$$Q_{\rm B}^2=0 \qquad \Rightarrow \qquad \delta S_0=0\ . \tag{5.6}$$

これはものすごい莫大な対称性です。なぜなら, この Λ という変換parameter 自身が, string 汎関数空間の element であるためにものすごい莫大な自由度を持っているからです。

5.2 Open string の component field expansion

前節の内容を, 先に定義しました component field を用いて見てみましょう。最初は open string の場合を考えます。string field の内部状態は,

$$|\Phi(x)\rangle \;\;=\;\; \sqrt{2}\Big\{\varphi(x)\,|0\rangle+A_\mu(x)\alpha_{-1}^\mu\,|0\rangle+\cdots\Big\}+\sqrt{2}c_0\Big\{\frac{1}{2}i\widetilde{B}(x)b_{-1}\,|0\rangle+\cdots\Big\}. \tag{5.7}$$

ground state, first excited state, $\cdots$ とどこまでも好きなところまで展開して, その state の係数として場を定義します。つまり, tachyon state の係数から tachyon 場 $\varphi(x)$, α_{-1}^μ という massless 状態の係数から gauge 場 $A_\mu(x)$, そして, 次に mass を持った mode も出てきますが, その係数として係数場を定義する。いくらでもやったらいいわけです。

(5.7) の第 1 項は physical ですが, 第 2 項の括弧内は unphysical state で, c_0 mode について down 状態になっています (第 1 項は up 状態です)。この系列も展開されます。string field Φ は ghost number 0 なので, 第 2 項は c_0 のために first excited state は antighost b_{-1} で excite されなければいけない。こうしておけば c_0 と b_{-1} で net に ghost number が 0 になる。このようにして $b_{-1}\,|0\rangle$ という状態が登場します。その係数として $\widetilde{B}(x)$ という係数場を定義します。

gauge 変換の parameter Λ も展開します。これもまず ghost number を勘定します。$Q_{\rm B}$ は ghost number +1 を持っていますから, Φ の変換 (5.5) として $Q_{\rm B}\Lambda$ が現れるためには Λ は ghost number -1 でなければなりません。state は一番最初は $b_{-1}\,|0\rangle$ で, その係数として $\varepsilon(x)$。その後はあらゆるものを書いてやる。

$$|\Lambda(x)\rangle \;\;=\;\; \sqrt{2}\Big\{i\varepsilon(x)b_{-1}\,|0\rangle+\cdots\Big\}\ . \tag{5.8}$$

それで, gauge 変換 (5.5) を計算してみます。$Q_{\rm B}$ は (3.73) のように oscillator mode でダーッと書けてるわけですが, これを状態 Λ に対して演算します。それで (5.5) の左辺と比較すれば, 各々の係数場が次のようにずらされるということが分かります:

$$\delta\Phi=Q_{\rm B}\Lambda \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\delta\varphi(x)=0\\ \delta A_\mu(x)=\partial_\mu\varepsilon(x)\\ \delta B(x)=0 \qquad (B(x)\equiv\widetilde{B}(x)+\partial^\mu A_\mu(x))\\ \qquad\vdots\end{cases} \tag{5.9}$$

tachyon mode は $Q_{\rm B}\Lambda$ からは出てきません。従って, tachyon 場 $\varphi(x)$ の変換は zero。そして, 次に gauge 場ですが, Λ の表式 (5.8) の第 1 項に $Q_{\rm B}$ を演算しますと, ちょうど $p_\mu\alpha_{-1}^\mu\,|0\rangle$

というのが出てくる。従って, gauge 場 $A_\mu(x)$ が $p_\mu\varepsilon(x)$ だけずれる。p_μ は微分演算子ですから, 結局上式のようになるわけです。同様に計算すると $\widetilde{B}(x)$ も動くんですが, 上式の combination で作った $B(x)$ は不変になっている。このように $\delta\Phi = Q_\mathrm{B}\Lambda$ という式は, component field で見れば (5.9) の右に書いたような無限個の gauge 変換を意味している。

特に我々の欲しい massless mode の Yang-Mills 場 $A_\mu(x)$ について見てみると (今 free theory ですから free part ですが), gauge 変換 $\partial_\mu\varepsilon(x)$ が確かに実現されている。

component field の式 (5.7) を, free action(5.1) に代入しますと,

$$S_0 = -\frac{1}{2}\Phi\cdot Q_\mathrm{B}\Phi = \int dx\,\mathrm{tr}\left\{\frac{1}{2}\varphi(\Box+2)\varphi + \frac{1}{2}A^\mu(\Box\eta_{\mu\nu}-\partial_\mu\partial_\nu)A^\nu - \frac{1}{2}B^2 + \cdots\right\} \tag{5.10}$$

となります。第 1 項は $m^2=-2$ の Klein-Gordon なので tachyon。$A_\mu(x)$ に対しては, 第 2 項のように, $(F_{\mu\nu}(x))^2$ がちょうど出ています。$\Phi\cdot Q_\mathrm{B}\Phi$ という free action で, gauge 場に関してちゃんと F^2 の作用が出るというわけです。それから B^2 の項がありますが, B という場は中西-Lautrap field です。

今, 我々のよく知っている Yang-Mills 場 (massless の gauge 場) の部分だけ取り出してきましたが, 実は massive mode についてもすべて gauge 場として実現していることが分かります。これ, やってみると面白いので, massive mode も全部自分で展開してみてください。まあ全部と言っても無限個ありますから, いい加減なところで止めないかんのですが (笑), やってみますと, massive な mode もすべて gauge 変換を受けます。gauge 場になっているのです。そして, gauge invariant な action が (5.10) のように書かれている。なぜそれが massive になれるかというと, Higgs みたいな形になっているわけですね。すべての higher spin の massive mode が Higgs で実現されている。(5.5) はものすごく大きな gauge 対称性で, 非常に簡単な action(5.1) はその大きな gauge 対称性を実現していて, すべての component に対して非常に compact な表式を与えるわけですね。

5.3 Closed string の component field expansion

同じことを closed string に対してやりますと, まず string field は,

$$\begin{aligned}|\Phi(x)\rangle &= 2\Big\{\varphi(x)\,|0\rangle + [\tfrac{1}{2}\hat{h}_{\mu\nu}(x)(\alpha^\mu_{-1}\alpha^\nu_{-1})^{(+-)}\,|0\rangle + \tfrac{1}{2}A_{\mu\nu}(x)(\alpha^\mu_{-1}\alpha^\nu_{-1})^{[+-]}\,|0\rangle \\ &\qquad + \hat{D}(x)(c_{-1}b_{-1})^{(+-)}\,|0\rangle - S(x)(c_{-1}b_{-1})^{[+-]}\,|0\rangle] + \cdots\Big\} \\ &\qquad + ic_0\Big\{\Big[-b_\mu(x)(b_{-1}\alpha^\mu_{-1})^{(+-)}\,|0\rangle + e_\mu(x)(b_{-1}\alpha^\mu_{-1})^{[+-]}\,|0\rangle\Big] + \cdots\Big\}\end{aligned} \tag{5.11}$$

となります。正確には, この表式の中の c_0 は c_0^+ で, 右辺全体に c_0^- を掛けておかなくてはいけません。また上式で $(\alpha^\mu_{-1}\alpha^\nu_{-1})^{(+-)}$ という記号を使ってますが, $(+-)$ という記号は,

$$(a\,b)^{(+-)} \equiv (a\,\bar{b} + \bar{a}\,b)/\sqrt{2} \tag{5.12}$$

のように,どちらか片方を bar mode にして対称に組むと定義します。ですから, $(\alpha^\mu_{-1}\alpha^\nu_{-1})^{(+-)}$ は (μ,ν) の index について対称に組まれますので, その係数場としては対称な場 $\hat{h}_{\mu\nu}(x)$ になります。これが基本的には重力場です。また, 四角括弧 $[+-]$ は,

$$(a\,b)^{[+-]} \equiv (a\,\bar{b} - \bar{a}\,b)/\sqrt{2} \tag{5.13}$$

のように反対称に組むと定義します。従いまして $(\alpha_{-1}^{\mu}\alpha_{-1}^{\nu})^{[+-]}$ は (μ,ν) については反対称ですから, その係数場は反対称場 $A_{\mu\nu}(x)$ となります。それから, c, b を組み合わせることによっても ghost number 0 の state を作れますが, それらの係数場として $\hat{D}(x)$, $S(x)$ を導入します。この $\hat{D}(x)$ は将来 dilaton になるものです。また, (5.11) の第 2 項は unphysical な項ですが, その係数を $b_\mu(x)$, $e_\mu(x)$ と呼んでます。

次に, Λ は Φ から ghost number が 1 下がったやつで, 係数として $\varepsilon_\mu(x)$, $\zeta_\mu(x)$, $\eta(x)$ が出てきます:

$$\begin{aligned} |\Lambda(x)\rangle &= 4\Big\{-i\left[-\varepsilon_\mu(x)(b_{-1}\alpha_{-1}^{\mu})^{(+-)}|0\rangle+\zeta_\mu(x)(b_{-1}\alpha_{-1}^{\mu})^{[+-]}|0\rangle\right]+\cdots\Big\} \\ &\qquad -c_0\Big\{\sqrt{2}\eta(x)b_{-1}\bar{b}_{-1}|0\rangle+\cdots\Big\}\ . \end{aligned} \tag{5.14}$$

action に component 展開 (5.11) をぶちこんで計算しますと,

$$\begin{aligned} S_0=-\tfrac{1}{2}\Phi\cdot Q_{\rm B}\Phi &= \int dx\Big[\tfrac{1}{2}\varphi(\Box+8)\varphi+\frac{1}{4}\hat{h}_{\mu\nu}\Box\hat{h}^{\mu\nu}+\frac{1}{4}A_{\mu\nu}\Box A^{\mu\nu} \\ &\qquad -\tfrac{1}{2}\hat{D}\Box\hat{D}+\tfrac{1}{2}S\Box S-\tfrac{1}{2}(b_\mu^2+e_\mu^2) \\ &\qquad +b^\mu(\partial^\nu\hat{h}_{\mu\nu}-\partial_\mu\hat{D})-e^\mu(\partial^\nu A_{\mu\nu}-\partial_\mu S)\Big]+\cdots \end{aligned} \tag{5.15}$$

となります。(計算と言っても大した計算じゃない。単に, この ket 表示では内積を計算するだけですからほとんど自明な計算です。面白いですから是非自分一人でやってみてください。すると, 非常にいいことに, ここに挙げられている計算は「up to 1 の四乗根」で間違っていますので, 適宜, $\pm i$ か ± 1 で修正しながら楽しんでください。) 第 1 項は tachyon ですね。$m^2=-8$ となってますね。先程導入しました重力場 $\hat{h}_{\mu\nu}$ と反対称 tensor 場 $A_{\mu\nu}$ が action (5.15) の中にどう現れているかというと, この段階では割とつまらない形, 単に $\Box$ という massless の action で出ています。最終行には, gauge 場らしい痕跡があるようなないような。

action がこうなった一方で, (5.14) を用いて gauge 変換を component で書き直してみますと,

$$\delta\Phi=Q_{\rm B}\Lambda\quad\Rightarrow\quad\begin{cases} \delta\hat{h}_{\mu\nu}(x)=\partial_\mu\varepsilon_\nu(x)+\partial_\nu\varepsilon_\mu(x)\ , & \delta A_{\mu\nu}(x)=\partial_\mu\zeta_\nu(x)-\partial_\nu\zeta_\mu(x)\ \ , \\ \delta\hat{D}(x)=\partial\cdot\varepsilon(x)\ , & \delta S(x)=\partial\cdot\zeta(x)+\eta(x)\ , \\ \delta b_\mu(x)=\Box\varepsilon_\mu(x)\ , & \delta e_\mu(x)=\Box\zeta_\mu(x)+\partial_\mu\eta(x)\ , \\ \qquad\vdots & \end{cases} \tag{5.16}$$

