ゲージ理論の数理と物理

深谷 賢治

京都大学大学院理学研究科数学教室

’98 夏の学校 素粒子論パート講義　7 月 23, 24 日

講義録作成：　鳥居, 新田, 古内, 家島, 富野, 森本　(大阪大学)

目 次

[一日目]

1　はじめに

私は数学者でして、数学者を呼んだからには数学の話を聞く気があるのだと解釈しまして、数学の話をします。

今日話したいことはモジュライ空間とコホモロジーの話です。

モジュライは色々なところで出て来ますが、一番考えやすいモジュライ空間として積分可能な幾何構造があります。(積分可能でない幾何構造もあります。) 例えば、複素構造 (complex structure)、曲率＝ 0 の接続、シンプレクティック構造 (symplectic structure) などがあります。違う例としては、Yang-Mills 接続、Einstein 計量などがあります。

積分可能とはどういうことかと言うと、一つの座標系の中では (局所的には) 一つの解しかない、微分方程式だと思うと局所的には解が一つしかないということです。そういう意味では微分方程式らしくないんですけど、そういうものの方が幾何で扱うには易しいんです。

モジュライ空間を考えるときにコホモロジーが出て来ることを解説したい。

コホモロジーを考えると de-Rham の定理というものがあるのですが、そこには二種類のコホモロジーが現れます。一つは de-Rham コホモロジーで、これがどういうものかというと線形微分方程式でコホモロジーを調べるというものです。

[質問]
違う例とはどういうことですか?

[答え]
例えば、Einstein 方程式には局所的に解がいっぱいあります。それが違う。普通の積分可能とは解けると言う意味だが、ここで言う積分可能とはちょっと違う。

もう一つは、Čech コホモロジーというもので、これは大体座標変換の様子をみてコホモロジーを調べるというものです。

モジュライの話で、なぜこれらの話がでてくるかというと、モジュライとは非線形方程式の解の集合を考えることで、そのとき二つの考え方があります。一つは方程式の線形化をするということで de-Rham コホモロジーと関係がつきます。もう一つは、座標変換の自由度によるもので、積分可能な微分方程式の解は一つの座標系の中では一つしかないので、解の集合が出来るというのは座標変換の自由度によるものであり、そこからČech コホモロジーと関係づく。

$$\begin{aligned} &\text{de-Rham コホモロジー} &\Leftrightarrow\ &\text{線形微分方程式} \\ &\text{Čech コホモロジー} &\Leftrightarrow\ &\text{座標変換} \end{aligned} \tag{1.1}$$

今日話す理論は局所理論ですが、ある解の近くの様子を調べようと思ったときには今考えている非線型微分方程式を線形化して線形微分方程式としてとらえる。積分可能な場合には座標変換のところだけを見てČech コホモロジーで考える。

そういう二つの枠組みがある。

こういうのを使って、非線型方程式の解の集合は、普通は計算しようが無いのですが、局所的に計算しようというのが、モジュライ理論の始まりです。そのへんをちょっと説明したいです。

積分可能

まず、曲率＝0 の空間、まだちゃんと説明していないんですが、積分可能な幾何学的構造とはどういうものかをお話したいです。

一番単純な例はこういうことです。

$$f_i(\varphi_1, \cdots, \varphi_m)\,, \qquad i = 1, \cdots, n \tag{1.2}$$

のような m 変数関数があります。

$$f_i = \frac{\partial g}{\partial x_i} \tag{1.3}$$

のような g があるというのが、

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \tag{1.4}$$

と等価です。これは局所的な話ですが、まぁ、積分可能とは、これをもう少し複雑にしたようなものです。

ですから、こういうタイプの、こういうの（ (1.3),(1.4) ）を完全積分可能というのですが、(1.4) は微分方程式そのものです。こういう微分方程式の解の集合を考えようということなのですが、この微分方程式は、あまりにやさしすぎまして、なぜやさしいかといいますと、線型ですから、これの解の集合を考えてもそんなに面白くないので、もうちょっとこれに色を付けます。

さっきちらっと書いた、複素構造とか平坦接続とか書きましたが、実は Yang-Mills もこれ（ (1.4) ）に近い構造を持っていまして、大体だから、モジュライが調べられている方程式というのは、大体だから、非線型なのですが、ほとんどこの (1.4) の方程式に色がついただけのものです。

平坦接続

平坦接続 (平坦ベクトル束) 、先ほど私が 曲率＝0 と書いた平坦接続ですが、平坦接続とは、どういう方程式だったかということを思い出しますと、今ですね、空間 n 次元 ($\boldsymbol{R}^n$)、計量は全部ユークリッドです。

$$A_1, \cdots, A_n\,, \qquad n \text{ 変数 } m \times m \text{ 行列値関数} \tag{1.5}$$

こういうのがあったときに

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + A_i \tag{1.6}$$

のようなオペレーターを考える。これはだから、もちろん、

$$\nabla_i \, \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + A_i \, \varphi \, , \qquad\qquad \varphi \text{ は } m \text{ 次のベクトル} \tag{1.7}$$

なわけです。

それで、この方程式 (1.6) が可積分とは、(1.4) と似たような形で、

$$\nabla_i \nabla_j = \nabla_j \nabla_i \tag{1.8}$$

となります。これを、微分方程式で書くと

$$0 = \frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i} + A_i A_j - A_j A_i \tag{1.9}$$

のようになります。さっきいいましたように、この方程式は、ある意味で普通に考えるとあまり面白い方程式ではありません。なぜかといいますと、この方程式は局所的に考えると (局所的というのは、$\mathbf{R}^n$って書きましたが)、一つの座標形のなかで考える時にはあまり面白くありませんでして、なぜかといいますと、この解はゲージ変換でいつでもゼロになる。ゲージ変換でゼロになるという意味は、こいつの解を A_i と書いたならば、この解はゲージ変換をしてしまえばいつでもゼロになります。だから、局所的に解が一つしかないというのは、ゼロしかないということです。だから、座標で計算している限りには面白いものが出てこないのですが、実は平坦ベクトル束というものはそんなにトリビアルなものではなくて、数学でやっているといろいろと出てくるわけでして、局所的にはゼロしかなくても、大域的にはゼロではないものもでてきます。大域的なものを考えるときには、局所的な (1.9) だけではちょっとあれなんですが、しばらくは、このようなやさしい話をします。こういうやさしい方程式を扱う。ほとんど、トリビアルに近いものですが。それで、(1.9) の解がゲージ変換でいつでもゼロになることを、証明しておきます。どうしてかというと、これ (1.8) があると何がわかるかというと、こういう方程式

$$\nabla_i \, \varphi = 0 \, , \qquad\qquad i = 1, \cdots, n \tag{1.10}$$

を、同時に解くことが出来ます。なぜかといいますと、(1.10) が与えられた $\varphi(0)$ で解けるからです。これが、可積分という言葉の由来でして、ようするに (1.10) は偏微分方程式ですが、これが矛盾せずにちゃんと解けるということは実は、条件 (1.8) の言っていることです。解けるとどうなるかといいますと、この φ というのを(これがどうして解けるかっていうのは説明しませんが)、m 個の φ

$$\varphi_1, \cdots, \varphi_m \tag{1.11}$$

をもってきて、これはだから (1.10) の解で、それで

$$\varphi_j(0) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \tag{1.12}$$

ということにしてください。そこで、(1.12) を m 個並べますと、$m \times m$ の行列値の関数ですが、これを

$$g = (\varphi_1, \cdots, \varphi_m) \tag{1.13}$$

とします。これを、ゲージ変換だと思います。それで、A をこいつでゲージ変換するとどうなるかというと、それはこうなるわけですね。

$$A_i \longmapsto g^{-1}\frac{\partial g}{\partial x_i} + g^{-1}A_i\, g \tag{1.14}$$

(1.14) と (1.10) を見比べてやりますと、何がわかるかといいますと、g でゲージ変換しますと

$$A \longmapsto 0 \tag{1.15}$$

となります。それはだから (1.10) がそのようなことを言っていまして、φ_i を base だと思って取り直すと、これは接続がゼロになります。これが、g でゲージ変換して (1.15) となるということです。これで証明終わりです。

これが何を言っているかというと、可積分という方程式を考えてやると、何がわかるかというと、ゲージ変換で物事を同じだと思って考えると、何も自由度がない。だから、解が 1 個しかない。積分可能とはそういうもので、局所的には何もない。

これがなぜ、Čech コホモロジーと関係あるかをちょっとだけお話したい。

2　Čech コホモロジー

Čech コホモロジーとは何かといいますと、ここで一つだけ注意しますと、(1.15) について、(1.9) の解は局所的には自由度がないので、こういうものはある意味で計算がし易いのです。だいたい、局所的にコンスタントみたいなものです。一般の微分方程式だと無限次元なので解きようがないのですが、代数方程式だと解けるので、こういうタイプの可積分なもののモジュライを調べるのはある意味で手がでるわけで、実際ちゃんと計算できるわけです。

だからむしろ、そういう場合を足掛かりにして、手がでない可積分でない例を調べるのがいいわけで、今のような例を問題として取り上げたわけです。

[質問]
さっきのやつで、g はどこでもインバースがあるのですか?

[答え]
それはだから局所的な話で、原点ではインバースがあるわけです。その周りだけしかないです。この話は一般に局所的な話です。

それで、Čech コホモロジーについて考えますけども、X という空間を考えます。位相空間だけでなくて、こういうものを考えます。

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i\,, \qquad X:\text{空間}\,, \quad U_i:\text{開集合} \tag{2.1}$$

それから G とういう群を考えます。群と言うときは二種類考える場合がありまして、その二種類とは可換群の場合と非可換群の場合です。実は、非可換群は難しくてそのČech コホモロジーというのはよく分かっていないのです。だから、非可換群の場合はほんのちょっとしか出て来ません。(非可換群というのは行列の掛け算とかゲージ群みたいなものです。)

可換群の場合というのは、いろいろ調べる事が出来ます。ですから、ちゃんとした議論があるのは可換群の場合です。でもまあ、今はどっちもあると思っておきます。可換群は足し算、非可換群は掛け算みたいなものです。

$$G:\text{群} \begin{cases} \text{非可換群} & : \times\ (\text{掛け算}) \\ \text{可換群} & : +\ (\text{足し算}) \end{cases} \tag{2.2}$$

さて

$$C^k(\mathcal{V}, G) \ \ni\ g_{i_0 \cdots i_k}\,, \qquad i_0, \cdots, i_k \ \in\ I \tag{2.3}$$

というのは何かと言いますと、

$$\mathcal{V}\ :\ \cup\, U_i \tag{2.4}$$

で、C^k というのは

$$U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_k} \ \longrightarrow\ G\,, \qquad \frac{\partial g_{i_0 \cdots i_k}}{\partial x} = 0 \tag{2.5}$$

で、g たちは U の交わり上で定義された G 値の関数で、局所的に定数です。まあ、微分がゼロということです。局所的に一定な関数を与えるこういうものを、k 次のČech チェーンと呼びます。

Čech コホモロジーにはバウンダリーがありますが、バウンダリーとは何かと言いますと、ここで可換群と非可換群と話が分かれるんですが、可換群の場合、バウンダリーがきちっと定義できます。

バウンダリーの操作 (δ) をとると一個添字が増えるんです。

$$\underset{\in C^k}{g_{i_0 \cdots i_k}} \ \overset{\delta}{\longmapsto}\ \underset{\in C^{k+1}}{(\delta\, g)_{i_0 \cdots i_{k+1}}} \tag{2.6}$$

それで、δg が何かと言うと

$$(\delta g)_{i_0\cdots i_{k+1}} = \sum_j (-1)^j g_{i_0\cdots\hat{i_j}\cdots i_{k+1}} \tag{2.7}$$

になります。(ただし $\hat{i_j}$ は和から i_j を抜く事を意味します。) 例えば

$$(\delta g)_{1234} = g_{234} - g_{134} + g_{124} - g_{123} \tag{2.8}$$

こういうものです。このように足し算で書いたのは、可換群のときは自然なわけです。

それで、じつは非可換群のときは掛け算で書かなくてはいけなくて、非可換の時は大切だけど一般には大変です。

C^1 から C^2 くらいまでは非可換でも定義できます。

$$C^1 \xrightarrow{\delta} C^2 \tag{2.9}$$

C^1 は添字が二つあります。例えば

$$(\delta g)_{123} = g_{23}\, g_{13}^{-1}\, g_{12} \tag{2.10}$$

で、これくらい迄なら簡単に書けるわけです。

それで証明はしませんけど、2回やるとゼロになります。

$$\delta\delta = 0 \tag{2.11}$$

例えば、可換の場合をやってみると、

$$\begin{aligned}(\delta\delta g)_{123} &= (\delta g)_{12} - (\delta g)_{13} + (\delta g)_{23} \\ &= g_2 - g_1 - (g_3 - g_1) + g_3 - g_2 \\ &= 0\end{aligned} \tag{2.12}$$

となるわけです。コホモロジーというのは、全てこいつがミソなんです。

なぜ、非可換の場合を気にするのかというと、こいうのを非可換でちゃんと考える事が実はモジュライに対応していると考えられるわけです。

非可換で難しいのは、可換だと順番は気にすることはないんですが、非可換では順番を気にしなくてはならなくて、$\delta\delta = 1$ を $C^k \to C^{k+1}$ でどう定義していいか多分わかっていないようです。たしか30年位前にグロタンディークがこういう非可換コホモロジーをやろうとして、それで弟子のジローが非可換コホモロジーという300ページ位の本[1] を書いてるんですが、C^0, C^1, C^2 までは (2.10) でうまくいくが3次のコホモロジーを定義しようとすると、どうもうまくいかないようです。

なんでこういう事を言ったのかといいますと、平坦ベクトル束の話がしたいわけです。

まず、例を話します。

$$X = S^1 = U_1 \cup U_2 \tag{2.13}$$

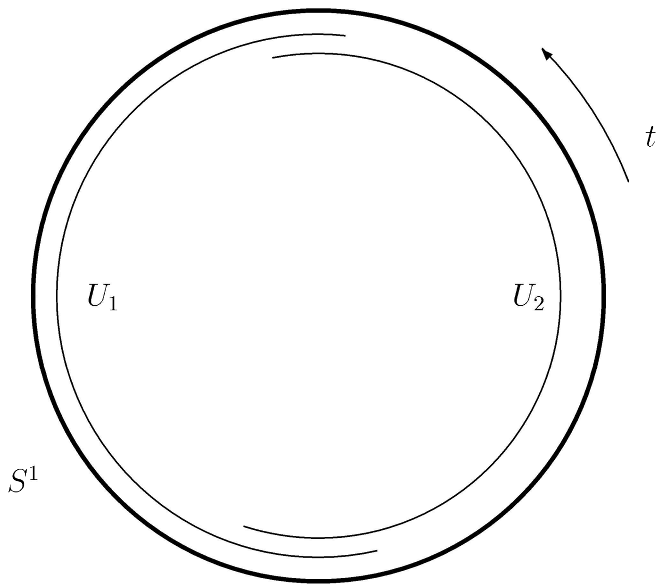

図 1:

とします。これで、Čech コホモロジーと平坦ベクトル束との関係を話したいわけです。U_1 と U_2 を図 1 のように定義します。t は S^1 の座標です。U_1 と U_2 の交わりは二つの開区間です。ここで、C^1 は次のように書けます。ただし、g_{12} はコンスタントですが上と下でそれぞれ違う値がとれるので $G \times G$ になります。

$$C^1(S^1, G) = G \times G \ \ni \ g_{12} \ : \qquad \text{二つの開区間}\, U_1 \cap U_2 \ \longrightarrow \ G$$

$$\frac{\partial\, g_{12}}{\partial t} = 0\,, \qquad {g_{12}}^{\text{上}} \ \in \ G\,, \qquad {g_{12}}^{\text{下}} \ \in \ G \tag{2.14}$$

それで、バウンダリーを考えるために C^0 を考えます。

$$\begin{aligned} C^0(S^1, G) \quad &\ni \ g_1 \ : \ U_1 \ \longrightarrow \ G \qquad \text{constant} \\ &\ni \ g_2 \ : \ U_2 \ \longrightarrow \ G \qquad \text{constant} \end{aligned} \tag{2.15}$$

そうすると、

$$(\delta g)_{12} = g_2 g_1^{-1}$$

つまり

$$(\delta g)^{\text{上}}_{12} = (\delta g)^{\text{下}}_{12} = g_2 g_1^{-1} \tag{2.16}$$

となります。Čech コホモロジー $H^k(X, G)$ の元とは、

$$\begin{aligned} &g \in C^k \ \ \text{のうち}\ \delta g = 0\ \text{であるもの} \\ &\qquad \text{ただし} \quad g - g' = \delta h\ \text{なものは同じと思う} \\ &\qquad \Big(\delta g = 0\,, \quad \delta g' = \delta(g - \delta h) = 0 \qquad \text{なぜなら} \quad \delta\delta = 0\Big) \end{aligned} \tag{2.17}$$

[1] J.Giroux Cohomologie non abelienneds, Lect. Note in Math. Springer 1971

です。つまり

$$g_{12} = \delta h \iff g_{12}^{\text{上}} = g_{12}^{\text{下}} \tag{2.18}$$

です。

そこで、以上の事が先程の平坦接続とどうして関係があるかということをお話します。

S^1 上の接続を考えます。

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial t} + A \tag{2.19}$$

A は、$n \times n$ 行列の G 値関数です。

$$\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i = 0 \tag{2.20}$$

は、接続が 1 種類しか無いので、トリビアルに成立すします。

さっき言ったことは、何かといいますと、こうなるわけです。(以下のようになります。) (2.13) より U_1 上でのゲージ変換を g_1 として、A は g_1 によってゼロに移る。U_2 上でも同様である。

$$S^1 = U_1 \cup U_2$$

$$\begin{array}{lcl} U_1 \text{ 上で } g_1 \text{ ゲージ変換} & \to & g_1 \text{ で } A \text{ はゼロに移る} \\ U_2 \text{ 上で } g_2 \text{ ゲージ変換} & \to & g_2 \text{ で } A \text{ はゼロに移る} \end{array}$$

今考えたいのは、S^1 全体で A がゼロに移るような g で、どういうときにこの g が存在するかという問題です。こういう問題を考えたいです。そういうのがあるのは (まず、すぐにわかるのは)

$$U_1 \cap U_2 \text{ で } g_1 = g_2 \tag{2.21}$$

の時です。平坦ベクトル束というのは局所的にはトリビアルですから、全体での性質を調べるには、ただ張り合わせのところだけが問題になります。g_{12} は g_1 と g_2 の差みたいなものでして

$$g_{12} = g_2\, g_1^{-1} \tag{2.22}$$

と書けます。(2.21) はどういうことかと言うと

$$g_{12} = 1 \tag{2.23}$$

と同値になります。(2.21) が成り立てば 1 ですが、これは一般には 1 でないわけです。

ここで、二つ注意があります。

注意 1

$$\frac{\partial g_{12}}{\partial t} = 0 \tag{2.24}$$

どうしてかというと、g_{12} というのはゼロをゼロ移すゲージ変換です。それは、g_1^{-1} はゼロを A に移して g_2 は A をゼロに移すからです。ゼロをゼロに移すゲージ変換はコンスタントしかないので (2.24) となります。

これをさっきのČech コホモロジーの言葉で言えば

$$\delta\, g_{12} = 1 \tag{2.25}$$

です。

注意 2

g_1 , g_2 というのは、取り方は一通りではなくて、取り方にコンスタント分の自由度があるのです。つまり、A をゼロにするゲージ変換はただ一通りではなくて、定数のゲージ変換で変換しても同じ性質を持っているので、定数分だけずらせるわけです。このコンスタントを h とすれば

$$\begin{aligned} g_1 &\longmapsto h\, g_1 \\ g_{12} &\longmapsto g_2\, g_1^{-1}\, h^{-1} \end{aligned} \tag{2.26}$$

で、g_{12} はコンスタント分好きなように動かせるわけです。

結論を言いますと

$$\begin{aligned} &S^1\text{上の flat } G \text{ 接続のモジュライ} \\ &= H^1(S^1, G) \end{aligned} \tag{2.27}$$

です。

[質問]

フラットって何ですか?

