１９９９年 三者若手 夏の学校

於：フェローズ イン 木島平

素粒子論パート 場の理論

「カイラルなゲージ理論の正則化」

講師 鈴木 博 氏 (茨城大学)

記 野村 大輔 石橋 真人 上杉 忠興 高柳 匡
浜中 真志 疋田 泰章 吉田 雄太

目 次

1 Introduction **2**

1.1 現象論 · · · 弱い相互作用 2

1.2 アノマリーとは？ 3

2 ベクトル的ゲージ理論での軸性アノマリー **4**

2.1 ベクトル的ゲージ理論 4

2.2 次元正則化によるアノマリーの計算 11

2.3 正則化に依らないアノマリーの計算 15

2.4 簡単なアノマリーの計算 17

3 カイラルゲージ理論でのアノマリー **18**

4 共変的正則化 **24**

5 カイラルゲージ理論でのフェルミオン数アノマリー **29**

6 Supersymmetry **30**

7 格子ゲージ理論におけるカイラルアノマリー **38**

1 Introduction

この講義のタイトルは「カイラルなゲージ理論の正則化」ということなのですが、まず最初にどういうことを念頭に置いてやるかということをイントロでちょっと触れて置きましょう。それでカイラルなゲージ理論ということなのですが、カイラルというのは、

$$\text{カイラル} : \gamma_5 \tag{1}$$

大雑把に言ってしまうとフェルミオンがゲージ場と γ_5 というマトリックスを通してカップリングしているという意味です。

1.1 現象論 $\cdots$ 弱い相互作用

現象論的には、弱い相互作用のもとで γ_5 を通したフェルミオンとのカップリングが発見されたわけです。もう少し別の言い方をすると、いわゆる標準模型 (ワインバーグ-サラム理論) ですが、

$$\text{標準模型、電弱相互作用} \tag{2}$$

この言い方ではいわゆる電弱相互作用というのがカイラルなカップリングを含みます。みなさん聞いたことはあると思いますが、この標準模型というのは

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1) \tag{3}$$

のゲージ理論なんですが、ゲージ場とここに出て来る構成要素は、

$$\text{ゲージ場} + \text{Weyl fermion}(+\text{Higgs}) \tag{4}$$

こういうのからできているのですけれども、この名前から分かるように、標準模型では、いわゆるゲージ対称性というのが非常に重要になります。そしてこのゲージ対称性というのがこの議論の consistency を縛っている大事な対称性になっています。一方でこの標準模型というのはもちろん場の理論ですから、場の理論というのはまた後で出て来ますが、一般には無限大 (発散) を含むので、発散を含む理論というのはそのままでは扱えないので、後で説明をしますけれども正則化ということをやることが途中段階で必要になるわけですが、そうしますと、今この理論というのは非常に高い対称性を持っているのでそれをなるべく保ちたいわけです。これはこの理論を特徴付けている対称性なのですが、しかし一方でこの理論は場の量子論なので、正則化というステップを踏まなければなりません。しかし実はあとで見ますけれども、この理論は Weyl fermion というのを含んでいるためにゲージアノマリーという現象が起こります。

$$\text{正則化} \longrightarrow \text{ゲージアノマリー} \tag{5}$$

ゲージアノマリーという現象が起きますと、後でやりますけれども、この正則化というステップがこのゲージ対称性を必ずしも保つことが出来ないということがわかっています。これはゲージ対称性を保ちたいのですが、その一方でこのゲージアノマリーという現象があるのでかならずしもそれはストレートではない、というようなことを今回の話では紹介したいと思います。さらにこの辺の関係がどうなっていて、この理論を見通しよく、なるべくゲージ対称性を保ったまま正則かするにはどうすればいいかというのを議論するのがこの講義の目的です。
この辺の話は、これがどういう風になされるかという話はだいたい７０年代までには分かっていた話でそれほど新しいということではないのですが、ただ７０年代までには分かっていたことというのは、いわゆる摂動論的に、つまりファインマンダイアグラムを使ってどうやって定式化するかということでした。むしろ現在の興味はそうではなくて、こういう理論を非摂動論的に定式化したり、そこから解析したりするにはどうしたらよいかということが現在の興味なんですけれども、非摂動論的というと一番代表的なのは格子ゲージ理論ですけれども、格子ゲージ理論でこういう Weyl Fermion を含んだ理論をどうやって定式化するかというのはいまだに大問題です。これは非常に難しい問題で、そういう問題を考えるのにも、まず摂動論的なこういうゲージアノマリーとか Regularization とかを知っておく必要があるので、そういうのに対するスターティングポイントということでやりたいと思います。今回はこれらについてはほとんど触れられないと思います。これが一つの目標です。

1.2　アノマリーとは？

スタンダードモデルを念頭に置いた Motivation を言いましたけれども、もうひとつはアノマリーという現象が場の量子論ではいろいろな所で出て来ますけれども、これについて慣れ親しんでもらおうというのがもう一つの目標です。素粒子論ですと至る所アノマリーが出て来るわけですね。例えば現象論的な立場で見ても、例えば新しいモデルを作るときにはこのアノマリーの考察というのは一番最初にやるステップなんです。それから、ストリングでもアノマリーというのは essential で、例えば２次元のストリングの世界面の上でのアノマリーの話もあるし、それからストリングがプロパゲートしている時空の意味でのアノマリー、この両方のアノマリーを考える必要があります。また、先ほど出て来た格子の話をやる際にも、すくなくともフェルミオンを格子の上に乗せようとすると、やはりアノマリーというのが essensial であるということがよく知られています。ですから、どういうことを勉強していくにしろアノマリーというのは避けて通れないところなので、今回の講義ではその入口ぐらいを見てみようというのが目的です。
アノマリーというのは非常に広い subject で、アプローチにも２通りあります。１つのアプローチ

は場の理論的なアプローチで、これはファインマンダイアグラムを書いたりして場の理論的に計算するやり方です。もう１つのアプローチとしては、代数的または位相幾何学的なアプローチがあります。この２つのアプローチは両方とも重要ですが、この講義では、場の理論的なアプローチを重点的にやろうと思います。そして、位相幾何学的なアプローチについてはほとんど触れられないと思います。それからアノマリーと言ったときには、いろいろなところにアノマリーが出て来るのですが、実は大きく２つに分類できて、１つは γ_5 に関連したアノマリーで、これはいろんな名前がありましてカイラルアノマリーとか軸性 (axial) アノマリーとかこういう一連の名前がついているのがあります。こういうものの仲間として、ストリングの世界面の話ででてくるゴーストナンバーアノマリーというのもあります。重力場中で Weyl fermion があった場合には一般座標変換にもアノマリーがでて、こういうのを重力アノマリーというんですけれども、それもこのタイプのアノマリーです。こういうのが１つのアノマリーの手法です。もう１種類ありましてこれもいろんな呼び方があるんですが、トレースアノマリー、コンフォーマルアノマリー、Weyl アノマリーとか呼ばれるアノマリーがあります。こっちのアノマリーは、たとえば場の量子論のくりこみ群の β 関数の話とか、ストリングに出て来る Virasoro 代数などの話と密接な関係があります。こんな風にいろんなアノマリーがあるのですから今回の講義ではこれら全部はできないので、いわゆる γ_5 アノマリーをやります。しかも４次元に限ってやります。けれども、高次元のものや重力との相互作用が入っている場合でも同様に議論できます。
では本題に入ります。

2　ベクトル的ゲージ理論での軸性アノマリー

2.1　ベクトル的ゲージ理論

まずはじめに一番簡単なベクトル型ゲージ理論での軸性アノマリーの話をします。考える系はどういう系かというと、簡単のために質量がゼロの Dirac fermion を考えます。これは作用で書くと、

$$S = \int d^4x \bar{\Psi} i \not{D} \Psi \tag{6}$$

こんなやつです。D にスラッシュしたものはいわゆる共変微分というもので定義は、

$$\not{D} = \gamma^\mu D_\mu = \gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu) \tag{7}$$

で A_μ がゲージ場です。僕の Notation では、A_μ はゲージ coupling g とか群の generatorT_a をいれたもの

$$A_\mu = -igA^a_\mu T^a \tag{8}$$

を指しまして、以下ではこのように簡単に書くことにします。ベクトル的ゲージ理論というのはどういう意味かというと、フェルミオン Ψ とゲージ場が covariant derivative を通して couple しているのですが、この coupling が γ^5 を含んでいないものを言います。
γ 行列についてまとめておくと、γ 行列は 4 行 4 列の matrix で、

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \tag{9}$$

という代数を満たしています。ここでは metric の signature は、

$$g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1) \tag{10}$$

と置きます。それから γ^5 というのが後で出て来ますけれども、

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \frac{-i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma \tag{11}$$

と書けます。ここで ε というのはレビ-チビタ シンボルで、完全反対称で、

$$\varepsilon^{0123} = +1 \tag{12}$$

と置きます。γ^5 というのはおもしろい性質を持っていて、他の γ マトリックスすべてと交換します。

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \tag{13}$$

今の定義から従うことですけれども、

$$tr\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = -4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \tag{14}$$

となります。γmatrix の具体的表現を考えると、上の代数を満たす表現は無数に作れますが、ここではいわゆる「カイラル表示」というのを使うと次のようになります。

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{bmatrix}, \gamma^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

今からアノマリーとは何かを説明しますが、これは action の対称性と関係しています。どういう対称性かというと、いわゆるカイラル $U(1)$ 対称性というもので、この action は mass term をもっていないのでこういう対称性がこの action にあります。どういう対称性かというと、

$$\begin{array}{rcl} \Psi(x) & \to & e^{i\alpha\gamma_5}\Psi(x) \\ \bar{\Psi}(x) & \to & \bar{\Psi}(x)e^{i\alpha\gamma_5} \end{array} \tag{16}$$

こういう風に変換させると、先程の action はどういう風に変わるかというと、

$$S \to \int d^4x\bar{\Psi}(x)e^{i\alpha\gamma_5}i\gamma^\mu D_\mu \underline{e^{i\alpha\gamma_5}}\Psi(x) = S \tag{17}$$

ここでは、下線部の $e^{i\alpha\gamma_5}$ を $i\gamma^\mu D_\mu$ の前に持って来ました。先程強調したように、γ_5 は γ^μ と反交換するので、$e^{i\alpha\gamma_5}$ を前に持ってくると $e^{-i\alpha\gamma_5}$ となってもう一つの $e^{i\alpha\gamma_5}$ と cancel して、結局元に戻ってしまうわけです。このように何か変換しても作用が変わらないものを対称性と呼びます。

作用がこのような対称性を持っていることに対応して、古典論を考えるといわゆるネーターの定理というのがありますが、ネーターの定理というのは何だったかというと、ある連続変換のもとで作用が不変ならばそれに対応した保存 current があるというものなので、今 α というのは勝手なパラメータで連続的に変えられますから、これは保存するものがあるというわけです。どうやってそれを作るかというと、1 つのやり方は α は定数だったのですが、今 α を x に依存する local なパラメータに変えてやります。

$$\alpha \to \alpha(x) \tag{18}$$

そうしますとすぐに分かることは、先程の action は α が定数だった時に変換に対して不変だったわけですから、α を座標に depend したものに変えてやると、先程の action は不変にならず少しおつりが出ます。ところが定数だったらそのおつりは落ちます。ですから、そのおつりは次のような構造をしています。

$$\begin{aligned} S &\to S - \int d^4x \partial_\mu \alpha(x) j_5^\mu(x) \\ &= S + \int d^4x \alpha(x) \partial_\mu j_5^\mu(x) \end{aligned} \tag{19}$$