となって, 例えば重力場と呼んでいた $\hat{h}_{\mu\nu}(x)$ は $\varepsilon_\mu(x)$ という parameter による gauge 変換を受け, それから反対称 tensor 場 $A_{\mu\nu}(x)$ は $\zeta_\mu(x)$ を parameter とする gauge 変換を受ける等々, 各 field はそれぞれ gauge 変換を受けます。

action (5.15) はまだ見にくいので, 書き換えてやります。$b_\mu(x)$ と $e_\mu(x)$ というわけの分からない場があったので, これを消します。これらは action の中で自明な形で, kinetic term が無いわけです。だから代数的に消去できますね。「経路積分をする」と最近は言うみたいですが。そして $S(x)$ を gauge 変換で消します。gauge 不変性はいっぱいあるので, それら

を使って中間段階で消してもいいわけです。$S(x)$ は (5.16) の $\eta(x)$ の自由度を使いますと完全に gauge away することができます。 更に,

$$\hat{h}_{\mu\nu}(x) = h_{\mu\nu}(x) + \eta_{\mu\nu} D(x), \qquad \hat{D}(x) = D(x) + \frac{1}{2} h^{\mu}{}_{\mu}(x) \tag{5.17}$$

と再定義すると, さっきの action は, 次の形にまとまることが分かります:

$$\begin{aligned} S_0 &= -\frac{1}{2}\Phi \cdot Q_{\mathrm{B}}\Phi \\ &= \int dx \Big\{ \frac{1}{2}\varphi(\Box + 8)\varphi \\ &\qquad + \Big[-\frac{1}{2\kappa^2}(\sqrt{-g}R)_{\mathrm{linear}} + \frac{1}{2!3!}F_{\mu\nu\rho}F^{\mu\nu\rho} + \frac{D-2}{4} D\Box D \Big] + \cdots \Big\} . \end{aligned} \tag{5.18}$$

こうなると綺麗ですね。いや, 綺麗な形に書いているんですが。第 1 項の tachyon $\varphi(x)$ に関しては元のままです。[ ] 内第 1 項は Einstein action の linear part がぴったり再現される:

$$-\frac{1}{2\kappa^2}(\sqrt{-g}R)_{\mathrm{linear}} = \frac{1}{4} h^{\mu\nu}\left(\Box h_{\mu\nu} - 2\partial_\nu \partial^\rho h_{\mu\rho} + 2\partial_\mu \partial_\nu h^{\rho}{}_{\rho} - \eta_{\mu\nu}\Box h^{\rho}{}_{\rho} \right) . \tag{5.19}$$

元々quadratic part しかないんですから, 勿論 $\sqrt{-g}R$ の linear part しかないわけです。ここで,

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}(x) \tag{5.20}$$

としています。反対称 tensor 場 $A_{\mu\nu}(x)$ については, 3 階反対称 field strength

$$F_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu A_{\nu\rho} + \partial_\nu A_{\rho\mu} + \partial_\rho A_{\mu\nu} \tag{5.21}$$

の 2 乗という形で書けています。dilaton $D(x)$ については, 普通の massless の action になっている。係数 $\frac{D-2}{4}$ の D は dilaton field ではなくて target space の次元 26 です。

先程の gauge 変換をこれらの新しい variable で見てみますと, 果たして,

$$\begin{cases} \delta h_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \varepsilon_\nu(x) + \partial_\nu \varepsilon_\mu(x), & \delta\varphi(x) = 0 \\ \delta A_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \zeta_\nu(x) - \partial_\nu \zeta_\mu(x), & \delta D(x) = 0 \end{cases} \tag{5.22}$$

となっている。まあ当たり前ですね。action は gauge 不変な形になっているのだから新しい variable では普通の一般座標変換の linearized version になっているわけです。$A_{\mu\nu}(x)$ に対する gauge 変換の形はさっきと同じですね。新しい dilaton $D(x)$ と tachyon $\varphi(x)$ は gauge 不変になっている。

この action (5.18) も先程の open の場合と同様に, (今は ground state と first excited state (massless state) の部分だけ書きましたが), massive mode も含めた無限の tower が入っているわけで, やってみれば面白いと思います。次の massive level までやってみると, massive 理論なのにどういう形で gauge 理論として実現しているかというのが分かって面白いと思います。

(質問) それは頑張れば完全な Einstein action が出るんですか？

(答) これはまだ free action ですから絶対に出ません。場について 2 次です。action が $\Phi \cdot Q_{\mathrm{B}}\Phi$ で field について 2 次ですね。これは勿論 component field で書いた

としても必ず component field についても 2 次ですから, Einstein action は絶対でません。だから後でやります interaction part を入れて, field をうまく定義すれば, Einstein action が出るでしょうね, きっと。

(質問) そういうふうに Einstein action と反対称 tensor の action が出るというのは驚くべきことなのでしょうか？ 非常に自然に出たような感じがするんですが。

(答) 何を驚くかなんですけど。いやあ自然ですね。非常に自然ですね。自然に, とにかく自然に出てくる。

(質問) これ gauge 変換っていっても普通の gauge 変換と違いますよね。field の位相を回す自由度みたいなのがなくて, ちょうど gauge 場だけが座標の shift みたいになってますよね。それは covariant derivative が無いからって事ですか？

(答) これはまだ free だからですよね。要するに matter の rotation 部分は出てない。あとで出るんですけどね, それには interaction がいるんですよ。即ち Yang-Mills 場でも, $A_\mu(x)$ の gauge 変換は, $\partial\epsilon$ の項と, A_μ と ϵ の交換関係の項から成り立っています。これが Yang-Mills 場が adjoint 表現としての charge を持っているということです。今 free 部分しかやってないので第 1 項 $\partial\epsilon$ しかないわけです。第 2 項 (交換関係の項) は, 場と変換 parameter についてそれぞれ 1 次と呼ぶと, 1 次と 1 次で 2 次になって次の order になる。実際に interaction part をいれますと gauge 変換もそれだけ変更を受けます。それで, 例えば action に interaction part Φ^3 を入れたとすると, gauge 変換の方も

$$\delta\Phi \;=\; Q_{\mathrm{B}}\Lambda - g(\Phi * \Lambda + \Lambda * \Phi) + \cdots \tag{5.23}$$

となるわけで (次章で詳しくやります), 右辺の第 2 項の部分が homogeneous な charge rotation を与えている。 今やったのは右辺の第 1 項だけです。

(質問) 最初の action の $\Phi \cdot Q_{\mathrm{B}}\Phi$ は background に依らないように見えるんですけど, 展開して計算すると ... ？

(答) $\Phi \cdot Q_{\mathrm{B}}\Phi$ はもろに metric に依ってますけど。Q_{B} が悪いんで, いや, background metric によるのが悪いのか知らないけど, しっかり依ってます。Q_{B} の表式は mode で書くと (3.73) のような形だといいましたが, L_n は

$$L_n^X = \frac{1}{2}\sum_m \alpha^\mu_{n-m}\alpha^\nu_m \eta_{\mu\nu} \tag{5.24}$$

ですから, (μ, ν) について $\eta_{\mu\nu}$ という flat metric をもろに使っています。

6 String Field Theory — Interacting Case

6.1 Action and vertices

free の場合は満足な理論ができているわけですが, 次に相互作用を入れる。それは必ずしも満足がゆく形にすべてがなっているわけでは全然ないですが。先程言いましたように

action として, まず先程の $\Phi\cdot Q_{\rm B}\Phi$, これが free な kinetic term を与えるわけです。次に interaction を抽象的に書いて $\frac{1}{3}g\Phi^3$ 。で, もし必要とあれば $\frac{1}{4}g^2\Phi^4$ などを必要なところまで入れるわけです:

$$S=-\frac{1}{2}\Phi\cdot Q_{\rm B}\Phi+\frac{1}{3}g\Phi^3+\frac{1}{4}g^2\Phi^4+\cdots\ . \tag{6.1}$$

このとき gauge 変換は,

$$\delta\Phi=Q_{\rm B}\Lambda-g(\Phi*\Lambda+\Lambda*\Phi)+g^2(\Lambda\circ\Phi\circ\Phi+\Phi\circ\Lambda\circ\Phi+\Phi\circ\Phi\circ\Lambda)+\cdots \tag{6.2}$$

となります。どこまでが必要かというのは gauge 不変性が成り立つように決めるわけです。この gauge 変換 $\delta\Phi$ というのは, action S が決まりますと S を Φ で 2 回微分しまして, そしてこの 1 個の field を Λ で置き換える:

$$\delta\Phi_i=\frac{\delta^2 S}{\delta\Phi_i\delta\Phi_j}\Lambda_j\ . \tag{6.3}$$

これが gauge 変換になるということが分かります。分かりますというのはそうするという手続きがあるということなんですが。手続きをちゃんと言いましょう。まず action (6.1) を 1 回微分します。そうすると,

$$\frac{\delta S}{\delta\Phi}=-Q_{\rm B}\Phi+g\Phi^2+g^2\Phi^3+\cdots \tag{6.4}$$

となります。これをもう 1 回微分して, その微分した Φ を変換 parameter Λ に置き換えるということをやったのが, gauge 変換 (6.2) です。こういうふうに決めるわけです。問題は action です。action がこのゲージ変換で gauge 不変になるように決めたい。もし action が Φ^3 迄で終わりますと gauge 変換も $\Phi*\Lambda+\Lambda*\Phi$ で終わりますが, これで, もし gauge 不変性が実現できているならここでやめればいい。できてなければ, 必要な新しい項を入れる。そうすると gauge 変換もまた増えます。またその段階で止まっているかどうかということをやります。

具体例をいいます。色々あるんですが, 実例が知られてまして, この Φ^3 で終わるやつは Witten の open string[5] と畑-伊藤-九後-国友-小川 (HIKKO)[6] の closed string があります。それで, HIKKO の open string は 4 点まで入れます。それから, いっぱいありますけど, non-polynomial closed string field theory[7][8] というのもあるんですが, この Witten 流の open string の vertex を closed string に拡張しますと non-polynomial closed string field theory というのになって, それは無限まで全部要ります。で, この non-polynomial closed string field theory というのはこの無限個ある vertex の形がどういう形かというのが全部指定されています。

それで, 抽象的に書いた (6.1) の Φ^3 , Φ^4 , $\cdots$ を指定しないといけないわけですが, それは結局のところ vertex の指定です。Φ^3 は 3 点 vertex, Φ^4 は 4 点 vertex ですが, 例えば Φ^3 vertex の指定というのは, 三つの string に対してどういう貼り合わせをするかを指定するということです。Witten の open string の vertex は図 4。これが Witten の open string の貼り

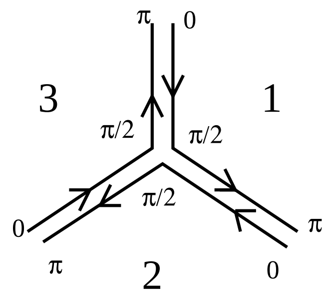

図 4: Witten's 3-string vertex for open strings

合わせ方[10] 。このくっつけ方というのは, parameter space σ で $0 \leq \sigma \leq \pi$ の長さ π の三つの string を持ってきてですね, 余分な parameter を入れないでしわも寄せないでくっつけなさいと言われたらこれが unique ですね。これをそのまま closed string に拡張しますと, 図 5 のようになります。こういう拡張をしますと, 実はこれを 3 点 vertex にしてやっていきます

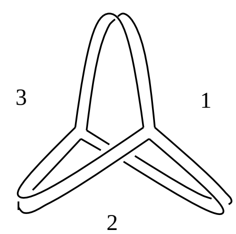

図 5: Witten's 3-string vertex for closed strings

と, gauge 不変性がどんどんどんどんどこまでいっても終わらなくて無限個要ることが分かります。これを 3 点 vertex としてこの無限個の vertex の形を決めたのが, non-polynomial closed string field theory[7],[8]。これも一応無限個全部指定できます。これは, 3 点は図 5 ですが, 4 点の場合は四面体 (図 6)。図 6 の四面体の各面が closed string です。四面体が 4 点 vertex, 五面体が 5 点 vertex, 六面体が 6 点 vertex...。すべての多面体が必要になって, 完全に non-polynomial になります。だけど恐ろしいことに, それを全部入れれば gauge 不変性を実現できるということが証明できます。だけどこれがちょっとまずいのは, せっかくこの non-polynomial で gauge 不変性を実現しても, その gauge 不変性が 1-loop にいくと途端に anomaly があって壊れるということが分って, その anomaly を cancel するための correction が必要です。それで終わったらまだいいんですが, また 2-loop にいくと新たな anomaly があってそれを correction しないといけない。そうすると各 order でどんどん場の理論を変えるというおぞましい理論になります。だからこれはあまりお薦めじゃないですね。これ