[答え]

フラットっていうのは、可積分 (2.20) の事です。

こうやると何が嬉しいかといいますと、さっきも言いましたが、これはやさしいから計算しようがあるのです。微分方程式より簡単で局所的にコンスタントな関数ですから、代数方程式のようなもので計算しやすいのです。

可積分系の場合には、可積分と言うのは普通の意味ではなくて、可積分な幾何学構造を持っているということです。代数的な操作に、モジュライの問題を持っていけるということです。

これだけ言うだけなら、何もČech コホモロジーを出さなくても良かったのですが、後でもう少し言いますが、ここでわざわざČech コホモロジーになると言ったのは、これ H^1 なんです。

[質問]

コホモロジーを考えるのに、Čech と de-Rham の二つがあるのはどういう心ですか？

[答え]
de-Rham コホモロジーを考えると言うのは、微分方程式の問題になるのですが、微分方程式の問題を代数方程式の問題に落したのがČech コホモロジーです。それはどうしてできたかと言うと、ゲージ変換を考える事により局所的な自由度が無いからです。微分方程式には無限の自由度があって難しいのですが、局所的な自由度が無いと言うことを利用して有限の自由度に落したらČech コホモロジーになりました。

[質問]
今言ってるコホモロジーって何ですか？

[答え]
H^1 です。この話しは de-Rham の定理とはちょっと違っていますが、精神上同じわけです。今の G は非可換ですから。de-Rham の定理は、だいたい可換群の場合ですから。

それで、もうちょっとお話したいのは、モラルとしてこういう事を考えることです。H^1 はモジュライを決めていて、H^0 は自己同形なわけです。今の場合、自己同形とは

$$A \xrightarrow{\delta} A \quad \text{なるゲージ変換} \tag{2.28}$$

です。$H^k,\ k \geq 3$ はよく分かりません。

H^0 が自己同型で、H^1 がモジュライで、どうも別の見方をすると上のほうの H^k もあるだろうと言うのが今世紀の前半から感覚的にあったんだけれども、これが高次コホモロジーだというのが、ある時期にわかったわけです。モジュライの問題でこういう高次コホモロジーが自然に出て来るのは、ミラー対称性とかデュアリティーとかをやってるとその兆候が見られるようです。

ここまでをまとめると、

$$\text{Čech コホモロジー} \longleftarrow \text{座標変換} \tag{2.29}$$

で、座標変換というのは H^1 で

$$H^1\ :\quad U_1 \cap U_2 \longrightarrow G \tag{2.30}$$

のようなゲージ変換です。
もう一つ言いたかった事は

$$\text{de-Rham} \longleftarrow \text{微分方程式} \tag{2.31}$$

です。
さっきの可積分系での積分可能な幾何構造というのをゲージ変換でゼロにしてしまうというのもあるのですが、微分方程式としてとらえるのにも理由がありまして、その話をします。

微分方程式だとどうだったかと言いますと、

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + A_i$$
$$\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i = 0 \tag{2.32}$$

でした。これを書き下しますと

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i} + [A_i, A_j] = 0 \tag{2.33}$$

です。この左辺は曲率 F_A です。

それで、モジュライの定義をしておきます。

M 上の flat G 接続のモジュライ
= (2.33) の解全体
(ただし、ゲージ変換で移るものは同じと思う。 $F_A = 0 \Leftrightarrow$ flat)

$$\text{モジュライ} = \frac{\{\text{ある微分方程式の解}\}}{\text{対称性を表す}\infty\text{次元の群}} \tag{2.34}$$

それでですね、もう一つだけ言うと、今までずっと平坦ベクトル束だけやっていたのですが、平坦ベクトル束のモジュライを計算する問題はある意味において解けていますので、それだけやっていても嫌なので複素構造のモジュライの話をします。それがモジュライ理論の始まりでして、複素構造のモジュライ理論は、もともと Riemann が 19 世紀に多様体の概念を作るとか、Riemann 面の概念を作るとかを同時に考えたことが、Riemann 面のモジュライを考えることになりました。それ以降ずっとあることでして、複素構造のモジュライを考えます。

3 複素構造のモジュライ

これまで言った通り、積分可能の幾何学的構造には二通りの見方がありまして、座標変換で見ると言うのと、微分方程式で見るのがあります。複素構造の場合も、両方あります。

座標変換

複素多様体とは何かと思い出してみます。

$$M = \cup U_i\,, \qquad U_i \subset \mathbf{C}^n \tag{3.1}$$

のように、複素多様体 M を座標系で考えてみます (図 2)。

さっきと何が違っているかといいますと、さっきの平坦ベクトル束のモジュライのときは、座標変換というのはゲージ変換だったのですが、今の場合は本当の意味での座標変換です。

$$\begin{cases} \text{flat 接続} & U_1 \cap U_2 \;\to\; G\ (\text{ゲージ変換}) & \text{変換は定数} \\ \text{複素構造} & \text{座標変換} & \text{変換は正則} \end{cases} \tag{3.2}$$

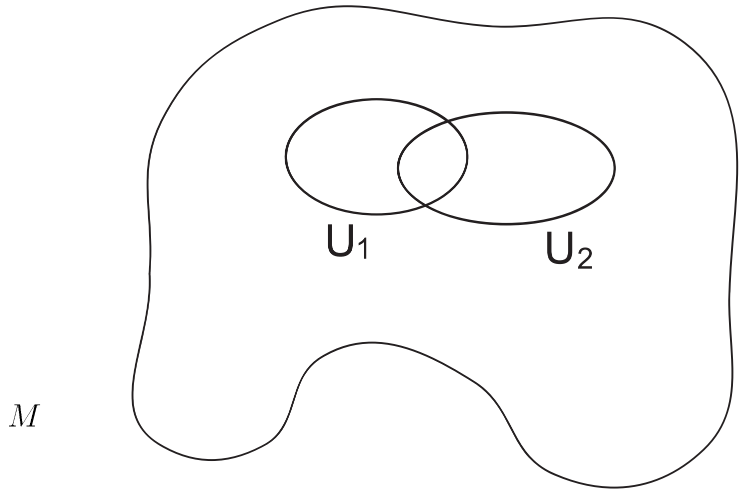

図 2:

座標変換とは何かといいますと、

$$\varphi_i \;:\quad U_i \;\longrightarrow\; V_i \qquad \subseteq \mathbf{C}^n$$

$$\begin{aligned} \varphi_j\,\varphi_i^{-1} \;:\quad & \mathbf{C}^n\text{の部分集合} \;\longrightarrow \mathbf{C}^n \\ & \qquad\text{座標変換} \end{aligned} \tag{3.3}$$

この φ_i が正則関数だというのが、複素多様体です。

　ところで、フラットの条件とは何かといいますと、変換 (写像) $\varphi_j\,\varphi_i^{-1}$ がコンスタントということです。複素多様体の場合には、この変換が正則関数です。平坦ベクトル束というのは、この変換系 $\varphi_j\,\varphi_i^{-1}$ のところが定数になります。

　積分可能な構造とは、この座標変換の条件で微分方程式が言い換えられるということですが、一般にはそうではないわけです。これらの事ををさっきの方程式

$$\begin{aligned} \nabla_i\nabla_j &= \nabla_j\nabla_i \\ \nabla_i &= \frac{\partial}{\partial x_i} + A_i \end{aligned} \tag{3.4}$$

に似たものに書き換えたいわけです。

　これをちょっとだけ言い換えたほうが次の話がやりやすくて、あんまり微分形式は前提にしないほうが良いといわれましたので、今から微分形式の話をします。

微分形式

$$dx_1, \cdots, dx_n \tag{3.5}$$

のような記号を考えます。これは記号だと思って下さって結構です。大事なのは、

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i \tag{3.6}$$

の条件なのです。ひっくり返すとマイナスがでるこれだけ知っていて下されば良いです。それから関数の外微分とは

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \tag{3.7}$$

です。

この2式だけを理解してもらえば微分形式はいいのですが、一つだけちゃんとチェックしていただかないといけない大事な式が

$$ddf = 0 \tag{3.8}$$

です。これをチェックしますと、

$$\begin{aligned} ddf &= \sum d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

ただし

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \tag{3.10}$$

となります。

この3つを理解したら、微分形式は、分かったとしていいです。

何故こうすると便利かといいますと、

$$\nabla_i \nabla_j = \nabla_j \nabla_i \tag{3.11}$$

の方程式を書き換えたいわけですね。そして

$$\begin{aligned} d_A \varphi &= \sum_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i + A_i \varphi\, dx_i\right) \\ &= \sum_i (\nabla_i \varphi) dx_i \end{aligned} \tag{3.12}$$

を定義します。すると (3.11) と

$$d_A d_A = 0 \tag{3.13}$$

が同値である事が分かります。この証明は

$$\begin{aligned} d_A d_A &= d_A((\nabla_i \varphi)dx^i) \\ &= (\nabla_j \nabla_i \varphi)dx^j \wedge dx^i \end{aligned} \tag{3.14}$$

です。 d と d_A の対応は

$$\begin{aligned} d &\longrightarrow d_A \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} &\longrightarrow \nabla_i \nabla_j \varphi \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i} &\longrightarrow \nabla_i \nabla_j \varphi = \nabla_j \nabla_i \varphi \end{aligned} \tag{3.15}$$

です。ですから、ij に関して交換可能というのは積分可能と言うことで、積分可能なら d_A を 2 回するとゼロになるわけです。

ここで分かった事は、平坦ベクトル束の方程式 (3.13)

$$d_A d_A = 0$$

から局所的にゲージ変換して $A = 0$ に持っていけるということと、モジュライがČech コホモロジーでかけるということです。

次に、複素構造のモジュライを決めるのも、こんなものだと示したいわけです。

複素構造のモジュライ

(3.13) は、平坦接続のモジュライを決める方程式です。一方、複素構造のモジュライをきめる方程式とは何かと言いますと、似ていますが、

$$\overline{\partial}_J \overline{\partial}_J = 0 \tag{3.16}$$

です。

この方程式の説明をします。今回も (3.13) の時と同じストーリーが使えまして、これは何を言っているかと言いますと、座標変換で J (後述) をコンスタントにもっていけるということです。コンスタントと言うことは、座標変換してしまうと一個しかない、最初にいった積分可能という意味ですが、それで複素構造のモジュライを、こういうことを使ってさっき言った座標系とかの話に近づけていくわけです。もう一回言いますと、平坦ベクトル束のモジュライの場合には、この方程式 (3.13) を局所的にゲージ変換することにより、A をゼロにしてしまうことによって、モジュライの問題を座標変換のゲージ変換だけの問題に持っていって、Čech コホモロジーで書いたわけです。複素構造のモジュライの場合には、(3.16) です。この方程式の構造を良く考えると、座標変換では、局所的にはこの方程式の解が定数なものしかないと言うことがわかって、さっきの複素多様体の座標変換の問題に帰着するわけです。そういうストーリーです。

この方程式を説明して、休憩にしましょう。

複素構造はどう思うかと言いますと、$\mathbf{R}^{2n}$ を考えると、J は x の関数で、

$$J_x \ : \quad 2n \times 2n \text{ 実行列値の関数} \qquad (x \in \mathbf{R}^{2n}) \tag{3.17}$$

です。条件は

$$J_x J_x = -1 \tag{3.18}$$

です。$\mathbf{R}^{2n}$ を $\mathbf{C}^n$ と思うとはどう言うことかと言いますと、J_x に関してコンスタントに

$$J_x \equiv \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

とすることです。$\mathbf{C}^n$ の中で見れば、J_x は $\sqrt{-1}$ 倍です。だから、何を言っているかと言いますと、実ベクルト空間を複素ベクトル空間と思うということは、$\sqrt{-1}$ 倍すると言うことです。$\sqrt{-1}$ 倍すると言う操作が、点によってどんどん動いていく。$\mathbf{R}^{2n}$ をどう $\mathbf{C}^n$ と思うかが、点によって動いていくわけです。そういう状況を考えています。

そこで、J を与えたときに (3.16) がどうなっているかを説明していきます。まず J_x が x を動かしても変わらない場合を考えます。$\mathbf{C}^n$ の座標は

$$z_1, \cdots, z_n \tag{3.20}$$

$\mathbf{R}^{2n}$ の座標は

$$\begin{aligned} &x_1, \cdots, x_n \\ &y_1, \cdots, y_n \end{aligned} \tag{3.21}$$

と書きます。$\mathbf{C}^n$ と $\mathbf{R}^{2n}$ の関係を

$$z_i = x_i + \sqrt{-1}\, y_i \tag{3.22}$$

と定義します。また

$$\begin{aligned} dz_i &= dx_i + \sqrt{-1}\, dy_i \\ d\overline{z}_i &= dx_i - \sqrt{-1}\, dy_i \end{aligned} \tag{3.23}$$

となります。そうすると、さっきの実微分形式を複素微分形式に書き換えますと

$$dx_1 \wedge dy_2 = \frac{1}{4\sqrt{-1}}(dz_1 + d\overline{z}_1) \wedge (dz_2 - d\overline{z}_2) \tag{3.24}$$

と書けるわけです。

ここでわかったことは

$\mathbf{R}^{2n}$における dx_i, dy_jの微分形式は dz_i, $d\overline{z}_i$ で書ける

と言うことです。今日の話とは関係なしに、これくらいは覚えていて下さい。それで、何を説明したかったかと言いますと、外微分は

$$df = \frac{\partial f}{\partial z_i}dz_i + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_i}d\overline{z}_i$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_i} &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_i}\Big) \\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}_i} &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_i}\Big) \end{aligned} \tag{3.25}$$

となるということです。

それで、もうちょっと復習しますと

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_i} = 0 \iff f \text{ は正則関数} \tag{3.26}$$

です。関数に関しては

$$\overline{\partial} f = \frac{\partial}{\partial \overline{z}_i}d\overline{z}_i \tag{3.27}$$

と思えるわけです。そして、一般の微分形式に対しては、どう思うかと言いますと、例えば

$$\overline{\partial}(f\, dz_1 \wedge d\overline{z}_2 \wedge d\overline{z}_3) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_i} d\overline{z}_i \wedge dz_1 \wedge d\overline{z}_2 \wedge d\overline{z}_3 \tag{3.28}$$

です。ついでに言いますと、

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial z_i}dz_i \tag{3.29}$$

です。以上は、定義のようなものです。また、d は

$$d = \partial + \overline{\partial} \tag{3.30}$$

と書けます。これは大切です。

(3.16) の方程式を説明したいのですが、

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \tag{3.31}$$

のときの $\overline{\partial}$ について (3.16) は成立します。また、(3.16) は

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z}_i \partial \overline{z}_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z}_j \partial \overline{z}_i} \tag{3.32}$$

と同等です。

そこで何をしたいかと言いますと、J と言う複素構造がコンスタントの場合には $\overline{\partial}$ が決まって複素微分が決まって (3.16) が成立したわけですが、J がコンスタントでない場合に $\overline{\partial}_J$ を考えたいわけです。

[質問]
(3.16) はいいですが、バーのない (∂ の) 式はどうなっているのですか?

[答え]
ただの ∂ も 2 回するとゼロです。ついでに書くと、$d^2 = 0$ を成分でばらすと

$$d^2 = 0 \iff \begin{cases} \partial\partial = 0 \\ \partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial = 0 \\ \overline{\partial}\,\overline{\partial} = 0 \end{cases} \tag{3.33}$$

となります。

それで今何がやりたかったかと言いますと、J がコンスタントでない場合にしたわけですが、モジュライを考えるときには、座標変換を動かすと言う考え方があるわけです。

複素多様体のモジュライを考えるのに、局所的には全部 (3.19) と思って、張り合わせのところだけを変えてみたと思うことも出来ますが、これはさっき言った平坦接続のゲージ変換において局所的には全部ゼロとしたことに対応しているわけですが、そうではなくて局所的にもこいつが動いているという、そういうところまで広げて考えると微分方程式になります。だから、それを見ようと思います。

そうして、dz と $d\overline{z}$ を考え直すわけです。次のように考え直します。p を

$$p = (x_1, \cdots, y_n) \tag{3.34}$$

とします。$J_p(dx^i), J_p(dy^i)$ を次のように定義します。

$$\begin{aligned} J_p(dx^i) &= \sum {J_p}^{ki} dx^k + \sum {J_p}^{k+n\ i} dy^k \\ J_p(dy^i) &= \sum {J_p}^{k\ i+n} dx^k + \sum {J_p}^{k+n\ i+n} dy^k \end{aligned} \tag{3.35}$$

[質問]
J^{ki} の ki とは?

[答え]
行列 $(2n \times 2n)$ の成分です。

そうすると、さっきの (3.19) の時どうなっているかというと

$$J(dx^i) = dy^i\,, \quad J(dy^i) = -dx^i \tag{3.36}$$

となります。こう思ったとき何が大事かと言いますと

$$
\begin{aligned}
J\,dz_i &= J(dx_i + \sqrt{-1}\,dy_i) = \sqrt{-1}\,dz_i \\
J\,d\overline{z}_i &= -\sqrt{-1}\,d\overline{z}_i
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

となるわけです。dz_i や $d\overline{z}_i$ にあたるものを、J の固有状態で書きたいわけです。(3.37) は何をいっているかと言いますと、dz_i は J の $\sqrt{-1}$ の固有状態で、$d\overline{z}_i$ は J の $-\sqrt{-1}$ の固有状態と言うことです。

大事なことは、点が動いていない時には (3.37) のようになるわけですが、一般にはこうなっているか分からないわけです。だから、もうちょっと言いますと、J の 2 乗は -1 ですから、これを使うと

$$
\{dx_1, \cdots, dy_n\} \;=\; (J \text{ の } \sqrt{-1} \text{ の固有空間}) \;+\; (J \text{ の } -\sqrt{-1} \text{ の固有空間})
\tag{3.38}
$$

のようにわかるわけです。そして、J の $\sqrt{-1}$ の固有空間を Λ^{10} 、また J の $-\sqrt{-1}$ の固有空間を Λ^{01} と書きます。もう一回説明しますと、J を一般に (3.35) のように定義したわけですが、この場合に、点が動いていないときに J の固有空間として dz_i や $d\overline{z}_i$ を定義したのですが、点が動いている場合も同じように (3.38) のように書くわけです。点が動いているときも

$$
df = \partial_J f + \overline{\partial}_J f
\tag{3.39}
$$

のようにすると、J が動いているときにも定義できるわけです。

そうすると、何を説明したいかというと、だいたいどんな感じかというと

$$
\overline{\partial}_J^2 \;=\; (J \text{ の } \overline{\partial} \text{ 微分の項}) + (\, J \text{ について 2 次で微分が含まれない項}\,)
\tag{3.40}
$$

のようになっているわけです。これは、

$$
d_A^2 = dA + A \wedge A
\tag{3.41}
$$

と同じようなものです。だいたいこんなものです。J がコンスタントの場合には右辺はゼロになるわけですが、J が動く場合にはゼロにならないかも知れません。

$$
\overline{\partial}_J^2 = 0
\tag{3.42}
$$

は複素構造の微分方程式です。これが、どういう意味を持っていたかと考えますと、さっきのアナロジーが使えるわけです。さっきは

$$
d_A^2 = 0 \implies d_A\,\varphi = 0 \text{ が解ける}
\tag{3.43}
$$

だったわけでこれを使ってさっきのゲージ変換の話をしたわけですが、今回もほぼ同じで

$$
\overline{\partial}_J\,\varphi = 0 \;\text{ が解ける}
\tag{3.44}
$$

こととなります。

$$d_A\varphi = 0 \tag{3.45}$$

は線形微分方程式ですが、これがちゃんと解けるということをコントロールするのが

$$d_A^2 = 0 \tag{3.46}$$

です。(3.45) は線形で、(3.46) は非線形です。線形微分方程式の係数がうまいこといってるよと言うのが非線形方程式なので、それと同じ構造が (3.44)、(3.42) です。

(3.44) が解けるとは何を言っているかと言いますと、J についても正則関数があると言うことです。(3.43) の時にはゲージ変換で $A=0$ にできましたが、今回は、座標変換で

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

と出来ることがそれに対応しています。

何が肝心かと言いますと、こういう複素構造を変形した方程式というものも、(3.46) の平坦ベクトル束と似た形の偏微分非線形方程式 (3.42) で支配されているということです。

[質問]
J に関して、正則関数ということは?

