モジュライ空間とゲージ理論

　モジュライ空間とはある性質を満たす幾何学的対象の全体を図形とみなすことを言う．モジュライ空間の概念はリーマンに始まるもので，２０世紀の幾何学の発展の中核に位置する．小平邦彦はD.Spencerとともに，１９６０年代高次元の複素多様体のモジュライの理論（変形理論）を創始した．これは，リーマンによるリーマン面のモジュライ空間の理論の高次元化であり，現代的なモジュライの理論の始まりであった．小平らの研究は，モジュライの研究の次のような側面を明らかにした．第１に，モジュライ空間は，非線形方程式の解全体の集合に，ある同値類を入れたものと同様である．物理の言葉を使えば，この非線形方程式とは場の方程式であり，同値類とはゲージ変換で移りあうものを同一視することである．第２に，モジュライ空間の局所的な様子は，非線形方程式を線形化して得られる，線形微分方程式によって記述される．第３に，この線形微分方程式の解の様子は，コホモロジー論によって記述される．第４に，このコホモロジーの次元は，指数定理（小平の時代にはリーマンロッホの定理）によって記述される．小平らの研究の代数的な対応物は，グロタンディックやマムフォードなどの代数幾何学者によって研究された．小平らの研究は，局所理論（ある与えられた解を少し変形して得られる解のみを調べる）であったが，その後の発展では大域理論（すべての解の作る集合を調べる）も研究された．１９８０年代に，ドナルドソンらは，この小平らの研究のベクトル束に対する対応物をあたえた．すなわち，ヤン・ミルズ方程式の解のモジュライ理論である．うえに述べた，１・２・３・４の構想はほとんどそのまま受け継がれた．さらに，モジュライ空間上の交点理論による不変量の構成という，大切な視点が現れた．つぎに，ドナルドソンの理論のしばらく後に，グロモフは，シンプレクティック多様体への曲面からの正則写像のモジュライ空間の研究が，シンプレクティック多様体の大域的な性質を調べる有力な手段であることを見いだした．これは，後に，位相的な弦理論と等価であることがわかり，グロモフ・ウィッテン不変量の理論になった．このころになると，うえの１～４の枠組みでモジュライ空間を研究しその性質を多様体の大域幾何学に役立てるという方法は，数学に定着し，様々なモジュライ空間がこのやり方で研究された．このように無限次元の対称性（ゲージ対称性）を

もつ非線形方程式の解の研究は，数学特に幾何学で重要であるとともに，その中で生まれてきた多くの方法は，物理（数理物理）でも有用であることが期待される．この講演では，モジュライ空間とはなにか，それを調べるための上の１～４の基本的方法とは何か，さらに，モジュライ空間の研究のなかで，数学が編み出してきた諸方法について，その基本的な考え方を説明したい．具体的な応用も少しは述べたいが，むしろ方法・考え方の解説に重点を置く．コホモロジー等の数学的な概念は初歩から説明する．