このように必ず α の微分という形になっています。ここで出て来る j_5^μ を Noether Current と言い、その具体型は実際計算してみると、

$$j_5^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi \tag{20}$$

という形をしています。

思いだして欲しいのですが、古典論での運動方程式、すなわちオイラーラグランジュ方程式というのは、action の変分をゼロにするものでした。今やったのは一種の action の変分なのですが、これから何が言えるかというと、運動方程式を課した時に上の action の変化分はゼロになっていなければならないので、運動方程式は古典論のもとで、

$$\partial_\mu j_5^\mu = 0 \tag{21}$$

となります。これが Noether の定理 (対称性があればそれに対応する保存則がある) です。

次に量子論でやりましょう。量子論でもいろいろなやり方があるのですが、path integral(経路積分) でやりましょう。

$$\int D\Psi D\bar{\Psi} \exp(iS) \tag{22}$$

先程の acttion を exp の肩にのせて、Ψ について積分してやれば量子論が作れるというのが経路積分ですが、この式を次のように変形します。

$$(22) = \int D(\Psi + i\alpha(x)\gamma_5\Psi)D(\bar{\Psi} + \bar{\Psi}i\alpha(x)\gamma_5) \times \exp i[S + \int d^4x\alpha(x)\partial_\mu j_5^\mu(x)] \tag{23}$$

上の式では、Ψ を全部一斉にカイラル変換をうけた後の変換で置換えています。積分変数は無限小変換で考えています。S についての置換えは古典論でやったものを使います。
今ここでは、path integral の measure が変換前後で不変だと仮定します。すなわち、

$$D(\Psi + i\alpha(x)\gamma_5\Psi)D(\bar{\Psi} + \bar{\Psi}i\alpha(x)\gamma_5) = D\Psi D\bar{\Psi} \tag{24}$$

仮定して何が分かるかというと、(24) を (23) に使うと、(22)=(23) は一つの恒等式を与えます。どういう恒等式かというと、(22) と (23) は、$S \to \int d^4x\alpha(x)\partial_\mu j_5^\mu$ にしても等しいことから、その違いの部分はゼロでなくてはならないということを示しています。従って、次式が成立します。

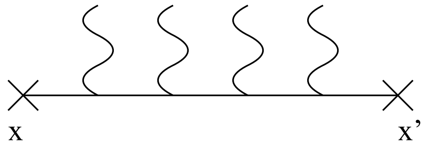
$$\int D\Psi D\bar{\Psi}\partial_\mu j_5^\mu(x)\exp(iS) = 0 \tag{25}$$

もしくは、上の式は path-integral の言葉で書いた真空のことですから、別の言葉でい言うと、

$$< \partial_\mu j_5^\mu(x) >= 0 \tag{26}$$

つまり何をやっているかというと、古典論ではカイラル対称性に対する Noether の定理から (21) という式ができたわけですが、量子論でも上のように考えてやれば古典論に対する式の真空期待値を取ったもの (26) が出てきます。
ここで問題なのは、(26) の右辺がゼロではなくなるというのがアノマリーです。それを見るためにはこういう形式的な議論だけではなくて、具体的に (23) を評価してやることが必要になります。そこで次に (26) が本当に成り立って」いるかをチェックしてみます。どうやるかというと、いろんなやり方がありますが、ここでは次のようにしましょう。
基本的に j_5^μ を構成して真空期待値をとります。そのためには fermion のプロパゲーターを求める必要があります。

$$< T\Psi(x)\bar{\Psi}(x') >= \frac{1}{\not{D}}\delta(x - x') \tag{27}$$



(28)

(27) を絵で書いたのが (28) ですが、フェルミオンが x' で作られて x で消えるというのがプロパゲーターに対応しているのですが、今は単にフェルミオンが飛んでいるだけでは無くて、飛んでいる間にゲージ場と相互作用していますから、途中に入っている波線はゲージ場を表します。そのゲージ場との相互作用まで含めて (27) の右辺のように共変微分の形で書いてやると (27) は (28) の形をすべて含んでいるということが分かります。

そこで、具体的に (27) を展開してみますと、

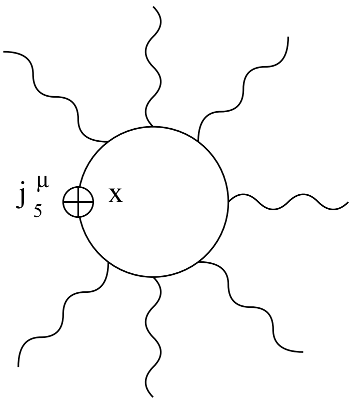
$$(27) = \frac{1}{\not{\partial} + \not{A}}\delta(x - x') \tag{29}$$

$\not{\partial}$ が自由なフェルミオンの部分で、$\not{A}$ がゲージ場との相互作用を表していますが、(23) のような絵に対応する式を書こうと思うと、(29) の $1/(\not{\partial} + \not{A})$ は等比級数の形をしていますから、$\not{A}$ について展開すると次のように書けます。

$$(29) = -i\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{-i\not{\partial}}i\not{A}\right)^n \frac{1}{-i\not{\partial}}\delta(x - x') \tag{30}$$

ここで、n 次項は (28) の図で、n 個のゲージ場が couple している分の寄与を表します。それで、こういうのを用意しておいて、やりたかった j_5^μ の真空期待値を計算すると、

$$\begin{aligned} < j_5^\mu(x) > &= < \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi(x) > \\ &= i\lim_{x'\to x}\mathrm{tr}\gamma^\mu\gamma_5\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{-i\not{\partial}}\not{A}\right)^n\frac{1}{-i\not{\partial}}\delta(x - x') \end{aligned} \tag{31}$$



(32)

$< \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi(x) >$ はフェルミオンについて bilinear で、同じ点でくっついていて、かつ、ゲージ場と相互作用していますから、絵で書くと (32) のようになります。そこで、この (32) の図は (28) の図の点 x 、x' をくっつけたものですから、(30) 式を用いると $< j_5^\mu >$ は (31) 式のようになります。

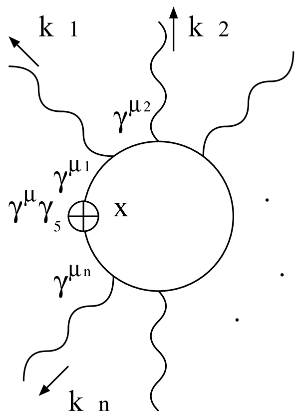
次に (31) を評価するには momentum space でやるのが簡単なので、フーリエ変換します。

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= \int \tfrac{d^4l}{(2\pi)^4}e^{-ikx}A_\mu(k) \\ \delta(x - x') &= \int \tfrac{d^4l}{(2\pi)^4}e^{-il(x-x')} \end{aligned} \tag{33}$$

(33) を (31) に代入して計算すればよいのですが、ここでは特に図 (32) で、n 本のゲージ場が couple したグラフからの寄与をとり出して考えます。それを $< j_5^\mu > |_n$ と書くと、

$$
\begin{aligned}
< j_5^\mu > |_n &= i \int \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{d^4 k_i}{(2\pi)^4} \right) e^{-i \sum_{i=1}^{n} k_i x} \\
&\times \ \mathrm{tr}(A_{\mu_1}(-k_1) \cdots A_{\mu_n}(-k_n)) \Gamma_5^{(n)\mu\mu_1\cdots\mu_n}(k_1, \cdots, k_n)
\end{aligned} \tag{34}
$$

ここで、$\Gamma_5^{(n)\mu\mu_1\cdots\mu_n}(k_1, \cdots, k_n)$ は図で書くと、次の図のようなものです。



(35)

上の図で、$\gamma^\mu \gamma_5$ はもともと axial current からくる vertex で、γ^{μ_i} はゲージ場が持つ momentum で、今中心から外向きに出ているとします。

これを式で書くと

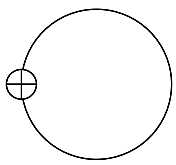
$$
\begin{aligned}
&\Gamma_5^{(n)\mu\mu_1\cdots\mu_n}(k_1, \cdots, k_n) \\
&= \int \frac{d^4 l}{i(2\pi)^4} \mathrm{tr} \left[i\gamma^\mu \gamma_5 \frac{1}{-\not{l}} (i\gamma^{\mu_1}) \frac{1}{-(\not{l} + \not{k}_1)} (i\gamma^{\mu_2}) \right. \\
&\qquad \left. \cdots (i\gamma^{\mu_n}) \frac{1}{-(\not{l} + \not{k}_1 + \cdots + \not{k}_n)} \right]
\end{aligned} \tag{36}
$$

上の式の構造は、フリーのプロパゲーターと vertex γ^{μ_i} の繰り返しで、図で言うとぐるりと一周しているので trace が入ってきて、ループ積分 $\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4}$ をしているという構造になっています。

だから、摂動論的には (36) を評価すればよいことが分かります。そこで、$n = 0, 1, 2 \cdots$ と具体的に計算してみることにします。

1) $n = 0$

$$
\Gamma_5^{(0)\mu} \ =
$$

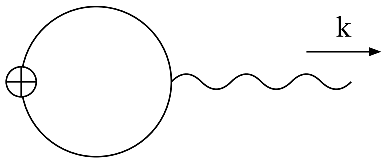


$$= \quad 0 \tag{37}$$

0 になることはすぐに分かります。大事なのは (36) が γ_5 を 1 つ含んでいて、大雑把には $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ tensor に比例します。$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ tensor には 4 つ足があるんだけれど、$\Gamma_5^{(0)\mu}$ は 1 つしか足がありません。そこで、3 つ足をつぶさなければいけないのですが、その 3 つの足をつぶす材料がここにありません。なぜかというと、上の図には外から momentum が入って来ないので、ただの定数だからです。そうするとゼロになるしかないという感じです。

2) $n = 1$

$$\Gamma_5^{(1)\mu\nu} \quad =$$

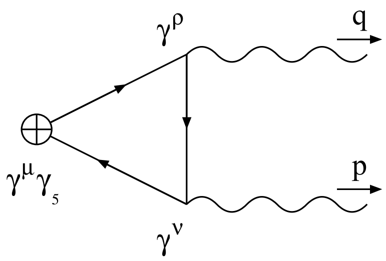


$$= \quad 0 \tag{38}$$

これも $n = 0$ の場合と同じ理由で $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ tensor の足をつぶす材料が k^μ だけでは足りないからです。$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}k^\rho k^\sigma$ に注意すれば分かるでしょう。

3) $n = 2$

$$\Gamma_5^{(1)\mu\nu\rho}(p,q) \quad =$$



$$= \int \frac{d^4l}{i(2\pi)^4}\mathrm{tr}\left[\frac{1}{-(\not{l}+\not{q})}(i\gamma^\mu\gamma_5)\frac{1}{-(\not{l}+\not{p})}(i\gamma^\nu)\frac{1}{-(\not{l})}(i\gamma^\rho)\right] \tag{39}$$

この $n = 2$ がゼロにならない non-trivial なグラフですが、この積分は実は発散しています。power counting をやってみればすく分かるのですが、被積分関数の分母に$\not{l}$が 3 個で、積分は 4 次元積分で、大雑把には、

$$\sim \int^\Lambda \frac{d^4l}{l^3} \tag{40}$$

という構造をしています。そして、$O(\Lambda)$ で発散しています。しかし、この積分が発散しているのはそもそも不思議なことではありません。というのは、この発散積分はどこからきているかというと、$\delta(x - x')$ からきていて、今ここでは $x' \to x$ に 1 点に近付いているからです。

無限大そのものを扱うのはどうしようもないことなので、最終的な結果は無限大になるにしても、途中の段階では何らかの方法で有限にして扱うのが、自然な仮定でしょう。そこで、1 つのやり方としては、Λ という cut off を入れるやり方ですが、別にもう一つの見通しのいい正則化があるので、ここでは、「次元正則化」という方法でやってみましょう。

2.2　次元正則化によるアノマリーの計算

次元正則化というのはどうやってやるかというと、奇妙なアイデアですが、もし (40) で、d^4l が $d^2l\,dl$ だったら発散していないという感じで、一般に $d^4l \to d^nl$ におきかえてやります。すなわち、(4 次元空間) $\to$ (n 次元空間) に解析接続してやります。つまり、(39) の例だと、$d^4l \to d^nl$ において、n 次元で計算してやって、4 次元にもっていってやります。そのようにしますと、いったん n 次元にいくと解析接続の意味で、(39) の積分は有限に定義できます。そこで、4 次元にもっていくと何が起こるかというと、$\varepsilon = (4-n)/2$ と定義したとき、元の積分が発散していたことから、$1/\varepsilon, 1/\varepsilon^2 \cdots$ といった pole が出てきます。これが次元正則化の特徴です。

