2000 年度 三者若手夏の学校

2000 年 7 月 20 日 (木)〜7 月 26 日 (水)

長野県木島平

素粒子論パート 講義〜場の理論分野〜

2000 年 7 月 23 日 (日)〜24 日 (月)

『超対称性理論の最近の発展とその応用』

— 厳密な結果に隠された秘密 —

神戸大学 理学部

坂本 眞人 氏

TeX 作成者:

新潟大学 理学部 素粒子論研究室

1 章〜5 章担当 : 山田義久 ／ 6 章〜7 章担当 : 浮田尚哉

この講義録は、2000 年度夏の学校での講義ノートに (大幅な) 説明を加えた “改訂版” 講義ノートを坂本眞人 氏 本人より頂き、それを新潟大学理学部素粒子論研究室の上記担当者が TeX 化したものである。

目 次

1 目的 **2**

2 何故超対称性か? **4**
2.1 現象論的/理論的サポート 4
2.2 最後のパラダイス 5
2.3 テクニカルな道具としての超対称性 13

3 超対称性理論の基礎 **15**
3.0 表記 15
3.1 超対称性とは? 16
3.2 カイラル/ベクトル超多重項 17
3.3 超場形式 19
3.4 超対称代数と超対称性の破れの指標 25
3.5 $\mathcal{R}$ 対称性 29

4 超対称性は何故パワフルなのか? **31**

5 準備 **33**
5.1 Wilson 流有効作用積分 33
5.2 定数から場への格上げ 36
5.3 正則性 37
5.4 対称性 38

6 厳密な結果とその秘密 **40**
6.1 F 項の非くりこみ定理 I 40
6.2 F 項の非くりこみ定理 II 49
6.3 F 項の非くりこみ定理 III 55
6.4 $U(1)$ D 項の非くりこみ定理 56
6.5 超対称性の破れ 60
6.6 異なる役者の連携プレー 65
6.7 指数定理 71

7 まとめ **83**

1 目的

▷ 対象となる読者層

場の量子論 (特に超対称性理論) の理論構造に興味のある読者全員。

▷ 前提となる予備知識

場の量子論の基礎。超対称性理論の知識は前提としない。

▷ この講義でやらない事

系統だった超対称性理論の紹介。超対称性理論の基礎をしっかりと学びたい読者は、次の教科書を勧める (少々ハードだが、この 1 冊を制覇すれば超対称性理論の専門家になれる!):

S. Weinberg, "The Quantum Theory of Fields, Vol. Ⅲ (Supersymmetry)", Cambridge University Press, 2000.

▷ この講義の目的

- 超対称性理論で知られている (摂動の全次数で、あるいは非摂動論的に) 厳密な結果の紹介。
- その背後に隠されている秘密を明らかにし、実際に導出して見せること。(この講義のウリ!)
- その性質が超対称性理論固有のものかどうかを明らかにし、超対称性を持たない場の量子論への応用も議論する。

▷ この講義ノートの読み方

この講義ノートでは、本質に迫るべく枝葉末節を極力省くよう努力した。必要に応じて重要な点あるいは気にしないで良い点などを指摘しておいた。

この講義ノートの特徴として大量のコメントがある。「重要なもの」、「しつこい絡み」、「私の独り言」、$\cdots$ など色々なコメントを目にするだろう。特に重要な点には、★印を付けておいたので、是非、目を通してもらいたい。

▷ 著者の呟き

この講義を引き受けた後で、はたと困ってしまった。半年かけての講義ならまだしも 2 日間の講義で一体何を伝えることができるだろうか? "系統だった超対称性理論の紹介"—これは端から不可能

だ! “最近の超対称性理論の厳密な結果の紹介” はどうか? ——いや、これは内容が膨大過ぎる。“$\mathcal{N}=1$ 超対称性 QCD” に内容を絞ればどうか?——これすらノートは 200 ページを越えている···。

講義の時間が限られている以上、枝葉を削ぎ落としてできる限り本質に的を絞り、しかも専門家でない人たちに理解できる内容でなければならない。それが可能な題材はあるのだろうか?