[10] この vertex は Witten vertex という名が付いてますが, 日本の皆様はご存知のように後藤さんが「拡がりをもつ素粒子像」という本 [9] を岩波から出しました。これは勿論 Witten の理論よりずっと前から出ている本ですが, その本の中にこの vertex が書いてあります。だから図 4 を Witten vertex と呼ぶのはちょっと片手落ちではあるんですが。

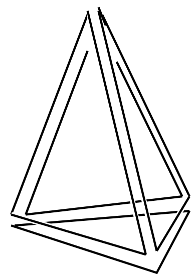

図 6: Witten's 4-string vertex for closed strings

は一応 tree level で完全に gauge invariant にできるけれども anomaly があるのであまりお薦めじゃない。

それで問題はどういうふうに vertex を作ればいいか。HIKKO とか, あるいは元の light-cone gauge の string field theory[10], そういうものに使われている vertex は図 7 です。そのくっつけ方ですが, light-cone type では, 各 string についてそれぞれ α_1 , α_2 , α_3 という

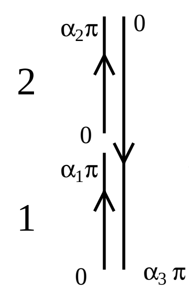

図 7: HIKKO's 3-string vertex for open strings

string の長さ parameter というものを導入します。この長さの parameter は足したら 0 になるように値をとります:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0\ . \tag{6.5}$$

例えば light-cone だと α というのは本当に string のもっている p^+ です: $\alpha = 2p^+$ 。この p^+ は保存していますから, 勿論足したら 3 点 vertex で 0 になっている。で, このように light-cone gauge では本当にこの p^+ を string の長さに assign する。HIKKO の理論では, これは弱点なんですが, α という parameter は unphysical だけども手で入れます。で, それが (6.5) のような性質を持っている。これは momentum のようなやつですね, 各 vertex で保存するように扱います。とにかく α というのを導入しますと, string 1 は 0 から $\alpha_1\pi$, それから string 2 は 0 から $\alpha_2\pi$, そして string 3 は 0 から $|\alpha_3|\pi$ まで (図 7 は $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ で, $\alpha_3 = -(\alpha_1+\alpha_2) < 0$ の場合を描いています。), こういうくっつき方ですね。これが light-cone type, あるいは HIKKO, あるいは covariantized light cone[11] というのが別にありますが, そういう理論で使っている vertex です。で, closed string はこれをまた cycle

にすればいいわけでして, 図 8 のようなやつです。図 7, 8 のくっつけ方に相当するやつを, light-cone type の vertex と呼びます。

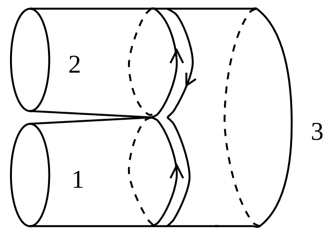

図 8: HIKKO's 3-string vertex for closed strings

6.2 Mandelstam mapping

vertex の作り方ですが, これを知ってると, string の場の理論の色々な問題に対していろんな局面で応用が利きますのでやります。それで, その vertex の構成法で, まずどうしても必要なのは, Mandelstam mapping[12] です。closed string で, この図 8 があったとしましょう。この world sheet を ρ-plane と呼んだわけですが, これを無限の cylinder で伸ばします。string 1 と string 2 と string 3 を, こういうくっつけ方をしたい。するとこの ρ-plane を, すぱっと切って上半面というか, ρ の半面で描きますと図 9 のようになります。 closed

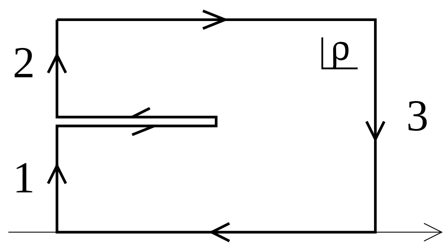

図 9: 図 8 の cylinder を切ったときの上側の部分

string の場合は, これの mirror image を考えて, それを σ の minus の方と見なすとちょうど cylinder としての ρ-plane と同じです。それで, この ρ-plane を,

$$\rho = \alpha_1 \ln(z - z_1) + \alpha_2 \ln(z - z_2) + \alpha_3 \ln(z - z_3) \tag{6.6}$$

によって z-plane に map します。この mapping のことを Mandelstam mapping といいます。(Witten の vertex についても同じようにできますのでここでは省略します。)

今, z-plane の $z = \infty$ から実軸に沿って負の方向に来たとします。$z = \infty$ で $\ln z = \infty$ ですがこのとき (6.5) を用いると (6.6) より $\rho = 0$ で, そこから ρ-plane 上実軸に沿って負の方

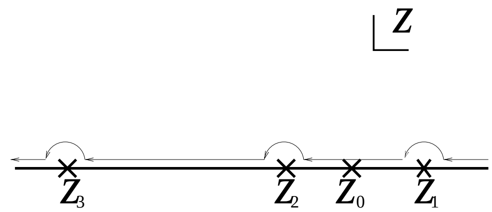

図 10: 図 9 の ρ-plane を z-plane に map したもの。図中の矢印は (6.6) より図 9 の矢印に対応。

向に行きます。で, z-plane で z_1 にぶつかりますと, $\ln(z-z_1)=-\infty$。だから $z\to z_1+0$ で $\rho\to-\infty$。そして $z=z_1$ で上側をぴょこっと通る (図 10) と $\ln(z-z_1)$ が $i\pi$ だけ値を shift させますが, $|\rho|$ は依然として ∞。そうすると $\mathrm{Im}\rho$ が $\pi\alpha_1$ だけ突然ぽんと上がるわけですね。それで z_1 からずうっと負の方向に来ますと $\mathrm{Im}\rho=\pi\alpha_1$ のままで, ρ は正の方向に行きます。そして z_1 から遠ざかりますから $|\ln(z-z_1)|$ は小さくなりますが今度は z_2 に近づきますから $|\ln(z-z_2)|$ が大きくなります。ですからどこかに turning point があります。ρ はある場所で turn します。このとき $\arg(z-z_1)=\pi$, $\arg(z-z_2)=0$ で phase は変わらないですね。依然として $\mathrm{Im}\rho=\pi\alpha_1$ のままです。ですから ρ は戻ってきます。$z=z_2$ でまたぴょこっと上を通りますと $\ln(z-z_2)$ が値を shift させますから $\mathrm{Im}\rho$ が $\pi\alpha_2$ だけ上がります。そして, またずうっと $z=z_2$ から $z=z_3$ まで行くと今度は $\alpha_3<0$ の場合を考えていますので $\mathrm{Re}\rho$ は順調に増えます。それで z_3 に来たとき phase を π だけかせぎます。だから $\mathrm{Im}\rho$ は $\pi|\alpha_3|$ だけ下がります。(6.5) よりこれで, 再び実軸上に戻りました。更に, z が $-\infty$ の方向に進みますと, ρ は 0 に戻ります (図 9)。z も元に戻って $z=\infty$。

図 9, 図 10 より open string の boundary が z-plane の実軸に map される。そういう map になっている。ちなみに, z_1 , z_2 が ρ-plane の無限遠点で, ここにそれぞれ string 1, string 2 があるわけです。無限の過去の string があるんですが, それから string が図 11 のように時間発展します。 z-plane では free の closed string は既にやったように円だったわけです。

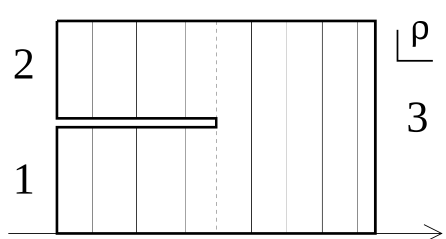

図 11: 図 9 の string 1, 2, 3 の時間発展は図の縦の line のようになる。

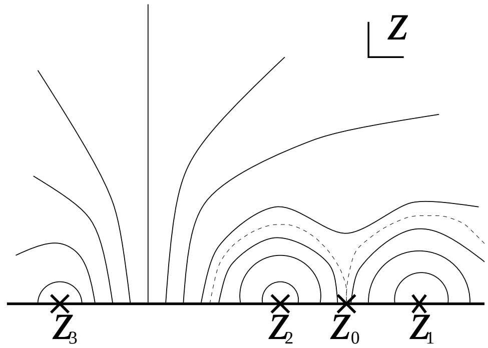

図 12: 図 11 を z-plane に map したもの。図中の点線は図 11 の点線に対応する。

今、open string を考えていますから $\mathrm{Im} z \geq 0$ なので, ちょうど半円です。ただし, 今の場合三つ open string が付いていますから必ずしも綺麗な半円ではないはずですが, z_1 , z_2 から出たやつはだいたい半円の形でくるわけです。それで, どこかでぶつかる (z_0)。図 12 のようになるわけです。もっと分かりやすいのは, z_3 を無限大に持っていったほうがいいんですが, そういうふうにも map できます。これは open string の場合と思って書きましたが, closed string でも全く同様な diagram になります。つまり, 図 12 の下側にその mirror image を足してやれば, closed string の diagram になります。

それで, ちょっと parameter の個数についてやっときますが, 図 8 の string の world sheet が z-plane に map できたわけですが, この場合は実は world sheet を特徴づける parameter は何もありません。この z-plane をもう一度 z-plane に map する mapping には, 既に言った $SL(2, \boldsymbol{C})$ 変換というのがあります。だから今 string diagram, すなわち ρ-plane, から z-plane に map した mapping が見つかったときに, その mapping にもう一度 z-plane を z-plane に写す map を合成しても, 依然としてまだ ρ-plane から z-plane への mapping になるわけですね。そうするとこの string diagram を z-plane に map する mapping には $SL(2, \boldsymbol{C})$ の redundancy があるわけです。z-plane を z-plane に map するという自由度があるわけです。そうすると, 実は, この z_1 , z_2 , z_3 の三つの parameter は自由にとれます。この 3 点の場合は z_3 を無限大にするとか z_2 を 1 にするとか z_1 を 0 にするとか, 自由に選べます。open string の場合はこの z_1, z_2, z_3 はこの実軸上にのってなくてはいけませんが, closed string の場合は必ずしも実軸でなくてもよくて z_1, z_2, z_3 が complex になってもいいんですが, closed string diagram の場合でも $SL(2, \boldsymbol{C})$ があって, この自由度を使いますと三つだけが特定の値に fix できます。どこにとってもいいわけです。それに, 実際前に見たように string の amplitude の方もちょうど $SL(2, \boldsymbol{C})$ 不変性を持っているのでこの z_i の値は自由にとっていい。そうするとこの string diagram が parameter の自由度を持ってなかったことに相当して z-plane の方では何の parameter もない。z_i を固定すればいい。

6.3 Diagram with moduli parameter

もうちょっと違ったdiagram, 例えば図13のようなdiagramを考えます。こういうdiagramは一つparameterを持っています。time interval T ですね。string 1と2が1個になってそれが飛んでいってまた3と4に別れたと。こういうdiagramはone parameter T だけ自由度を持っている。これに対してMandelstam mappingは一般的に書きますと,

$$\rho = \sum_i \alpha_i \ln(z - z_i) \ . \tag{6.7}$$

open stringの場合は z_i はすべて実軸にとりますが, 4点だと z_4 まで4個あり, diagram自身は T をparameterに持っています(図13)。この T をdiagramのmoduli parameterといい