[答え]

$$\varphi \text{ が } J \text{ にいて正則} \iff J\,d\varphi = \sqrt{-1}\,d\varphi \tag{3.47}$$

です。複素座標を作ろうと思うと、座標関数は正則関数ですから、たくさん正則関数があるわけです。(3.44) が解けるということは座標があると言うことだから、J に関して正則関数があると言うことになるわけです。

(3.42) とは

$$\overline{\partial}B_J + B_J^2 = 0 \tag{3.48}$$

のようなものに支配されていて (B は (4.21) 参照)、また積分可能な幾何学的構造にも支配されているわけですが、一方で微分方程式に対応していて、もう一方では座標変換の言葉で書けるということです。そして、両方ともコホモロジーに関係していると言うことをお話ししたわけです。

ここで、ちょっと休憩にしましょう。

[休憩]

4 Index theorem

deformation theory とは、どう思えばいいかと言いますと、ある一点の周りのモジュライの局所理論のことです。局所理論という意味は二通りあって、ある今考えている空間に対しての局所的な理論、つまり一個の座標系の中での理論というのと、モジュライ理論の中の局所理論、すなわち、ある解があったときにそれに近い解しかとりあえず見ないと言う意味において局所理論と言っているものがあります。後者のものは、空間的には大域的なものを見ています。それが、index theorem や deformation theory と言われるものです。

今日お見せするお話は、

1. H^1 だけでなくて、H^k があった場合
2. どういう方程式がモジュライを考えるのにふさわしいか

ということです。2. は、今日お話しするストーリーにのる方程式はどのようなものかと言うことです。

実は、積分可能な幾何学的構造の方程式だけでは足りなくて、Yang-Mills 方程式や自己共役方程式も含めるわけですが、ただ勝手な微分方程式をとってきたときモジュライの理論が出来るわけではないので、どのようなときに index theorem が大丈夫かと言うことです。この二つの論点に関してお話ししたいです。

まず、deformation theory と index theorem の導入をします。最初にちょっと説明したのは、このようなことでしたね。

$$H^1(M,G) = M \text{ 上の flat } G \text{ 接続のモジュライ} \tag{4.1}$$

G が非可換だと (4.1) つまり $H^1(M,G)$ は群になりません。(平坦ベクトル束のモジュライ空間は曲っていてベクトル空間ではありません)

さらに複素構造のモジュライもあるけれども、これは大域的に非可換群を定義して書けるわけではないんです。なぜないかというと、G というのはゲージ群で、M の空間のどの点でも G があるんですが、座標変換は局所的なので各点各点で G が変わり、大域的に G の関数としては (4.1) のようには書けないわけです。そして何がやりたいかというと無限小論です。G が非可換なので平坦ベクトル束のモジュライ H は非線形で群ではないわけです。群でないとはどういうことかと言いますと、線形方程式の解の空間は群なわけですが、非線形方程式の解の空間は群でないと言うことです。重ね合わせの原理が成立しないということで非線形性の最たるものなわけです。非可換コホモロジーは、あまり取り上ているものがないわけです。難しいわけです。それで、可換群の方に持っていくというのが deformation theory です。deformation theory の心とは、非線形方程式は難しいので線形化して少しでも分かりたいと言うことです。

まず、方程式

$$d_A d_A = 0 \tag{4.2}$$

を考えて、これを線形化するために

$$A = A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \cdots \tag{4.3}$$

を考えます。そして (4.3) を (4.2) に代入しますと、どうなっているかと言いますと

$$
\begin{aligned}
0 = d_A d_A &= dA + A \wedge A \\
&= dA_0 + A_0 \wedge A_0 + \varepsilon dA_1 + \varepsilon A_0 \wedge A_1 + \varepsilon A_1 \wedge A_0 + \cdots
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

です。いま、

$$d_{A_0}^2 = 0 \tag{4.5}$$

ですから、

$$dA_0 + A_0 \wedge A_0 = 0 \tag{4.6}$$

となります。すると、

$$0 = dA_1 + A_0 \wedge A_1 + A_1 \wedge A_0 \tag{4.7}$$

となります。それで、いまどう思っているかと言いますと、A_0 はとめておいて、$A_1 = \delta A$ に関しての微分方程式と見るわけです。すると、

$$
\begin{aligned}
&d(\delta A) + A_0 \wedge \delta A + \delta A \wedge A_0 \\
&\qquad = d_{A_0}(\delta A) = 0
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

となります。この線形化した方程式というのは、

$$d_{A_0}(\delta A) = 0 \tag{4.9}$$

です。これは、δA についての線形方程式です。それで、今何をやっているかと言いますと、フラット接続でのモジュライを一点の近傍で調べたいわけです。ですから、A_0 という点を考えて、その近くでモジュライがどうなっているかを調べたいので、だから A_0 からのずれを見ているわけです。モジュライをある点の近傍で調べるということは、(4.9) のように線形方程式になるわけです。これのいいところは、これが線形方程式だと言うことです。

ついでに言いますと、これにはゲージ変換の自由度があるので、

$$A(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon \delta A + \cdots \tag{4.10}$$

は自明な変形であることがあるわけです。どういうことかと言いますと、

$A(\varepsilon)$ が A_0 にゲージ変換で移る

というわけです。モジュライとは、方程式の解全体を考えるのではなくて、ゲージ変換で移るものを同じと思う、それがモジュライなわけです。方程式の解で、ゲージ変換があれば同じと思うわけです。そう思わなければ解がいっぱいあることになり、答えが無限次元になるわけです。

自明であるという条件を書き下しますと、

$$g(\varepsilon) = 1 + \varepsilon g_1 + \cdots \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned} A(\varepsilon) &= g(\varepsilon)^{-1} A_0 \\ &= (1+\varepsilon g_1)^{-1} d(1+\varepsilon g_1) + (1+\varepsilon g_1)^{-1} A_0 (1+\varepsilon g_1) \\ &= \varepsilon(dg_1 + A_0 g_1 - g_1 A_0) + \cdots \\ &= d_{A_0}\, g_1 \end{aligned} \tag{4.12}$$

となります。ただし、$(1+\varepsilon g_1)^{-1} = 1 - \varepsilon g_1$ であり、2 次の項は無視しています。
結局、何が分かったかと言いますと、

$$d_{A_0}(\delta A) = 0 \tag{4.13}$$

の微分方程式において、

$$A_0 + \varepsilon \delta A \tag{4.14}$$

が解のファミリーということです。これは、

$$\delta A = d_{A_0}\, g_1 \tag{4.15}$$

が成立するということであり、すなわち $A_0 + \varepsilon\delta A$ が自明な変形だと言うことです。

$$\delta A = d_{A_0}\, g_1 \iff A_0 + \varepsilon \delta A \text{ が自明な変形である} \tag{4.16}$$

また、

$$\begin{aligned} H^1_{DR}(M, A) \quad &= \quad (d_A\, u = 0 \text{ の解}) \\ &\qquad u - u' = d_A\, v \text{ の時 } u \text{ と } u' \text{ は同じと思う} \end{aligned} \tag{4.17}$$

となります。以前はČech コホモロジーでしたが、これは de-Rham コホモロジーで、可換群係数です。M はベクトル空間です。これは線形な関数です。無限小化してやりますと、非線形なものが線形化できまして可換群のコホモロジーを計算することになります。
上で言っている意味は、もう一度言いますと、

$$\begin{aligned} A(\varepsilon) \text{ が自明な変形} \quad \iff \quad & g(\varepsilon) \text{ ゲージ変換} \\ & (\ A_0 \text{ を } g(\varepsilon) \text{ で移すと } A(\varepsilon) \text{ になる}) \end{aligned} \tag{4.18}$$

です。単に、最初の解をゲージ変換で移してるだけです。
ついでに言いますと、フラットという方程式はゲージ変換で不変ですから、A_0 の解であれば $A(\varepsilon)$ の解になります。ゲージ不変な方程式を考えるということは自明な変形というのは方程式の解の変形でもあるわけです。解の中で自明でない変形だけを知りたいわけです。

$A(\varepsilon)$ が全部フラットと言うのはただ単にゲージ変換で移ったものよりもたくさんあるわけです。その差がモジュライ空間なわけです。

結局何を説明したかと言いますと、ちゃんと言うのは大変なのですが、ある A_0 の近くのモジュライの様子はコホモロジーを計算すればわかるわけです。

$$A_0 \text{ の近くのモジュライの様子} \Rightarrow H^1(M, A) \text{ を計算すれば良い} \tag{4.19}$$

これは、今は易しいから平坦ベクトル束でだけしましたが、平坦ベクトル束というのは、やさしいのはいいのですが、実際にはこれだけで面白いものが議論できるわけではなくて、複素構造の方がやはり面白いわけです。

複素構造のモジュライ

今度は、

$$\overline{\partial}^2_{J+\varepsilon\triangle J} = 0 \tag{4.20}$$

という方程式になります。これを

$$\overline{\partial}_{J+\varepsilon\triangle J} = \overline{\partial}_J + \varepsilon B \tag{4.21}$$

の様に書いたほうが簡単です。そして B に対しての方程式を書くと、

$$\overline{\partial}_J B = 0 \tag{4.22}$$

となります。これは、どういうことを言っているかと言いますと、B を計算することはやめて、さっきの J という、各点で $\sqrt{-1}$ 倍を動かすものをちょっとずらしてやるとどうなるかと言いますと、

$$\Lambda^1 \underset{J}{=} \Lambda^{10} \oplus \Lambda^{01} \tag{4.23}$$

の分け方が J を動かす事によって変わり、それに伴って $\overline{\partial}$ が動くわけです。

そこから (4.23) というベクトル空間の分け方が J でどう変わるかを具体的に書いてやりますと B を計算できますが、今はそうする必要は無いわけです。なぜ必要無いかと言いますと、J を動かすと言う事を B を動かす事だと思って、直接 B の方程式 (4.22) だと思っていいわけです。そこで、B は

$$B = \sum a_{ij} \frac{\partial}{\partial z_i} \wedge d\overline{z_j} \tag{4.24}$$

と書けます。そのとき J は

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

としています。この B に対して $\overline{\partial}$ を計算すると言う事が (4.22) です。

そして、B は

$$H^1(M, O(TM)) \ni [B] \tag{4.26}$$

です。H^1 の 1 とは (4.24) の $d\bar{z}_i$ に対応していて 1 次のコホモロジーの意味です。O というのは (4.24) のベクトル場 $\frac{\partial}{\partial z_i}$ に対応しています。TM とは接ベクトルで、$O(TM)$ は接ベクトル空間です。(4.26) は M の接ベクトル空間の 1 次コホモロジーです。

こういう H^1 を計算するのは Kodaira-Spencer の index theorem というのがあるからで、それは要するに、ある一つの複素構造がある時にその近くの複素構造の様子を調べようと思えば、接ベクトル束 (tangent bundle) の M に対する 1 次のコホモロジーを計算しなさい、ということです。普通のモジュライ空間は非線形方程式の解全体で言い換えれば非可換コホモロジーになるわけですが、それを可換にすると (4.26) になります。モジュライを計算するというのは、1 次のコホモロジーのことでして、局所的にモジュライを調べるには 1 次のコホモロジーを計算すれば良いわけです。

それでは、どうやって 1 次のコホモロジーを計算するか、という話に移るわけです。だから、もう一回強調しますと、H^1 は可換群なので、モジュライ自身を計算するよりはコホモロジーを計算する方が楽です。というのは、モジュライは非線形方程式の解なので計算するのが難しいわけですが、局所的には (4.23) のように線形に出来ますから計算しやすいわけです。

そこで、次にコホモロジーをどうやって計算するかっていう所に index theorem が登場します。

$H^1(M, A)$ はベクトル空間なので次元くらいはわかるのですが、$H^1(M, A)$ よりも Euler number

$$\chi(M, A) = \sum_k (-1)^k \dim H^k(M, A) \tag{4.27}$$

の方がずっと計算しやすいと言う事実があり、高階コホモロジーがでてきたのは、これが一つの大きな動機になっています。

さっき言いました H^0、H^1 にはそれ自体に意味があります。モジュライのノン局所的な構造や自己同型の事といった、そういう知りたい情報は H^0、H^1、または H^2 くらいが持ってます。そういうのを計算したいと言う事を一つの目標とした場合に、それを具体的に計算するのは非常に難しくて、それに比べるとこれはベクトル空間ですから、次元の交替和は自然に計算しやすいのです。その理由は、言い替えると supersymmetry はこういう事を言ってると思うのですが、偶数のものと奇数のものを交替させてキャンセルさせると意味のあるものがでると言う事だと思います。

[質問]
H^1 と χ は同じ意味を持つのか?

[答え]

いいえ、同じ意味を持ちません。もちろん、H^k が全部分かれば χ は計算できるわけですが、χ が分かったからと言って H^1 が分かるわけではないのです。

それでは χ が分かっていったいどうするのかという問題があります。本当に知りたいのは H^0、H^1 なのに、χ だけ計算してもしようがないではないか、と言うのはおっしゃる通りです。だけれども、χ が分かった時どうするかという処方箋がいくつかあります。ただし完全な処方箋はありません。ここで $\chi(M, A)$ が分かっているときにどうするかという事について小平先生自身が使った処方箋を説明します。

(1) : $H^k(M, A) = 0$ を示す事が出来る場合がある $(k \geq 2)$。

これを消滅定理と言います。このときは、$H^0 - H^1$ が分かればほとんどの事がわかります。例えば、H^5 なんかが残ってると、よく分からないわけです。5 次の微分形式で外微分をやってゼロになるものなんて良く分からないわけで、そのようなものが残ってると計算のしようがないわけです。それでは困るんだけれども、何かの加減でこれら $H^k (k \geq 2)$ がゼロになることが証明できる場合があります。小平先生の有名な小平の消滅定理というものがあるのでが、それを使ったのはこういうシチュエーションです。

χ の方が計算しやすいと言うのは、Riemann-Roch の定理、あるいは Atiyah-Singer の指数定理と言われているものでそれらはだいたい 50 年代くらいに始まったわけで、古くは Gauss-Bonnet の定理というのがあります。それで、次に何をするのかというのが小平の消滅定理です。ここで、小平はある種の仮定のもとで $H^k (k \geq 2)$ がゼロになる事が分かる、ということを証明したわけです。それは (小平の消滅定理で) いつ $H^k (k \geq 2)$ がゼロになるかということを組織的に言う方法はありませんが、もしゼロになることが判定できたら、H^1 が具体的に求めやすくなります。これが第一の方法です。

第二の方法と言うのはひょっとしたら高次コホモロジーを全うに扱う方法があるかもしれないということが、むしろ最近になって出てきました。

(2) : H^k そのものを使う。

脱線しますが、さっき

H^1(odd) がモジュライ (方程式)
H^2(even) が 自己同型 (ゲージ変換)

と言ったわけですが、最近出て来た extended モジュライ空間というのは odd は全部モジュライだと思って even は全部自己同型だと思う訳で、そう思うと、χ によって全体の方程式の数から自己同型の数だけ引いたモジュライの次元の数がでます。しかし、それはエキゾチックな感じで、H^1 というのは普通の意味でのモジュライなんだけれども、odd を含めたときに普通の意味でのモジュライかと言われると、良く分からないわけです。だけど、まずそういうふうに行くべきだという思想もあるそうです。

いいかえれば、ある意味では、偶数のものを boson で、奇数のものを fermion と思って、

奇数の方をモジュライだと思いなさいということです。

さて、$H^1(M,A)$ よりも Euler number $\chi(M,A)$ の方がずっと計算しやすいという事の理由を説明したかったのですが、χ がなぜ計算しやすいのかという一番の理由は H^1 がある意味で非常に偶然的なものである、ということです。

例え話

微分方程式ではなく、代数方程式を考えます。次のような m 個の n 変数多項式を考えます。

$$
\begin{aligned}
&P_1(x_1,\cdots,x_n)\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&P_m(x_1,\cdots,x_n)
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

今、ゲージ変換は考えずに、モジュライ空間として n 変数の m 個の多項式のゼロ点集合を考えます。

$$
M\,(\ni p)=\{\quad(x_1,\cdots,x_n)|P_i(x_1,\cdots,x_n)=0,\quad i=1,\cdots,m\quad\}
\tag{4.29}
$$

また M 上のある点 p における接空間 $T_pM,\ p\in M$ は

$$
(JP_i)(V)=0 \qquad\qquad i=1,\cdots,m \qquad V\in\mathbf{R}^n
\tag{4.30}
$$

の解として定義できます (J は Jacobi 行列で $JP_i\leftrightarrow\nabla P_i$)。つまり、ある多項式のゼロ点で与えられる多様体の接空間とは、多項式を線形化した方程式のゼロ点で与えられるということです。

ただし条件がありまして、$dP_1,\cdots,dP_m$ が点 p で一次独立でないといけません。ついでに言いますと、もし $dP_1,\cdots,dP_m$ が点 p で一次従属だと M が p で特異点を持つことになります。これが有名な陰関数定理です。

それで何が分かるかといいますと、H^1 はベクトル V 、H^2 は dP の関係式 a_i 全体、そして H^3 は (このへんまで来るとはっきりしないんだけれども) その a_i の関係式全体と、それぞれ対応しています。

$$
\begin{aligned}
&H^1\leftrightarrow\{V|\nabla P_i(V)=0\}\\
&H^2\leftrightarrow\{a_i|\textstyle\sum a_i dP_i=0\}\\
&H^3\leftrightarrow\{\ a_i\ \text{たちの間の関係式全体}\ \}
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

つまり何が言いたかったかというと、H^2 は特異点が無ければ消えているわけですから、今考えているモジュライ空間の良い点 (特異点でない点) を考える時には、H^2 は消えているわけです。このようにして消滅が起こるというわけです。

それでもし、H^2 から先は全部消えているとしますと、$H^2 = H^3 = \cdots = 0$、つまり $dP_1, \cdots, dP_m$ が点 p で一次独立の時ですが、そうすると、H^1 の次元はすぐ分かって

$$\dim H^1 = n - m \tag{4.32}$$

となります。これは、変数の数 n から方程式の数 m を引いたものが解空間の次元になるという当たり前のことです。しかし、こういう話がいつでもうまく行くとは限らなくて、dP が一次独立でなくなった時には $\dim H^1$ は $n - m$ でなくなってしまうのです。そういうのはモジュライ空間の殆どの点では起きないんだけれども、モジュライ空間のどこかでぽつぽつと変な事が起きるのです。そしていつそれが起こるのかは、ある意味で非常に偶然的な事情によるわけです。今の場合、代数方程式があった場合にこれらがどのくらい一次従属であるかはある意味で一般論では全然見えなくて、非常に特殊な P_i という方程式に依存しているので、そんなものは非常に精密なことをしないと見えないのです。

しかしそういう事情ににも関わらず、

$$\sum_k (-1)^k \dim H^k = m - n \tag{4.33}$$

であろうと思えるわけです。例えば H^3 以降はちょっと忘れるとして、dP に一次従属関係があったとすると、その従属関係の数だけ H^1 の次元が増えるわけだから H^1 から H^2 を引くとそれはちゃんと $n - m$ になるわけです。

H^1 がおかしくなった時に、H^2 でおかしくなった分を引いておけばある意味安定になって計算しやすいわけです。つまり、(4.33) において特異点の効果は計算しなくていいわけです。

これは一つの例だと思って、実際 index theorem の証明は何をするかというと微分方程式があった時に微分方程式を動かすわけです。動かすというのはどういう意味かと言うと、パラメーターを付けて動かして行って最後に計算しやすい所までもっていって計算するという一つの処方です。

[質問]
例え話といってたんですけど、それは具体例なのですか?

[答え]
いいえ、なぜ例え話かというと、本当に話したいのは微分方程式の話ですよね。今言ってるのは代数方程式なので、だから例え話と言ったのです。

今 P_i は有限変数の代数方程式で、$H^1(M, A)$ よりも Euler number $\chi(M, A)$ の方がずっと計算しやすいわけですが、index theorem で本当に議論したいのは P_i が微分方程式の場合なのです。

微分方程式で議論するときに何が嫌かというと (4.33) の n も m も無限大なのです。何故ならば、ようするに関数に関数を対応させるものだからです。無限大 − 無限大は意味がないから、よくわからないから例え話にしたのです。

だけども、精神としては何が言えるかというと線形化した方程式のゼロ点 $H^1 \leftrightarrow \{V|\nabla P_i(V)=0\}$ だけを計算しようとすると難しくなってしまうが、線形化した方程式の関係までふくめ、また $H^2 \leftrightarrow \{a_i|\sum a_i dP_i = 0\}$ を通した関係 $H^3 \leftrightarrow \{$ a_i たちの間の関係式全体 $\}$ まで含めて考えてやると話が安定になって、計算がしやすくなるという精神は正しいわけです。だから例え話です。

ついでに言うと、例え話じゃなくて、さっきの index theorem を証明しようとするときに何をやるかというと、微分方程式があるときに、その微分方程式を連続的に動かしてやって最後に解きやすい形にしてこういうことをやります。連続的に物を動かしたときに、物が変形しようと変わらないっていうのが大事な性質で、index つまり交替和 (4.32)、こういうものが、微分方程式を連続的に変形していっても変わらないということが大事なのです。それはこの例え話が成立する所から読みとれて、つまり、$H^1 \leftrightarrow \{V|\nabla P_i(V)=0\}$ で多項式を動かしますとこの微分のカーネル (H^1) は、こういうものは不安定なのでぼんぼん変わっちゃうわけですが、これ $H^1 \leftrightarrow \{V|\nabla P_i(V)=0\}$ 引くこれ $H^2 \leftrightarrow \{a_i|\sum a_i dP_i = 0\}$ はいつでも $m-n$ で変わんないわけです。こういうものは、連続的に変形しても変わらないので計算が出来ます。

と、まあ例え話を止めてちゃんと証明しようとすると半年くらいかかるのでやりませんが、まあだいたいこういうものなんです。

実際、コホモロジーと (4.31) の関係は可換環論にそういう話があります。またコホモロジー代数始まりし頃のヒルベルトが syzygy という話でだいたいこういうことをやってます。

モジュライ空間の特異点についての注意

さて、さっきお話したように、モジュライ空間が特異点になるところというのがありまして、そういうところを調べるにはこういう所 (4.31) をある意味真面目に調べないといけません。

さっき、モジュライ空間というものは局所的にはだいたい H^1 で分かると言いましたが、あれはやっぱり荒っぽい話でして、なぜかと言うと、えー、代数方程式で例え話をします。次のような集合、$P_1(x)=\cdots=P_m(x)=0$ が局所的には $\nabla P_1(V)=\cdots=\nabla P_m(V)=0$ で分かるというのがさっき言った有限次元のモジュライの話で、これがいつ正しいかと言うと、考えている場所で $\nabla P_1(V),\cdots,\nabla P_m(V)$ が一次独立のときです。考えてる空間が特異点でない時さっき言ってた事が正しくて、この H^1 で集合 $P_1(x)=\cdots=P_m(x)=0$ が局所的には $\nabla P_1(V)=\cdots=\nabla P_m(V)=0$ が分かる話なのですが、実は、だいたい物を数学で計算する時は、特異点が無いのっぺらぼうなところで計算はしづらくて、だから特異点はちょこちょこっとあんまりないから忘れてもいいのかっていうとそうではありません。特異点というのはへそみたいなもので、そこを押えとかないと話はやっぱり分かりません。物事を、のっぺらぼうな所ではなくて肝心な特異点まで持っていって計算するというのが基本的なアイディアで、特異点というのは大事なのです。

それで、お話したかった事はどういうことかといいますと、1 次のコホモロジーを計算してやればモジュライ空間の中の様子が分かります。局所的な情報が 1 次コホモロジーから分かりますし、さらに 1 次コホモロジーを計算するというのは、交替和にしてしまえば

index theorem にもっていって計算する事が出来ます。

ここでちょっと Riemann 面の例を考えてみます。

Riemann 面での例

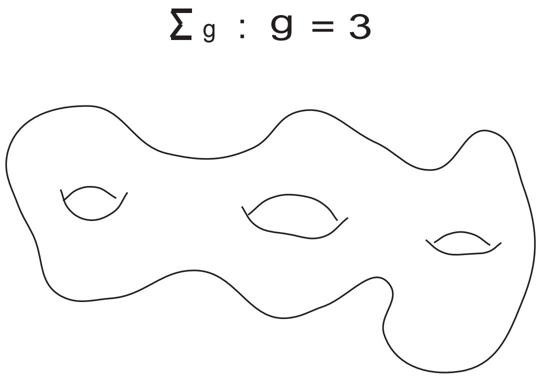

図 3:

この複素構造のモジュライ (図 3) の次元は Riemann が計算したわけですが、

$$\text{モジュライの次元} = \mathbf{C}^{3g-3} \tag{4.34}$$

になります。Riemann 面 Σ が複素 1 次元なので $k=0,1$ しかありません。コホモロジーというのは、複素 1 次元で考えると 1 までしかありません。しかも、今の場合は

$$H^0(\Sigma_g, O(T\Sigma_g)) = 0$$

です。これから何がわかるのかというと、

$$\sum_k (-1)^k \dim H^k(\Sigma_g, O(T\Sigma_g))$$

さえ分かれば $H^k(\Sigma_g, O(T\Sigma_g))$ が分かるのです。

[質問]
$H^0 = 0$ とはどういう意味があるのですか?