それで、(39) の積分を有限に正則化できるのですが、やや微妙な点があります。それは、γ_5 の特殊性からきています。今、一般の n 次元でも

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \tag{41}$$

が成立していると仮定します。同様にして、

$$\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0 \quad \text{in } n \text{ dim} \tag{42}$$

としたいのですが、このように定義するとうまくいかないことが分かっています。というのは、今、(41)(42) 両方を仮定すると、実は次のような関係式が成立します。

$$\begin{aligned} &(n-4)\mathrm{tr}\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma = 0 \\ \longrightarrow\quad & n = 4 \quad \text{又は} \quad \mathrm{tr}\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma = 0 \end{aligned} \tag{43}$$

今我々は 4 次元から離れたわけだから、$\mathrm{tr}\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma = 0$ が成立します。ところが、これは困るわけです。というのも、少なくとも 4 次元では (9) 式が成立するわけで、今、n 次元になめらかに解析接続したいのですが、4 次元から離れたとたんに $\mathrm{tr}\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma$ はゼロになってしまいます。つまり、なめらかにつながっていないのでまずいのです。そこで、普通はどうするかというと悩ましいのですが、(42) はあきらめることにします。仕方がないので、

$$\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \tag{44}$$

を γ_5 の定義とします。そうすると少しややこしいことになって、

$$\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0 \quad (\mu = 0,1,2,3) \tag{45}$$

なのですが、μ がそれ以外だと、

$$[\gamma^\mu, \gamma_5] = 0 \quad (\text{それ以外}) \tag{46}$$

となってしまします。それでいろいろと変なことが起こります。

このことに注意してさっきの話に戻ります。もともと $j_5^\mu(x)$ の divergence がゼロになるかどうかを調べたかったので、それを計算すると、

$$\begin{aligned}
\partial_\mu < j_5^\mu > |_n &= -\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-i(p+q)x} \\
&\times \ tr(A_\nu(-p)A_\rho(-q)) \\
&\times \ i(p_\mu + q_\mu)\Gamma_5^{(2)\mu\nu\rho}(p,q)
\end{aligned} \tag{47}$$

$\Gamma_5^{(2)\mu\nu\rho}(p,q)$ について次元正則化をほどこしてやります。あまり細かいことはやりませんが、どこからへんてこなことが起こるかをお見せします。$\Gamma_5^{(2)\mu\nu\rho}(p,q)$ の中には、$\gamma_5\gamma^\mu$ というのが入っているので、

$$i(p_\mu + q_\mu) i\gamma^\mu\gamma_5 \tag{48}$$

こういう部分が計算の中に入ってきます。少し書き直してやると、

$$(48) = (\not{l} - \not{p})\gamma_5 - (\not{l} + \not{q})\gamma_5 \tag{49}$$

で、いま、n 次元空間で考えていて、γ_5 というのは (45) (46) といういやらしい性質があるので、n 次元空間ベクトル l を 4 次元の部分と $n-4$ 次元の部分に分けて書きます。すなわち、

$$\underbrace{l}_{n\,\text{次元}} = \underbrace{\underline{l}}_{4\,\text{次元}} + \underbrace{r}_{n-4\,\text{次元}} \tag{50}$$

すると、(45)(46) に注意すれば、

$$\begin{aligned}
(49) &= (\not{\underline{l}} + \not{r} - \not{p})\gamma_5 - (\not{l} + \not{q})\gamma_5 \\
&= \gamma_5(-\not{\underline{l}} + \not{r} - \not{p}) - (\not{l} + \not{q})\gamma_5
\end{aligned} \tag{51}$$

$-\not{\underline{l}}$ の符号に注意して下さい。p は外線なので、4 次元に保っておきます。

(質問) 今、4 次元から n 次元にもってきていて、最初は発散を避けるには n を 4 より小さい $n = 1, 2, \cdots$ くらいにすればよいということだったわけですが、l を 4 次元の部分と 4 次元より大きい部分に分けるとはどういう意味ですか。

(回答) 確かに分かりにくいところですが、一般の次元といったときに一般の n に拡張したいので、増やしておかなければいけないのです。それで、増やしておいた可能性まで含めないと解析接続にならないのです。それで、もし解析接続があったとすると、100 次元でも 200 次元でもつくれますから、そういうところまで考えておかないといけないのです。

今、(51) の$\hat{\not{l}}$の符号が素朴に考えたものと異なることに注意しましょう。こうなるのは、γ_5 が自然に解析接続できず、(46) 式のようなことが起きてしまっているためです。そこで、$\hat{\not{l}}$を素朴な部分に直しましょう。すると、

$$(51) = \gamma_5(-\bar{\not{l}} - \hat{\not{l}} - \not{p}) - (\not{l} + \not{q})\gamma_5 + \underline{2\gamma_5\hat{\not{l}}} \tag{52}$$

つまり、$\hat{\not{l}}$のへんてこな性質を慎重に考えると、(52) 式第三項 (下線部) のようなおつりが出てきてしまいます。そして、ここではやりませんけれども、実は素朴に出てくる部分、すなわち (52) 式の第一項と第二項はアノマリーに効かないことがすぐに分かります。そして、アノマリーにきくのは素朴には出てこないへんてこな (52) 式第三項です。したがって、この部分の寄与だけ書いてやりましょう。

$$\begin{aligned} & i(p_\mu + q_\mu)\Gamma_5^{(1)\mu\nu\rho}(p,q) \\ = & \int \frac{d^n l}{i(2\pi)^n} \mathrm{tr}\left[\frac{(\not{l} + \not{q})\underline{2\gamma_5\hat{\not{l}}}(-\not{l} - \not{p})\gamma^\nu \not{l}\gamma^\rho}{(l+q)^2(l-p)^2 l^2}\right] \end{aligned} \tag{53}$$

(53) 式の中の下線部が (52) の第三項からきたものです。そして、これは dimensional regularization のテクニックを使うとすぐ分かって、(ここでは、やりませんが) 答えは、

$$(52) \xrightarrow{n \to 4} -\frac{i}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\mu q_\sigma \tag{54}$$

恐ろしいことに答えはゼロではなくて有限値をとります。これはアノマリーがある、つまり保存則が破れていることを示しています。それからいろいろ奇妙なことがあって、まずさっき (39) の積分は発散積分だと言いました。ですから、これも発散しているはずなのです。しかし、いったん正則化して 4 次元に戻ってくると、答えは有限になっています。それが不思議なところです。それも後で述べますけれども、話をもとに戻して momentun space から real space に移って $\partial_\mu < j_5^\mu(x) > |_2$ を求めてやります。(54) 式を (47) 式に代入すると、結果は、

$$\partial_\mu < j_5^\mu > |_2 = \frac{1}{4\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma(x) \tag{55}$$

これが configuration space でみたアノマリーの形です。だから、これは古典的にはゼロですし、量子論にいっても素朴にはゼロになるはずなのですが、実際に今みたいに摂動的に計算してみると、何か知らないけれどもおつりが出てきます。しかも、このおつりにはいろいろ特徴的なことがあって、有限で発散がありません。

(質問) (52) 式の第一項、第二項からの寄与は実際にはどうなるのですか。

(回答) ここの部分は元の式に代入すると、第一項と第二項で cancel します。だからききません。ゼロになってしまいます。だから、(52) 式の第三項だけがへんてこなものを出すということが分かります。そして、(52) 式の第一項、第二項はもともと γ_5 のややこしい性質を全然考えないで出てくる部分で、一番最初に path integral で demonstrate したように、もしも素朴なことをやってしまうといつもアノマリーがでません。すなわち、(52) 式の第三項のような微妙なところからアノマリーはいつも出てきます。それから、アノマリーはいつも有限になります。この例でもすぐに見ることができて、(52) 式の第三項のうちの$\hat{\not{l}}$はもともと何であったかというと、$n-4$ 次元の部分で、これは、我々の住む 4 次元に行くとなくなってしまうものです。そして、$n-4$ は $\varepsilon(=(4-n)/2)$ に比例しているのですが、これともともとの発散積分からくる $1/\varepsilon$ とがかけあわさって有限な答えが出てきます。すなわち簡潔に書くと、

$$(2\gamma_5\hat{\not{l}}) \times (\text{発散部分}) \sim \underbrace{(n-4)\text{ 次元}}_{\sim\varepsilon} \times \frac{1}{\varepsilon} \to \text{有限} \tag{56}$$

そして、あとアノマリーで特徴的なのはアノマリーの項が「局所的」だということです。ここで、「局所的」というのはどういう意味かというと、x という点での divergence を考えると出てくる答えも x という点での関数が出てくるということです。そんなのあたりまえだと思うかもしれませんが、後でやってみせますが、一般に量子論のグリーン関数というのは「非局所的」で、たとえば、(55) のような式の左辺で点 x における何かを考えたとしても、一般には右辺はもっと複雑な非局所的な部分をたくさん含んでいるというのが普通なのですが、アノマリーの場合だと右辺も必ず点 x のみの関数になります。それももとをただせば、アノマリーが発散している部分からきているという性質に関係しています。そういう奇妙な性質があります。

というのが、アノマリーの一番簡単な例ですけれども、アノマリーについて一言でまとめると、

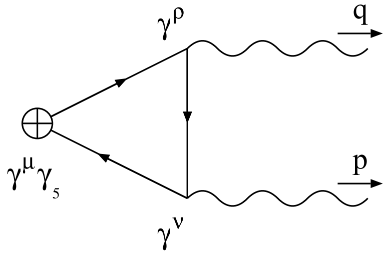
アノマリー 古典的な対称性が量子論的な効果によって破れるというものの総称

これで、この例は終わりなのですが、何かすっきりしません。何がすっきりしないかというと、今ここでは「次元正則化」というやり方でやったらこういう結果になりましたといっているだけ

なのです。それでは、他のやり方でやったら答えはかわるのかという疑問が出てきます。例えば、Pauli-Villars の正則化を使ってもこれは計算できます。それで計算したら違う答えが出てきてしまいます。そしてまた違うやり方でやると、また違う答えが出てしまいます。さっきみたいな γ_5 という「次元正則化」ではたまたま、$[\gamma_5, \gamma^\mu] = 0$ となったことをひきずっているわけですが、それでは、「次元正則化」ではなくて他のものでやると結果はゼロになるのだろうかなどという疑問がたえません。だから、本当はある正則化に限った議論ではなくて、どういう正則化にもよらない議論ができたらもっと良いです。次にそれをやります。

2.3　正則化に依らないアノマリーの計算

もともと問題だったのは、



(57)

という三角形のダイアグラムでした。式で書くと、

$$\begin{aligned}&\Gamma_5^{(2)\mu\nu\rho}(p,q)\\&\quad = \int \frac{d^4 l}{i(2\pi)^4}\,\mathrm{tr}\left[\frac{1}{-(\not{l}+\not{q})} i\gamma^\mu\gamma_5 \frac{1}{-(\not{l}-\not{p})} i\gamma^\nu \frac{1}{-\not{l}} i\gamma^\rho\right]\end{aligned} \tag{58}$$

上式をどう評価するかですが、γ_5 が一つ入ってますから、ϵ テンソルに比例するはずです。また、p^μ, q^μ に依存するはずです。

Lorentz covariance を仮定して、$\Gamma_5^{(2)\mu\nu\rho}$ の可能な一般形を考えると、

$$\begin{aligned}\Gamma_5^{(2)\mu\nu\rho}(p,q) \;=\;& A_1 p_\alpha \epsilon^{\alpha\mu\nu\rho} + A_2 q_\alpha \epsilon^{\alpha\mu\nu\rho} + A_3 p^\rho p_\alpha q_\beta \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\\&+A_4 q^\rho p_\alpha q_\beta \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} + A_5 p^\nu p_\alpha q_\beta \epsilon^{\alpha\beta\mu\rho}\\&+A_6 q^\nu p_\alpha q_\beta \epsilon^{\alpha\beta\mu\rho}\end{aligned} \tag{59}$$

となります。$A_1 \sim A_6$ は、$p^2, q^2, p\cdot q$ の関数です。大事なことは、上式は外線 momentum p^μ, q^μ についての展開を意味していることで、A_1, A_2 は 1 次、$A_3 \sim A_6$ は 3 次です。一般のグリーン関数を外線の momentum について展開したときに、高次の係数は有限となります。何故かと言うと、展開するにつれて分母の次数が上がるからで、上式の場合 A_1, A_2 は発散積分を含み $A_3 \sim A_6$ は有限となります。