最近の超対称性理論において、多くの厳密な結果が知られている。——それらを全て紹介するには量が多過ぎるし、そもそも私が全てを網羅し切れていない——。しかしながら、何故 (摂動論的にあるいは非摂動論的に) 厳密な結果が得られるのかということを考えると、何か特別な理由があるはずである。モデルを変えれば結果が異なるように、厳密な結果は数多く存在するであろうが、何故厳密に求まるのかということに関する本質はそうたくさんある訳ではないだろう。そこにはモデルが違っても何か共通の本質が存在すると期待できる。厳密な結果を実際に導くには、ある程度の知識を必要とするだろうが、その背後に存在する本質を理解することは、逆に詳細な知識は必要とされないことが多い。この講義では、そういった厳密な結果の背後に潜む秘密を解き明かし、その本質に迫ってみたい。

実は、本質を探っていくと、超対称性とは直接関係のない性質が超対称性と組み合わさることによって、アッと驚くような結果が得られるということが、よくあるのだとわかる。このことは、超対称性理論での結果を、(超対称性を持たない) 通常の場の理論へ応用できるかも知れないことを示唆している。超対称性が自然界の中で実現されているかどうかは、これからの実験結果を待たなければならないが、超対称性理論から得られた厳密な結果というのは、自然が超対称性を採用しているかどうかに関わらず、場の量子論のより深い理解のためには重要な役割を果たすであろう。そう、超対称性なんて世の中にあるはずがないと信じている人にもこの講義ノートを読んでもらいたいのだ。もっとも、超対称性の存在を信じて疑わない筆者からすれば、そのような人には改心してもらいたいと願うのだが···。

2　何故超対称性か?

現時点では、超対称性が自然界で実現されているという実験的確証は、残念ながら見つかっていない。それでは、何故実験で見つかってもいない超対称性を考える必要があるのだろうか? 信じる信じないはその人の物理観に大きく左右されるであろうが、少なくとも今言える事は、超対称性がもし自然界で実現されているならば、ここ数年の内に実験的に検証されるかも知れないという時期に我々は来ているということである。もし、実験的に超対称性が確立されたとすると、相対論や量子論が現れた時のように、物理の革命がもう一度起こることになる。多分その衝撃は、相対論や量子論の時以上のものとなるだろう。何故そう予想するかというと、超対称性理論の背後には—多くの人が信じているように—超弦理論が控えているからである。つまり、我々が今「粒子」と思っているものは、実は「ひも」でできていることになる。もし、超対称性を現実に実験で目にすることができたなら、我々はこのような革命の時期に生まれて来たことを天に感謝すべきかも知れない。

2.1　現象論的/理論的サポート

実験的に超対称性の証拠は見つかっていないと述べたが、超対称性に対する間接的な示唆は幾つか存在する。

1. ゲージ相互作用の統一

   素粒子理論における標準模型 (Standard Model) は、3 つのゲージ相互作用 (電磁気力、弱い力、強い力) から成り、それぞれの相互作用の結合定数の大きさは異なっている。この標準模型を最小の拡張で超対称化した模型 (Minimal Supersymmetric Standard Model) を仮定すると、高エネルギーでこれらの結合定数が 3 つとも同じ値をとることが予想される。(標準模型のままでは一致しない!) この事実は、超対称性大統一理論 (全ての力は 1 つのゲージ対称性 (相互作用) から派生する) を強く示唆している。(そうでなければ神様は意地悪だ!)