[答え]
大域的な複素同型がない、という意味です。別の言い方をすると、genus が 3 以上の Riemann 面には自己同型がほとんど無いわけです。

こうやって見てやると、自ずと Σ_g の次元が上がるにつれて難しくなるということが分かると思います。

$$\sum_k (-1)^k \dim H^k(\Sigma_g, O(T\Sigma_g))$$

は Riemann-Roch の定理から分かるので、そこから個別のコホモロジーを調べようとすると、Σ_g の次元が上がるにつれて加速度的に難しくなるわけです。

Index theorem を適用する方程式について

それでですね、モジュライの様子が index theorem からどういう風に分かるかという事について荒い説明をしたことにしまして、index theorem につき合わせる方程式は何かという事についてお話します。

モジュライを作りやすい方程式について例を挙げます。まず、× (作りにくい方程式の例) を書きますと、Yang-Mills 方程式、Einstein 方程式、あとは極小曲面です。

$$
\begin{array}{lll}
\times & \text{:モジュライを作りにくい方程式} & \\
 & \text{Yang-Mills 方程式} & d_A * F_A = 0 \\
 & \text{Einstein 方程式} & Ricci = 0 \\
 & \text{極小曲面} &
\end{array} \tag{4.35}
$$

[質問]
Yang-Mills 方程式では、群は何であってもいいのですか?

[答え]
それはこれからお話します。

そして○ (作りやすい方程式の例) は何かと言いますと

$$
\begin{array}{lll}
\bigcirc & \text{: モジュライを作りやすい方程式} & \\
 & \text{self-dual 方程式} & F_A + *F_A = 0 \\
 & \text{self-dual gravity} & W^+ = 0 \\
 & \text{holomorphic curve} & \varphi : \Sigma_g \to M, \quad \overline{\partial}\varphi = 0
\end{array} \tag{4.36}
$$

です。なぜこっちが○であっちが×かという事を説明したほうが良いと思いますが、これ (4.35) はどれも、最初に言った意味で積分可能な方程式ではないです。[2] ちょっとそこを説明したいわけです。

今、4 次元で d_A という作用により 0-form(C^0) から 4-form(C^4) まで考えられます。

$$
C^0 \overset{d_A}{\to} C^1 \overset{d_A}{\to} C^2 \overset{d_A}{\to} C^3 \overset{d_A}{\to} C^4 \tag{4.37}
$$

0-form の自由度は関数 1 個分なので 1 です。1-form は自由度 4 で、dx_1 から dx_4 まであります。2-form は 6($= {}_4C_2$) で、$dx_i \wedge dx_j$ です。3-form は自由度 4、4-form は自由度 1 です。

$$
n = 4, \quad d_A : C^k \to C^{k+1}
$$

[2] 積分可能でないというのは p.4 のような意味です。丸がついているのが線形化方程式に対応する、自由度の交替和が 0 の複体が作れるということです。

$$
\begin{array}{rccccccccc}
& C^0 & \xrightarrow{d_A} & C^1 & \xrightarrow{d_A} & C^2 & \xrightarrow{d_A} & C^3 & \xrightarrow{d_A} & C^4 \\
& 0\text{ - form} & & 1\text{ - form} & & 2\text{ - form} & & 3\text{ - form} & & 4\text{ - form} \\
(\text{自由度}): & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
\tag{4.38}
$$

ここで何がうまいかと言うと、
4+4=1+6+1
ですね。つまり、

$$\sum \text{偶数番目の } C^k \text{ の自由度} = \sum \text{奇数番目の } C^k \text{ の自由度} \tag{4.39}$$

ということです。これは任意の次元で成り立ちます。これは何を言ってるかというと、途中でこの de-Rhame complex (4.38) をちょんぎったらだめなんですね。全部考えて初めて意味があるわけです。

なぜこういう事が必要かという説明として次のような状況を考えます。

$$C^1 \xrightarrow{d_A} C^2 \qquad \text{しかない時} \tag{4.40}$$

このとき、C^1 と C^2 の自由度 m と n が等しいわけです。これが何を言ってるのかと言うと

$$d_A f = 0 \tag{4.41}$$

という方程式を考えた時に、方程式の数は、もうちょっと抽象的な言い方をするとこの方程式はベクトルの方程式で何本連立してるかという連立の数ですね。これは次のように書けます。

$$
\begin{cases}
P^1(f_1, \cdots, f_n) \\
\quad \cdots\cdots\cdots \\
P^m(f_1, \cdots, f_n)
\end{cases}
\tag{4.42}
$$

n 個の未知係数があって m 個の方程式がります。$n = m$ ということがモジュライというものをちゃんと作る時に根本的に必要な条件になります。本当は、(4.40) というのはもっと長いんだけれどもそれは難しいから今 2 個で考えているわけです。(4.42) は関数系に対する方程式系なんだけれども、その数が等しいと言うのが今の話です。

$$n = m \tag{4.43}$$

一方、n と m が違う場合を考えると、解が無限次元あるか普通は解けないかのどちらかです。

例えば $n > m$ とすると解は無限次元あるわけです。これは (4.42) を見ていただければ分かるように、方程式の数が m 個あるので、非常に安直に考えて消去できたとすると、$n-m$ 個の関数が残るわけです。だから $n-m$ 個の任意の関数分の解があるわけです。そんな方

程式は解が無限次元あって、モジュライを作るのには向かないわけです。つまり、無限次元のモジュライ空間は良くわからないので扱えないわけです。だから方程式の数と関数の数が合っていないとだめなのです。

次に、もし $m > n$ である場合は、好運が無い限り解けないわけです。

$$
\begin{aligned}
&(n \neq m) \\
&\qquad n > m \Rightarrow \text{ 解は} \infty \text{次元ある} \\
&\qquad n < m \Rightarrow \text{幸運がない限り解けない}
\end{aligned}
\tag{4.44}
$$

ですから、まずこういう座標変換で不変な微分方程式を考えたときに、そのモジュライ問題がうまく扱えるかという事を考える時には、それぞれ方程式の数と関数の数が合っていないといけないというのは、昔から言われているように非常に大事な条件なのです。

そういう条件を実際言い直してやるために、例えばこの場合 (4.40) に C^0 を入れることを考えてみます。C^1 というのは方程式の未知関数の数で、C^2 というのは方程式の数ならば、この C^0 というのは方程式の対称性を表しているわけです。それぞれの次元を l, n, m とすると、

$$
\begin{array}{ccccc}
C^0 & \to & C^1 & \to & C^2 \\
l & & n & & m \\
\text{(対称性)} & & \text{(未知関数)} & & \text{(方程式)}
\end{array}
\tag{4.45}
$$

さっきの条件 (モジュライをきちんとつくる為の条件 (4.43)) は

$$
n = m + l \tag{4.46}
$$

になります。これは、対称性まで考えてやれば方程式の数と未知関数の数が合いますよという事を言ってるわけです。

それはゲージ場の方程式での場合と同じ状況で、ゲージ場ではゲージ変換を考えないと方程式の解は無限個あるんだけれども、ゲージ変換を考えてやると有限次元の解がでてくるというのは、この等式 (4.46) が成立している事が原因です。

今度は、じゃあ (4.45) に C^3 がついたらどうなるか? この C^3 がつくというのは本当にあるのですが、例えば複素構造の変形の方程式の場合はつくのですが、C^3 がつくことの意味は何かと聞かれたら、答えは私には分かりません。これはある意味分かっていないことなんですが、高次コホモロジーにそういうのが出てくるというのには根拠があります。最近の解析力学あたりの Batalin-Vilkoviski formalism などを見ていると、対称性の中の対称性を考えるというのは (物理の方面でもいろいろ出てくる話ですけれども)、C^3 とか C^4 を考える事と対応しておりまして、(4.45) にさらに何かつくということは、方程式が独立なのではなく方程式と方程式に何か関係があるということを意味し、そういうのを全部含めて勘定が合いますよというのが (4.39) で言っている事なのです。

一般に、自由度の交代和が 0 になるような微分作用素の列があるとき、楕円型複体といいます。

Self duality -1

それで、あと self dual な場合というのを説明します。4 次元の場合、

$$\begin{array}{ccccccccc} \Lambda^0 & \to & \Lambda^1 & \to & \Lambda^2 & \to & \Lambda^3 & \to & \Lambda^4 \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array} \tag{4.47}$$

(次元の数は 4) となります。これを全部扱うのは難しいわけです。それは、さっき言いましたように高次なやつ (Λ^3、Λ^4) は無いに越した事がないのです。これがあると、まず高次コホモロジーというのは意味づけが難しいし、計算しようと思っても非常に難しいわけです。そこで、self duality といううまい事を考えて半分に落します。Λ のゼロと 1 と 2 はあるけれどもここで止めたいのですが、なぜここで止めるのがうまいのかというと、ここまではちゃんと意味があるからです。Λ^0 は対称性、Λ^1 は未知関数、Λ^2 が方程式です。だけど Λ^3 からは良く分からなくて、それらを捨てたいわけです。しかし、Λ^0、Λ^1、Λ^2 の次元は 1、4、6 ですが、$6+1 \neq 4$ ですからそれらを乱暴に捨てるのは困るのす。この 3 つしか無いものからある非線形化した問題を考えてやると、そいつは解けるにしてもマイナス無限大次元のモジュライ空間で、普通解けっこない方程式です。それはだから困るわけです。つまり、4 次元空間上で

$$d_A d_A = 0 \tag{4.48}$$

はある意味まずいわけです。それは、本来なら先の方まであるものを途中までしか考えていないからです。1 次元、2 次元では良いけれども、4 次元でのこの解というのはナイーブに考えますと、マイナス無限大次元あります。マイナス無限大次元というのは普通はないわけです (たまに、偶然ある)。

従って、このフラットだという式 (4.48) は実 2 次元では非常に良い方程式でして、実 2 次元ではここ (Λ^2) で止めて良いわけです。つまり 2 次元曲面上の 3-form というのは無いのでここで止めて良いわけです。つまり 2 次元で考えますと、

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda^0 & \overset{d_A}{\to} & \Lambda^1 & \overset{d_A}{\to} & \Lambda^2 \\ 0 & & 1 & & 2 \end{array} \tag{4.49}$$

となる訳ですが、$1+1=2$ なので 2 次元曲面上の flat connection のモジュライとしては良いわけです。

ところが 4 次元になると 1、4、6 となるので $7(=1+6)$ と 4 で違うので悪い問題になるわけです。そこで self duality によって悪い問題を良い問題に変えることが出来ます。どうするかというと Λ^2 が嫌なのですが、これは 4 次元特有のやり方ですが

$$\Lambda^0 = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_- \tag{4.50}$$

のように Λ^2 を分けます。Λ^2_+ を base で書きますと

Λ^2_+ の base

$$dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$$

$$
\begin{gathered}
dx_1 \wedge dx_3 - dx_2 \wedge dx_4 \\
dx_1 \wedge dx_4 + dx_2 \wedge dx_4 \\
\alpha \qquad\qquad\quad \beta
\end{gathered} \tag{4.51}
$$

となりますが、ここで α と β というのは

$$
\alpha \wedge \beta = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 = \quad \Omega \in \Lambda^4 \tag{4.52}
$$

となるように決まります。つまり 4-form Ω を決めると Λ^2_+ と Λ^2_- が決まります。Λ^2 はこのようにして二つに分けることが出来るのです。

$$
\begin{gathered}
\Omega \text{ を決めると} \\
\Lambda^2 = \Lambda^2_+ + \Lambda^2_- \\
3 \qquad 3
\end{gathered} \tag{4.53}
$$

$$
\tag{4.54}
$$

そしてこれが不思議なところなのですが、self dual のとき Λ^0、Λ^1、Λ^2_+ となり

$$
\begin{array}{ccccc}
\Lambda^0 & \rightarrow & \Lambda^1 & \rightarrow & \Lambda^2_+ \\
1 & & 4 & & 3
\end{array} \tag{4.55}
$$

で $1+3=4$ となるわけです。それで、ここで止めて良い分けです。これは一般の次元で成立することは全くなくて、4 次元の時のみ成立するのです。

ここでちょっと言い忘れた事があるのですが、(4.50) の分解は大域的に意味があります。つまりこれは座標変換不変です。

で、とにかく本来は $\Lambda^0 \xrightarrow{d_A} \Lambda^1 \xrightarrow{d_A} \Lambda^2$ が成り立つ時に $d_A^2 = 0$ がもともとの方程式でした。それを書き換えて $\Lambda^0 \xrightarrow{d_A} \Lambda^1 \xrightarrow{d_A} \Lambda^2_+$ の時に方程式が d_A の Λ^2_+ part はゼロ ($\Leftrightarrow F_A = dA + A^2$ の $+$ part はゼロと変わるわけで、これを self dual 方程式と呼んで良い方程式になります。さっきと違うのは、$d_A^2 = 0$ ではないので (d_A の Λ^2_+ part はゼロなので) 完全可積分ではないわけです。もう一度言いますと、$d_A^2 = 0$ という方程式があると $d_A\varphi = 0$ が解けるわけです。つまり $d_A^2 = 0$ があればゲージ変換で $d_A\varphi = 0$ に持っていけるわけです。

ところが、今やった方程式 (d_A の Λ^2_+ part はゼロ) は $F_A = F_A^+ + F_A^-$ と分けた時の $F_A^+ = 0$ という方程式になるわけで、言ってみれば欲しい方程式の半分しかとってないわけです。ですからゲージ変換で $F_A^+ = 0$ のようにゼロへ持っていけるか分からないわけです。ですから $d_A^2 = 0$ よりも弱い方程式なので $d_A\varphi = 0$ が解けるかどうか分からないわけだけれども、そういう方程式があるのです。

そうすると何が偉いかと言うと、4 次元であるにも関わらず、まず嫌な 3 次以上のコホモロジーを考えなくてもよろしいですという事が一つです。そしてもう一つ偉いのは、3 次以上のコホモロジーを捨ててしまったにも関わらず方程式の数とパラメーターの数が合っているので、ちゃんと有限次元の良いモジュライが出来ますよという事です。

そういう有限次元のちゃんとしたモジュライが作れる問題というのをいろいろ探しなさいというのが重要で、どうも、もっと次元が高い場合でも、例えばゼロから n まで続く全部の de-Rham の j-complex を考えた時に途中でうまく切ってしまっても、ここでやったような計算 ((4.55) の 1+3=4) が出来る場合がうまく探せばいくつかあるようです。しかし、一般にどのくらいあるかというのは分かりません。
ただし、今までに最も良く使われて成功しているのはこの 4 次元の場合です。

[一日目終り]

［二日目］

最初に、昨日の最後に駆け足でやった所をもう一度説明します。

Self duality -2

self dual geometry という話をしかけていました。self duality というのは、何故 4 次元で面白い方程式が現れるかという事の大事な説明になるわけで、そのアルゴリズムというのはひょっとしたら高次元でも何か似たような事があるかも知れませんが、まあ、いずれにしても任意の次元であると言うものではありません。

ちょっと思い出しますと、これから 4 次元の場合を考えるわけですが、昨日 4-form だけでいいと言いましたが、あれはやっぱり嘘で、まず metric g_{ij} をいれます。計量ですね。そうすると、tensor だ何だ全部に長さが入るわけですが、そうすると、こういう Ω という長さ 1 の 4-form が書けます。

$$\Omega : \text{4-form 長さ } 1 \tag{4.56}$$

ユークリッド空間だと $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$ のように書けます。あと、向きがいるわけですが、まあこういうものですね。それで、こういうのがありますと、k-form から $(n-k)$-form という写像があります。

$$* : \Lambda^k \to \Lambda^{n-k} \tag{4.57}$$

これを Hodge スターと言います ($n = 4$)。こういうのがあると、u と $*u$ のウエッジ積をとると長さの 2 乗掛ける Ω となります。

$$u \wedge *u = |u|^2 \Omega \tag{4.58}$$

これが定義です。

それで一つだけ大事なことを言いますと、$n = 4$ で u が 2-form だと一つだけ特殊な事情がありまして、この Hodge スターというのは g_{ij} というのを M 上の各点においてコンスタント倍ずらしても変わらないわけです。

$$\begin{aligned} &n = 4, \quad u : \text{2-form} \\ &* \text{ は } g_{ij} \to f(x) g_{ij} \text{ と変えても同じ} \end{aligned} \tag{4.59}$$

これは 4 次元の特殊性です。こういうのを共形変換と言いますが、共形変換に関して Hodge スターオペレーターが 2-form で invariant になるのはちょうど 4 次元です。

それで、Hodge スターオペレーターは 2 回やると 1 になりまして、

$$** = 1 \tag{4.60}$$

です。また 2-form に関しては、

$$\begin{aligned} \Lambda^2_+ &: *u = u \\ \Lambda^2_- &: *u = -u \end{aligned} \tag{4.61}$$

となりまして、Λ^2_+ と Λ^2_- の両方とも自由度は 3 です。これは、ちょうど半分半分になっていますが、この 3 つずつに切るというのが何故大事だったかというと、d_A というものがある時に 2-form をプラスとマイナスに分けると

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda^0 & \stackrel{d_A}{\to} & \Lambda^1 & \stackrel{d_A}{\to} & \Lambda^2_+ \quad (\Lambda^2_-) \\ 1 & & 4 & & 3 \end{array} \tag{4.62}$$

このように自由度が 1、4、3、となりちょうど合うわけです。ここで、ちょっとごまかして書いているんですが、この 1-form とは行列値の 1-form で、それは行列の足と 1-form の足と両方を持っているものです。2-form も同様で、Hodge スターオペレーターは form の足にかかります。

$$\begin{aligned} &\Lambda^1 : \text{行列値の 1-form} \\ &\Lambda^2 : \text{行列値の 2-form} \\ &*u = u \end{aligned} \tag{4.63}$$

それで、方程式をもう 1 回書きます。もともと書いた平坦ベクトル束の方程式というのは

$$\begin{aligned} &d_A^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow F_A = dA + A \wedge A = 0 \end{aligned} \tag{4.64}$$

で、F_A は行列値の 2-form ですから、さっきのように分けてやって、

$$F_A = F_A^+ + F_A^- \tag{4.65}$$

となります。それで

$$F_A^+ = 0 \tag{4.66}$$

を方程式とみなすわけです。これは self dual 方程式ですが、何に対応しているのかというと Yang-Mills 方程式 (2 階の方程式) を 1 階化したものです。

昨日ちょっと言い忘れていたんですが、×とか○とか書きましたが [(4.35),(4.36) のこと] ×の一番の理由は、全部 2 階なので線形化した方程式で (4.62) のようなものが出来づらいということです。それで今の場合、(4.66) を線形化した方程式が何になるかと言うと、deformation を

$$A = A_0 + \varepsilon \delta A \tag{4.67}$$

のように書きますと、方程式 (4.66) は

$$d_A \delta A + * d_A \delta A = 0 \tag{4.68}$$

となります。これを

$$d_A^+ \delta A = 0 \tag{4.69}$$

と定義します。それで (4.62) の 1、4、3 の意味を考えます。まず未知変数 (Λ^1 に対応する) は A で自由度は $4 \times \dim G$ 、G は無限次元です。対称性というのはゲージ変換 (Λ^0 に対

応する) でして、ゲージ変換は $g(x)$ で、$g(x)$ は G 値の関数です。これの自由度は $\dim G$ の次元です。方程式 (4.66) は何個あるかというと、Λ^2_+ の自由度が 3 なので $3 \times \dim G$ です。これで何が嬉しいかと言うと、未知変数の数から対称性の数を引くと、ちょうど方程式の数になるわけで、これがうまく合わないと良い方程式にならないのです。そこに半分に切った効果が現れるわけで、ちゃんと合わないと、方程式の数が多すぎたり少なすぎたりすると、解けなかったり解が無限次元になったりするわけです。

ついでに言うと、アノマリーのトポロジカルな現れというのはこうやって数が合っているにも関わらず、モジュライ空間は有限にはなるんだけれどもゼロにならないということから来るわけです。それで、(4.62) で supersymmetry みたいな事を言うと、Λ の偶と奇で自由度が合うから supersymmetric な系に出来ると思うんだけれども、こういう事をしたにも関わらずモジュライ空間の次元がゼロにならないことがアノマリーのこういう場合の現れだと思います。

これまでが前回の復習で、ついでにもうちょっと言いたいんですけれども、方程式を (4.66) にしたことで一体何が変わるのかと言うと、昨日、(4.64) だと局所的には解が 1 個しかないと言いました。それは答えを計算するのが易しいということでした。つまり、局所的には解が 1 個しかないから座標変換のところだけ計算すればよくて、そうすると変換のところにゲージ群の元を置いておけばいいので、話は有限次元の方程式に落ちまして答えが計算できるわけです。しかし、方程式を (4.66) のようにするとそれはできなくなります。なぜかというと、(4.66) というのは局所的にも答えがいっぱいあるわけです。従って昨日言ったような有限次元の計算はできなくなります。でも逆に言うと、ああいうふうに有限次元に落ちてしまうと、あまりにもトリビアルになりすぎるというのがあります。

[質問]
(4.66) はゲージ不変ではないんじゃないですか?