これが一般形でしたが、先程のアノマリーは

$$i(p_\mu + q_\mu)\Gamma_5^{(2)\mu\nu\rho}(p,q) = i(A_1 - A_2)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\mu q_\sigma \tag{60}$$

と書けます。よって発散してます。さて $A_3 \sim A_6$ は有限なのでどんな正則化をしても同じ値です。一方無限大の量は計算の仕方で答は変わります。従ってこのままでは、上のアノマリーは良く分かりません。そこで、何らかの方法で決めてしまう必要があります。次のようにして決めることにします。問題の axial current: $j_5^\mu(x)$ にゲージ不変性を課します。具体的には、$< j_5^\mu(x) >$ の式で、$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\lambda + [A_\mu, \lambda]$ と変化させても値が変わらないことを要請します。そのことを $\Gamma_5^{(2)\mu\nu\rho}$ の立場で書くと、 $p_\nu\Gamma_5^{(2)\mu\nu\rho} = q_\rho\Gamma_5^{(2)\mu\nu\rho} = 0$ となります。このように $j_5^\mu(x)$ のゲージ不変性を要求すると (59) 式より、

$$\begin{aligned} A_1 &= -p\cdot qA_3 - q^2A_4 \\ A_2 &= -p^2A_5 - p\cdot qA_6 \end{aligned} \tag{61}$$

という関係が成立します。おもしろいことに、前の発散積分であった A_1, A_2 が収束積分 $A_3 \sim A_6$ で書けてしまいました！よって発散積分の答は決まってしまい、以上よりアノマリーが評価できて、

$$i(p_\mu + q_\mu)\Gamma_5^{(2)\mu\nu\rho}(p,q) = -\frac{i}{4\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\mu q_\sigma \tag{62}$$

となり前に次元正則化で求めたものと同じになります。従って大事なことは、アノマリーという現象が見かけのようなもので生じたのではなく、カイラルカレントがゲージ不変という要求をしたから生じたということです。次元正則化は、ゲージ不変性を自動的に満たすので、答は上で一般形から求めたものと一致せざるを得ません。だから、ゲージ不変な正則化を使う限り上と同じ結果になります。

ここまでの話をまとめますと、vectorlike なゲージ理論を議論し、軸性アノマリー

$$\partial_\mu < j_5^\mu(x) > = \frac{1}{16\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}(x) \tag{63}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \tag{64}$$

を求めました。今までは低いオーダーのダイアグラム (三角形ダイアグラム) のみ計算しましたが、高いオーダーについても計算すると上のようになります。上式は UV finite で local な式であり、ゲージ不変性より答が一意的に決まってしまい他のグリーン関数から際だっています。

2.4 簡単なアノマリーの計算

どのように axial anomary を計算してもいいことが分かりましたが、もう少しスマートにやる方法もありまして、次のようにやります。

$$\begin{aligned}< j_5^\mu(x) > &= < \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x) > \\ &= -\lim_{x'\to x}\mathrm{tr}\left[\gamma^\mu\gamma_5\frac{1}{\not{D}}\right]\delta(x-x') \end{aligned} \tag{65}$$

これは、1-loop ダイアグラムの集合になっています。このままでは発散量なので、これを次のように正則化します。

$$< j_5^\mu(x) > = -\lim_{M\to\infty}\lim_{x'\to x}\mathrm{tr}\left[\gamma^\mu\gamma_5\frac{1}{\not{D}}e^{-\frac{\not{D}^2}{M^2}}\right]\delta(x-x') \tag{66}$$

ここで M は UV cutoff です。$e^{-\frac{\not{D}^2}{M^2}}$ の factor は、UV の momentum に対する damping factor になっていて、ゲージ不変な正則化を行っていることになります。このことは $\not{D}\to e^{-\lambda}\not{D}e^{\lambda}$, $e^{-\frac{\not{D}^2}{M^2}}\to e^{-\lambda}e^{-\frac{\not{D}^2}{M^2}}e^{\lambda}$ から分かります。さらに,(66) 式を微分すると、

$$\begin{aligned}\partial_\mu < j_5^\mu(x) > = & -\lim_{M\to\infty}\lim_{x'\to x}\mathrm{tr}\left[\not{\partial}\gamma_5\frac{1}{\not{D}}e^{-\frac{\not{D}^2}{M^2}}\right. \\ & \left. -\gamma_5\frac{1}{\not{D}}e^{-\frac{\not{D}^2}{M^2}}\not{\partial}\right]\delta(x-x') \end{aligned} \tag{67}$$

ここで、$x'\to x$ とするので x' についても微分しないといけないことに注意して下さい。$\partial_{x'}\delta(x-x')=-\partial_x\delta(x-x')$ ということも用いています。また $\not{\partial}$ を $\not{D}$ におきかえても同じです。何故なら $\not{D}$ の中の $\not{A}$ の項は cancel することがすぐ分かるからです。さらに、$\not{D}$ と γ_5 は反交換することを用いて、

$$\begin{aligned}\partial_\mu < j_5^\mu(x) > &= -\lim_{M\to\infty}\lim_{x'\to x}\mathrm{tr}\left[-\gamma_5\not{D}\frac{1}{\not{D}}e^{-\frac{\not{D}^2}{M^2}}\right. \\ &\quad \left. -\gamma_5\frac{1}{\not{D}}\not{D}e^{-\frac{\not{D}^2}{M^2}}\right]\delta(x-x') \\ &= 2\lim_{M\to\infty}\lim_{x'\to x}\mathrm{tr}\left[\gamma_5 e^{-\frac{\not{D}^2}{M^2}}\right]\delta(x-x') \end{aligned} \tag{68}$$

とこんな簡単な式になってしまいます。この計算法はなかなかいいでしょう。この式を見てすぐに分かるのは、局所的であるということです。すなわち $\frac{1}{\not{D}}$ が含まれていません。もう一つ面白いのは、2つの極限をとる順番を入れ替えると $\partial_\mu < j_5^\mu(x) >= 0$ となってしまうことです。つまり、

アノマリーは非常に微妙なところから出て来ています。(68) 式の計算は面白い計算ですが、時間が無いので結果だけ書くと、

$$\partial_\mu < j_5^\mu(x) > \;=\; \frac{1}{16\pi^2}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}(x) \tag{69}$$

となります。

3　カイラルゲージ理論でのアノマリー

さて、今までは vectorlike なゲージ理論のアノマリーについて話をして来ましたが、次にカイラルゲージ理論のアノマリーについて話したいと思います。フェルミオンセクターの action を書くと、

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x\bar{\psi}i\not{D}_R\psi \\ \not{D}_R &= \gamma^\mu D_{R\mu} = \gamma^\mu(\partial_\mu + A_\mu P_R) \end{aligned} \tag{70}$$

ここで P_R はカイラリティーの projection operator です。つまり right-handed fermion に projection するものであり、定義とその性質は、

$$P_R = \frac{1+\gamma_5}{2}, \quad P_L = \frac{1-\gamma_5}{2} \tag{71}$$

$$P_L^2 = P_L, \quad P_R^2 = P_R, \quad P_L + P_R = 1, \quad P_LP_R = P_RP_L = 0 \tag{72}$$

となっています。例えばニュートリノなど standard model の fermion はこのような coupling を持っています。また、上の action は次のゲージ変換の下で不変になっています。

$$\begin{aligned} &\psi(x) \to e^{-\lambda(x)P_R}\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}(x)e^{\lambda(x)P_L} \\ &D_{R\mu} \to e^{-\lambda(x)P_R}D_{R\mu}\,e^{\lambda(x)P_R}, \quad A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\lambda + [A_\mu, \lambda] \end{aligned} \tag{73}$$

以上は古典論でしたが、次に量子論を考えます。fermion のみ量子化して有効作用

$$e^{i\Gamma(A)} \;=\; \int D\psi D\bar{\psi}\; e^{iS(\psi,A)} \tag{74}$$

を以下考えます。問題は、S はゲージ不変でしたが、$\Gamma(A)$ もゲージ不変となるかということです。何故かというとゲージ対称性は、くりこみ可能性とか Unitarity 等を保証している大事な対称性だからです。もし、fermion のせいでゲージ不変性が破れていると、さらにゲージ場 A_μ で path integral したときに consistent な量子論となりません。素朴には、S がゲージ不変なので $\Gamma(A)$ も

そうであると考えられますが、いまやそうではないことを我々は既に知っています。確かにこの系は γ_5 を含んでいて怪しいのです。

それでは、そのことを確かめるために摂動論的に調べてみましょう。Feynman rule は

$$
\begin{aligned}
\Gamma(A) &= \frac{1}{i}\ln\left[\int D\psi D\bar{\psi}\exp\left\{i\int dx^4\bar{\psi}i\not{D}_R\psi\right\}\right] \\
&= \frac{1}{i}\ln\mathrm{Det}\, i\not{D}_R = \frac{1}{i}\mathrm{Tr}\ln i\not{D}_R \\
&= \frac{1}{i}\mathrm{Tr}\ln(i\not{\partial} + i\not{A}P_R)
\end{aligned}
\tag{75}
$$

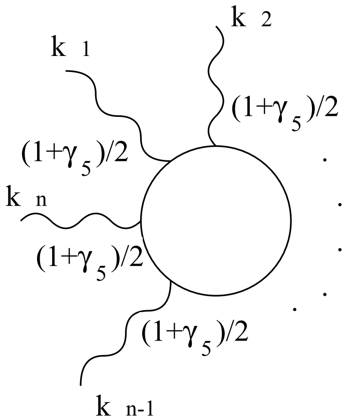
を A について展開したものです。さらに momentum space に移ります。

$$
\begin{aligned}
\Gamma(A)|_n &= \int\prod_{i=1}^{n}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}(2\pi)^4\delta^4\left(\sum_i k_i\right)\left(-\frac{1}{n}\right)\mathrm{tr}\left(A_{\mu_1}(-k_1)\cdots A_{\mu_n}(-k_n)\right) \\
&\quad\times\Gamma^{(n)\mu_1\cdots\mu_n}(k_1,\cdots,k_n)
\end{aligned}
\tag{76}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
&\Gamma^{(n)\mu_1\cdots\mu_n}(k_1,\cdots,k_n) \\
&= \int\frac{d^4l}{i(2\pi)^4}\mathrm{tr}\left[\frac{1}{-\not{l}}(i\gamma^{\mu_1}P_R)\frac{1}{-(\not{l}+\not{k}_1)}(i\gamma^{\mu_2}P_R)\right. \\
&\qquad\left.\cdots\frac{1}{-(\not{l}+\not{k}_1+\cdots+\not{k}_{n-1})}(i\gamma^{\mu_n}P_R)\right]
\end{aligned}
\tag{77}
$$

です。ダイアグラムは、

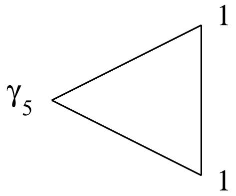


(78)

となり、今度はゲージ結合の所に Projection $P_R = (1+\gamma_5)/2$ がかかります。

調べたいのは、このようにして求まった $\Gamma(A)$ がゲージ不変かどうかと言うことですが、これ

は axial anomaly の議論に似ていることが分かります。axial anomaly は

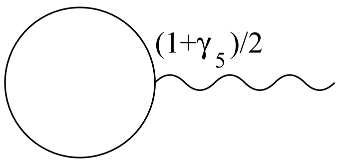


$$(79)$$

のダイアグラムでしたが、2つの”1”の所にゲージ不変性を課すと γ_5 の所にアノマリーが生じると言うものでした。今の場合は (78) のダイアグラムなので、全ての頂点でゲージ不変性が成り立つかと言うことで、これは axial anomaly から類推して不可能です。このことをもっと具体的に調べてみましょう。