2. ゲージ階層性の問題の解決

   上に出てきた大統一理論 (GUTs) は、理論的には非常に美しい理論で、理論のパラメータも少なく魅力的な考え方である。しかしな

がら、この理論には (少なくとも)2 つの非常に異なるエネルギースケール (weak スケール $\sim 10^3$GeV v.s. GUT スケール $\sim 10^{16}$GeV) を含む。ところが、このような非常に異なるスケールを量子論の中で維持しようとしても両方のスケールが量子補正で混ざってしまうため、極めて困難であることが知られている。この問題の解決には、超対称性が有望視されている。

3. 宇宙定数の問題の解決

   Einstein の重力理論に現れる宇宙定数 (cosmological constant) は、実験的にはゼロあるいはあったとしても非常に小さいことがわかっている。ところが、量子論的に宇宙定数を求めてみると、全く桁違いの値が得られてしまう。この問題の解決には、超弦理論が有望視されているが (超対称性が破れていなければ宇宙定数はゼロ)、根本的な解決を与えるかどうかは不明。いまだに素粒子理論における大問題 (本当に問題なのかも含めて) の 1 つである。

4. 無矛盾な量子重力理論の構築

   標準模型は、驚くべき成功を収めているが、重力が除かれている点で、完全に満足できる理論となっていない。ところが、重力を量子化するという試みはいまだに成功していない。(物理量が発散してしまって、物理的に意味のある理論にならない。)　唯一、超弦理論 (Superstring Theory) に基づく量子重力理論は、数学的に無矛盾なものとなっていると信じられている。

この講義では、上の事柄を詳しく説明することを目的としていないし、他の教科書やレビュー等で散々述べられているので、ここではそれを繰り返すことはしない。その代わりに、超対称性理論を研究する目的、あるいは動機について、他ではあまり述べられていない (つまり、私の独断と偏見に基づいた) 視点をここで紹介したい。

2.2　最後のパラダイス

我々には、どれだけ未知なる理論あるいは対称性が残されているのだろうか? それとも我々は既に自然を記述するための理論の枠組み、あるいは可能な対称性の全てを掌握しているのだろうか?

上の課題の意味する所を説明するために、少々(いや、かなり) 長い前

置きに付き合ってもらいたい。まず、Poincaré 群 (並進 $\oplus$ Lorentz 変換からなる群) の表現から話を進めることにする。相対論的場の量子論は、Poincaré 群の下での不変性が仮定されている。Poincaré 群の表現 (1 粒子状態) について、以下のような分類がなされている。

スピン	分類	自由度	粒子
0	ϕ : スカラー	1	Higgs ?
1/2	Ψ : Dirac スピノル	4	e 、μ 、u 、d 、$\cdots$
	Weyl スピノル	2	ν ?
	Majorana スピノル	2	
1	A_μ : $m=0$ ベクトル	2	γ 、g
	$m\neq 0$ ベクトル	3	$W^\pm$ 、Z^0
2	$g_{\mu\nu}$: $m=0$ テンソル	2	graviton ?
	$m\neq 0$ テンソル	5	

表 1: Poincaré 群の表現 (1 粒子状態)

コメント

- Higgs 粒子及び重力子 (graviton) は現時点では確認されていない。
- ニュートリノは、標準模型では質量を持たない Weyl スピノルとしているが、最近の実験結果は質量を持っていることを強く示唆している。

表 1 の中で、スピン 1 と 2 の質量を持たない場合と持つ場合の自由度の違いに注目してもらおう。まず、スピン 1 の場合から議論しよう。

スピン 1

			自由度
A_μ	:	質量を持たないベクトル粒子	2
		質量を持つベクトル粒子	3

スピン 1 のベクトル粒子は、質量がゼロかゼロでないかで、自由度が異なっている。つまり、Poincaré 群の立場から言えば、$m = 0$ と $m \neq 0$ とでは「表現」が異なっていることを意味する。従って、単純に $m \to 0$ としても質量を持つベクトル表現から質量を持たないベクトル表現へは移れない。質量を持つベクトル粒子が質量を持たないベクトル粒子になり得るためには、3 つの内の 1 つの自由度を取り除く機構が必要とされる。この機構は、Maxwell 方程式で良く知られたゲージ対称性である。(ゲージ場 $A_\mu(x)$ を用いて書かれた)Maxwell 方程式は、次のゲージ変換の下で不変である:

$$A_\mu(x) \quad \longrightarrow \quad A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x)\,. \tag{2.1}$$