[答え]
いいえ、ゲージ不変です。今言っている事は、この解が局所的なゲージ変換で移してもゼロ以外のものもあるということです。だから昨日の最初の所で言った事は、曲率がゼロという方程式 (4.64) では、局所的な座標の中で考えればゲージ変換でゼロになる解しかありませんでした。だから局所的には解くべき方程式は何もなくて張り合わせの所だけ見れば良かったわけだけれども、今の場合は局所的に見てもゼロ以外の解があるわけです。つまりゲージ変換でゼロに行かない様な解があるわけです。だから適当な微分方程式を解くのもトリビアルではない。

[質問]
それは F_A^+ がゼロではないということですか?

[答え]
いや、F_A^+ がゼロであっても $A = 0$ にゲージ変換できない解があるということです。

解がどのようになるかを考えたわけだけれども、これからそれを複素方程式に直すという話をします。

複素構造

今、複素多様体を考えます。そうすると 2-form は

$$\Lambda^2 = \Lambda^{20} \oplus \Lambda^{11} \oplus \Lambda^{02} \tag{4.70}$$

のように分けられます。これらの base は、 $\mathbf{C}^2$ を多様体にとれば

$$\begin{array}{ccc} dz_1 \wedge dz_2 & dz_i \wedge d\overline{z}_j & d\overline{z}_1 \wedge d\overline{z}_2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}$$
$$z_1, z_2 \in \mathbf{C}^2 \tag{4.71}$$

とかけます。今書いたこの方程式 (4.62) を複素の方程式に直したいのですが、この分解 $\Lambda^2 = \Lambda^{20} \oplus \Lambda^{11} \oplus \Lambda^{02}$ と分解 $\Lambda^2 = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$ は関係がつくんです。まあ、奇麗な複素多様体では関係がつきまして、それがあるから (4.62) は複素の方程式に直るのですが、それの関係とは

$$\begin{aligned} &\Lambda^2_+ = \Lambda^{20} + \Lambda^{02} + \omega \\ &\omega = dz_1 \wedge d\overline{z}_1 + dz_2 \wedge d\overline{z}_2 \qquad\qquad z_i = dx_i + idy_i \\ &\text{残り } \Lambda^2_- \end{aligned} \tag{4.72}$$

です。self dual になっているかどうかは実際にスターオペレーターを計算すれば分かります。

今言った事は、2-form の中で複素計量を使って分解したもの ($\Lambda^2 = \Lambda^{20} \oplus \Lambda^{11} \oplus \Lambda^{02}$) と Riemann 計量を使って分解したもの $\Lambda^2 = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$ は Kähler 多様体の上では (4.72) のような関係があるということで、そうすると

$$\begin{aligned} &F_A = 0 \\ &\Rightarrow F_A \text{ の } \begin{pmatrix} 20 \\ 02 \end{pmatrix} \text{成分はゼロ} \end{aligned} \tag{4.73}$$

ということがわかります。ただし逆は言えません。それで、F_A の 20 と 02 がゼロという事をもう一度考えますと、以前に、複素構造のモジュライを考えた時にただの de-Rham の d というのを $d = \partial + \overline{\partial}$ のように分けましたね。それと同じ事を d_A でもやります。

$$d_A = \partial_A + \overline{\partial}_A \tag{4.74}$$

ただし $\overline{\partial}_A \varphi$ は $d_A \varphi$ の 01 part です。そうすると F_A の 02 パートは $\overline{\partial}_A^2$ です。なぜなら ∂_A と $\overline{\partial}_A$ は $\begin{pmatrix} \partial_A : & k, l & \to & k+1,\, l \\ \overline{\partial}_A : & k, l & \to & k,\, l+1 \end{pmatrix}$ のように作用するからです。結局、$F_A^+ = 0$ という方程式は

$$\overline{\partial}_A^2 = 0 \tag{4.75}$$

という方程式に書き換えられたわけです。この方程式というのは、前に得られた複素構造の方程式と似ているわけですが、ちょっと注意して欲しいのは (4.75) というのは A に対する方程式です。昨日やった J に対する方程式ではなくて、この場合もう J は決まっています。(4.62) は完全積分方程式ではないんですが、(4.75) というのは完全積分方程式に近くて

$$\overline{\partial}_A^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{\partial}_A \varphi = 0 \text{ が local に解ける} \tag{4.76}$$

ということが分かります。このように 2 乗してゼロという方程式は完全可積分だという事は昨日説明しましたから、(4.75) というのは複素微分の 2 乗という方程式ですから $\overline{\partial}_A \varphi = 0$ は解けるわけです。つまりこれは、φ はベクトル値の正則関数である、ということを言っているわけです。

それでですね、昨日最初にやった事

$$\begin{aligned} d_A^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad & \text{変換系 } g_{01} \text{ が constant} \\ & \frac{\partial g_{01}}{\partial x} = 0 \end{aligned} \tag{4.77}$$

のアナロジーで考えたいんですが、これは何だったかと言うと、A がゼロになるようなゲージをとってやると A がゼロになるゲージ同士のゲージ変換はコンスタントになって、それからこれがでるわけでした。で、同じ事を今の場合にやりますと、

$$\overline{\partial}_A^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial g_{01}}{\partial \overline{z}} = 0 \tag{4.78}$$

というのが分かります。これは、ゲージ変換が holomorphic だということです。こういう、例えば g_{01} はどういうものになるかというと、まず多様体 M と座標系 U_i を考えます。

$$M = \cup_i U_i \tag{4.79}$$

すると、$U_i \cap U_j$ に変換系というのがあって、これが g_{ij} で、複素ベクトル束だと

$$g_{ij}: \quad U_i \cap U_j \qquad \to \qquad GL(n, \mathbf{C}) \tag{4.80}$$

となります。これがコンスタントだというのが、今考えてる多様体 M が平坦接続を持つということです。

$$g_{ij} \text{ は constant} \qquad \Rightarrow \qquad \text{平坦接続} \tag{4.81}$$

これは、リアルな場合 (4.77) は完全可積分条件となっていたわけです。これは定義なのですが、g_{ij} が正則関数ならば (4.58)、今考えているのを複素ベクトル束と言います。

$$g_{ij} \text{ は正則関数} \qquad \Rightarrow \qquad \text{複素ベクトル束} \tag{4.82}$$

大事な点は何かと言いますと、$F_A^+ = 0$ という方程式に比べると $d_A^2 = 0$ の方程式の方が見やすくて、これらはさっきの完全可積分という言葉で言い直す事が出来て、そのときは変換系が holomorphic であると言う言葉に言い直す事が出来ます。

[質問]

(4.77) の場合は A がゼロになるような g をとっているわけですよね。それに対して、今 (4.78) は A がゼロになるようにはできない.....

[答え]

A がゼロになるようには出来ないんですけれども、base として $\overline{\partial}_A\varphi = 0$ となるような φ をとってるわけですよね。そういう base をとると、その base 間の変換というのは複素な変換しかないということです。ようするに、この方程式 $\overline{\partial}_A\varphi$ がゼロで $\overline{\partial}_A(g\varphi)$ がゼロだと g は正則関数となるわけです。従って、そういう base を各々とっておくと、出て来る変換性というのは全部 holomorphic になります。

$$\left(\overline{\partial}_A(g\varphi) = (\overline{\partial}g)\varphi + g\overline{\partial}_A\varphi\right) \tag{4.83}$$

ただし、g に対する微分はただの $\overline{\partial}$ です。

それでですね、私は結局何を説明したのかと言うと、$F_A^+ = 0$ という方程式は複素幾何学の話しに持っていけるという事です。で、複素幾何学だったら少しは解けるわけです。こういう複素ベクトル束のモジュライの問題 (4.82) は難しいんだけれどもよく研究されています。なぜそういう事が出来るのかという理由を一言だけ言いますと、ずいぶん昔に Serre が証明した GAGA[3] という定理があって、コンパクトな空間では、『正則関数』の範囲でものを考えると、結局多項式で考えたものと同じになります。今考えているのは複素ベクトル束で正則関数なんですけれども、今 compact なモジュライを考えていて、compact な空間上で正則関数ができた事を考えるには、正則関数を考える代わりに多項式を考えれば良いという事が GAGA です。

だから今考えている M が compact だと g は正則関数なんだけれども、これを取り替えると貼りかえが全部多項式である、そういう貼りかえをとることが出来ると事が知られています。そうすると最後に多項式の問題に落ちるから、まあ人間の手の届く範囲になって、代数幾何からこれらが研究されています。そういうわけで F_A^+ を最終的にはそこまで持っていって少しは解こうという事がずっと研究されていたわけです。

で、少し言い忘れたんですが、実は

$$F_A^+ = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{\partial}_A^2 = 0 \tag{4.84}$$

において、$\Rightarrow$ だけではなく $\Leftarrow$ も必要なのです。$\Leftarrow$ は正しいんだけれども難しいです。もうちょっとちゃんと言いますと

$$\overline{\partial}_A^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{A をゲージ変換すると } F_A^+ = 0 \tag{4.85}$$

という定理があります。これが実は難しいです。これは偏微分方程式に関係してきます。つまり、Λ_+^2 は $\Lambda_+^2 = \Lambda^{20} + \Lambda^{02} + \omega$ のように分解できましたが、$F_A^+ = 0$ という定義から $\Lambda^{20} + \Lambda^{02}$ は消えるんだけれども ω は残ってしまいます。これを消さなくちゃいけなくて、うまいゲージ変換を見つけてこなくてはいけないんですが、これが実際、偏微分方程式の

[3] Serre; Geometry analitique et geometry algebrique 一例は、射影空間全体で定義されていて高々有限次の極の形の特異点しかない正則関数は、有理関数（多項式の多項式による商）になる。です。

問題になって嫌なんですけれども解けます。だからゲージ変換を介して (4.85) が言えるわけです。

Seiberg-Witten がでてくるまではこれが唯一の計算方法だったわけです。

5 Stability

モジュライ空間の構成法は物理の方にもいろいろとあるんと思うんですが、私はあえて数学の方でしか話さないような事を話そうと思います。

まずは stability と呼ばれる話です。Mumfold の考えた概念で、代数幾何の話ですが、モジュライ空間が Hausdorff になるかっていう問題です。

$$\text{モジュライ空間は Hausdorff か？} \tag{5.1}$$

ここでちょっとモジュライ空間がどういうものだったか思い出しますと、こういうもんですけどね、

[質問]
Hausdorffってどういうもんですか?

[答え]
なんかあるふうに収束していったら、収束先が一つしかないようなものです。同じ列から、極限操作が 2 種類も 3 種類もあると極限操作を定義しづらいのですが、そういうことが起きてない。またあとで Hausdorff でない例がでてきますので、そのときにまた説明します。

今ここでこのようなものを考えます。

$$\mathcal{M} = \{\, \text{微分方程式の解} \,\}/\text{ゲージ変換群} \tag{5.2}$$

微分方程式の解全体をゲージ変換で割ったものですけど、

$$X/G \ : G \text{ は compact でないとなかなか Hausdorff にならない} \tag{5.3}$$

なんか群でわるというのはなかなかいやな操作なんですけど、群 G は compact でないとなかなか Hausdorff にならない。

$$\text{複素 Lie 群はめったに compact にならない} \tag{5.4}$$

こういう知られている事実があります。これが stability っていうのが出て来る理由でして、複素幾何学でモジュライ空間を調べるときに stability を考えざるを得ない状況になるんですけど、数学でモジュライ空間を考えるときには、同値関係を入れて商空間をとってないと面白くないんですけど、複素幾何学で商空間をとると言ったらもちろん複素 Lie 群でとるんですが、複素な Lie 群っていうのは普通 noncompact なので安直にやるとたいがい Hausdorff でないわけです。それの例を言いますと、

[質問]

複素 Lie 群で compact なものってあるんですか?

[答え]
例えばトーラスです。

一番易しい例がですね、

$$\mathbf{C} = X \tag{5.5}$$

$$\mathbf{C}^X = \mathbf{C}/0 \quad \leftarrow \text{ゼロを除く} \tag{5.6}$$

これはゼロを除いたやつ、これは掛け算で群になってます。$\mathbf{C}^X$ の元を c として $\mathbf{C}$ の元を z とすると、

$$c\,z \quad (= \text{かける}) \tag{5.7}$$

割ってどうなったかといいますと、

$$\begin{aligned} &\mathbf{C}/\mathbf{C}^X = 2\,\text{点} \\ z_1, z_2 \in \mathbf{C}\ ,\quad z_1 = cz_2\ &\text{のとき同じと思う} \quad \to \quad \text{ゼロとゼロ以外} \end{aligned} \tag{5.8}$$

もともとの空間が $\mathbf{C}$ で、ゲージ変換分が $\mathbf{C}^X$ です。そうするとこれが何かっていうと 2 点です。つまりゼロとゼロ以外。これが実は Hausdorff 空間でないわけです。なぜ Hausdorff でないかと言いますと、

$$z_i \neq 0\,, \quad \lim z_i = 0 \tag{5.9}$$

とします。z_i の元を

$$p_i = [z_i] \in \mathbf{C}/\mathbf{C}^X \tag{5.10}$$

と書くと、limit は

$$\lim [z_i] = [0] \tag{5.11}$$

と、これはゼロに行くんですね。これは全部ゼロでないんですから、割った空間では全部等しいわけです。

$$[z_i] = [z_j] \tag{5.12}$$

ここで何が起こっているのかというと、極限のとり方が二通りあるわけです。

$$\lim p_i \text{ が二つある} \tag{5.13}$$

•	•
0	p_i
unstable	stable

(図を指しながら) 左が unstable で右が stable 。unstable というのはどうなっているかというと、

- ゼロの近くにゼロと違うものがいっぱいある

stable というのは

- そうなっていない

何が悪いかといいますと、こういうものを考えます。

$$\{c \in \mathbf{C} \mid c\,0 = 0\}\ , \quad \mathbf{C}^X : \text{noncompact} \tag{5.14}$$

ゼロをゼロにうつすような $\mathbf{C}^X$ の元全体を考えますと、これは $\mathbf{C}^X$ そのものです。$\mathbf{C}^X$ は noncompact ですから、これはモジュライの言葉で言いますと「ゼロの自己同型は noncompact 群」ということになります。

この例は elementary でいいんですが、もうちょっと現実的な、実際のモジュライに関わるような例を考えますと、genus ゼロの singular な Riemann 面を考えます (図 4)。何を言いたいのかと言いますと、これは unstable 。さっきのゼロみたいなものになります。

さて、X をちょっと動かしてみるわけです (図 5)。X_ε というのは何かって言うと、X はこのままでは singular ですから、ちょっとこの幅が ε ぐらいなものです。もっと一般にですね、これ S^2 じゃなくってもっと一般に穴が開いてるような genus のあるやつ、こういうのが無限遠点に現れて、特異点解消って言うんですか、ここをちょっとふくらまして無限遠点のまわりをスムーズにすることが一般には出来るわけです。これ (図 5) も S^2 なんですけど、S^2 の複素構造っていうのは一つしかない。だから X_ε の複素構造っていうのは ε に依らない。座標をとり直すと同じになる。だからこれらは同じものなわけです。これは何を言ってるかといいますと、

$$\begin{cases} \lim X_\varepsilon = X \\ \lim X_\varepsilon = X_{\varepsilon_0}\ , \quad \varepsilon_0 \neq 0\ , \quad X \neq X_\varepsilon \end{cases}$$

下は自分に戻るという意味　(X_ε は $\varepsilon \neq 0$ に依らない)

ε がゼロでないやつは全部同じで、ε がゼロのやつだけ singular だから違うわけです。この問題の場合には、極限を考えると元の ε がゼロのやつと、ふくらました ε がゼロでないやつが出て来て一意に決まらない。もともとの収束列に対して二つ limit があるということは Hausdorff でないわけで、これ、嫌なわけです。

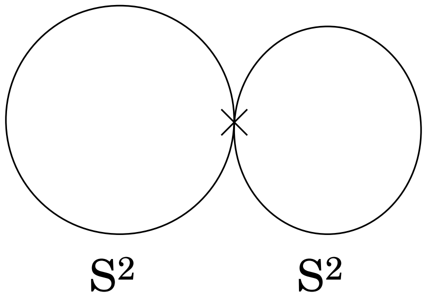

図 4:

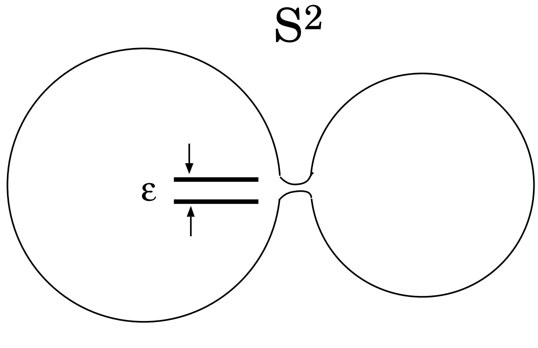

図 5:

これは S^2 でしたけど、Riemann 面のモジュライをつくろうと思ったときにこういうことが起きちゃうっていうのは、ある意味非常に essential です。
それでこの場合、何がまずいかって言いますと、

何がまずいか?