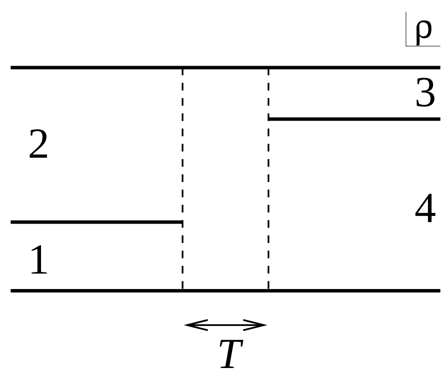

図 13: 4-string

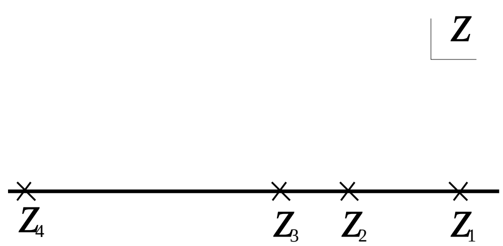

図 14: 4-string in z-plane

ます。それに対して z-planeの方がなんかmapするときparameterとして z_1 から z_4 まで四つありそうなんだけれども(図14), 今言ったようにこの上半面を上半面に写す $SL(2, \boldsymbol{R})$ ですね。これはreal parameterで三つparameterの自由度があるのでこの自由度を使えば, z_1 を1, z_2 を0, z_3 を x という動けるparameterにしておいて z_4 は無限大にとると。とにかく三つだけ固定できるわけです。そうすると動けるのは x だけです。このparameter x の自由度とこのdiagramの T のparameterの自由度が対応している。

まず $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (\infty, 1, x, 0)$ にしますと (図 15), この diagram で T の自由度は図 15 の x の自由度に対応するわけですが, この T が $T = 0$ から $T = \infty$ までいろいろ動くとします (図 15)。 x という parameter のどの値が $T = 0$ と $T = \infty$ とに対応するかが見たい

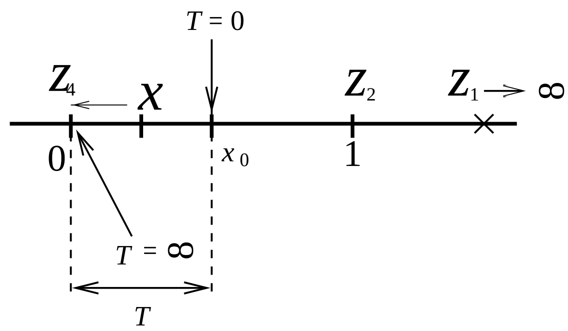

図 15: T と x の対応。x が x_0 から 0 の間のとき, 図 16 の T が 0 から ∞ に対応する。実は x が x_0 から 1 の間のとき, 図 17 の T が 0 から ∞ に対応する。

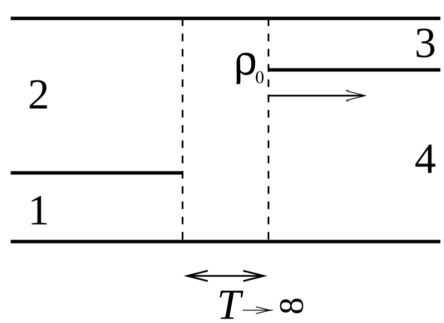

図 16: $z_3 = x$ が 0 から x_0 の間のときに対応する diagram

のですが, 図 16 の 3 の無限遠点に string 3 があって 4 の無限遠点に string 4 があり, T が 無限大というのは 図 16 の ρ_0 が無限遠点に行く。そうすると string 3 と string 4 が近くなっていると感じがしますね。 ρ_0 が, 切れ目がずうっと右の方に行きますと, 図 16 の 3 と 4 が近づいてくる。$z_3 = x$ は string 3 の中心でしたから, x が $z_4 = 0$ に来れば, これが string diagram(図 16) の $T = \infty$ である。$T = 0$ でどこまで行くかといいますとこれはよく分からない。何かある値に行くわけです。x_0 と呼びます。これが $T = 0$ に対応している。そうすると実は $z_3 = x$ が x_0 から 1 の間のとき何に対応するかというとこの図 16 の diagram じゃなくて図 17 の diagram に対応します。これは Mandelstam mapping を自分で丁寧に作ってみてどの diagram がどの diagram に対応するかを見れば分かることなんですが, 図 16 の diagram ではなくて図 17 の diagram。つまり, string 1,2,3,4 の太さが図 16 と同じで切れ目が交差したやつですね, こういうのだと string 1 と string 2 がくっつく前に, 2 が 3 と何かに別れてそれが中間状態として飛んでいって, それと 1 がくっついて 4 になる。そういう図。

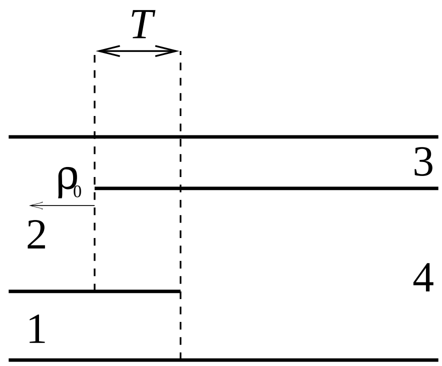

図 17: $z_3 = x$ が x_0 から 1 の間のときに対応する diagram

これは, 行き違いになった図ですね。これも moduli parameter T を持ってますね。T はどんだけ飛んだかの幅。図 17 の $T = 0$ の configuration は図 16 の $T = 0$ の configuration と同じです。同じ configuration というのは string 1, 2, 3, 4 のくっつき方としては同じくっつき方に対応している。ですから, これを Mandelstam mapping したら, 当然同じ場所, z_3 の値としては同じ場所 x_0 になる。それで T をその 0 から無限大にまで持っていきます。無限大に持っていきますと, 今度はこの interaction point ρ_0 を 2 の方に持ってくる。そうすると, 今度は string 2 と string 3 が近づく。近づくような気がしますね。そうすると string 2 と string 3 が近づくということはこの点 $z_3 = x$ が $z_2 = 1$ に来るということですね。ですから, この間はどういう diagram かというと, 図 17 である。図 16 の diagram が $z_3 = x$ が 0 から x_0 の間に対応していて, $z_3 = x$ が x_0 から 1 の間は図 17 の diagram に対応している。図 16 の $T = \infty$ が $x = 0$ で, 図 17 の $T = \infty$ が $x = 1$ だ。いいでしょうか？

それで, ちょっと先走りしますが, open string の Veneziano amplitude[13] というのは昔々 string 理論が出る前に一番最初に出た。これは非常に珍しい例ですね, 何か理論ができる前にその最終的な答がぽこっと提唱されたというのは。Veneziano amplitude というのはこういう形に書けてます,

$$\mathcal{A} = \int_0^1 dx (1-x)^{p_1 \cdot p_3} x^{p_2 \cdot p_3} \ . \tag{6.8}$$

そうしますと, 図 15 と (6.8) は非常によく似ている。何を言ってるんでしょうね。図 15 は実は (6.8) の amplitude を与えるんですが, x の積分範囲のうち 0 から x_0 までしか図 16 の diagram が cover しない。図 17 の diagram で計算したやつは全く同じ integrand を出すんだけれども cover する範囲が x_0 から 1 までしかない。図 16 の diagram と図 17 の diagram を足せば, ちょうど積分領域が 0 から 1 までになって (6.8) の Veneziano amplitude を再現するということになります。ここで何を注意したいかといいますと, 結局, こういう full な dual amplitude, こういう最終的な amplitude を再現するということは, この moduli parameter で全領域, 今 0 から 1 までが moduli parameter の全領域なんですが, この amplitude が持っている moduli parameter の領域を, diagram として全体を cover できないといかんわけですが, 全体を cover するということはこういうふうに 2 つ以上の diagram で cover したときには, 図 16 のはしっこの configuration と図 17 のはしっこの configuration が当然一致しない

といけないわけですね。要するに隙間があってはいけないわけです。ですから, このmoduli spaceで同じ点に対応するということは何か同じもの, 同じつなぎ方でないといかん。

実はこのdual amplitudeを再現するということは, これが境界を接しているということ, 図16のdiagramと図17のdiagramが境界を接していて, 同じ点であるということ, それがdual amplitudeを再現するということですが, それが実はstring理論のgauge不変性を意味することになるわけです。それがvertexのassociativityということなんです。図16で, $T=0$ のdiagramというのは隙間がないわけですが, string 1と2をくっつけて中間状態のstring $\Phi_1 * \Phi_2$ にし, それとstring 3をくっつけて最終的なstring 4: $((\Phi_1 * \Phi_2) * \Phi_3)_4$ になるように作った。それが, 図17では, $(\Phi_1 * (\Phi_2 * \Phi_3))_4$ になるということなんですが, $T=0$ で同じconfigurationだから, 同じようなくっつき方ではあるんだけれども, 掛け算の順序が違うわけです。

$$((\Phi_1 * \Phi_2) * \Phi_3)_4 = (\Phi_1 * (\Phi_2 * \Phi_3))_4 \tag{6.9}$$

というのがassociativityです。

vertexを作って, 本当にこういう掛け算則をoscillatorで計算しますと, 無限行無限列のmatrixのdeterminant factorが出てきてきます。問題なのはそれが1になるかどうかです。naiveには両者はくっつき方が同じなので等しそうなんだけれども, 係数まで含めて本当に等しいか, というのが非常に問題です。実は $D=26$ では, (6.9)の両辺の係数が等しいということが成り立つ。それがassociativity。

$T=0$ で, 図16と図17のamplitudeがつながる, つまり, 図16のdiagramから出るintegrandと図17のdiagramから出るintegrandが等しい, ということは実は $D=26$ でだけ保証されている。だから, dualityが成り立つということですね, moduli spaceを隙間無くcoverするということと, string理論のgauge不変性が成り立つための代数則が成り立つということがassociativityですが, これが成り立つということが表裏一体の関係にある。通じなかったでしょうね。まあいいや。

6.4 貼り付け定理

それで, こういうことを非常に自動的に出す一つの方法として, 一番最初にいいましたLeClair-Peskin-Preitschopf (LPP)たちの作ったものがあるんですが [14], これを紹介します。3点vertexで話をしますが, LPPが作ったvertexというのは次のように指定されます。

今さっき書いた, 例えば図18のような3点vertex, こういう ρ-planeがあったわけですが, string r $(r=1,2,3)$ に対応するcylinderが各々mapping (2.41)でcomplex plane上のunit circle w_r にmapされている。ρ-planeの座標づけは, $\rho = \tau + i\sigma$ に対して

$$\rho = \begin{cases} \alpha_1 \ln w_1 & \tau \le 0\ , \quad 0 \le |\sigma| \le \alpha_1 \pi\ , \\ \alpha_2 \ln w_2 + i\alpha_2 \pi & \tau \le 0\ , \quad \alpha_1 \pi \le |\sigma| \le (\alpha_1 + \alpha_2)\pi\ , \\ \alpha_3 \ln w_3 + i(\alpha_1+\alpha_2)\pi & \tau \ge 0\ , \quad 0 \le |\sigma| \le (\alpha_1+\alpha_2)\pi\ . \end{cases} \tag{6.10}$$