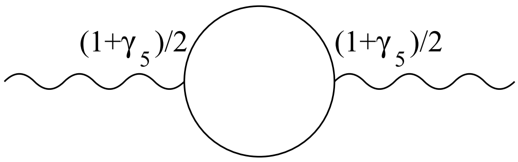
DR(dimensional regularization) を用いた結果、

$$\Gamma^{(1)\mu} =$$



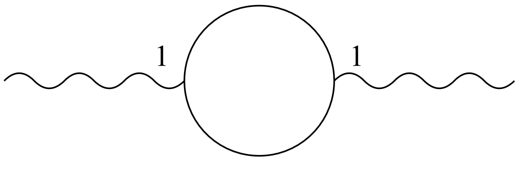
$$= 0 \tag{80}$$

$$\Gamma^{(2)\mu\nu} =$$

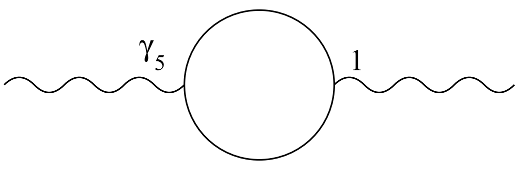


$$= \int \frac{d^n l}{i(2\pi)^n} \operatorname{tr}\left[\frac{1}{-\not{l}}(i\gamma^\mu P_R)\frac{1}{-(\not{l}+\not{k})}(i\gamma^\nu P_R)\right] \tag{81}$$

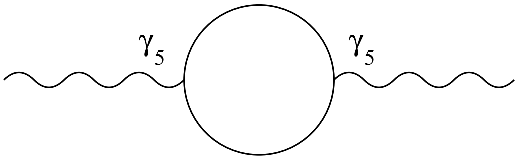
この γ_5 に関するコンビネーションは3通りあって、



$$= \frac{1}{12\pi^2}\left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln(2\pi) + \frac{5}{3} - \ln(-k^2)\right)(k^\mu k^\nu - g^{\mu\nu}k^2) \tag{82}$$



$$= \quad 0 \tag{83}$$



$$\begin{aligned} &= \frac{1}{12\pi^2}\left(\frac{1}{\epsilon}-\gamma+\ln(2\pi)+\frac{5}{3}-\ln(-k^2)\right)(k^\mu k^\nu - g^{\mu\nu}k^2) \\ &\quad -\frac{1}{12\pi^2}g^{\mu\nu}k^2 \end{aligned} \tag{84}$$

ここで注意して欲しいのは、もともとの式では (82) と (84) は γ 行列の代数からは等しいように見えますが、積分が発散しているので dimensional regularization の結果、このように両者の値がずれます。また、その差は有限です。

以上をまとめて、2 点関数は、

$$\begin{aligned} (81) &= \frac{1}{24\pi^2}\left(\frac{1}{\epsilon}-\gamma+\ln(2\pi)+\frac{5}{3}-\ln(-k^2)\right)(k^\mu k^\nu - g^{\mu\nu}k^2) \\ &\quad \underbrace{-\frac{1}{48\pi^2}g^{\mu\nu}k^2}_{(*)} \end{aligned} \tag{85}$$

これを元々の effective action に戻すと、

$$\begin{aligned} \Gamma(A)|_2 &= \int d^4x \frac{1}{96\pi^2}\left(\frac{1}{\epsilon}-\gamma+\ln(2\pi)\right)\mathrm{tr}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &\quad + \int d^4x \frac{-1}{96\pi^2}\,\mathrm{tr}(A_\mu \Box A^\mu) \\ &\quad + \int d^4x dy^4 \frac{-1}{48\pi^2}\,\mathrm{tr}(A_\mu(x)A_\nu(y)) \\ &\quad \times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-ik(x-y)}(k^\mu k^\nu - g^{\mu\nu}k^2)\left(\ln\frac{1}{-k^2}+\frac{5}{3}\right) \end{aligned} \tag{86}$$

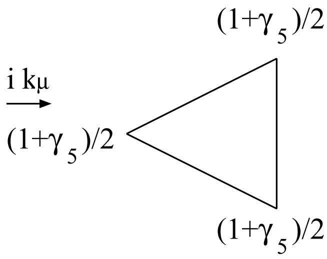
さて、この式から色々なことが分かります。この式の発散しているところは $\mathrm{tr}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ の term で local です。このような発散はくりこみで処理できます。2 つめの term は前の $(*)$ の term から生じていてゲージ対称性を破っています。3 つめの term は non-local ですがゲージ不変となっています。以上より effective action は一般に non-local であることも分かります。またゲージ対称性を破っていて、具体的には、微小ゲージ変換：$\delta_\lambda A_\mu = \partial_\mu \lambda + [A_\mu, \lambda]$ の下で

$$\delta_\lambda \Gamma(A) = \int d^4x \frac{1}{48\pi^2}\,\mathrm{tr}[\lambda \Box \partial_\mu A^\mu] \neq 0 \tag{87}$$

となります。さて、このことは前にやった axial anomaly と何か関係があるのでしょうか? anomaly は (79) のダイアグラムから生じましたが今は (81) のダイアグラムを考えているので関係はないよ

うに思われます。では、どのように違うのでしょうか？ どちらもゲージ対称性を破る点では共通していますが、今の場合はゲージ対称性の破れが局所相殺項 $\Delta\Gamma_1(A) = \int d^4x(1/96\pi^2)\mathrm{tr}(A_\mu \Box A^\mu)$ で消せると言う点が anomaly と異なっています。

さて、次は３点関数



(88)

を評価しましょう。これをそのまま計算するのは面倒なのでその divergence を求めます。計算結果は次のようになります。

$$
\begin{aligned}
ik_\mu \Gamma^{(3)\mu\nu\rho}(k,p,q) &= -\Gamma^{(2)\nu\rho}(p,k+q) + \Gamma^{(2)\rho\nu}(q,k+p) \\
&\quad + \frac{1}{48\pi^2}(-2p^\nu p^\rho + p^2 g^{\nu\rho} + 2q^\nu q^\rho + q^2 g^{\nu\rho}) \\
&\quad + \frac{i}{24\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\mu q_\sigma
\end{aligned} \tag{89}
$$

ゲージ変換 $\delta_\lambda A_\mu = \partial_\mu \lambda + [A_\mu, \lambda]$ において、今は A の power について展開してゲージ不変性を調べていて、一番低いところ (２次) $k_\mu \Gamma^{(2)}$、その次の次数 (３次) $[A_\mu, \lambda]\Gamma^{(2)}$ を調べないといけませんが、それは $-\Gamma^{(2)} + \Gamma^{(2)}$ で cancel しています。その他の部分をもう少しわかりやすく書くと、

$$
\begin{aligned}
\delta\Gamma(A)|_3 &= \underbrace{\int d^4x \frac{-1}{48\pi^2}\,\mathrm{tr}\left\{[A_\mu, \lambda](2\partial^\mu\partial^\nu A_\nu - \Box A^\mu)\right\}}_{(*)} \\
&\quad + \int d^4x \frac{-i}{24\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}(\lambda \partial_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma)
\end{aligned} \tag{90}
$$

となりゲージ対称性を破っています。ですが、(∗) は次のような local な相殺項を Γ に付け加えることにより消すことができます。

$$
\Delta\Gamma_2(A) = \int d^4x \frac{-1}{24\pi^2}\,\mathrm{tr}\left\{A_\mu A_\nu(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\right\} \tag{91}
$$

今までの計算をまとめると、

$$
\begin{aligned}
&\delta(\Gamma(A) + \Delta\Gamma_1(A) + \Delta\Gamma_2(A)) \\
&\quad = \int d^4x \frac{-i}{24\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}(\lambda \partial_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma) + O(A^3)
\end{aligned} \tag{92}
$$

では、この残ったゲージ不変性の破れも local な相殺項で cancel できるでしょうか？ この term は ϵ tensor に比例していて、ゲージ変換を考えると相殺項は A に関して３次となり、さらに Lorentz invariance を考えるとそのようなものは一つしか無く $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}(A_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma)$ のみです。しかし、すぐわかるようにこの term をゲージ変換すると０になります。従って、このゲージ不変性の破れの term は local な相殺項で相殺できません。

さて、今やった計算からいろいろなことが分かります。

- １つには、effective action を計算すると一般にはゲージ不変でないということです。その一部は局所相殺項で取り除けますが、取り除けないものがあります。

- ２つめは、その取り除けない term がゲージアノマリーであるということです。

今の計算では一番低い次数だけ求めましたが、もっと高い次数まで求めることができて結果は次のようになります。

$$\delta\Gamma(A) \;=\; \int d^4x \frac{-i}{24\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}\left[\lambda\{\partial_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma + \frac{1}{2}\partial_\mu(A_\nu A_\rho A_\sigma)\}\right] \tag{93}$$

つまり、weyl fermion が含まれる系は一般にゲージ不変ではありません。この計算を別のやり方でやると、A^3 の係数が変わったりしないかという疑問がありますが、それは Wess-Zumino の consistency condition によって一意的に決まります。

- ３つめは、カイラルなゲージ理論の effective action がゲージ不変でないことから、くりこみ可能性、Unitarity が壊れてしまいますので、このゲージ理論が consistent に定式化できないことが分かります。このとき、ゲージアノマリーがあることからゲージ不変性を保つ正則化が存在しないことも分かります。

- ４つめは、それでは標準模型のようなカイラルなゲージ理論も定式化できないのかという疑問についてです。

実は、カイラルなゲージ理論には例外があります。前の $\delta\Gamma(A)$ の式は、$\mathrm{tr}_R\left[T^a\{T^b,T^c\}\right] - \mathrm{tr}_L\left[T^a\{T^b,T^c\}\right] \equiv d^{abc}$ に比例していて (但しここで left-handed fermion を加えました)、ゲージ群の表現が偶然に $d^{abc}=0$ となる時、$\delta\Gamma(A)=0$ となりゲージ不変となります。この場合は定式化を consistent に行えるのです。標準模型でも何故か分からないけれど $d^{abc}=0$ となっていて定式化できるわけです。

まとめますと、カイラルなゲージ理論は $d^{abc}=0$ の時に限ってゲージ不変に正則化することが可能です。このとき anomaly free と言います。従って $d^{abc}=0$ の理論のみに物理的には興味があるわけですが、実際計算する時には沢山の相殺項が必要となります。それでは、もし anomaly free

であるならば必ず自動的にゲージ不変となっているようなスキームはないのでしょうか？ それは明日の課題とします。

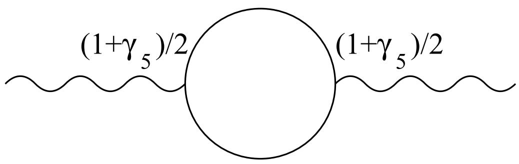
昨日の復習から入ります。Weyl フェルミオンからなる有効作用 $\Gamma[A]$) をゲージ変換した式は

$$\delta_\lambda \Gamma[A] = \underbrace{\int d^4x \frac{-i}{24\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\hbar\left\{\lambda[\partial_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma + \frac{1}{2}\partial_\mu (A_\nu A_\rho A_\sigma)]\right\}}_{\text{minimal な anomaly}\ (\ \propto\ d^{abc}\ )} + \underbrace{\cdots\cdots\cdot}_{\text{fake anomaly}} \tag{94}$$

と書けました。一般には有効作用 $\Gamma[A]$ はゲージ不変でなく、(94) の右辺のようなおつりが出て来ます。このおつりの項は正則化の方法によって違ったものになるのですが、式 (94) の第一項の部分は共通に現れる項で d^{abc} に比例します。この項を minimal な anomaly といいます。$d^{abc} \neq 0$ のときは consistent な理論が作れません。これに対して、式 (94) の第二項の部分 $\cdots$ は local な counter term を元の action に加えることで消すことができます。この項を fake anomaly といいます。式 (94) の第二項は正則化の方法に依存するので、この項がゼロになるようなうまい正則化の方法がないかと考えるのは、自然なことです。今日はその話をしたいと思います。

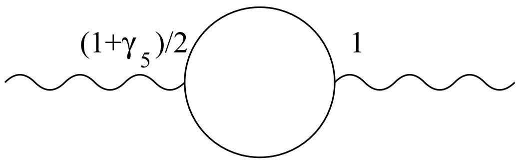
4　共変的正則化

まず 2 角形ダイアグラムについて考えます。昨日、次元正則化の方法で計算しましたが、



$$= \quad C(-k^2)(k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) - \frac{1}{48\pi}k^2 g^{\mu\nu} \tag{95}$$