S^2 から S^2 への自己同型

$$\begin{aligned} &\text{holo.} : S^2 \to S^2 \\ &1\,\text{次分数変換}\ PSL(2,\mathbf{C}) \quad \text{noncompact} \end{aligned} \tag{5.15}$$

1 次分数変換 $PSL(2,\mathbf{C})$ が noncompact なわけです。
それで結局 Mumfold のアイディアは何かっていうと、いいモジュライをつくろうと思ったら自己同型が noncompact なやつは排除する。ちょっとウソ定義を書きますとこういうことですね。
ウソ定義

$$\text{stable} = \text{自己同型が compact} \tag{5.16}$$

Σ という Riemann 面があったとします。

$$\left\{ \varphi \,\middle|\, \begin{array}{l} \varphi : \Sigma \to \Sigma \\ \text{holo. } 1:1 \end{array} \right\} \quad \text{compact} \tag{5.17}$$

Mumfold の言ったのは unstable な点を捨てて、stable な 点だけ取って来ないといいモジュライ空間はできないということです。

$$\text{stable なものだけ取って来ないと、良いモジュライはできない} \tag{5.18}$$

これで一応良かったんだけど、本当にこれで良いのかという事について問題があるところでして、一つは、このように unstable な点をすべて捨ててモジュライのきれいなところだけで考えるというのは、とりあえずはいい解決方法なわけですけど、ほんとうは捨ててしまったところに面白いものがあったのかも知れなくて、ある意味暫定的な解決法なわけです。ただし、いきなり最初からすべて含めて考えるのは Hausdorff でないから大変なわけで、数学にはそういうものを扱う道具だてというのはないわけです。これが一番目です。
もう一つはですね、

$$\text{stable は問題によってかわる} \tag{5.19}$$

例えばこの絵 (図 4) の場合はですね、単なる Riemann 面のモジュライを考える場合には stable でない。しかしこいつがでっかいところに入っていると思いますと、

$$S^2 \cup S^2 \subset X \tag{5.20}$$

こういうときは stable と見るわけです。どう考えるかというと、Gromov-Witten invariant あるいはトポロジカルシグマモデルというものがありますが、トポロジカルシグマモデル

のモジュライを書いてみますと、こういうものです。

$$\Sigma_g \quad : \quad \text{genus } g \text{ の Riemann 面} \quad (g: \ \text{fix}\ ) \tag{5.21}$$

$$\bullet \ \ J_\Sigma \ : \ \ \Sigma_g \text{ 上の複素構造} \tag{5.22}$$

$$\bullet \ \ \varphi \ \ : \Sigma_g \to (M, J_M) \tag{5.23}$$

$$M: \text{複素多様体}$$

こういうもののペアを考えるんですが、方程式 φ が複素正則関数、φ の微分が J_Σ と J_M について複素線形。Riemann 面の複素構造 J_Σ を動かしているんですが、だからこのペアに対する微分方程式を書いてやると、

$$(\text{Jacobi } \varphi) \circ J_\Sigma = J_M \circ (\text{Jacobi } \varphi) \tag{5.24}$$

φ に関しては一階微分方程式で、J_Σ に関してはただの体積要素です。これにはゲージ変換群がありまして、対称性を表す群、ゲージ変換群は何かって言いますと、今の場合は、

$$\begin{array}{rcll} & & \text{ゲージ変換群} & \\ u: \quad \Sigma & \to & \Sigma & : \text{diffeo.} \quad \left(\text{全体: } \mathit{Diff}(\Sigma)\right) \\ \varphi & \mapsto & \varphi \circ u & \qquad (5.25) \\ J_\Sigma & \mapsto & u^* J_\Sigma & (u \text{ で座標変換した } J_\Sigma) \qquad (5.26) \end{array}$$

これが方程式を不変にするわけですが、方程式を並べて書いてしまえば、もちろんこの方程式、diffeo. でおんなじなんで、これがトポロジカルシグマモデルのセットです。ゲージ場のセッティングとほとんど同じで、微分方程式があってゲージ変換がある。stability というものをこういうセッティングで考えると、こういうもんも考えなきゃならない (図 6)。こいつだけの自己同型っていうのを考えると、それはすごくでっかいわけです。右も S^2 で

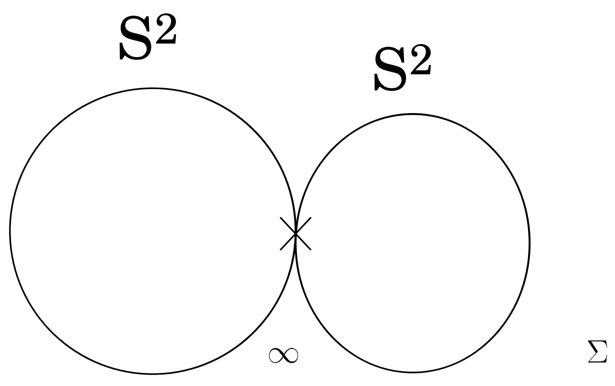

図 6:

左も S^2 で、このつながったところを無限遠点と思うと、S^2 から S^2 への自己同型ですから、これはでっかいわけです。

ところが今の場合ペアで考えます。

$$
\begin{aligned}
&(\varphi, \Sigma) \text{ の自己同型} \\
&\varphi :\ \Sigma \to M
\end{aligned}
\tag{5.27}
$$

これの自己同型っていうのはあんまりないわけです。

自己同型って何かっていうと、さっきのゲージ変換がありましたが、このゲージ変換の u と φ を合成するとまた自分に戻るやつ

$$
\begin{cases}
u : \Sigma \to \Sigma \\
\varphi \circ u = \varphi
\end{cases}
\tag{5.28}
$$

$$\Longrightarrow \text{なし}$$

ここで u は holomorphic。

こういう条件をつけますと、写像と無矛盾な自己同型はなくなるので、これはなくなるわけです。トポロジカルシグマモデルで考えるときには stability の定義が変わってきて、写像ごとの stability を考えなければならない。問題ごとに、今考えている微分方程式に関するゲージ変換群の自己同型が何かっていうのをとにかく考えなくちゃならない。それに関して stable なものを考えて、それでモジュライ空間をつくれば、いつでも Hausdorff になっているよ、というのが Mumfold の言ってることです。

stability っていうのはだいたいこういうことで、もっと非常に一般的な状況で言うと、微分方程式とゲージ群があって、そのとき微分方程式のある解が stable な解であるというのは、その解を止めるようなゲージ変換群の元全体というのが compact であると言うのが条件です。そういう条件で考えるとモジュライ空間の Hausdorff 性というひとつの嫌な問題は起きないわけです。

ごちゃごちゃ長々と話してきましたけど、代数幾何でモジュライをつくるときの、Mumfold が言い出した一番肝心なアイディアですので ... 。これが stability です。

6　モジュライの compact 化

で、次に私が何を説明するかと言いますと、モジュライの compact 化です。compact 化っていうのはだいたいモジュライのことをやるときに一番大事なんですが、compact 化というのは何かというのをだいたいまとめてみます。

昨日の話はだいたい何をやったかといいますと、

$$A_0 \text{の近くの解} \tag{6.1}$$

$$\nwarrow \text{ local theory}$$

local theory っていうのは出発点ですけど、local theory で終ってるとなかなかやっぱりだめで、global theory を考えてみたいんですが、空間の global な性質で始めに考えるのは compact ということですけど、次にやらなくちゃいけないのは、さっきやった解の空間を

compact にすることですけど、

$$\mathcal{M} = \left\{F_A^+ = 0\right\}/\text{ゲージ変換} \tag{6.2}$$
$$\mathcal{M} = \{(\varphi,\Sigma)|\, J_M \circ \varphi = \varphi \circ J_\Sigma\}/\mathit{Diff}(\Sigma) \tag{6.3}$$

これを compact 化する。compact 化するというのはどういうことかというと、このままでは compact でないので compact にする。だいたい何をやるかっていうと、singular な object をつけ加える。こういうことをやります。どういう singular な object をつけ加えるかというと、一般的な処方箋はなくって、難しい問題です。

compact 化ができないことも多くって、例えば、次のような例があります。

compact 化が出来ていない例

- 複素次元 ≥ 3

$$\overline{\partial}_A^2 = 0 \tag{6.4}$$

実次元 4 だったら、

- self dual gravity

$$W^+ = 0 \tag{6.5}$$

これは Riemann 計量に対する方程式で、W っていうのは Weyl テンソルで、

$$W = 0 \;\Leftrightarrow\; f\, g_{ij}\text{ の曲率はゼロ}, \qquad f:\text{関数} \tag{6.6}$$

ということをその昔 Weyl が示しました。(W^+ はその半分です。)

ついでに言いますと、曲面、つまり 2 次元の場合にはいつでもこれはゼロです。これが self-dual gravity の方程式です。この方程式は Atiyah-Singer の指数定理にのりやすい方程式ですので、局所理論はきれいに出来ている。局所的なモジュライ空間はきれいに出来ているんですけど、これからもっといろいろやろうとしたとき、何が難しくってできないかというと、compact 化です。

それで compact 化をしようと思うときに何を考えるかというということですが、singular な object を考える。例として Riemann 面のモジュライの場合を考えます。この場合はモジュライ空間の compact 化が出来ます。

[質問]

なんでさっきのはだめだったんですか?

[答え]

compact 化をするということは singular な解をつけ加えて、singular な解も含めて考えましょうということなんですけども、これから説明したいのはどんな singular な解を考えなくっちゃいけないかということなんです。実際に方程式の singular な解を求めるっていうのは難しいですから。それぞれの問題に対して、問題にふさわしい singular な解っていうのは違ってくる。Riemann 面のモジュライの場合にはふさわしい解というのがわかって

いるから、話がスムーズにいくんですけど、さっきのような場合はもっと難しくって、どんな singular な解が現れるかというのがまだわかっていないんです。

これからちらっとお話したいのは、singular な解がいろんな次元でどんなふうに見えるのかなということを少しだけ話したいんですけども、一般的な処方箋というのはやっぱりなくって、それぞれの幾何学の問題に対してそれぞれ違ったことをする。singular な Riemann 面というのは、これはわかるわけですね。まぁ、こんなもんですね (図 7)。これは要する

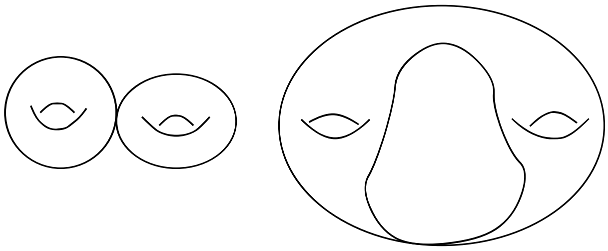

図 7:

に、こういうことですね (図 8)。

$$X^n \ni p \quad \text{特異点} \tag{6.7}$$

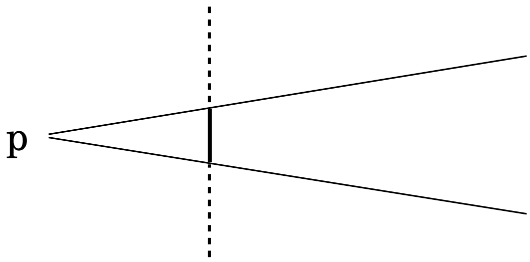

図 8:

n 次元の特異点のまわりのことは $n-1$ 次元のものがどれくらいあるかわかればわかるわけです。

$$\underset{\uparrow\ (\text{マイナス})}{X{-}p} \ \text{は nonsingular} \tag{6.8}$$

$n=2$ のときは易しくって、1 次元多様体は S^1 ぐらいしかないですね。そうすると、特異点というのは、特異点 p があって、S^1 がいくつかあって、円錐がこうのびてて、まぁこのようになっている (図 9)。Riemann 面のモジュライの compact 化というのはある意味では難しいんですけど、それでもまぁ出来るっていう理由は、1 次元多様体が S^1 だからです。

[質問]
X^n というのは Riemann 面なんですか?

[答え]

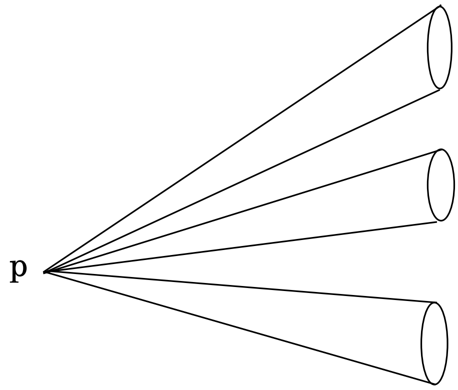

図 9:

$n=2$ だから Riemann 面。

Riemann 面のモジュライを考えるというのは、モジュライ空間の点を調べてるので、モジュライ空間の無限遠点ですか、compact 化のときにつけ加えるのは、singular な Riemann 面なんですね。モジュライ空間の singular な点を考えることもあるんですが、そうではなくて、モジュライ空間に何をつけ加えて compact にするかということをなので、つけ加えるのは方程式の singular な解。で、今の場合は Riemann 面のモジュライなので、singular な解っていうのは singular な Riemann 面。

[質問]

Hausdorff は関係あるんですか?

[答え]

今は関係してません。さっきの議論との関係を言うと、つけ加えた点の近くが Hausdorff であるかというのを調べるために、どういう Riemann 面をつけ加えることが許されるかを調べるのに関係します。

こういうの (図 10) を許すと Hausdorff にならないから排除しなければならないというの

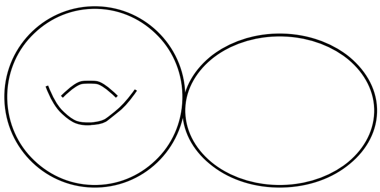

図 10:

が、さっきの議論でわかったことです。

次に 4 次元の話をします。4 次元のときに何が難しいかというとこういうことです。4 次元多様体の極限として現れる 4 次元の特異点のある空間またはゲージ場です。これに関してですね、まず直観的に 2 次元の場合で言いますとね、こう特異点があるわけですね (図

11)。

$$\text{特異点}\, p$$
$$p\text{の曲率は}+\infty \tag{6.9}$$

曲率がプラス無限大のときはだいたいわかってます。曲率がプラスの無限大とマイナスの無限大っていうのは変に思うでしょうけど、ちょっとだけ言いますとこがプラス無限大で、ここがマイナス無限大です。

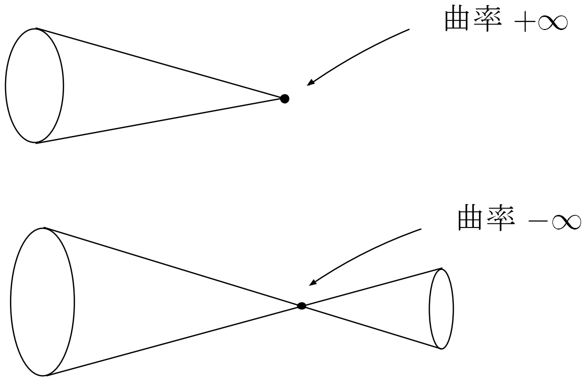

図 11:

どう思ったら納得できるかと言いますと、ちょっとこう、なめらかにしてみるんです (図 12)。図 11 に行くと曲率が一点に集中するわけです。曲率を積分したのは有限です。Gauss-

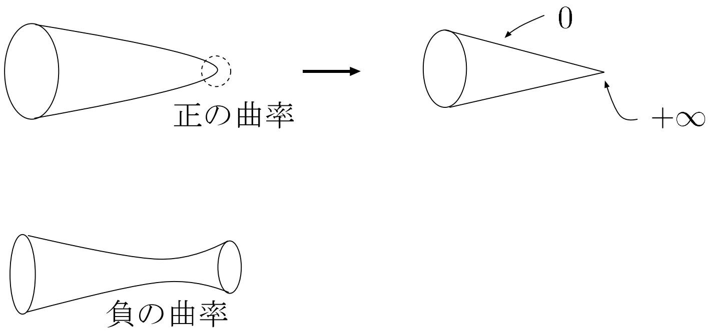

図 12:

Bonnet の定理で。Riemann 面の場合はこう (図 11)、円錐が 1 個あったら曲率が正の無限大で、2 個あったらマイナスの無限大で、まぁこの二つしかないわけです。

で、4 次元の場合何が起こるかと言いますと、こう特異点があるとすると、そのまわりを囲むのものは 3 次元になるわけです。特異点の曲率がプラスの無限大だとどうなるかと言うと、この 3 次元多様体の曲率がプラスになるわけです (図 13)。

$$Ricci > 0 \tag{6.10}$$

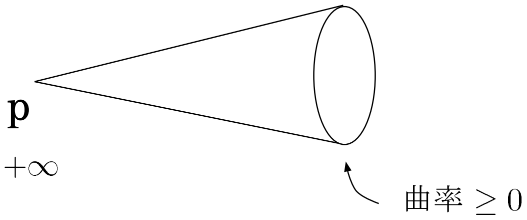

図 13:

[質問]
ここで言ってる 3 次元多様体の曲率は何曲率ですか?

[答え]
断面曲率です。でもそれはいろいろやりかたがあって、どう定義するかによるので、むしろちゃんと言えないといったほうがいいかもしれない。Ricci 曲率で考える場合もあります。

そうすると、この曲率が正で何がうれしいかと言うことですが、3 次元で曲率が正の多様体はたぶん 3 次元球面ぐらいしかないわけです。それは conjecture で、何曲率を考えるかによりますが、Ricci 曲率のときは Hamilton の定理というのがあって、

$$Ricci > 0 \quad \Longrightarrow \quad S^3/\text{有限群} \tag{6.11}$$

スカラー曲率でも成り立つだろうというのは conjecture ですが。
これで何がわかったかというと、曲率がプラス無限大の特異点が 1 個ある場合は、これを囲んで S^3 を有限群で割ったものがでてくるということです。ここが S^3 というのは何を言ってるかと言うと、3 次元球面の錐は特異には見えないわけです。3 次元球面をせいぜい有限群で割ったぐらいだったら、断面が 3 次元の場合は別におかしいことは起こらないわけです。
嫌なのは曲率がマイナスの無限大の場合です。マイナスの無限大っていうのはどういうときにでてくるかというと、例えばこういうことを考えるんですね。

$$X_\varepsilon \, f_\varepsilon(z_1, z_2, z_3) = 0 \tag{6.12}$$

$$f_0 = gh \tag{6.13}$$

$$X_0 = \ \{g = 0 \cup h = 0\} \tag{6.14}$$

図に描くと、こうなってます (図 14)。全体 6 次元のなかに 4 次元曲面が二つあって、2 次元で交わっています。交わったところが曲率マイナス無限大になります。さっきのプラス無限大は二つの S^2 がこうなってたんですが (図 15)、今度はこうなってます (図 16)。

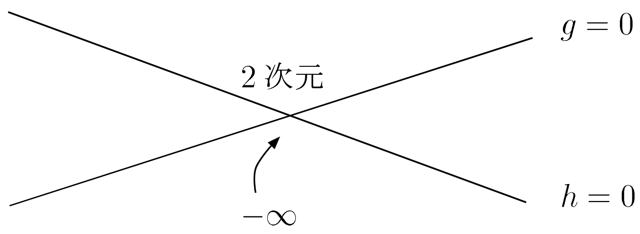

図 14:

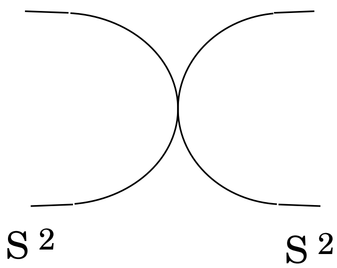

図 15:

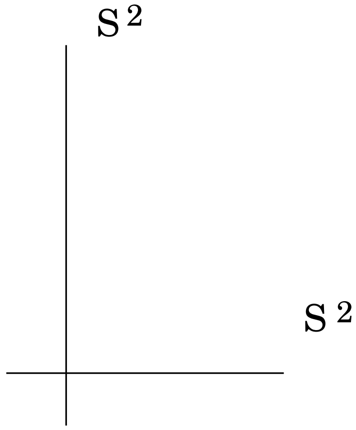

図 16:

[図 14 に戻る]

Riemann 面のときには統制できたんですが、こうなっちゃうともう難しい。こういうものまで含めて compact 化しなければいけないので、さっきの self-dual gravity は難しい。複素曲面の複素構造のモジュライを全部調べるのも同じような理由で難しい。

ゲージ場の場合、

$$d_{A_i} * F_{A_i} = 0$$
$$\int \| F_{A_i} \|^2 \text{ の変分問題}$$

全部示されたわけじゃないんですけど、こういうふうに考えられています。

$$\lim F_{A_i} \text{ がどこで発散するか?} \quad \text{(この集合を } S \text{ とする)}$$

どこで爆発するか、発散するか。

[質問]
何が発散するんですか?

[答え]
曲率です。ゲージ場が発散することもあるんですけど、こういうことが言えます。

$\lim F_{A_i}$ が発散しなければ、

$$A_i \text{ をゲージ変換して } A_i \text{ が収束するように出来る}$$

$$F_{A_i} \text{ が発散する集合は} \qquad \text{codimension} = 4$$

[質問]
codimension ってなんですか?

[答え]
全体 X の次元からその集合 S の次元を引いたものです。

$$\begin{gathered}\dim X - \dim S = 4 \\ X \text{ が } 4 \text{ 次元} \implies S \text{ は有限集合}\end{gathered} \tag{6.15}$$

これがゲージ理論がいろんな応用されたときの基本的材料なんですけど、有限集合の場合はやさしいわけです。これが例えば 6 次元だと、発散する集合が 2 次元で、発散する集合そのものを調べなければいけないわけです。

[質問]
いまここで言ってる次元というのはなんの次元ですか?

[答え]
空間です。方程式を考える空間の次元です。方程式の自由度ではありません。空間の次元によって、F_A が発散する場所の次元が変わるわけです。

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i dx^i\,, \qquad n = 4 \tag{6.16}$$

4 次元では、モジュライ空間の無限遠点に対応する接続の特異点が、ぽつぽつと有限個の点でしかないわけです (図 17)。これが 4 次元の場合 compact 化しやすい理由で、やっぱり

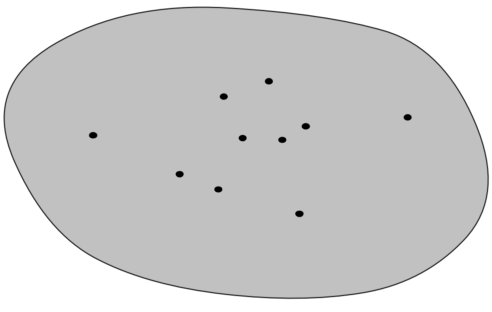

図 17:

有限個と言うのは考えやすいわけです。codimension が 4 というのはどういうことかというと、

$$\int \| F_A \|^2 \sim \int F_A \wedge F_A \tag{6.17}$$

これは 4 次の方程式。

さっきのことを思い出しますと、正の曲率があって、それが一点に集中する。爆発が起こるというのはだいたいこういうことで、全体の曲率の総量を保ったまま、一点に曲率が集中して発散するわけです (図 18)。

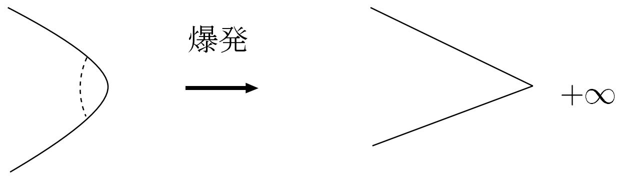

図 18:

そうすると、4-form というのは 4 次元のコホモロジー。

[質問]
ここでは self-dual なゲージ場を考えているんですか?