それでこの ρ が, さっきのMandelstam mapping

$$\rho = \sum_{r=1}^{3} \alpha_r \ln(z - z_r) \tag{6.11}$$

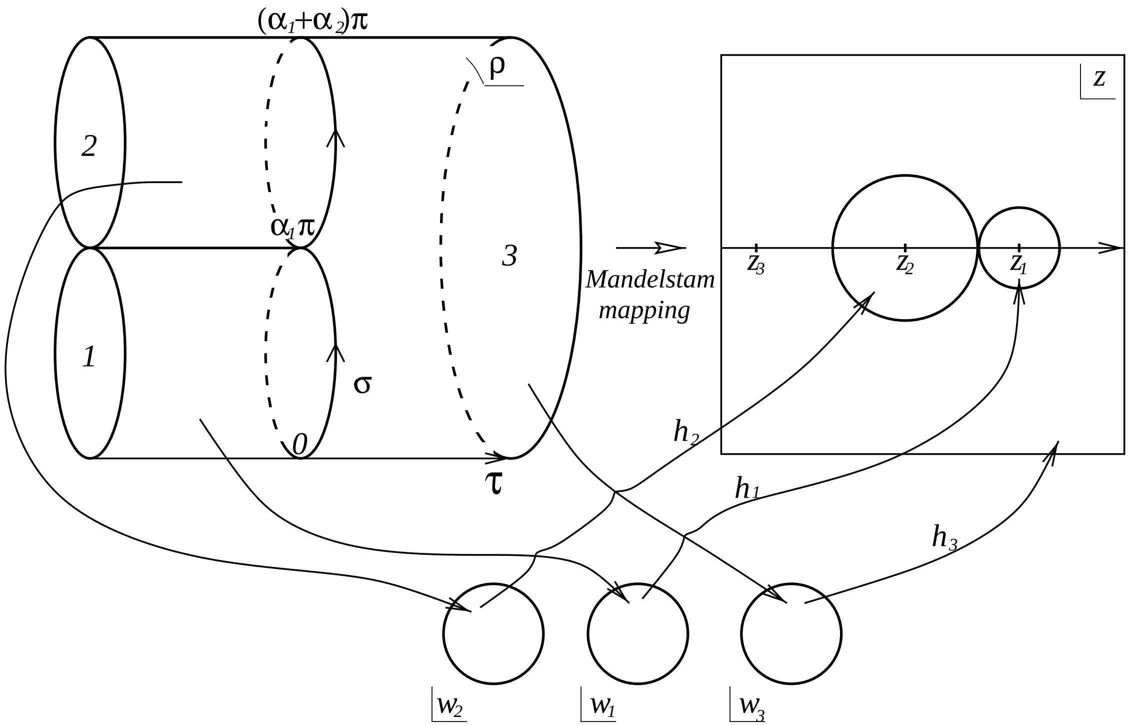

図 18: 3-point vertex

で z-plane に map されている。こういうふうにそれぞれの string 領域 w_r を ρ-plane に map して, さらにこの mapping を z-plane に map するということをやりました。図18で z-plane 上の z_1 を囲む領域が w_1 が map されたところ, z_2 を囲む領域が w_2 が map されたところ, これらの外側の領域が w_3 が map されたところです。この unit circle w_r から z-plane への mapping のことを各々 $h^{(r)}$ と呼ぶことにします: $h^{(r)}(w_r) = z$ 。この mapping を使って, LPP の vertex $\left\langle V_{\mathrm{LPP}}^{(3)} \right|$ は次の関係式を満足するものとして定義されます:

$$\left\langle V_{\mathrm{LPP}}^{(3)} \right| \forall \phi^{(r)}(w_r) \cdots |\Omega\rangle_1 |\Omega\rangle_2 |\Omega\rangle_3 \stackrel{\text{def}}{=} \left\langle \left(\frac{dz}{dw_r} \right)^{d_\phi} \phi(z) \cdots \right\rangle_{\mathrm{CFT}} . \tag{6.12}$$

ここで左辺の $\phi^{(r)}(w_r)$ は string r の任意の operator で, d_ϕ はその次元です。右辺は z-plane 上の CFT の期待値。$\left(\frac{dz}{dw_r}\right)^{d_\phi} \phi(z)$ は $\phi^{(r)}(w_r)$ の $h^{(r)}$ map, すなわち

$$h^{(r)} \left(\phi^{(r)}(w_r) \right) = \left(\frac{dz}{dw_r} \right)^{d_\phi} \phi(z) \tag{6.13}$$

となっています。それで, (6.12) が成り立つように vertex $\left\langle V_{\mathrm{LPP}}^{(3)} \right|$ を決めよう。通じてますかね？(6.12) の左辺において, string 1, string 2, string 3 のどんな operator $\phi^{(r)}(w_r)$ をいくつか持ってきて, string 1, string 2, string 3 の Fock space $|\Omega\rangle_1$, $|\Omega\rangle_2$, $|\Omega\rangle_3$ の上に演算しても, それを vertex state $\left\langle V_{\mathrm{LPP}}^{(3)} \right|$ に対して掛け算して得られる期待値が z-plane 上の CFT の

Green 関数を実現せよ, と要請するわけです。この要請で vertex $\left\langle V_{\mathrm{LPP}}^{(3)}\right|$ を定義します。これが LPP の vertex の定義です。

注意したいのは右辺の CFT は一体系の CFT であるということです。図 18 の z-plane 上に丸を書いていますけれども, こんなのは unit circle w_r を map したと思ったからついているだけの記号であって, これは単なる z-plane です。すなわち z-plane の CFT。$X(z)$ なら $X(z)$, $c(z)$ なら $c(z)$ というこういう conformal field が住んどるわけですが, その conformal field の Green 関数ですね。そういう一体系の Green 関数を実現するものとして vertex を定義しました。これは要求が大き過ぎるんじゃないかという気もしますが, 実は実現できている。これは基本的に free filed だから実現できるわけなんですが, とにかくこの vertex が実際に存在するというのは, 答えを書きますと

$$\begin{aligned}\left\langle V_{\mathrm{LPP}}^{(3)}\right| = {}_1\left\langle\tilde{\Omega}\right|{}_2\left\langle\tilde{\Omega}\right|{}_3\left\langle\tilde{\Omega}\right| \int d^Dp_1 d^Dp_2 d^Dp_3 (2\pi)^D \delta^D(p_1+p_2+p_3) \\ \times \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{r,s}\sum_{n,m\geq 0}\alpha_n^{(r)}N_{nm}^{rs}\alpha_m^{(s)} + \sum_{r,s}\sum_{\substack{n\geq 2\\ m\geq -1}} c_n^{(r)}\widetilde{N}_{nm}^{rs}b_m^{(s)}\right) \\ \times \prod_{i=1,0,-1}\left(\sum_{m\geq -1}\sum_r M_{im}^r b_m^{(r)}\right) .\end{aligned} \tag{6.14}$$

oscillator の所に r と書いているのは string r の oscillator であるという意味です。係数 N_{nm}^{rs} $(r,s=1,2,3)$ を Neumann 係数といいます。ghost の方は別の Neumann 係数 $\widetilde{N}_{nm}^{rs}$ です。n が 2 以上, m が -1 以上というのは, 今 refer している vacuum が conformal vacuum なのでこれがどういう ghost で消えるか, antighost で消えるかというのが, 普通の Fock と違った変な index であったことに対応します。

特に 2 点の場合ですね, 2 点のやつだけ調べます。今の要請をおきますと, 例えば bc ghost に対しては (6.12) の左辺は定義により,

$$\langle\, b(z)c(w)\,\rangle_{\mathrm{CFT}} = \frac{1}{z-w} \tag{6.15}$$

とならなければいけないわけです。このように 2 点関数を満たすことを要求しますと, そのことだけから Neumann 係数が決まります。今考えているのが free theory だから, N 点関数は 2 点関数の exponential を使って書けるので, 2 点関数で実現できると, 自動的に N 点関数で実現できます。具体的に Neumann 係数はどうなっているかというと, 例えば一つだけ書きますと,

$$\widetilde{N}_{nm}^{rs} = \oint\frac{dw_r}{2\pi i}w_r^{-n+1}\left(h^{(r)\prime}(w_r)\right)^2\oint\frac{dw_s}{2\pi i}w_s^{-m-2}\left(h^{(s)\prime}(w_s)\right)^{-1}\frac{-1}{h^{(r)}(w_r)-h^{(s)}(w_s)} . \tag{6.16}$$

今 $h^{(r)}$ が決まっていますが, これが分かりさえすればこの Neumann 係数は unique に決まる。右辺で $h^{(r)\prime}$, $h^{(s)\prime}$ の冪が各々2, -1 というのは ghost, antighost の dimension が各々 -1, $+2$ であったことに対応します。これは, 気持ちは, 例えば b, c に対しては (6.15) が成り立ちますが, (6.16) の右辺に出てきている $1/(h^{(r)}(w_r)-h^{(s)}(w_s))$ は z-plane 上では単にこの propagator そのものになっている。こういうふうに決まります。

今3点vertexしか説明しませんでしたけれど, 同じ手続きでどんな複雑なやつもできるわけです。例えば, 図19のようなstring diagramは全然複雑じゃないですが, この ρ-planeが

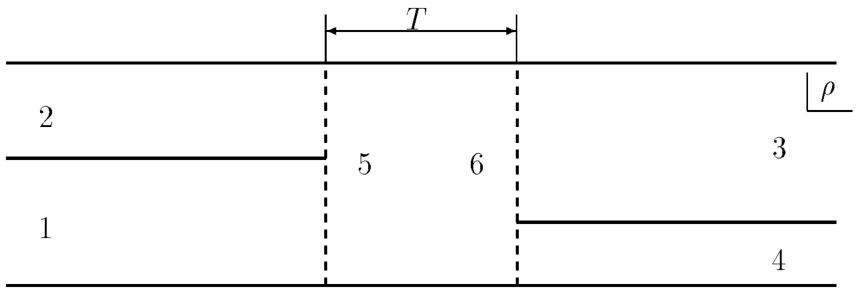

図 19: moduli parameter T を含んだstring diagram

Mandelstam mappingによって z-planeにmapしさえすれば, このような δ 関数型ではないつなぎ方に対してもvertexが直接作れます。moduli parameter T を含んだvertexも作れるわけです。その作り方は, 依然として次の要請, すなわち, 図19の ρ-planeをMandelstam mappingで z-planeに持っていたときにその z-plane上のCFTのcorrelation functionを再現しなさい, という要請をおくことによって作ります。つまり3点vertexのときと全く同じ手続きで任意のdiagramについてそのつなぎ方に対応するvertex operatorが作れます。

LPPが証明した非常に重要なことは, この手続きでやるとGGRT, Goddard-Goldstone-Rebbi-Thorn[15]じゃなくてGeneralized Gluing and Re-smoothing Theorem: 貼り付け定理 [14]が成り立つということです。これはどういうやつかといいますと, あまり一般的に言うとわけが分からないんですが $\cdots$ 。

z-planeを2枚用意します(図20 $[P]$ $[Q]$)。それで, unit circle w_{A_i} $(i = 1, \cdots, N)$, w_C を各々 h_{A_i} , h_C で z plane (図20 $[P]$)にmapします。こういうmappingが与えられますと, この貼り付けに対応するvertex $\left\langle V_{\{A_i\}C}\right|$ がLPPの処方で定義される。stringのset $\{A_i\}$ とstring C のvertex。同様に, もう一方の z-plane (図20 $[Q]$)上においても, unit circle w_{B_j} $(j = 1, \cdots, M)$, w_D からのmapping h_{B_j}, h_D が与えられて, stringのset $\{B_j\}$ とstring D のvertex $\left\langle V_{\{B_j\}D}\right|$ が定義されます。$i = 1, \cdots, N$ としましたので $\left\langle V_{\{A_i\}C}\right|$ は $N+1$ 点vertexですね。また $j = 1, \cdots, M$ ですので $\left\langle V_{\{B_j\}D}\right|$ は $M+1$ 点vertex。今この二つのvertexを貼り付けることを考えたい。二つの z-plane (図20 $[P]$ $[Q]$)を一つの z-plane (図20 $[R]$)にmapして, そこで C と D をreflector $|R\rangle_{CD}$ でくっ付ける。$|R\rangle_{CD}$ でこの C と D をつぶして, $\{A_i\}$, $\{B_j\}$ だけのvertex $\langle V_{\{A_i\}\{B_j\}}|$ に直すということを考えたい。まずunit circle w_C をidentity map: id で z-plane $[R]$ のunit circleに持っていきます。これは z-plane $[P]$ を h_C^{-1} で z-plane $[R]$ へmapすることに相当します。そうしますと, $\{A_i\}$ の元のunit circle w_{A_i} を z-plane $[R]$ へ写すmappingは $h_C^{-1} \circ h_{A_i}$ となる。次にunit circle w_D の内部をinversion I: $z \to -\frac{1}{z}$ で先程の z-plane $[R]$ 上のunit circle C の今度は外側にmapします。そうしますとこれは z-plane $[Q]$ を $I \circ h_D^{-1}$ で z-plane $[R]$ にmapすることに相当しますから, B_j の元のunit circle w_{B_j} は $I \circ h_D^{-1} \circ h_{B_j}$ で z-plane $[R]$ にmapされる。それ