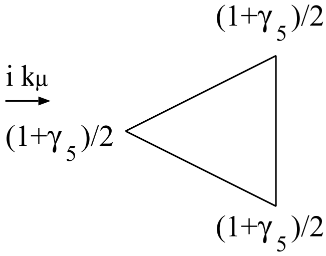
です。右辺の第一項は transverse な部分で、第二項は fake anomaly です。fake anomaly が出ないものを考えましょう。chiral projection operator$\frac{1+\gamma_5}{2}$ は他の頂点に移動しても素朴には同じ $(\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)^2 = \frac{1+\gamma_5}{2})$ ですから、ダイヤグラム (95) は、次のダイヤグラムと同じと考えられます：



$$= \quad C(-k^2)(k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) \tag{96}$$

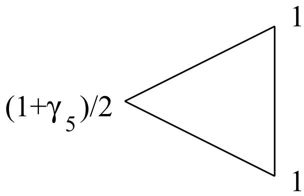
ところが実際に計算してみると、(95) と (96) とは計算結果が違います。(96) では fake anomaly がありません。

３角形ダイアグラムでも同様です。昨日計算したように、



$$= \frac{i}{24\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\mu q_\sigma + \frac{1}{48\pi^2}(-2p^\nu p^\rho + p^2 g^{\nu\rho} + 2q^\nu q^\rho + q^2 g^{\nu\rho}) \tag{97}$$

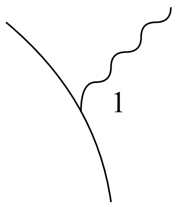
です。これに対して、chiral projection operator$\frac{1+\gamma_5}{2}$を左の頂点に押しつけたものは、



$$= \frac{i}{8\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\mu q_\sigma \tag{98}$$

となり、やはり fake anomaly がありません。

今の例からも予想できますが、chiral projection operator$\frac{1+\gamma_5}{2}$を一つの頂点に押しつければ、シンプルな結果が得られることが予想されます。これは、次元正則化では、



(99)

のゲージ対称性は保たれるという理由によります。ともかく実用的にはchiral projection operator$\frac{1+\gamma_5}{2}$をどこか一箇所の頂点に押しつければ、シンプルな答えが出るということです。

もう一度今やっていることを復習しましょう。今考えているのは有効作用

$$e^{i\Gamma[A]} = \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}e^{iS} \tag{100}$$

でした。ここでAをtAに置き換えます。そうすると、

$$\begin{aligned}\Gamma[A] &= \Gamma[tA]|_{t=1} \\ &= \int_0^1 dt\frac{d}{dt}\Gamma[tA] \qquad (\text{簡単のため}\Gamma(0)=0\text{とした})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 dt \int d^4x A^a_\mu(x) \frac{\delta\Gamma[A]}{\delta A^a_\mu(x)}|_{A\to tA} \qquad \left(\frac{d}{dt}\Gamma[tA] = \frac{d(tA^a_\mu(x))}{dt} \frac{\delta\Gamma[tA]}{\delta(tA^a_\mu(x))} \right) \\
&= \int_0^1 dt \int d^4x A^a_\mu(x) \Big\langle \frac{\delta S}{\delta A^a_\mu(x)} \Big\rangle_{A\to tA} \qquad (\text{ 式 (100) より }) \qquad (101)
\end{aligned}
$$

となります。$A^a_\mu(x)$ は外場だと思っています。ここで、

$$
\begin{aligned}
\Big\langle \frac{\delta S}{\delta A^a_\mu(x)} \Big\rangle &= \langle g\bar{\psi}(x)\gamma^\mu T^a P_R \psi(x) \rangle \\
&= -\lim_{x\to x'} g\hbar\gamma^\mu T^a P_R \frac{1}{\not{D}} \delta(x-x') \\
&= -\lim_{x\to x'} g\hbar\gamma^\mu T^a P_R \frac{1}{\not{D}} e^{-\frac{\not{D}^2}{M^2}} \delta(x-x') \qquad (102)
\end{aligned}
$$

です。１行目から２行目にいく際、

$$
\langle T\psi(x)\bar{\psi}(x') \rangle = \frac{1}{\not{D}} \delta(x-x') \qquad (103)
$$

を用いましたが、ここでも chiral projection operator を１つの頂点に押しつけて、vector-like なプロパゲーターであるとしています。また、２行目から３行目にいく際、dumping factor $e^{-\frac{\not{D}^2}{M^2}}$ を入れて正則化を行いました。この dumping factor $e^{-\frac{\not{D}^2}{M^2}}$ はゲージ共変なのでこの正則化はゲージ共変な正則化です。したがって、この正則化のことを共変正則化 (covariant regularization) といいます。

さて、$\Big\langle \frac{\delta S}{\delta A^a_\mu(x)} \Big\rangle$ をゲージ変換をするとどうなるかですが、分母の A^a_μ にゲージ群の足 a が入ってますので、

$$
\begin{aligned}
\delta_\lambda \Big\langle \frac{\delta S}{\delta A^a_\mu(x)} \Big\rangle &= -g f_{abc} \lambda^c \Big\langle \frac{\delta S}{\delta A^b_\mu(x)} \Big\rangle \\
\text{ただし } [T^a, T^b] &= i f_{abc} T^c \qquad (104)
\end{aligned}
$$

と共変的に振る舞います。そのため、$\Big\langle \frac{\delta S}{\delta A^a_\mu(x)} \Big\rangle$ のことを covariant current といいます。一方、有効作用 $\Gamma[A]$ から consistent current という、もう一つ別のゲージカレントが考えられます :

$$
\Big\langle \frac{\delta S}{\delta A^a_\mu(x)} \Big\rangle \quad : \quad \text{covariant current} \qquad (105)
$$

$$
\frac{\delta\Gamma[A]}{\delta A^a_\mu(x)} \quad : \quad \text{consistent current} \qquad (106)
$$

まず covariant current がゲージ共変な正則化を指定することで定まり、次いで consistent current が式 (100) から定まります。式 (102) を見ても分かるように、素朴には covariant current と consistent current とは同じです :

$$
\frac{\delta\Gamma[A]}{\delta A^a_\mu(x)} \overset{\text{素朴に}}{\simeq} \Big\langle \frac{\delta S}{\delta A^a_\mu(x)} \Big\rangle \qquad (107)
$$

もちろんこの式は両辺ともに発散していますから同じといっても意味はありません。式 (101) からきちんと計算してやると、

$$\begin{aligned}\frac{\delta\Gamma[A]}{\delta A_\mu^a(x)} &= \int_0^1 dt\cdot 1\cdot\Big\langle\frac{\delta S}{\delta A_\mu^a(x)}\Big\rangle_{A\to tA} + \int_0^1 dt\int d^4y A_\nu^b(y)\frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)}\Big\langle\frac{\delta S}{\delta A_\mu^b(y)}\Big\rangle_{A\to tA}\\ &= \int_0^1 dt\frac{d}{dt}t\Big\langle\frac{\delta S}{\delta A_\mu^a(x)}\Big\rangle_{A\to tA} + \int_0^1 dt\int d^4y A_\nu^b(y)\frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)}\Big\langle\frac{\delta S}{\delta A_\mu^b(y)}\Big\rangle_{A\to tA}\\ &= \Big\langle\frac{\delta S}{\delta A_\mu^a(x)}\Big\rangle + \int_0^1 dt\int d^4y A_\nu^b(y)\underbrace{\left[\frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)}\Big\langle\frac{\delta S}{\delta A_\mu^b(y)}\Big\rangle - \frac{\delta}{\delta A_\mu^b(y)}\Big\langle\frac{\delta S}{\delta A_\mu^a(x)}\Big\rangle\right]}_{\text{Bardeen-Zumino current}}\end{aligned}\tag{108}$$

となり、両者は一致しないことが分かります。２行目の第一項を部分積分する際、$\frac{d}{dt}\Gamma[tA] = \frac{d(tA_\mu^a(x))}{dt}\frac{\delta\Gamma[A]}{\delta(tA_\mu^a(x))}$ を用いました。両者の差の部分を Bardeen-Zumino current といいます。functional rotation とでもいうべき形をしています。式 (102) より、Bardeen-Zumino current はもっと具体的に書けて、

$$\frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)}\Big\langle\frac{\delta S}{\delta A_\mu^b(y)}\Big\rangle - \frac{\delta}{\delta A_\mu^b(y)}\Big\langle\frac{\delta S}{\delta A_\mu^a(x)}\Big\rangle \overset{M\to\infty}{=} \frac{ig^2}{16\pi^2}\delta(x-y)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\underbrace{\mathrm{tr}\left(T^a\left\{T^b, F_{\rho\sigma}(x)\right\}\right)}_{\propto\, d^{abc}}\tag{109}$$

となります。したがって、

$$(\text{consistent current}) - (\text{covariant current}) \propto d^{abc}\tag{110}$$

が分かりました。具体的な表式は、式 (109) を式 (108) に代入して積分を実行すると得られ、

$$\frac{\delta\Gamma[A]}{\delta A_\mu^a(x)} = \Big\langle\frac{\delta S}{\delta A_\mu^a(x)}\Big\rangle - \frac{g}{48\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}\left(T^a(A_\nu F_{\rho\sigma} + F_{\nu\rho}A_\sigma - A_\nu A_\rho A_\sigma)\right)\tag{111}$$

となります。

ここで consistent anomaly について考えます。アノマリーがなければ $\delta_\lambda\Gamma[A] = 0$ となることを言えばいいわけで、これが目標です。

$$\begin{aligned}\delta_\lambda\Gamma[A] &= \int d^4x D_\mu\lambda^a(x)\frac{\delta\Gamma[A]}{\delta A_\mu^a(x)}\\ &= -\int d^4x\lambda^a(x)D_\mu\frac{\delta\Gamma[A]}{\delta A_\mu^a(x)}\\ &= -\int d^4x\lambda^a(x)D_\mu\Big\langle\frac{\delta S}{\delta A_\mu^a(x)}\Big\rangle + (\propto\ d^{abc}\text{の部分})\end{aligned}\tag{112}$$

covariant anomaly の部分については、

$$D_\mu\Big\langle\frac{\delta S}{\delta A_\mu^a(x)}\Big\rangle \overset{M\to\infty}{=} \frac{g}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\underbrace{\mathrm{tr}(T^a F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}(x))}_{\propto\, d^{abc}}\tag{113}$$

となるので、結局 consistent anomaly は d^{abc} に比例することが分かり、目標は達成されたことになります。具体的な表式は、

$$\begin{aligned}
\delta_\lambda \Gamma[A] &= \int d^4x \frac{-i}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}\lambda F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} \\
&\quad + \int d^4x \frac{-i}{8\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}\lambda\left(\frac{2}{3}\partial_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma + \frac{5}{6}A_\nu A_\rho \partial_\mu A_\sigma + A_\mu A_\nu A_\rho A_\sigma\right) \\
&= \int d^4x \frac{-i}{24\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}\lambda\left[\partial_\mu A_\nu \partial_\mu A_\sigma + \frac{1}{2}\partial_\mu(A_\nu A_\rho A_\sigma)\right] \\
&\propto d^{abc}
\end{aligned} \tag{114}$$

となります。これは以前紹介した minimal form に一致しています。

あと Wess-Zumino consistency condition について、少し紹介しておきましょう。アノマリーとは有効作用をゲージ変換したときのおつりでした：

$$\delta_\lambda \Gamma[A] = a_\lambda \tag{115}$$

このゲージ変換を 2 回行うと、

$$\delta_\xi \delta_\lambda - \delta_\lambda \delta_\xi = \delta_{[\lambda,\xi]} \tag{116}$$

となり、1 回のゲージ変換に帰着されることがすぐに分かります。これはゲージ変換の性質から一般に成り立つ恒等式です。これを $\Gamma[A]$ に掛けてみると、

$$\delta_\xi \delta_\lambda \Gamma[A] - \delta_\lambda \delta_\xi \Gamma[A] = \delta_{[\lambda,\xi]}\Gamma[A] \tag{117}$$