[答え]
それはいろいろ微妙なところで、証明されているのは 4 次元なんですけど、高次元でも 4 次元の self-dual のアナロジーでやるとたぶんうまくいくんだと思われています。

[質問]
爆発する点とは、半径ゼロのインスタントンを考えているということですか?

[答え]
そういうことです。

それで、4 次元のコホモロジークラスっていうのは何かって言いますと、これは codimension 4 の部分空間です。

$$\begin{aligned} F_A \wedge F_A \ &: \ 4\text{ 次元のコホモロジー} \\ &\Longleftrightarrow \ \text{codim. } 4 \text{ の部分空間} \end{aligned} \tag{6.18}$$

というわけで、曲率が集中するような、singular な 4-form っていうのは要するに codimension 4 の多様体なわけです。もちろんこれは証明でもなんでもないんですけれど、

$$\text{singular 4-form} \Longrightarrow \text{codim. } 4 \text{ の部分空間} \tag{6.19}$$

話が散漫になってきたので、一応ここで切ります。

[質問]

曲率が発散する点が有限個になるっていうのはわかるんですか? 発散するのは点の上ということですが、モノポールみたいなものはないのですか?

[答え]
ゼロ次元と離散的というのとはやっぱりギャップがあるんですが、有限個になるというのは証明することが出来て、早い話が曲率が集中するというのはそこに粒子が1個あるわけなんですね。そうすると粒子の数というのは総和として決まっていますので、有限個なんですね。

[質問]
半径ゼロのインスタントンを無限個つなげようとしてもつながらないということですね。

[答え]
無限個つなげようとすると質量が無限にいるということです。もともと出発点は質量が有限なんですけど、1回爆発するたびに粒子1個ぶん質量を持っていくわけですね。そうすると有限回しか爆発できないわけです。だから有限なんです。

$$\int \| F_{A_i} \|^2 \ < \ C$$
$$S \text{ の数} \leq C \ / \ 1 \text{ 個ぶんの mass} \tag{6.20}$$

7 Donaldsonのアイディア

モジュライ空間の使い方としてDonaldsonのアイディアを述べます。モジュライ空間を使って不変量をつくる。topological field theory のアイディアなんですけど、そのアイディアを説明したいと思います。

topological field theory で invariant を作る

成功しているのは今まで二つの場合しかなくて、まぁ Seiberg-Witten なんかももう一つかもしれないけど、一つは

$$\left\{ F_A^+ = 0 \right\} / \text{ゲージ変換}$$

もう一つはRiemann面Σの複素構造とφのペアを持ってきて、φは holomorphic。

$$\{(\varphi, \Sigma) | \varphi \text{ は holo.}\} / \mathit{Diff}(\Sigma)$$
$$\varphi : \Sigma \to M$$

それをΣの diffeo. で割る。今んとこ、この二つしかないわけです。今の二つで、セッティングとして何をやったかというと、

$$\{\text{微分方程式の解}\} / \text{ゲージ変換群} \ \leftarrow \ \text{有限次元}$$
$$\text{これを使って invariant が出来る} \tag{7.1}$$

モジュライを使ってinvariantが出来るわけです。これがどういうことかって事をちょっとお話ししたいんですけれど、

$$\mathcal{X} = \{\text{条件なし}\}/\text{ゲージ変換} \leftarrow \infty\text{次元空間}$$
$$\{\text{接続全体}\}/\text{ゲージ変換} \tag{7.2}$$

$$\mathcal{X}\text{のコホモロジーはゲージ変換群がわかればわかる} \tag{7.3}$$

これっていうのはトポロジーの問題で、わりとわかりやすい。

topological field theory のオブザーバブルというのがこいつのコホモロジーのクラスです。

$$\mathcal{X}\ \text{の上のコホモロジー数 (微分形式)}$$
$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_k \tag{7.4}$$

こういうのが今考えている topological field theory の オブザーバブルです。その後何をやるかというと、こいつらを モジュライ空間で積分します。

$$\int \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_k = \langle \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k \rangle \tag{7.5}$$
$$\text{が面白い invariant}$$

この積分が出来ると面白いinvariantが出来るというのがDonaldson の言ったことです。何が面白いのかというと非線形なところを本質的に使っているわけです。

それで、これで全部終わったかと言うとそうではなくて、デリケートなところがあるんですけど、それを説明します。

$$\mathcal{M} \in \mathcal{X}\ , \qquad \mathcal{M}:\ \text{微分方程式の解} \tag{7.6}$$

微分方程式 :

$$F_A^+ = 0 \longleftarrow\ M\ \text{の metric}\ g_M \tag{7.7}$$
$$\overline{\partial}\varphi = 0 \longleftarrow\ M\ \text{上の複素構造}\ J_M \tag{7.8}$$
$$\varphi : \Sigma \ \rightarrow\ M \tag{7.9}$$

微分方程式はメトリックを変えると変わって、モジュライ空間も変わるわけですけども、(7.5) の数はメトリックに依らないわけです。

証明)

二つの計量 $g_m^0\ g_m^1$ を考える。これらは、g_m^t [0 - 1] の端点での値とする。すると、各tごとに微分方程式が出来る。よって各tごとにモジュライ空間が出来る。全てのtについて足して下式 (7.10) で定義する (図 19)。

$$\mathcal{M}_t(\text{各}\ t\ \text{ごと})$$
$$\bigcup_{t=0} \mathcal{M}_t = \widehat{\mathcal{M}} \tag{7.10}$$

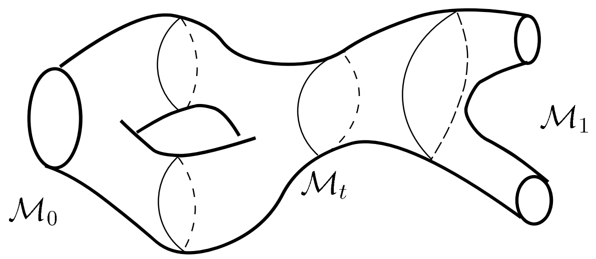

図 19:

すると、コホモロジーの定義より

$$\int_{\widehat{\mathcal{M}}} d\left(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_k\right) = 0 \tag{7.11}$$

Stokes の定理を使って、

$$\int_{\partial\widehat{\mathcal{M}}} \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_k = 0 \tag{7.12}$$

$\widehat{\mathcal{M}}$ の境界は

$$\partial\widehat{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_0 \tag{7.13}$$

のように表されるので

$$\int_{\mathcal{M}_1} \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_k - \int_{\mathcal{M}_0} \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_k = 0 \tag{7.14}$$

証明終り)

こういう方法は何にでも大体使えて、微分方程式を連続に動かしていった場合、この積分は一定になるわけです。トポロジカルというのはこういう意味です。これで大体良いように思えますが、実はデリケートな問題 (微分方程式のモジュライの compact 化等) を含んでいます。これからその話をしたいと思います。

この証明は簡単なので、うまく生かしたいのだけれど何が起こると困るかという話をしたいと思います。

例として J_M を考えます。それは何だったのかというと

$$\begin{gathered} \varphi : \Sigma \rightarrow M\,, \qquad \varphi \text{は holomorphic} \\ \Sigma\text{上の complex structure } J_\Sigma\,, \quad J_M^2 = 1 \end{gathered} \tag{7.15}$$

です。そして、φ を動かすわけです。するとそれから誘導される微分方程式が変化していきます。するとさっきの話はこういうことをいっています。

$$\int_{\mathcal{M}(M,J_M^0)} \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k = \int_{\mathcal{M}(M,J_M^1)} \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \tag{7.16}$$

(Gromov-Witten invariant、トポロジカル シグマ モデル の分配関数)
ここで J_M は almost complex structure で、これは本当は大事なんですけど。
しかし、一般にはこれはウソです。χ というものは

$$\chi = \frac{\{(J_\Sigma, \varphi)\}}{\mathit{Diff}(\Sigma)} \tag{7.17}$$

で定義されています。χ のコホモロジーは多様体 M のコホモロジーと Σ の複素構造のモジュライのコホモロジーから出来てます。それを mix したようなものが、α に対応してそれを積分したものが、Gromov-Witten invariant (coupled gravity) です。これを単に almost complex structure の不変量と思ってはいけないというのが、Gromov がこういうのをやり始めたころからあったわけです。Witten は経路積分でこれを出したわけですが、経路積分ではこの議論は見えづらいので、あえてここで説明したいと思います。

どういうことかというと... 例え話をします。(7.16) は微分方程式の解の数を数えたようなもんですが。次のような微分方程式を考えます。

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} = X\,, \qquad & X \;:\; S^2\text{上のベクトル場} \\ & l \;:\; S^2\text{上の座標}\,,\quad l(-\infty) = p,\; l(+\infty) = q \end{aligned} \tag{7.18}$$

すると、この方程式の解のモジュライは大体 S^1 です。そしてさっきと同じような話をしたいわけです。

[質問]
S^1 っていうのは赤道の所を通るということですか?

[答え]
そうです。
さっきのアナロジーでいうとベクトル場を動かしていっても S^1 という形は変わらないということです。

ここで次のような X_0 (図 20) と X_1 (図 21) を考えます。そして X_0 から X_1 まで連続的に繋げるわけです。

$$\begin{aligned} & X_0 \quad \Longrightarrow \quad X_1 \\ & \varepsilon X_1 + (1-\varepsilon) X_0 \qquad (0 \le \varepsilon \le 1) \end{aligned} \tag{7.19}$$

すると何が起こるかというと、何かおかしいわけです。$\varepsilon = 1$ のとき、

$$\frac{dl}{dt} = X_1 \qquad l(-\infty) = p, \quad l(+\infty) = q \tag{7.20}$$

となり、これには解がないんですね。おかしい所というのは最初解があったのに、連続的に変形していって最後は解がなくなってしまったことです。ここで何が起こったのか考え

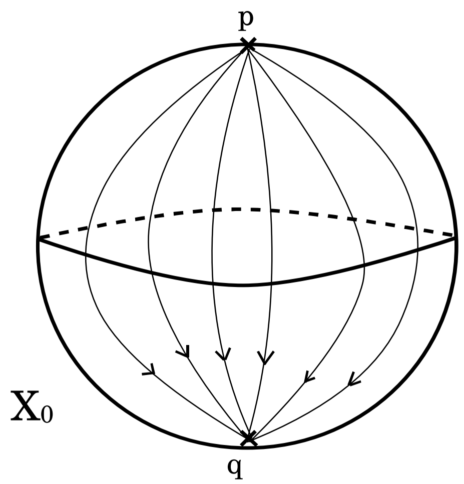

図 20:

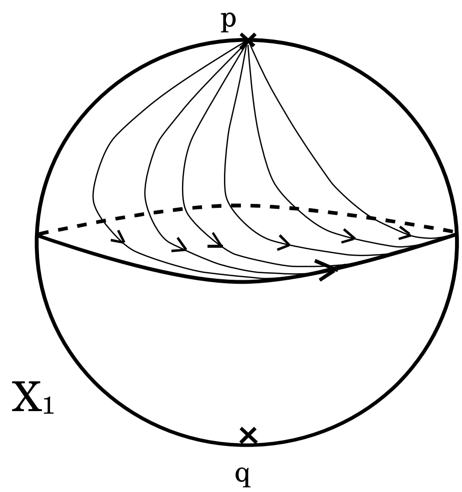

図 21:

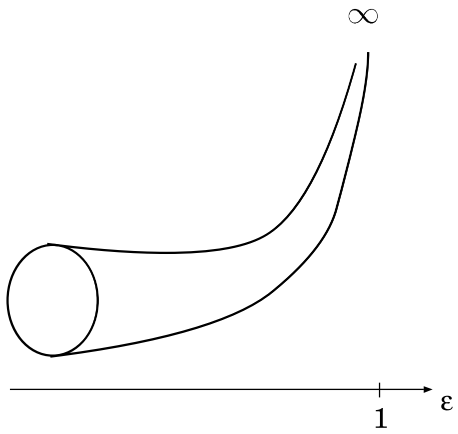

図 22:

ます。モジュライ空間を見ると、ある瞬間にグゥンとこうなるわけです (図 22)。北極 (p) から南極 (q) まで行くのにだんだん時間がかかり、ある瞬間に南極につかなくなるわけです。

で、何をやらなくちゃいけないかというと、こういうことが起きることを排除することです。これはモジュライ空間を compact 化するということです。どうやってこれを実行するかというと、f を l の高さと定義して $X_0 f < 0$ という条件をおくと、実際に排除している (ちゃんと南極につく) ことを証明できます。

こういう f があるような範囲で摂動すると解がつながって、図 22 のようなことは起きません。

ここで例え話を終り

$$\varphi \ : \Sigma \longrightarrow M$$

にもどる。

8 Symplectic structure

symplectic structure って何かと言いますと、定義は簡単で 外微分がゼロである非退化な 2-form です。

$$d\omega = 0 \qquad \omega \text{ は 2-form} \tag{8.1}$$

そうするとですね、J_M と ω というのが仲がいいとですね、こういうことが言えます。
S^1 があってですね、こっちにも S^1 があってこうなってるとします (図 23)。

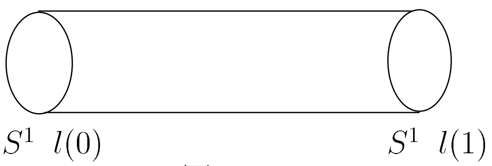

図 23:

$$\varphi \ : S^1 \times [0,1] \ \longrightarrow M \tag{8.2}$$

φ は holomorphic です。そして, これは定義にしてもいいんですが、J_M と ω が compatible (J_M は ω tame) である。あんまりまぁ言葉はどうでもいいんですが、これはどういうことかと言いますと、(8.2) (図 23) のような状況でですね、ここに φ があるんですが、

$$\int \varphi^* \omega > 0 \tag{8.3}$$

というのが、tame の定義です。
Kähler 多様体ってのをご存知の方は Kähler 多様体だとすると、Kähler form というのが ω です。ただの J_M ではなく、こういう ω が必要なんです。
(8.3) はエネルギーみたいなもんですけど ...

[質問]
今 Kähler と言ってるのは ...

[答え]
Riemann 面は Kähler です。M は違います。M は単に almost complex structure があるだけです。

[質問]
almost っていうのは、あっていいんですか?

[答え]

いや、M は almost でもいいんですけど、ω と J_M の関係は必要で、

$$\omega(JX, X) > 0 \tag{8.4}$$

こういうことです。

(8.3) が大事なんです。これがエネルギーみたいなもんで、さっき f というのがありましたがあの f というのはエネルギーみたいなもんで、エネルギーだから一様に流れていくんですけど (8.3) は何を言っているかというと、さっきの例え話でいうと、何が同じかっていうと、

$$f(l(1)) \; - \; f(l(0)) \; > 0 \tag{8.5}$$

という条件に対応してます。さっきと違うのは、さっきは有限次元の空間で、S^2 で話しましたけど、今度はループ空間でやる、2 次元面の作る無限次元の空間を考えてるわけです。けれどもアナロジー (8.5) があって、似た状況であるわけです。これから何が分かるかというと、さっきの周期軌道みたいなのが、こうぐるぐるまわっていく、おなじところをぐる

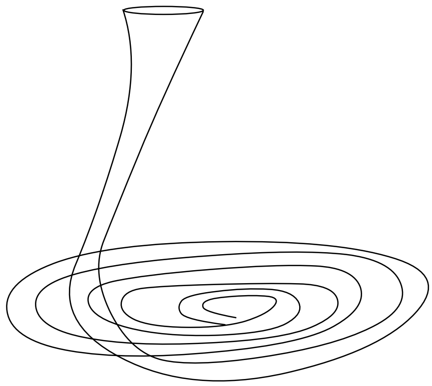

図 24:

ぐるまわって果てしなく伸びる、こういうことが起きないことが分かるわけです。さっきは線 1 本がぐるぐるぐるぐる周期軌道をまわってて、それが無限の長さになってしまって途中でぶち切れたわけです。今度は円筒みたいなのがぐるぐるぐるまわって、だんだんだんだん長くなってそれ自体が無限に飛んでっちゃうようなことが当然起こり得るんですけど、(8.5) という条件があると、そういうのを起こすには無限のエネルギーが必要なので起こらないわけです。そうすると、ちゃんと言ってなかったけれども、モジュライ空間のエネルギーを有限なやつ ($\int \varphi^*\omega < \mathrm{const.}$) に限っておくと、こういうことが起こらないわけです。

さっきはインスタントン数を有限に限っておくと言いましたが、今度はエネルギーが有限な、有界な φ だけに限ると、$\int \varphi^*\omega < \mathrm{const.}$ の不等式から、途中で無限回巻いてしまって compact 化しようとするのに非常におかしなことがおきてしまう、そういうことが起きない。図 24 のようなことが起きるのはモジュライ空間が noncompact になるということですが、これとまったく同じ事情で、symplectic structure を決めて、(8.4) を満たすような複素

構造 J_M を取ってくるとエネルギーが発散しなくなって、それを使ってやると Donaldson 理論が正当化できます。

$$『\int_M \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \text{が tame な } J_M \text{の範囲では } J_M \text{に依らない。}』 \tag{8.6}$$

実は tame でないところまで J_M を動かしてしまうと (8.6) の積分が J_M に依ってしまうという例がつくれてしまいます。

Gromov が Gromov-Witten 不変量を出したときに、ここが非常にキーポイントです。作った不変量が何の不変量かというと、almost complex structure の不変量と思っちゃいけなくて、symplectic structure の不変量です。ω を与えたときに決まる量だということ大事ですね。実は almost complex structure の連続変形に対する不変量というのは、作ってもあんまりうれしくないんです。なぜかというと、ほんとの complex structure は難しいんですけど、積分可能なやつを作るのは難しいんですけど、almost complex structure っていうのはある意味やさしい対象で、あれは単にテンソルが 1 個あるだけなので、連続変形に対する不変量を作るのに、非線形の難しいものを導入しなくても調べようがあるわけです。

もう 1 回言いますと、almost complex structure の連続変形不変量を作りたいという願望はあまりなくって、なぜないかというと、自乗して -1 になるようなテンソルがどれくらいあるかという問題はそんなに難しくないわけです。それはわかるわけです。それの連続不変量で決ってしまうような不変量っていうのはあまり深い不変量でないわけです。だけども、symplectic structure の不変量となると話は違ってきまして、これ (8.1)、やっぱりこれ微分方程式なんですね、これ。微分方程式を満たすような非退化な ω っていうのがどれくらいあるか、非退化なものをどれくらいつなげるかというのは難しい問題なんです。almost complex structure の方程式は $J^2 = -1$ だから代数方程式なわけですね。これはやさしいわけです。この方程式 (8.1) はそれなりに深みがあるわけです。そういうわけで symplectic structure の不変量というのは深くて、本当に幾何の難しいところをつかまえているわけです。じゃあどうして almost complex structure の不変量ではないのかということをつきつめて考えてみましょう。だいたいの議論は almost complex structure でうまくいっちゃうんです。例えばラグランジアンは almost structure で書けるんです。経路積分にしても書ける。どこでだめになるのかというと、今言った compact 化の議論でだめになる。だからあんまりばかにしてはだめで、ちゃんと押える必要がある。ただし、ふつうに Gromov-Witten 不変量とかやるときにあまりこういうことを気にしなくていいのは、だいたい出てくるのが Kähler 多様体で、J と ω がセットになって出てきちゃうのであまり注意をひかないんですけど、symplectic geometry をやってると ω の不変量というのはすごく重要になります。

9 Wall crossing

wall crossing というのは何かというと、やっぱりだめになっちゃう例です。Donaldson のもとの例でやってもいいんですけどデリケートになるのでもう少しやさしい例をやりま

す。やさしい例というのは open topological string です。一番やさしいやつなんですが、

$$\mathbf{C}^n \supset L_i \quad (L_i \simeq \mathbf{R}^n\,; i = 1 \sim k) \tag{9.1}$$

$$\omega = \sum dz_i \wedge d\overline{z}_i\,, \quad L_i\,|_\omega = 0 \tag{9.2}$$

ω を L_i に制限すると全部ゼロになります。こういうのを Lagrangian submanifold と言います。

$\mathbf{C}^n$ の中に $\mathbf{R}^n$ の壁が複数あって、そこに 2 次元の膜を張ります (図 25)。

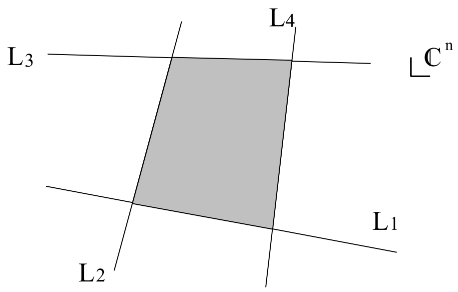

図 25:

$$\varphi\,: D^2 \longrightarrow \mathbf{C}^n \quad (\varphi \text{ は holomorphic}) \tag{9.3}$$

張る膜が φ です。 φ は正則関数です。モジュライ空間の定義はこうです。

$$\{\,\varphi\,|\,\varphi(\partial D^2)\ \subset\ L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_k\} = \mathcal{M}(L_1, \cdots, L_k) \tag{9.4}$$

モジュライ空間 $\mathcal{M}$ の次元があるんですけど、これはうまくとるとゼロ次元に出来ます。ゼロ次元にするには L_i をずらせばいいです。それで問題は何かというと、さっきの Donaldson 理論とのアナロジーで、wall crossing の一番見やすい例というのはこいつ (9.4) の数です。この集合の数を数えて、その数が L たちを動かしたときに一定か? こういうことを問題にしたい。これの数というのはたぶん一番やさしい場合の topological open string の相関関数です。L たちはたぶん D-brane と思うといいと思うんですが、D-brane を動かしたときにはたして state の数がジャンプするのかということですが、ジャンプするんです。それをこれから説明します。

Donaldson の議論が成り立つとすると、つまり compact 化がうまくいくとすると、この数は一定なはずです。

$$\mathcal{M}(L_1(t), \cdots, L_k(t)) \equiv \mathcal{M}_t \tag{9.5}$$

この絵 (図 26) がはたして何を言ってるかというと、多様体には向きがあるので、数えるときに符合をつけます。t を動かしていくと、左で +1 、右で +1。ここでは (あ) プラスとマイナスがキャンセルする。 これでうまくいくというのが Donaldson 理論の雛型です。

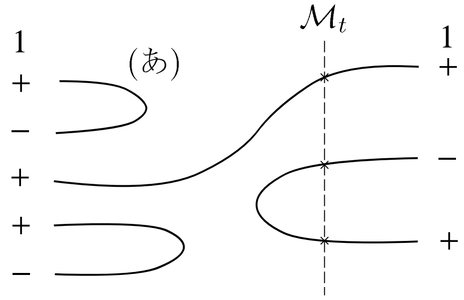

図 26:

[質問]
符合はどう決めるんですか?