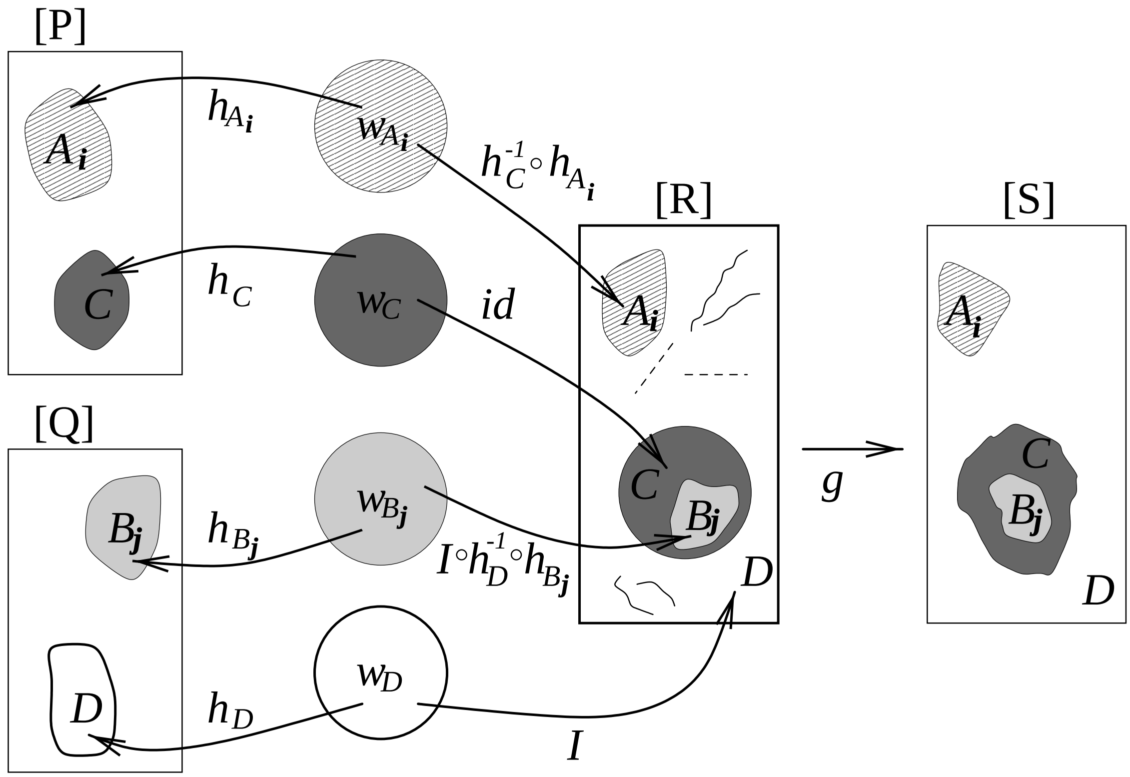

図 20: 貼り付け定理

で, unit circle w_D の内側はこの inversion で $[R]$ 上の unit circle C の外側に行くわけですが, w_{B_j} に関しては, そもそも $[Q]$ においては, D の外側に B_j があったわけですから, unit circle w_D の外側に B_j の h_D^{-1} imageがあるわけで, それが inversion をうけて今度は $[R]$ の unit circle C の中に入る。いいですね。通じましたかね？ これを gluing といいます。二つの mapping をくっ付けて一つの mapping に直した。これが gluing です。

これをやると, ものすごい操作をやったので cut やら branch point やらしわしわがいっぱいできます。そこで, ある mapping g をやってしわを伸ばす。しわを伸ばすと, 単位円が汚い形になるかも知れないけれども, しわが全部消えて無くなって素直な mapping ができる (図 20 $[S]$)。これを re-smoothing process といいます。最終的な map は,

$$\widehat{h}_{A_i} = g \circ h_C^{-1} \circ h_{A_i} \ , \qquad \widehat{h}_{B_j} = g \circ I \circ h_D^{-1} \circ h_{B_j} \ . \tag{6.17}$$

この mapping で定義される LPP vertex を $\left\langle V_{\{A_i\}\{B_j\}} \right|$ と呼びます。元々, A_i と C をくっ付ける vertex $\left\langle V_{\{A_i\}C} \right|$ および B_j と D をくっ付ける vertex $\left\langle V_{\{B_j\}D} \right|$ があったわけですが, それに対して reflector の $|R\rangle_{CD}$ で C と D を貼り付けた。すると, これが実は string $\{A_i\}$, $\{B_j\}$ の vertex $\langle V_{\{A_i\}\{B_j\}}|$ に weight 1 で一致する:

$$\left\langle V_{\{A_i\}C} \right| \left\langle V_{\{B_j\}D} \right| |R\rangle_{CD} = 1 \left\langle V_{\{A_i\}\{B_j\}} \right| \qquad \text{for } D = 26 \ . \tag{6.18}$$

これが GGRT。これが成り立つのは $D=26$ だけで, もうちょっと正確に言いますと conformal anomaly が無いとき, ということが彼らによって証明されました。(6.18) の vertex はそれぞれ LPP の処方で作ったやつです。LPP の処方というのは weight をどう決めたかまで決まっているわけですね。さっきの CFT は, normalization は $\langle c_{-1}c_0c_1\rangle_{\mathrm{CFT}}=1$ で決まっています。LPP の処方では normalization まで CFT のものになりなさい, という要請で vertex を決めたんで weight まで定義されているわけですが, その vertex を使いますと, ちょうど (6.18) の左辺が, 素直に繋いだ右辺に weight が何も無しで一致する。

一般的にはこういう以外にはないんでしょうが, もうちょっと卑近な例でいいますと, string の場の理論で amplitude を計算しようとすると図 19 のような diagram の計算が必要になります。左側の vertex で string 1, 2 がくっ付いて string 5 になった後, しばらく時間発展して, どっかで split した, すなわち右側の 3 点 vertex で string 3, 4 に変わった。このとき LPP の 3 点 vertex を使って,

$$ {}_{125}\left\langle V^{(3)}_{\mathrm{LPP}}\right|{}_{346}\left\langle V^{(3)}_{\mathrm{LPP}}\right| e^{-TL}\left|R\right\rangle_{56} $$

という式が必要になりますが[11] , 先述の GGRT は何をいってるかというと, これが次の式に等しい:

$$ {}_{125}\left\langle V^{(3)}_{\mathrm{LPP}}\right|{}_{346}\left\langle V^{(3)}_{\mathrm{LPP}}\right| e^{-TL}\left|R\right\rangle_{56} = {}_{1234}\left\langle V^{(4)}_{\mathrm{LPP}}(T)\right| . \tag{6.19} $$

(6.19) の左辺の ${}_{125}\left\langle V^{(3)}_{\mathrm{LPP}}\right|$ および ${}_{346}\left\langle V^{(3)}_{\mathrm{LPP}}\right| e^{-TL}$ は図 21 に示した string diagram の各部分

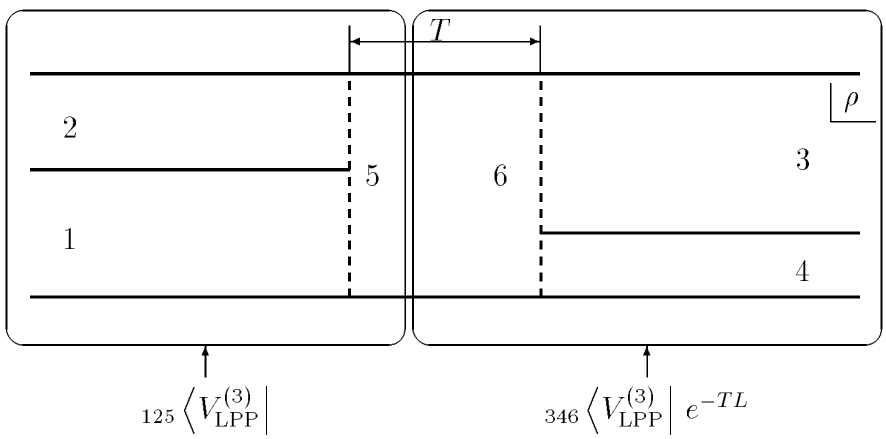

図 21: $\left\langle V^{(4)}_{\mathrm{LPP}}(T)\right|$

に相当した vertex と各々みなします。これらの vertex を reflector $|R\rangle_{56}$ でくっ付けるわけです。それが (6.19) の左辺です。右辺の 4 点 vertex $\left\langle V^{(4)}_{\mathrm{LPP}}\right|$ はどうやって構成したかというと, 図 21 の diagram を一つの diagram と見て, この ρ-plane を先程の Mandelstam mapping で z-plane に map する。この mapping に対して LPP の流儀で作った vertex です。これらが一致するというのが (6.19) です。これがこの例に関して GGRT が言っていることです。これはほとんど当たり前のことをいっているように思われるのが残念ですが $\cdots$。多分思っ

[11] 実はここで出てくる $\int dT\, e^{-TL}|R\rangle_{56}$ が, string field theory における propagator になります。

てるでしょうね $\cdots$。何が当たり前でないかというとひとえに weight です。(6.19) の右辺と左辺が比例することは本質的に自明と言えば自明なんです。これは全く自明です。要するに weight が 1 で等しいということ，これが自明でない。このことが成り立つのは，critical dimension においてのみです。もうちょっと時間があればいかに非自明かという事が説明できるんですが，やめます。

LPP で CFT に refer して CFT の Green 関数を再現するようなものとして vertex を定義する。その方法の一番良い点はひとえにこの GGRT にあります。貼り付けるときにそういうたぐいの vertex として N 点 vertex と M 点 vertex を貼り付けるとしますと，$N+M-2$ 点の vertex ができますが，その vertex が直接また元の LPP 処方で作った vertex と weight まで含めて等しい。その性質が非常に強力なわけです[12]

6.5 Gauge symmetry

貼り付け方に相当して掛け算則を定義できます。ここでは主に open string の場合を説明

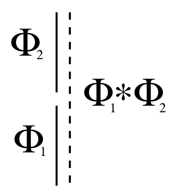

図 22: light-cone type の $*$ product

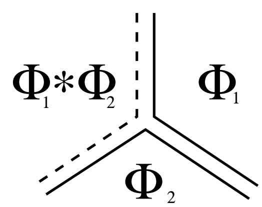

図 23: Witten type の $*$ product

します。action (6.1) の Φ^3 を $\Phi\cdot(\Phi*\Phi)$ と書きます。3 点 vertex が先程書いた light-cone type のやつだと，Φ_1 と Φ_2 の掛け算 $\Phi_1*\Phi_2$ というは図 22 のように string 1 と 2 を全体として一つの string(図 22 の点線) に直す，というものです。式で書くと

$$|\Phi_1*\Phi_2\rangle_4 = {}_{123}\left\langle V^{(3)}_{\mathrm{LPP}}\right| |\Phi_1\rangle\,|\Phi_2\rangle\,|R\rangle_{34} \tag{6.20}$$