となり、

$$\delta_\xi a_\lambda - \delta_\lambda a_\xi = a_{[\lambda,\xi]} \tag{118}$$

が成り立ちます。これを Wess-Zumino consistency condition といいます。どうして consistency condition というかといいますと、絶対に成り立たなければならない式だからです。この一般解の解析から、fake anomaly が local な counter term で取り除けることが証明できます。また逆に、アノマリーに関する関係式が成り立てば、ある有効作用 $\Gamma[A]$ があって、

$$\delta_\lambda \Gamma[A] = a_\lambda \tag{119}$$

が成り立ちます。このようなアノマリーを consistency anomaly といいます。なお、covariant anomaly は絶対にこれを満たしません。

5 カイラルゲージ理論でのフェルミオン数アノマリー

この話も大事です。Glashow-Weinberg-Salam 理論で良く知られています。フェルミオン数の不変性は、変換

$$\psi \to e^{i\alpha}\psi, \quad \bar{\psi} \to \bar{\psi}e^{-i\alpha} \tag{120}$$

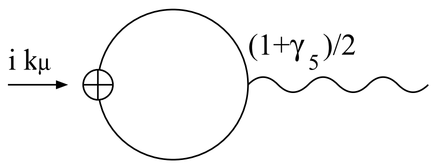
に関する対称性から導かれます。フェルミオン数のカレントは具体的には、

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{121}$$

と表されます。古典的にはもちろん、Noether の定理より、

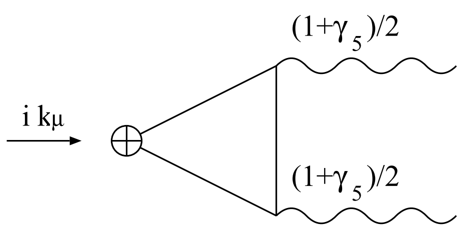
$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{122}$$

が成り立ち、保存量の存在がいえます。ところが量子論に行くと、カイラルなときだけアノマリーが出ます。この問題は微妙な部分を含んでいます。いま、次元正則化で計算したとします。次のダイアグラムは計算すると 0 になります：



$$= \quad 0 \tag{123}$$

この図の $\otimes$ の部分にさっきのカレント (121) が入っています。次のダイアグラムでも、

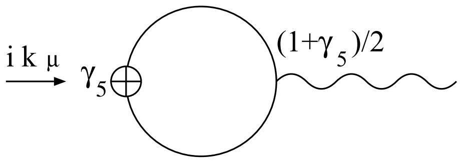


$$= \quad 0 \tag{124}$$

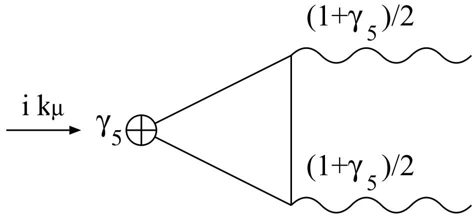
となり、フェルミオン数は保存しているように見えます。そこでもう少し違ったやり方をしてみましょう。いま、Weyl フェルミオン ($\gamma_5\psi = \psi$) を考えていますので、フェルミオン数のカレントを素朴には、

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \tag{125}$$

と書いても構いません。このとき、さっきのダイアグラムは、



$$= \quad -\frac{1}{24\pi^2}k^2k^\nu \tag{126}$$



$$= \quad \frac{i}{12\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\mu q_\nu + \frac{1}{24\pi^2}(\cdots) \tag{127}$$

となります。これは大問題です。フェルミオン数という観測できるものが、処方箋によって異なってしまったからです。フェルミオン数が保存しているのかしていないのかすら分かりません。これは、もともとフェルミオン数のカレントをどう定義するのかがはっきりしていないことから生じた問題です。そこで、カレントのゲージ不変性について考えてみましょう。カレントはゲージ不変である必要があります。したがって、カレントに γ^5 が入って来るものはマズイということになります。そこで、

$$\langle j^\mu(x)\rangle = \langle\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(x)\rangle \tag{128}$$

をゲージ不変かつ有限に定義することを考えます。それには、

$$\langle j^\mu(x)\rangle = -\lim_{M\to\infty}\lim_{x'\to x}\mathrm{tr}\gamma^\mu P_R\frac{1}{\not{D}}e^{-\frac{\not{D}^2}{M^2}}\delta(x-x') \tag{129}$$

と定義すればよく、その結果、

$$\partial_\mu\langle j^\mu(x)\rangle \overset{M\to\infty}{\equiv} \frac{1}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} \tag{130}$$

が導かれ、このカレントが一般に保存しないことが分かります。

6 Supersymmetry

ここからは、これまでの応用として、4 次元の Supersymmetric な理論におけるアノマリーについて議論したいと思います。まず、Dirac 行列の convention を列挙しておきます :

$$\sigma^{\mu\nu} \quad = \quad \frac{i}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu] \quad : \quad \text{Lorentz generators} \tag{131}$$

$$\sigma^{0i} = i\begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix}, \quad \sigma^{ij} = \epsilon_{ijk}\begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \tag{132}$$

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{133}$$

μ, ν は $1,2,3,4$ を、i,j,k は $1,2,3$ を走ります。γ_5 と $\sigma^{\mu\nu}$ はどちらも対角型で互いに交換するのでこれらは同時対角化可能です：

$$[\gamma_5, \sigma^{\mu\nu}] = 0 \tag{134}$$

したがって、γ_5 の固有値 ± 1 に対応する 2 つの固有ベクトルは、Lorentz 変換のもと互いに独立に変換します。このため 4 成分 spinor は 2 つの 2 成分 spinor に既約分解します：

$$\psi_R = \frac{1+\gamma_5}{2}\psi, \quad \psi_L = \frac{1-\gamma_5}{2}\psi \tag{135}$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \chi^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{136}$$

ります。ψ は 4 成分 spinor で、4 成分 spinor よりも 2 成分 spinor の方が基本的です。2 成分 spinor を取り扱うことにより、カイラルな理論を扱うことになります。つまり SUSY の場合は初めからカイラルであるといっていいです。

まず、もっとも簡単なモデルから始めましょう。ラグランジアンはこんな恰好をしています：

$$\mathcal{L} = \partial_\mu A^* \partial^\mu A + \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} \partial_\mu \psi_\alpha + F^* F \tag{137}$$

A : 複素スカラー (ボゾン)

ψ_α : ２成分スピノール (フェルミオン)

F : 複素スカラー

$$\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} = (1, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) \tag{138}$$

$$\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} = (1, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3) \tag{139}$$

$$\sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu + \bar{\sigma}_\nu \sigma_\mu = 2g_{\mu\nu} \tag{140}$$

添字 α, β は $sl(2, \mathbf{C})$ の表現の足となっています。イプシロン・テンソル $\epsilon_{\alpha\beta}$ は $sl(2, \mathbf{C})$ 変換の不変テンソルの 1 つです。これは反対称テンソルであり、添字の上げ下げに用いられます：

$$\epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = -\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = 1 \tag{141}$$

$$\psi^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta, \quad \psi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}\psi^\beta \tag{142}$$

Supersymmetry (以後 SUSY と書く) とは次のような変換に対する不変性です：

$$\begin{aligned}\delta_\theta A(x) &= \sqrt{2}\theta^\alpha\psi_\alpha(x) \\ \delta_\theta\psi_\alpha(x) &= -i\sqrt{2}\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu A(x) + \sqrt{2}\theta_\alpha F(x) \qquad (143) \\ \delta_\theta F(x) &= -i\sqrt{2}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha}\partial_\mu\psi_\alpha \qquad (144)\end{aligned}$$

$\bar{\theta}$ は θ のエルミート共役を表します。また θ はグラスマン数です。グラスマン数とは順番を入れ換えるとマイナスが出る数のことで、特に自分自身の 2 乗は 0 となります：

$$\begin{aligned}\theta_\alpha &: \text{グラスマン数} \\ \theta_1\theta_2 &= -\theta_2\theta_1 \qquad (145) \\ \theta_1^2 &= \theta_2^2 = 0 \qquad (146)\end{aligned}$$

変換則 (143) を見て分かるように、SUSY 変換はフェルミオンとボゾンを入れ換える変換です。したがってフェルミオンとボゾンの力学的自由度が等しくなければなりません。それをチェックしてみましょう。フェルミオンの運動方程式は 1 階の微分方程式ですので、フェルミオンの方は自由度が半分に落ちます。ボゾンについては、まず補助場 F の方は運動項がないので力学的自由度は 0 です。A の方は 2 階の微分方程式ですので、自由度は減りません。したがって、

	成分の数 (実数で数える)	力学的自由度
フェルミオン ψ_α	4	4/2
ボゾン A	2	2
ボゾン F	2	0

となり、フェルミオンとボゾンの力学的自由度が等しいことが分かります。

今書いたものは、相互作用項のない free なラグランジアンですが、さらに相互作用項を付け加えることができます：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{free} &= \partial_\mu A^*\partial^\mu A + \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha}\partial_\mu\psi_\alpha \qquad (147) \\ \mathcal{L}_{int} &= m(-\frac{1}{2}\psi^\alpha\psi_\alpha + FA) + g(FA^2 - A\psi^\alpha\psi_\alpha) + \text{h.c.} \qquad (148)\end{aligned}$$

free part の方は波動関数の繰り込みが ψ と A とで共通で、輻射補正を受けます。一方、interaction part の方は mass m が対数的繰り込みしか受けず、輻射補正を受けません。普通 mass の繰り込みは 2 次の繰り込みを受けます。

(149)

Higgs の mass についても同様で、このことが gauge hierarchy 問題や naturalness 問題を生み出します。したがって、SUSY はこれらの問題の解決に有望です。また、真空のエネルギーは正確に 0 です。これは、フェルミオンとボゾンの零点エネルギーが互いに逆符号でキャンセルしてしまうからです。このような SUSY のきれいな性質は Seiberg-Witten 理論でフルに活用されました。

今紹介したものはほんの一例にすぎません。一般には次のようなものを考えることができます。まず $N=1$ SUSY 代数というものが次のように定義されます：

$$\begin{aligned} [\theta^\alpha Q_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}}] &= -2\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \quad (P_\mu = -i\partial_\mu) \\ [\theta^\alpha Q_\alpha, \theta^\beta Q_\beta] &= 0 \end{aligned} \tag{150}$$

このようなものが存在することが知られています。$Q, \bar{Q}$ を Supercharge と言います。さっき書いた変換 (143) はこの代数の実現だと思うことができます。実際、SUSY 変換を例えばスカラー A について

$$\delta_\theta A = (\theta^\alpha Q_\alpha + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}}) \times A \tag{151}$$

と書き表すことにすると、変換 (143) より、

$$(\delta_{\theta_1}\delta_{\theta_2} - \delta_{\theta_2}\delta_{\theta_1})A = 2i(\theta_1^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\theta_2^\alpha - \theta_2^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\theta_1^\alpha)\partial_\mu A \tag{152}$$

となるからです。他の場について計算しても同じ結果が得られます。また、これからはシンプルに

$$\psi^\alpha\chi_\alpha = \psi\chi \tag{153}$$

$$\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\psi}\bar{\chi} \tag{154}$$

と表すことにします。

ここで、SUSY 代数の表現を体系的に見付ける方法はないか、あるいは A, ψ, ϕ をまとめて扱うことはできないかという疑問が湧きます。その答えが Superfield の方法です。Superfield は任意の場 (例えば $A(x)$) をもってきて、次のようにして作られます：

$$\begin{aligned} \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) &= e^{\delta_\theta} A(x) \\ &= A(x) + \delta_\theta A(x) + \cdots \\ &= e^{[(\theta Q + \bar{\theta}\bar{Q})\times]} A(x) \\ &= e^{[\theta Q\times]} e^{[\bar{\theta}\bar{Q}\times]} e^{[\theta\sigma^m\bar{\theta}P_m\times]} A(x) \end{aligned} \tag{155}$$

３行目から４行目にいく際、Baker-Campbell-Hausdorff の定理を用いました (P_m と $Q, \bar{Q}$ とは可換です。)。$(x, \theta, \bar{\theta})$ は Superspace の座標です。Superfield は Superspace に住んでいる場です。式