[答え]
本当はそこんとこごまかしているんですが、多様体には向きがあるんですね。符合をどうやって決めるかというのは難しい問題なんですけど、今はふれません。(あ) のキャンセルするところで 符合の和をゼロにするような符合の決めかたがありますというのは証明を要することなんですけど、それは出来ます。

それで、さっきまずいと言ったのは何かというと、無限遠に飛んじゃう、こんな話ですね。

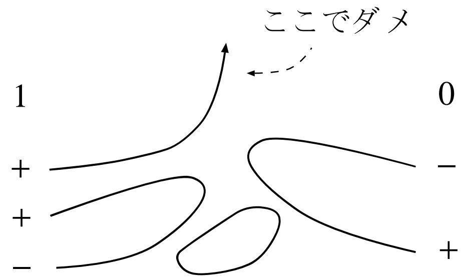

図 27:

こう飛んじゃうと数が合わないですね (図 27)。左で 1 で右でゼロ。ここで駄目になりますね。 これがさっきの話です。モジュライが compact にならないで無限大に飛んでっちゃうものがあるから、左と右で数が合わないわけです。

次に話すのは、これと似ている同じように見える現象ですが、実は違う話です。こう、止まるんですね。有限のところで止まっちゃう (図 28)。

さて、$n = 1$ のときを考えましょう。$\mathbf{C}$ の中に線が 4 本あるとします (図 29)。L_4 を動かしましょう。((9.3), $n = 1$) を満たすものいくつあるかを勘定すると、1 個です。Riemann の写像定理[4] ですか。これ動かしますね。どこで何が起こるかというと、まずこうなります

[4] D を z 平面上にある単一連結領域とし、その境界は連続体からなるものとすれば、D を w 平面上の単位円の内部 $| w |< 1$ に等角に写像することが出来る。

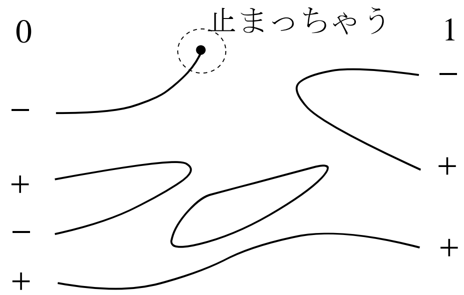

図 28:

(図 31)。次でこうなります (図 33)。これは駄目なんですね。これは無いですね。ゼロ個。図 29 から連続に動かしていくと、図 31 にぱっとなっちゃう。これ無限遠に飛んでくっていう絵 (図 27) でなくて、さっきの絵のように描くと、有限でとまります (図 28)。エネルギー有限です。

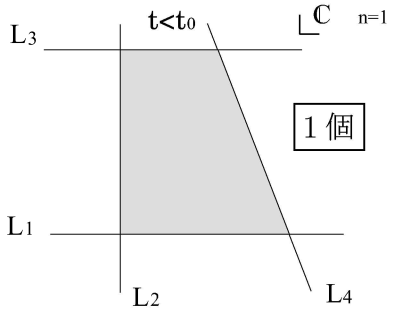

図 29:

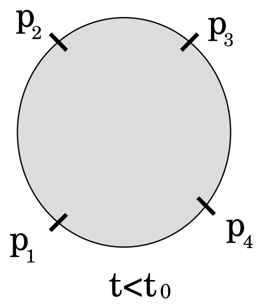

図 30:

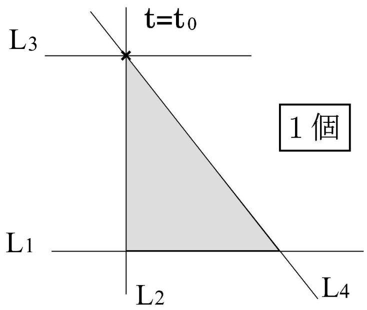

図 31:

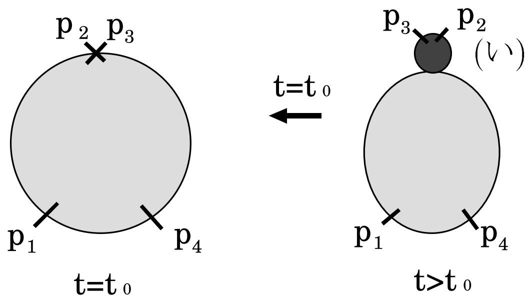

図 32:

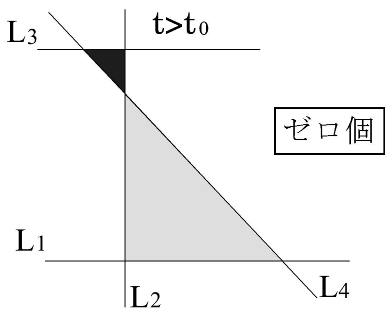

図 33:

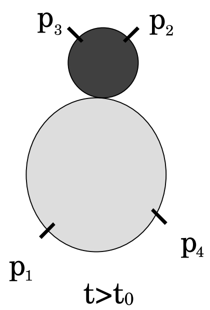

図 34:

ここで何が起こってるか見たいわけです。この場合は説明がありまして、どうなっているかというと、

$$\varphi\ : p_i \longrightarrow\ L_i \cap L_{i+1} \tag{9.6}$$

D^2 がこうありまして、点が 4 つある。それで、図 31 の瞬間を $t = t_0$ とします。t を t_0 に近づけていきますと、p_3 が p_2 に近づいていきます。Riemann 面のモジュライで、これが近づくというのはどういうことかといいますと、極限でどうなっちゃうかといいますと、こうなっちゃいます (図 32)。図 31、図 32 をよくよく見てみますと、図 32 の (い) がつぶれてます。 (い) がつぶれているところということが、 Riemann 面のモジュライの立場で言えます。

そうすると不思議なことに、ここで止まるわけです。これはなぜかということをよくよく考えますと、開いた Riemann 面のモジュライってのは Riemann 面のモジュライではあまりやらないんですけど、ちょっと、げてものっぽくって。図 34 は開いた Riemann 面のモジュライの境界につきます。もう一回言いますと、

$$\{D^2 \text{と} \partial D^2 \text{上の 4 点}\} \tag{9.7}$$

こういうモジュライを考えますと、これはじつは開区間ですね。$[0,1)$ みたいなものです。だから compact 化するには、図 34 を付け加えなきゃいけない。そうすると閉区間 $[0,1]$ になります。図 34 はこの閉区間の境界になっています。境界の点というのは、そこまで行くと止まっちゃって、そこから先には行けないわけです。だから止まっちゃうわけです。これがこの絵の説明です。これは一般に起こる現象で、開いた弦のこういうやつをモジュライパラメータつきで考えてやるとこういうことが起きて、どこかで数がジャンプする。それはたぶん起こることです。

で、Donaldson がつくったのはもっと別な例です。モジュライ空間が閉じた多様体にならずに広がった多様体になってしまうとだめなわけですね。Donaldson がつくった例っていうのを一番単純に言ってやるとこういうことです。S^2 を S^1 で割るんですが、そうする

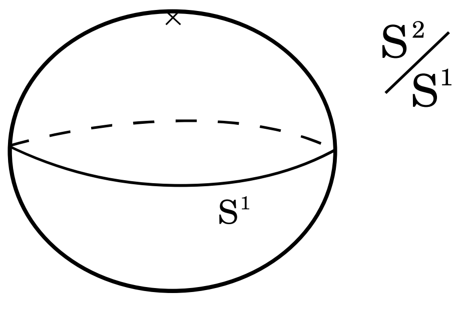

図 35:

とこれは閉区間にみえるんですが、極がいやなんですね。ここは実は S^1 の自己同型が残ってる点なんです。そういうとこは S^2/S^1 では境界の点になります。そうするとまったく同じ理由で、連続的に動いてくると、極に来た瞬間に解が止まってしまってここから先に進めないわけです。図 28 と同じわけです。そういうところで解が止まって、答えがジャンプ

してしまって、あの Donaldson の well defindness の証明が破綻するわけです。これが wall crossing と呼ばれている現象です。

自己同型で S^1 が残るゲージ理論というのはある意味で可換ゲージ理論で、可換の場合はホモロジーで分かるので、そのわかるところを計算したりします。

[質問]
自己同型が残る点があるとどうなるんですか?

[答え]
Donaldson 不変量が Riemann 計量に依ってしまって、不変量でもなんでもなくなってしまうわけです。そういうことは Seiberg-Witten 理論でも起こります。

10 最後に ...

ここまで出てきたのは

$$\begin{aligned} d_A d_A &= 0 \\ \overline{\partial}\,\overline{\partial} &= 0 \end{aligned} \tag{10.1}$$

$$dA + A \wedge A = 0 \quad A \text{ について非線形項は 2 次} \tag{10.2}$$

という方程式ですが, これからちょっとお話ししたいのは、3 次以上の非線形項が出てくる方程式っていうのはどうやってつくるのかということです。

非線形項が 2 次というのはいろんな意味がありまして、例えば平坦接続の方程式のモジュライを考えますと、特異点というのはだいたい 2 次式になります。そういうことに関係あります。(10.1) のような式のモジュライを考えている限りは 2 次式で済みます。

3 次以上の式をどうやってつくるかということですが、単純に (10.1) に 3 次の項を加えてもだめですね。

$$dA + A \wedge A + A \wedge A \wedge A = 0$$
$$\nwarrow \text{3-form}$$

こういう方程式は許されないんです。A は 1-form だから dA は 2-form、$A \wedge A$ も 2-form なのに $A \wedge A \wedge A$ は 3-form だから、出しようがないわけです。

de-Rham コホモロジーを量子化して量子コホモロジーにすると、まず次数がまるまっちゃうわけですね。次数がまるまっちゃうってどういうことかって言うと、

$$\Lambda^0 \ \rightarrow\ \Lambda^1 \ \rightarrow\ \Lambda^2 \ \rightarrow \cdots \tag{10.3}$$

$$\text{de-Rham complex :} \quad d^2 = 0 \tag{10.4}$$

$$\begin{aligned} d_A \equiv d + A \qquad & d \text{ を } A \text{ だけずらす} \\ & d_A^2 = 0 \end{aligned} \tag{10.5}$$

これが de-Rham コホモロジーの deformation を表している方程式です。これをもうちょっと考え直そうというわけです。A が 1-form である限り、deform の次数をまじめにあわせようとするとまるめなきゃいけないわけです。

$$\Lambda^{odd} \rightleftharpoons \Lambda^{even} \tag{10.6}$$

普通のコホモロジーではコホモロジーの次数がいくつかというのは決まってるわけですけど、量子コホモロジーになっちゃうと、ある状況では次数の決め方が自然数のオーダーではなくて少し狂ってしまいます。

(10.6) で deform します。どうやるかというと、

$$d \ \to d + A \tag{10.7}$$

ここで A は 1-form じゃなくて一般の odd の form とします。

[質問]

A は無限個の odd form の直和ですか?

[答え]

だいたいそう思っていいです。今有限次元の多様体を考えているから有限次までですけど、無限次のものを考える場合もあります。

この (10.6) をどうやって deform するかというと、安直に考えるとこうです。

$$\begin{aligned} (d+A)(u) \ &= \ du + A \wedge u \\ (d+A)^2 = 0 \iff & \ dA + A \wedge A = 0 \end{aligned} \tag{10.8}$$

これではまだだめです。(10.7) では何をやってるかというと、外微分というオペレーター d を変形してるんですけど、微分形式の掛け算という操作だけ使って変形しているわけです。これは 2 次の操作です。これを高次コホモロジーを使うという目的に合わせて変えます。

Lie 環の一般化なんですが、

$$\begin{aligned} L^{\infty}\text{-algebra} \qquad & m_k \ (k = 1, 2, 3, \cdots) \\ m_k(u_1, \cdots, u_k) \ , \quad & m_1 = d, \ m_2 = [\ ,\ ] \end{aligned} \tag{10.9}$$

と、定義します。m_k というのは u_1 から u_k を k 個の変数とするもので、どう思っていただけばいいかというと、m_1 は外微分、m_2 というのは Lie 括弧です。全部合わせるとこういう式になります。

$$\sum_l \sum_{\sigma \in S_n} m_l(u_{\sigma(1)}, \cdots, u_{\sigma(l-1)}) \, m_{n-l+1}(u_{\sigma(l)}, \cdots, u_{\sigma(n)}) \ = 0 \tag{10.10}$$

S_n : n 次の置換群

[質問]

m_3 以上はどうなっているのですか?

[答え]
m_1、m_2 は (10.9) で決まるんですけど、m_3 以上は (10.10) から逐次的に決まります。

それでこれがどういうものかちょっと書いてみますと、

$$m_1\, m_1 \ = 0 \ \longleftrightarrow \ d^2 = 0\,, \quad n = 2 \tag{10.11}$$

$$m_2(u_1 m_2(u_2 u_3)) + m_2(u_2 m_2(u_3 u_1)) + m_2(u_3 m_2(u_1 u_2)) = 0 \tag{10.12}$$
$$n = 3 \quad (m_1 = 0 \text{ の時})$$

$m_1 = 0$ のとき、$n = 3$ の式は何かといいますと、m_2 を Lie 括弧と思うとこれは Jacobi identity ですね。

$$[u_1, [u_2, u_3]] + [u_2, [u_3, u_1]] + [u_3, [u_1, u_2]] = 0 \tag{10.13}$$
$$m_2 \equiv [\ ,\ ]$$

順番を全部勝手に動かして次数があうように u を合成するとゼロになります。要するにこれは何かというと、微分があって Jacobi があるような、そういうタイプの代数が含まれています。

これがあると何が出来るかというと、こういうことを考えます。さっき考えたのは Lie 環だけがあって、こういう式だったわけですね。

$$(d + A)(u) = du + [A, u] \tag{10.14}$$

今度は、a_i というのが Λ^i の元だとすると、

$$a \equiv \sum a^i\,, \qquad a^i \in \Lambda^i \tag{10.15}$$

どうやって deform を定義するかというと、

$$d_a = (d + a)(u) = du + \sum_{k \geq 2} m_k(a, \cdots, a, u) \tag{10.16}$$

これで非可換な項が出てくるんですが、これを d_a だと思う。そうすると、これを 2 回かけてゼロという式 $d_a^2 = 0$ をさっきの長~い式 (10.10) を使って書いてやると、いっぺんに見えてきて、

$$da + \sum m_k(a, \cdots, a) = 0 \tag{10.17}$$

もし m_3 から上がゼロだとすると、

$$da + [a, a] = 0 \tag{10.18}$$

これはもともとの式に戻ります。

こうやってやると高次の項が出てきて、実際に open string でこういうゲージ場が出てくるものはつくることが出来ます。まるめて高次コホモロジー H^k みたいなのを実際モジュライパラメータと考えることが出来て、a_i ってやつがモジュライパラメータになってます。こういうことの利点は 2 次じゃない方程式が同じような枠組ででてくることです。

これで終わります。

[質問]
コホモロジーを量子化するとはどういうことですか?

[答え]
簡単に言うと (図36)、左のように一点で交わっているのを数えるのが普通の交点理論で、普通のコホモロジーで扱うんですけど、右のように S^2 で interact していると考えるのが量子コホモロジーです。string のようにひろがったもので見ている。

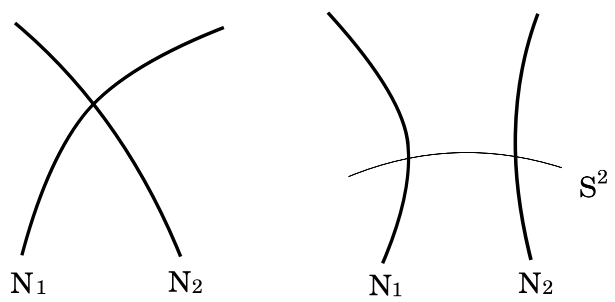

図 36:

[質問]
今までの話でいろんな方程式がでてきたんですが、物理では方程式のもつ物理的な意味を考えるわけですが、数学の方は同じように考えるんですか?

[答え]
やっぱり定理や方程式というのは、なんかやってみると最後には物理と対応があったというのがほとんどすべて今までの例なんで、なんかあるんでしょうね。さっきやった index theorem もそういうことなんですね。勝手に出した方程式なんかじゃ全然だめなんだと思いますね。Atiyah-Singer の指数定理というのはあって、最初 Atiyah と Singer が言い出したときっていうのは線形方程式で、例っていうのは 3 つしかなかった。de-Rham の方程式と Riemann 作用素と Dirac 作用素なんですけど、それから 10 年くらい全然新しい例はでなかった。ゲージ理論が出てきて新しい例が出てきて、最近では指数定理を非線形方程式につかうことは当り前になっている。それでそういうのはみんな素粒子の方から来てるから、そういう意味で指数定理みたいに、定理とか方程式いうのはやっぱりそういう何かがあると思います。

[質問]
一般的な質問ですが、物理というのは現実世界を記述しようと思っているんですが、数学というのはそういうことを目的にしてないにもかかわらず、あるとき同じことをやっていたということがあるのはなぜなんですか?

[答え]
なぜなんでしょうね? ぼくはよくわからないんですけども、逆に現実を記述するとしたら、やはり自然な方法というのはあまりなくって、わたしが覚えているのは Einstein があの方程式を出したときは、テンソルで座標共変な 2 階方程式で一番簡単なやつを持ってきたんでしょ? 数学者が何をやるかというと、これこれこういう思ったような性質をもつ方程式のなかで、一番易しいなものを調べる。あるいは対称性があるやつを考えて、その性質を調べる。そうすると物理学者の考えるのと同じになるんじゃないですか。Yang と Mills が Yang-Mills 汎関数をつくったときも、ゲージ不変でいいものはないかと探したわけですよね。数学者も、ゲージ変換はベクトル束の自己同型で、そのもとでよく振舞うテンソルを探そうと思えば、それはベクトル束の性質から決まるので、それでたどりついたのが同じ曲率だったわけですから、同じものにたどりつくべくしてたどりついたとも言えるのではないでしょうか。

[質問]
それでは、物理学者の夢と数学者の夢は同じと。

[答え]
そうなんでしょうね。空間概念の量子化とかいうのはやっぱり幾何学者の夢だと思うので ... (ちょっと照れながら)、それで、重力の量子化をやろうとすると幾何学の問題に行きつくというのはきっとそうだと思われるので ... 。(夢見るような目)

[質問]
今言った量子化というのはどういう意味ですか?

[答え]
いや一意味がわかるほどちゃんとよくわかってないので ... 。
(一同笑う)

幕