となります。${}_{123}\left\langle V^{(3)}_{\mathrm{LPP}}\right|$ の bra の添字 123 の 12 を ket $|\Phi_1\rangle$ と $|\Phi_2\rangle$ が潰して bra の添字 3 が浮きますが，これを ket にしたいので reflector $|R\rangle_{34}$ で 3 を潰して添字 4 を持つ ket にしたものです。Witten 流だと string 1 と 2 の半分を図 23 のように張り合わせてできた図 23 の点線部分を第 3 番目の string だとみなす。それが $\Phi_1*\Phi_2$ です。それで 3-point vertex を決めましたら，掛け算則が定義できるわけです。

gauge 変換は，

$$\delta|\Phi\rangle = -Q_{\mathrm{B}}|\Lambda\rangle + g\left(|\Phi*\Lambda\rangle + |\Lambda*\Phi\rangle\right)\ . \tag{6.21}$$

まず $\mathcal{O}(g^0)$ の gauge 不変性は，

$$Q_{\mathrm{B}}^2 = 0 \qquad \text{for} \qquad D=26\ . \tag{6.22}$$

[12] 九後さん註：LPP の II[14] での GGRT の証明は pedagogical ですが，複雑で読むのに苦労します。最近我々がその証明を相当簡単化した論文 [16] を発表しましたので，興味ある方は参考にしてください。

nilpotency ですね, これは講義の中で結局やらなかったような気がしますが, nilpotency は $D=26$ で成り立つ [3]。Virasoro generator の central charge term が消える条件と同じです。conformal anomaly が無ければ BRS charge が nilpotent であるということは CFT の OPE の technique で簡単に示せます。

$\mathcal{O}(g^1)$ の gauge 不変性は,

$$-gQ_{\mathrm{B}}\Lambda\cdot(\Phi*\Phi)-g(\Phi*\Lambda+\Lambda*\Phi)\cdot Q_{\mathrm{B}}\Phi = g\Lambda\cdot[-Q_{\mathrm{B}}(\Phi*\Phi)+Q_{\mathrm{B}}\Phi*\Phi+\Phi*Q_{\mathrm{B}}\Phi] \quad (6.23)$$

が zero になるということです。ここで右辺は, graded cyclic symmetry が成り立つこと, および Q_{B} の部分積分を用いて Λ を左に持ってきてまとめた形を書いてあります。Λ , Φ の Grassmann parity を考慮しなければいけないので, 左辺と右辺で符号が relative に変わっています。(6.23) が zero になるというのは, Q_{B} が $*$ product の下で Leibniz rule を満たすことを意味していますが, このことは 3 点 vertex でいうと,

$$\left\langle V^{(3)}_{\mathrm{LPP}}\right|\sum_{r=1}^{3}Q^{(r)}_{\mathrm{B}}=0 \quad (6.24)$$

が成り立つということと同じ内容です。ここで $Q^{(r)}_{\mathrm{B}}$ は string r の BRS charge。この $\mathcal{O}(g^1)$ の gauge 不変性は LPP の定義を使いますと自明です。勿論 conformal anomaly があってはいけないので $D=26$ でないといかんのですが。(6.24) の左辺はこれを z-plane に map して CFT にしますと,

$$\left\langle V^{(3)}_{\mathrm{LPP}}\right|\sum_{r=1}^{3}\oint\frac{dw_r}{2\pi i}j^{(r)}_{B}(w_r)|\cdots\rangle=\left\langle\oint\frac{dz}{2\pi i}j_{\mathrm{B}}(z)\cdots\right\rangle_{\mathrm{CFT}} . \quad (6.25)$$

ここで $|\cdots\rangle$ は任意の state。この右辺の CFT の contour 積分は, singularity が無い限りは

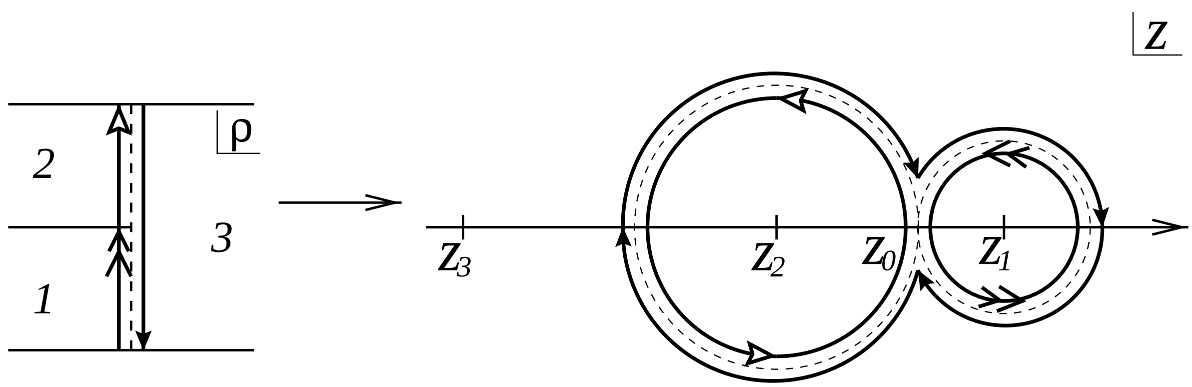

図 24: contour(分かりやすいように closed の場合を書いた。)

スパスパスパッと消えるだけです。だから図 24 を見ればほとんど自明ですね。CFT を使うと自明。z_0 という interaction point には singularity は無いことに注意してください。こ

のときなぜ $D=26$ でないといかんかというと, w-plane あるいは ρ-plane の BRS charge を z-plane に map したときに同じ j_{B} でよいということなのです。$D=26$ でないと (6.25) の右辺の normal order と左辺の normal order はちがうのでお釣りが出てしまう。それが消えない。とにかく BRS invariance は OK。

$\mathcal{O}(g^2)$ の gauge 不変性は,

$$\begin{aligned}\frac{g^2}{3}\,[(\Phi*\Lambda)\cdot(\Phi*\Phi)-(\Lambda*\Phi)\cdot(\Phi*\Phi) \\ +\Phi\cdot((\Phi*\Lambda)*\Phi)-\Phi\cdot((\Lambda*\Phi)*\Phi) \\ +\Phi\cdot(\Phi*(\Phi*\Lambda))-\Phi\cdot(\Phi*(\Lambda*\Phi))]=0\ .\end{aligned} \tag{6.26}$$

これは Λ でくくり出してやると,

$$g^2\,[(\Phi*\Phi)*\Phi-\Phi*(\Phi*\Phi)]\cdot\Lambda=0\ . \tag{6.27}$$

これが消えるためには, open の場合は associativity が成り立てばいい:

$$(\Phi_1*\Phi_2)*\Phi_3=\Phi_1*(\Phi_2*\Phi_3)\ . \tag{6.28}$$

open の場合 Φ は matrix なので, Φ の順番を変えるわけにはいかない。だけど掛け算の順番を変えることができる。これが成り立つと $\mathcal{O}(g^2)$ の gauge 不変性が成り立つ。これは Witten の open の場合成り立っています。(6.28) の左辺は, string 1 と string 2 をくっ付けて一つの string(図 25 左辺の点線) にする。それに string 3 をくっ付けるということでできた一つの string(図 25 左辺の波線)。右辺の方はまず string 2 と string 3 をくっ付ける。それで一つ string ができた (図 25 右辺の点線)。それに string 1 をくっ付けて, その結果できたものがこの図 25 右辺の波線の string ですね。それでこれらが同じものであるというのが associativity です (図 25)。

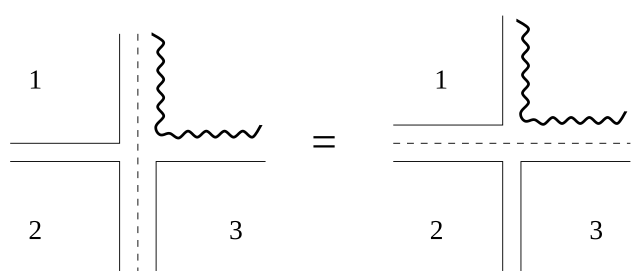

図 25: associativity

図 25 を見てると当たり前です。しかし critical dimension でしか成り立たない。くっ付き方が同じというのは自明ですが問題は weight です。無限行無限列の determinant factor が 1 になるということを結局証明せなあかんわけですが, これが critical dimension で成り立つことはさっきの GGRT で証明できるわけです。

HIKKO の closed の場合は matrix の index はありませんから掛け算の順番はいいんですが, 今度は Jacobi identity が必要です[13]：

$$(\Phi_1 * \Phi_2) * \Phi_3 + (-1)^{|1|(|2|+|3|)}(\Phi_2 * \Phi_3) * \Phi_1 + (-1)^{|3|(|1|+|2|)}(\Phi_3 * \Phi_1) * \Phi_2 = 0 \ . \qquad (6.29)$$

ここで (6.29) の左辺の各項を順に $[P]$, $[Q]$, $[R]$ と名付けることにします。これらは図 26 の $[P]$, $[Q]$, $[R]$ で $T = 0$ ととったものに各々対応します。これは想像をたくましくしなければいけないんですが, closed string の特徴は図 26 で矢印を付けた部分が twist される。$\mathcal{P}$ projection: $\mathcal{P} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \exp\left[i\theta(L_0 - \bar{L}_0)\right]$ がありますから各々ひねることができる。いろんな角度についてひねられているわけですが, 例えば図 26 の $[P]$ で角度 $\theta_P = 0$ としたものと $[Q]$ で角度 $\theta_Q = \pi$ としたものは $T = 0$ で同じ configuration を与えます。このように回転角のいろんなやつが (6.29) 左辺の 3 項の中に 2 回ずつ pair で出てきて結局全部 cancel する。ここで configuration が一致するだけじゃなくて weight 1 になるということは再び GGRT が必要ですが, 結局 cancel します。従って gauge 不変性がある。HIKKO の closed はこれで終りです。

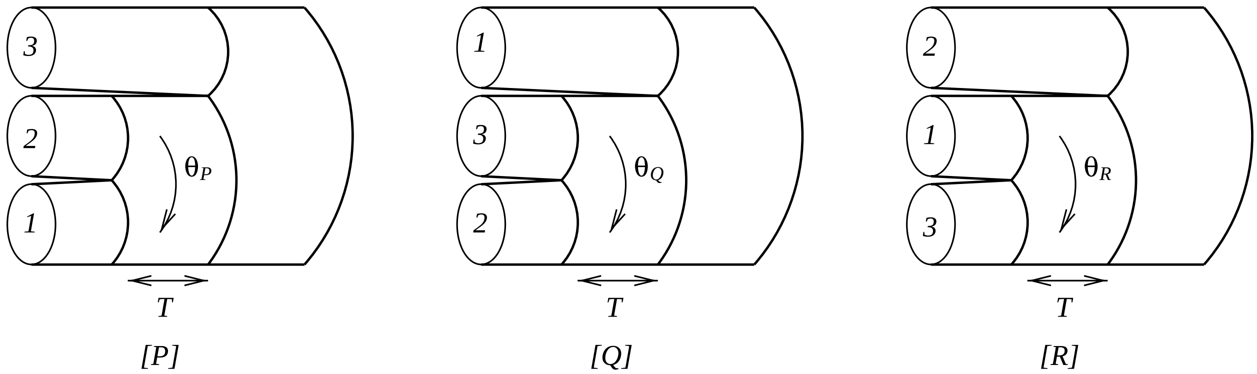

図 26: Jacobi identity

HIKKO の open は特殊な事情がありまして, 4 点 vertex が必要です。

Witten-Goto type の midpoint interaction をそのまま closed string の場合に拡張しますと, non-polynomial interaction になって無限次まで必要だということになりますが一応 bosonic string は作れる。

7 Discussion

Witten の open string は一番単純で良いわけですが, closed string は今言いましたように non-polynomial になって大変苦しい。それに対して HIKKO の closed string は Φ^3 で終わっ

[13] ここで $|i|$ は, $|i| = \begin{cases} 0 \ , & \Phi_i\text{: Grassmann even} \\ 1 \ , & \Phi_i\text{: Grassmann odd} \end{cases}$ とする。