(155) の両辺を θ で微分することで、次の関係式が得られます：

$$\xi^\alpha \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\Phi(x,\theta,\bar{\theta}) = (\xi Q + \xi\sigma^\mu\bar{\theta}P_\mu)\times\Phi(x,\theta,\bar{\theta}) \tag{156}$$

したがって、Superfield に対しては、$Q, \bar{Q}$ は、

$$Q_\alpha \quad \leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu \tag{157}$$

$$\bar{Q}_{\dot{\alpha}} \quad \leftrightarrow \quad -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu \tag{158}$$

のように微分として実現されます。これが強力な特徴です。これより Superfield の積もまた Superfield になることが分かります。Superfield の一般形は次のようになります：

$$\begin{aligned} F(x,\theta,\bar{\theta}) &= f(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \theta^2 m(x) + \bar{\theta}^2 n(x) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}v_\mu(x) \\ &\quad +\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\psi(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}d(x) \end{aligned} \tag{159}$$

$\theta, \bar{\theta}$ がおのおのの２次までしか展開されないのは、θ が２成分の spinor でかつグラスマン数 (自分自身の２乗は０) だからです。Supercharge の表式 (157)(158) から各 component field の変換性がすぐに分かります。例えば

$$\delta_\xi f(x) = \xi\phi + \bar{\xi}\bar{\chi} \tag{160}$$

です。Superfield の一般形 (159) に対しては、

$$(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q})F(x,\theta,\bar{\theta}) = \delta_\xi f(x) + \delta_\xi\psi(x) + \cdots + \theta^2\bar{\theta}^2\delta_\xi d(x) \tag{161}$$

となります。重要なことは

$$\delta_\xi d(x) = \partial_\mu(\cdots) \tag{162}$$

が成り立つことです。これを用いて、SUSY 不変なラグランジアンを

$$\mathcal{L} = d(x) + \mathrm{h.c.} \tag{163}$$

として作ることができます。

ところがここで一つ問題があります。このままだとまだ field が多すぎて表現が一般に既約ではありません。そこで constraint を課す必要が生じます。４次元だと代表的なものが２つあります。

1. chiral superfield

constraint は

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0 \quad (164)$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} - i\sigma^{\mu}_{\alpha\bar{\alpha}}\dot{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_{\mu} \quad (165)$$

です。これは SUSY と矛盾しない constraint で、

$$\{Q_{\alpha}, D_{\beta}\} = 0 \quad (166)$$

が成り立ちます。このとき Superfield の一般形は

$$\Phi = A(y) + \sqrt{\theta}\psi(y) + \theta^2 F(y) \quad (167)$$

$$y = x - i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta} \quad (168)$$

となります。なお最初に書いたラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \Phi^{\dagger}\Phi|_{\theta^2\bar{\theta}^2} \quad (169)$$

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{m}{2}\Phi^2|_{\theta^2} + \frac{g}{3}\Phi^3|_{\theta^2} + \text{h.c.} \quad (170)$$

とシンプルに記述されます。

2. vecter (or real) superfield

constraint は

$$V^{\dagger} = V \quad (171)$$

です。このとき Superfield の一般形は

$$\begin{aligned} V = \; & C(x) + i\theta\chi(x) - i\bar{\theta}\bar{\chi}(x) \\ & + \frac{i}{2}\theta\theta[M(x) + iN(x))] - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}[M(x) - iN(x)] \\ & \theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}v_{\mu}(x) + \theta\theta\bar{\theta}\left[\bar{\lambda}(x) + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\chi}(x)\right] \\ & -i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\left[\lambda(x) + \frac{i}{2}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\chi}(x)\right] + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left[D(x) + \frac{1}{2}\Box C(x)\right] \end{aligned} \quad (172)$$

となります。特徴的なことは gauge boson v_{μ} と、その超対称パートナーである gaugino λ が含まれていることです。これにより、ゲージ理論を考えることができます。constraint (171) により、v_{μ} は real であることが分かります。ゲージ場 v_{μ} は、

$$v = V^a T^a \quad (173)$$

T^a : ゲージ群のリー代数の生成子

と表すことができます。

次に Superfield を使ったゲージ変換を考えましょう。ゲージ変換のパラメーター Λ は chiral superfield であるとします：

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Lambda = 0 \tag{174}$$

ゲージ変換は、

$$e^{V'} = e^{-i\Lambda^\dagger} e^V e^{i\Lambda} \tag{175}$$

で定義されます。$F_{\mu\nu}$ に対応した "field strength" は

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}^2(e^{-V}D_\alpha e^V) \tag{176}$$

で定義されます。これは chiral で、

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} W_\alpha = 0 \quad \left(\left\{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{D}_{\dot{\beta}}\right\} = 0 \text{ より } \bar{D}_{\dot{\alpha}}\bar{D}_{\dot{\beta}}\bar{D}_{\dot{\gamma}} = 0 \right) \tag{177}$$

gauge covariant です：

$$W'_\alpha = e^{-i\Lambda} W_\alpha e^{i\Lambda} \tag{178}$$

これで、Supersymmetric なゲージ理論が作れますので、共変的正則化の SUSY への応用をやりましょう。まずラグランジアンから書きましょう：

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \Phi^\dagger e^V \Phi|_{\theta^2\bar{\theta}^2} \\ &= \int d^2\theta d^2\bar{\theta}\Phi^\dagger e^V \Phi \end{aligned} \tag{179}$$

$\Phi^\dagger\Phi$ にゲージ相互作用を入れたものです。e^V の部分がゲージカップリングになります。V は外場として扱っているので量子化は行いません。作用は

$$S = \int \underbrace{d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta}}_{d^8z \text{ と書く}} \Phi^\dagger e^V \Phi \tag{180}$$

です。いまこれの量子論を考えたいので、有効作用を定義します：

$$e^{\Gamma[V]} = \int \mathcal{D}\Phi\mathcal{D}\Phi^\dagger e^{iS} \tag{181}$$

あと、共変微分を作っておかなければなりません。まず $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ はそれ自身共変微分となっています。Λ は chiral ($\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Lambda = 0$) でしたから、

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} \overset{\text{ゲージ変換}}{\longrightarrow} e^{-i\Lambda}\bar{D}_{\dot{\alpha}} e^V = \bar{D}_{\dot{\alpha}} \tag{182}$$

と、ゲージ不変になるからです。D_α の方は

$$\nabla_\alpha = e^{-iV} D_\alpha e^V \tag{183}$$

として共変微分を定義します。これで実際、

$$\nabla_\alpha \xrightarrow{\text{ゲージ変換}} e^{-i\Lambda}\nabla_\alpha e^{i\Lambda} \tag{184}$$

となり、covariant に振る舞います。さらにベクトル的共変微分 ∇_μ も導入しなければなりませんが、それは次のように与えられます：

$$\{\nabla_\alpha, \bar{D}_{\dot\alpha}\} = 2i\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\nabla_\mu \tag{185}$$

それでは始めましょう。これはカイラルな理論ですから、さっきと同じ要領でやることができます。ところが non-SUSY の場合と違って厄介な問題がいくつかあります。まず、fake anomaly (ゴミ) の local counter term の候補が無数にあるということです。non-SUSY の場合は $\dim[A_\mu]=1$ で $\dim[\mathcal{L}_{counter}]=4$ でしたから、$\mathcal{L}_{counter}$ の候補はたかだか知れていました。ところが SUSY の場合は $\dim[V]=0$ ですから、local counter term の候補は無数にあります。例えば、

$$\mathcal{L}_{counter} = \sin V + \frac{1}{1+V^2} + \cdots \tag{186}$$

とかいうものも候補になります。もう一つ厄介なこととしては、V のゲージ変換が複雑だということです：

$$\begin{aligned} \delta_\Lambda V &= -\mathcal{L}_{\frac{V}{2}}[(\Lambda+\Lambda^\dagger)+\coth(\mathcal{L}_{\frac{V}{2}})(\Lambda-\Lambda^\dagger)] && (187)\\ \mathcal{L}_V &= [V, X] && (188)\end{aligned}$$

$\coth(\mathcal{L}_{\frac{V}{2}})$ の部分を Taylor 展開をすればその凄まじさが分かります。

したがって SUSY ゲージ理論における正則化は昔から厄介なことは知られていました。そこで、今日紹介したゴミの出ない共変正則化の方法で、minimal な anomaly を求めてみます。と言っても、もう時間がありませんので、考え方と最終結果だけを述べて終わりにしたいと思います。

まず、V を tV $(0 \le t \le 1)$ に置き換えて、

$$\underbrace{\frac{\delta\Gamma[V]}{\delta V^a(z)}}_{\text{consistent current}} = \underbrace{\left\langle \frac{\delta S}{\delta V^a(z)} \right\rangle}_{\text{covariant current}} + (\text{Bardeen-Zumino current の部分}) \tag{189}$$

を導きます。covariant current は $e^{-\frac{\not{D}^2}{M^2}}$ で正則化しました。SUSY の場合でも、右辺はアノマリー d^{abc} に比例する形になります。結果を書きますと、

$$\begin{aligned} \delta_\Lambda\Gamma[V] \quad &\overset{M\to\infty}{=} \quad -\frac{1}{64\pi^2}\int d^6z\ \mathrm{tr}(i\Lambda W^\alpha W_\alpha) + \frac{1}{64\pi^2}\int d^6\bar{z}\ \mathrm{tr}(i\Lambda^\dagger \bar{W}_{\dot{\alpha}} W^{\dot{\alpha}}) \\ &\qquad \frac{1}{64\pi^2}\int d^8z \int_0^1 dt \int_0^1 d\beta\ \mathrm{tr}e^{-\beta tV}\delta_\Lambda V e^{\beta tV} \\ &\qquad\quad \times([\mathcal{D}^\alpha V, W_\alpha] + [\bar{D}_{\dot{\alpha}}V, e^{-V}\bar{W}^{\dot{\alpha}}e^V)] + \{V, \mathcal{D}^\alpha W_\alpha\})_{V\to tV} \\ &\propto \quad d^{abc} \end{aligned} \tag{190}$$

となります。右辺第 1 行目は、covariant current からきたもので、$\mathrm{tr}(T^aFF)$ の形をしていてきれいです。また、

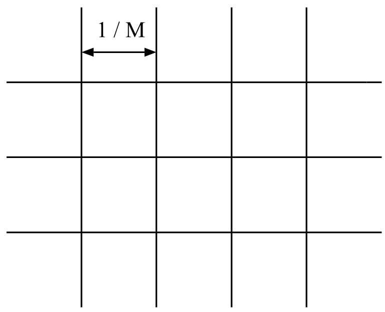
$$\mathcal{D}^\alpha V = \begin{cases} [\nabla^\alpha, V] & V \text{ のグラスマン性が偶のとき} \\ \{\nabla^\alpha, V\} & V \text{ のグラスマン性が奇のとき} \end{cases} \tag{191}$$

です。したがってアノマリーがなければ ($d^{abc} = 0$ ならば)、$\delta_\Lambda\Gamma[V] = 0$ です。

7 格子ゲージ理論におけるカイラルアノマリー

今までの話は全て perturbative な話でした。最後に non-perturbative な側面について紹介して終わりにしたいと思います。格子ゲージ理論におけるカイラルアノマリーについてお話します。

これまでは、cutoff M を無限大にもっていって考えていましたが、格子ゲージ理論だと格子間隔 $\frac{1}{M}$ が有限ですから、有効作用の変分におつりが付きます：



(192)

$$\delta_\Lambda\Gamma[A] = \int d^4x\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}\lambda(\partial_\mu A_\nu\partial_\rho A_\sigma + \partial(A_\nu A_\rho A_\sigma)) + \underbrace{\mathcal{O}\left(\frac{1}{M}\right)}_{\text{おつり}} \tag{193}$$

このおつりの部分については今までの話ではどう取り扱ったらいいのか全く分かりません。ところが最近これについて進展がありまして、Ginsparg-Wilson relation というものを満たす Dirac 作

用素を$\not{D}$ 用いると、このおつりの部分にある種の制限がつくことが分かりました。特にゲージ群が可換群のときはある程度詳しく調べることができるようになりました。この分野の研究がいまわりと盛んです。