てますからこれは良いんですが, HIKKO の最大の問題は, string 汎関数の argument に Z だけでなくて α という string の長さ parameter を入れないといかん。$\Phi[Z,\alpha]$ ということです。これは物理的に理解できません。だけど HIKKO の on-shell amplitude は α に依らないということが証明されました [17]。だから適当なやつを入れておいて amplitude を読み取ればいいということをいったわけですが, それはまた同時に困難をいっています。on-shell amplitude にした途端に α に依らないということは, loop amplitude の計算に際して図 27 のように cut して imaginary part を計算したとすると, imaginary part は中間状態の on-shell amplitude で決まりますので, 図 27 の右辺の cut によってできた tree amplitude はいずれ

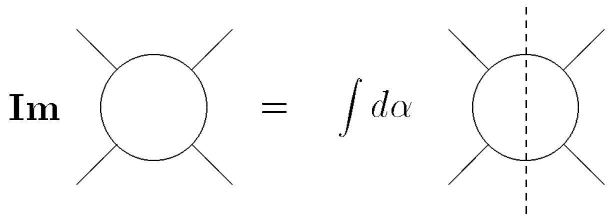

図 27: cutting rule

も α に依っていないということになります。元の diagram の imaginary part はこれで計算できるわけですが, 中間状態は色々な α を持った粒子の和になりますので, 今いったことから loop の $d\alpha$ 積分は空回りして無限大を出す。つまり loop amplitude は well-defined でないという困難を同時に示しているわけです。従って HIKKO は難しい。それに対して α に毒をもって毒を制すという話がありまして, α に対して τ という proper time みたいな bosonic variable を入れる。さらに θ , $\bar{\theta}$ という Grassmann variable を二つ加える。そうすると, $(\alpha,\tau,\theta,\bar{\theta})$ の四つで Parisi-Sourlas mechanism[18] という $\cdots$, まあとにかく α の問題が, unphysical parameter を Grassmann と bosonic にすることでその間で自動的に相殺するということができます。それを covariantized light-cone formulation [11] と呼びます。この covariantized light-cone というのは手でこういうものを入れて α の問題を逃れているので, しかもこんな変な zero-mode variable が入ると審美的には綺麗じゃないんですけれども, closed string を扱えて vertex が Φ^3 で終わってしまって非常に compact に書けているというのは今のところこれしかないですね。審美的にはともかくこれでいい。こういう理論ができてます。

それから supersymmetric な理論についてコメントします。Witten の open string の super は一応できています [19]。しかし 89 年か 90 年頃に実はうまくいってないんだという指摘がされました [20]。それは, super の場合には picture changing operator[21] というのがありまして, Witten の vertex の midpoint にこれを付けなくてはいけないんですが, それがぶつかるんですね。それがぶつかって singularity を出して associativity を壊している。gauge 不変性が壊れている。amplitude の段階で言いますと amplitude がうまく出ないということが言われまして $\cdots$, だめだと。それに対して Witten のとっている picture と別の picture に変えればいいという話が Preitschopf-Thorn-Yost[22] の論文にありましたがあれはなんか非常に singular でよく分からない。最近橋本君によると, Berkovits という人が, それは成功

した [23] と言っていましたが僕は知りません。できるかも知れませんが。だから super は light-cone gauge 以外はまともなやつがないですね。light-cone gauge だと, Neveu-Schwarz-Ramond formalism[24] にのっとったやつも Green-Schwarz formalism[25] にのっとったやつも super はそれぞれあるようですが, light-cone gauge 以外では非常に難しい。その困難の元凶の一つは boson と fermion の問題ですね。要するに boson の kinetic term は Klein-Gordon operator, fermion の kinetic term は勿論 Dirac operator なわけですが, そのために picture changing ということが必要になってきてごちゃごちゃとものすごく悲惨なことになるわけです。light-cone gauge だと kinetic term が boson も fermion も結局本質的に同じになっているわけです。それは fermion の場合も半分消すということをやるので 2 階の微分演算子になる。ということで, どちらも同じ kinetic term を使っているということが light-cone gauge の場合のうまくいっている原因のようなのだけれども。さっきちらっと言いました covariantized light-cone というのは, 実は light-cone gauge の場の理論ができているとそれにチョコチョコッと手で細工するとできるので, ひょっとして fermion と boson を共通に扱うああいう covariantized light-cone みたいな形で gauge invariant な formulation ができるんじゃないかというふうに思っていますが, そうかも知れないし, そうでもないかも知れない。

最後に一つだけ。$\alpha = p^+$ HIKKO というわけの分からん理論があります。HIKKO の理論というのは α と p^+ は勿論独立なんですけれども, HIKKO の理論で α と書かれているやつを全部 p^+ と勝手に理解する。HIKKO の vertex では α の conservation factor $\delta(\alpha)$ と p^+ の conservation factor $\delta(p^+)$ は別々に用意していますが, $\alpha = p^+$ HIKKO theory は $\delta(\alpha)$ はもうやめて $\delta(p^+)$ だけにする。その他では単に α を p^+ と思う。書き直すだけです。そういう理論を考えることができます。その理論はちゃんと gauge invariant であって, α が何者かということははっきりしてますね。p^+ ですね。physical に何の問題もなくて, gauge 不変なまともな理論になっています。ただ gauge 不変性はいいんですが, manifest には Lorentz covariant ではない。α を p^+ にしますから。だけども gauge 不変性とか, 勿論 on-shell amplitude は α に依らないわけで, Lorentz 不変だし物理的内容はいいですね。その理論も consistent な理論として存在してます。畑君がこれ嫌いですけれども。だけど世の中には consistent な理論として存在する。で, gauge 理論です。light-cone gauge でちゃんと作られた理論があるんだけれど, それが気に入らん点は gauge 固定が全部されてしまって, gauge 不変性が一切見えないわけですね。だけど string の場の理論の本質は gauge 不変性にあるわけです。massive mode も含めて完全に無限個のすべての mode が gauge 場なんですね。すべてが。それが string 理論の本質なんです。light-cone gauge ではそこが全部固定されてしまって分からない。だから, $\alpha = p^+$ HIKKO でもですね, p^+ を使っているから light-cone じゃないかという感じがするけどそうではなくて, gauge 不変性という本質を保存している。そういう意味で, いろんな場合に使うには便利な模型だと思います。$\alpha = p^+$ というのはあんまりどこの paper にも書いていない。僕が Zwiebach と書いたやつ [1] にそれを使っていますけど。それ以外には書いてません。論文にならないもので。$\alpha = p^+$ でもちゃんと consistent ですよという。あまり恥ずかしくって言えないので (笑), 誰もあまり言いませんが。

終わります。

参考文献

[1] T. Kugo and B. Zwiebach, *"Target Space Duality as a Symmetry of String Field Theory"*, *Prog. Theor. Phys.* **87** (1992) 801, `hep-th/9201040`.

[2] 九後汰一郎,"ゲージ場の量子論 I,II", 培風館 (1989).

[3] M. Kato and K. Ogawa, *"Covariant Quantization of String Based on BRS Invariance"*, *Nucl. Phys.* **B212** (1983) 443.

[4] K. Fujikawa, *"Path Integral of Relativistic Strings"*, *Phys. Rev.* **D25** (1982) 2584

[5] E. Witten, *"Non-commutative Geometry and String Field Theory"*, *Nucl. Phys.* **B268** (1986) 253.

[6] H. Hata, K. Itoh, T. Kugo, H. Kunitomo and K. Ogawa, *"Manifestly Covariant Field Theory of Interacting String I"*, *Phys. Lett.* **B172** (1986) 186; *"Manifestly Covariant Field Theory of Interacting String II"*, *Phys. Lett.* **B172** (1986) 195; *"Covariant String Field Theory"*, *Phys. Rev.* **D34** (1986) 2360; *"Covariant String Field Theory II"*, *Phys. Rev.* **D35** (1987) 1318; *"Loop Amplitudes in Covariant String Field Theory"*, *Phys. Rev.* **D35** (1987) 1356.

[7] M. Saadi and B. Zwiebach, *"Closed String Field Theory from Polyhedra"*, *Ann. Phys.* **192** (1989) 213.

[8] T. Kugo, H. Kunitomo and K. Suehiro, *"Nonpolynomial Closed String Field Theory"*, *Phys. Lett.* **B226** (1989) 48; *"Nonpolynomial Closed String Field Theory: Action and its Gauge Invariance*, *Nucl. Phys.* **B337** (1990) 434.

[9] 後藤鉄男, "拡がりをもつ素粒子像", 岩波書店 (1978).

[10] M. Kaku and K. Kikkawa, *"Field Theory of Relativistic Strings. I. Trees"*, *Phys. Rev.* **D10** (1974) 1110; *"Field Theory of Relativistic Strings. II. Loops and Pomerons"*, *Phys. Rev.* **D10** (1974) 1823.

[11] T. Kugo, *"Covariantized Light-Cone String Field Theory"*, in *Quantum Mechanics of Fundamental Systems 2*, ed. C. Teitelboim and J. Zanelli (Plenum Publishing Corporation, 1989) Chap.11.

[12] S.Mandelstam, *"Interacting-String Picture of Dual Resonance Models"*, *Nucl. Phys.* **B64** (1973) 205; *"Interacting-String Picture of the Neveu-Schwarz-Ramond model"*, *Nucl. Phys.* **B69** (1974) 77.

[13] G. Veneziano, *"Construction of a Crossing-Symmetric, Regge-Behaved Amplitude for Linearly Rising Trajectories"*, *Nouvo Cim.* **57A** (1968) 190.

[14] A. LeClair, M. E. Peskin and C. R. Preitschopf, *"String Field Theory on the Conformal Plane (I). Kinematical Principles"*, *Nucl. Phys.* **B317** (1989) 411; *"String Field Theory on the Conformal Plane (II). Generalized Gluing"*, *Nucl. Phys.* **B317** (1989) 464.

[15] P. Goddard, J. Goldstone, C. Rebbi and C. Thorn, *"Quantum Dynamics of a Massless Relativistic String"*, *Nucl. Phys.* **B56** (1973) 109.

[16] T. Asakawa, T. Kugo and T. Takahashi, *"On the Generalized Gluing and Resmoothing Theorem"*, `hep-th/9805119`

[17] H. Hata, K. Itoh, T. Kugo, H. Kunitomo and K. Ogawa, *"Loop Amplitudes in Covariant String Field Theory"*, *Phys. Rev.* **D35** (1987) 1356.

[18] G. Parisi and N. Sourlas, *"Random Magnetic Fields, Supersymmetry, and Negative Dimensions"*, *Phys. Rev. Lett.* **43** (1979) 744.

[19] E. Witten, *"Interacting Field Theory of Open Superstrings*, *Nucl. Phys.* **B276** (1986) 291.

[20] C. Wendt, *"Scattering Amplitudes and Contact Interactions in Witten's Superstring Field Theory"*, *Nucl. Phys.* **B314** (1989) 209.

[21] D. Friedan, E. Martinec and S. Shenker, *"Conformal Invariance, Supersymmetry and String Theory"*, *Nucl. Phys.* **B271** (1986) 93.

[22] C. R. Preitschopf, C. B. Thorn and S. A. Yost, *"Superstring Field Theory"*, *Nucl. Phys.* **B337** (1990) 363.

[23] N. Berkovits, *"Manifest Electric Magnetic Duality in Closed Superstring Field Theory"*, *Phys. Lett.* **B388** (1996) 743, `hep-th/9607070`; *"Local Actions with Electric and Magnetic Sources"*, *Phys. Lett.* **B395** (1997) 28, `hep-th/9610134`; *"Ramond-Ramond Central Charges in the Supersymmetry Algebra of the Superstring"*, *Phys. Rev. Lett.* **79** (1997) 1813, `hep-th/9706024`.

[24] A. Neveu and J. H. Schwarz, *"Factorizable Dual Model of Pions"*, *Nucl. Phys.* **B31** (1971) 86.
P. Ramond, *"Dual Theory for Free Fermions"*, *Phys. Rev.* **D3** (1971) 2415.

[25] M. B. Green and J. H. Schwarz, *"Covariant Description of Superstrings"*, *Phys. Lett.* **136B** (1984) 367; *"Properties of the Covariant Formulation of Superstring Theories"*, *Nucl. Phys.* **B243** (1984) 285.