ここで $\Lambda(x)$ は任意の関数である。上記の変換の下で理論は不変なのであるから、$\Lambda(x)$ の持つ自由度 1 つ分はゲージ場の自由度から取り除かれることになる。別の言い方をすれば、ゲージ場が質量を持たない $(m = 0)$ ことを保証するためには、ゲージ対称性が必要! すなわち、

『質量を持たないベクトル場は 必然的に ゲージ理論に従う。』

ここで、この講義で紹介する「厳密な結果」の第 1 番目が得られた。

厳密な結果 1

光子 (photon) あるいは質量を持たないベクトル粒子は、摂動の範囲内では質量を持つことはできない。

この結果は上で述べてきたことから明らかだろう。

下に「秘密」という形でまとめておこう。

秘密 1

自由度の異なる表現は、摂動では互いに移り変わることはできない。

幾つかコメントを与えておこう。

コメント

- Higgs 機構によって、質量を持たないベクトル粒子は質量を獲得できるが、このときは Higgs 粒子が真空期待値を持つことによってゲージ対称性が破れる。また、Higgs 粒子の持つ自由度の 1 つがベクトル粒子に “吸われる” ことによって、ベクトル粒子は 3 つ目の自由度を獲得する。

- 光子が質量を持たないのはゲージ対称性があるからであると説明されることが多いが、3 次元時空ではこの議論は正しくない。(4 次元時空ではもちろん正しい。) 3 次元時空では、ゲージ対称性及び 3 次元 Poincaré 対称性と矛盾することなく “光子” は (Chern-Simons 項を通じて) 質量を持つことができる。もし、興味のある読者は次のレビューを読むと良い:

  G.V. Dunne, “Aspects of Chern-Simons Theory” (hep-th/9902115).

秘密 1 で述べた「摂動の範囲内では自由度は変われない」ことの応用例を 1 つ挙げておこう。拡張された超対称性 (extended supersymmetry) を持つ理論の BPS 状態というものが最近よく議論される。拡張された超対称代数には、中心荷電 Z が現れ得ることが知られている。このとき 1 粒子状態の質量 M と中心荷電 Z の間で $M > |Z|$ の状態と $M = |Z|$ の状態とでは自由度が異なっていることが超対称代数から示される。(これは、ベクトル粒子の質量に対して $m > 0$ と $m = 0$ とで自由度が異なることと本質的に同じ。) この $M = |Z|$ の状態を BPS 状態 (正確には、BPS saturated state) と呼び、その代数の表現の言葉では、small あるいは short

representationと呼ばれることもある。ここまで説明すれば、次の結果は自明であろう。

厳密な結果2

- $M = |Z|$ を満たすBPS状態は、量子補正によってこの関係は変更を受けない。

コメント

- 最近の研究で、拡張された超対称性ではない $\mathcal{N} = 1$ の超対称代数でも、キンク背景場の下でこのようなBPS状態が現れることが知られている:

  G. Dvali and M. Shifman, Nucl. Phys. **B504** (1997) 127 (hep-th/9611213).

スピン1の場合はこの辺で終わりにして、スピン2の場合に話を移そう。

スピン 2

		自由度
$g_{\mu\nu}$:	質量を持たないテンソル粒子	2
	質量を持つテンソル粒子	5

この表からわかるように、$m = 0$ の状態になるためには、$m \neq 0$ の状態の 5 つの自由度の内 3 つの自由度を取り除く必要がある。すなわち、3 つの自由度を取り除く対称性が存在すれば良い。予想は付くと思うが、答えは、

『一般座標変換の不変性』

である。一般座標変換の不変性を持つ理論は重力理論に他ならないので、

『質量を持たないスピン 2 の粒子は 必然的に 重力を記述する。』

コメント

- Poincaré 群の表現ということだけでは、質量を持たない粒子がどのような方程式に従うべきかは直接何も答えてくれない。しかし、質量がゼロと質量がゼロでない表現の違いを真面目に考えていけば、誰もが自然に (?!) Maxwell 方程式や Einstein 方程式に到達することだろう。このことに興味を持った読者は次のレビューが役に立つかも知れない:

  E. Alrarez, Rev. Mod. Phys. **61** (1989) 561.

  このように、Poincaré 対称性の中には Maxwell 方程式や Einstein 方程式が埋もれていたのだ! (もっと早く生まれていれば、Maxwell や Einstein より先に · · ·。)

これまでの考察から、質量を持たないスピン 1 と 2 の粒子を考えることによって、ゲージ不変性及び一般座標変換の不変性へ導かれ、それらは Maxwell 方程式や Einstein 方程式につながっていくのを見た。

そこで、この考察を更にもっと高いスピンを持つ質量ゼロの粒子に対して行えば、新しい未知の対称性あるいは理論を得ることができるのではないだろうか?!

残念ながら、この期待は裏切られる。次の定理がその希望を打ち砕く。

『 低エネルギーでスピン $\frac{5}{2}$ 以上の質量ゼロの粒子は
他の粒子との相互作用を持つことはできない。』

例えば、次の教科書の **13.1** 章を参照:

S. Weinberg, "The Quantum Theory of Fields,Vol.I", Cambridge University Press, 1995 (日本語訳あり).

実際、スピン $\frac{5}{2}$ 以上の質量ゼロ粒子に対する方程式は見つかっていない。残念ながら、この方向での新しい未知なる対称性や理論の発見は諦めざるを得ないようだ。

それでは、我々には未知なる領域が一体どれ程残されているのだろうか? これに関して驚くべき定理が存在する。それによると、もはや我々に残された最後のパラダイスは、

『 超対称性 (Supersymmetry) 』

のみなのである。その定理とは、

『 Coleman-Mandula/Haag-Lopuszanski-Sohnius の定理 』

S. Coleman and J. Mandula, Phys. Rev. **159** (1967) 1251,
R. Haag, J.T. Lopuszanski and M. Sohnius, Nucl. Phy. **B88** (1975) 257,

である。

この定理をかい摘んで言うと、自明でない相互作用を持つ相対論的場の量子論として許される対称性は、通常のゲージ対称性などを除くと、残りは超対称性のみであると主張するものである。(Coleman-Mandula の原論文は難しいが、前述の Weinberg の教科書の Vol.Ⅲ にその解説 (原論文よりは多少読みやすい) が載っている。)

従って、我々は相対論的場の量子論の枠内で許される全ての対称性を知ったことになる。

コメント

- この事実を知って、我々は神の領域に一歩近付いたと思う読者もいるだろうし、私のようにもう少し未知の領域を残して欲しかったと嘆く読者もいることだろう。上の定理はほとんど自明とも思える仮定から導き出されているので、この定理から逃れることはかなり難しい。

- それでも私は天の邪悪なので、この定理に抵触しない新しいタイプの対称性の可能性を秘かに探ったりしている。抜け道が全く無い訳ではない。例えば、この定理は状態の正定値性 (状態のノルムは正) を仮定しているので、負のノルムを持つ状態 (ゴースト場) が含まれているような系にはこの定理は適用されない。非可換ゲージ理論でゴースト場 (負のノルムを持つ) を導入した場合に現れる BRS 対称性は、その一例である。(BRS 対称性については、その第一人者である九後汰一郎氏の教科書

  “ゲージ場の量子論 I, II”, 陪風館

  に詳しく書かれている。でも、もう少し値段が安くなれば学生も買いやすいのに・・・。)

  それ以外には、Stochastic Quantization と呼ばれる量子化の方法があるが、そこでもゴースト場の導入によって BRS 変換的な対称性が現れ、この対称性によって空間の次元が 1 次元 (あるいは 2 次元) 下がった理論と等価になる。Stochastic Quantization のレビューは例えば、

  P.H. Damgaard and H. Hüffel, Phys. Rep. **152** (1987) 227.

  このように負のノルムの導入はこの定理から逃れる一例だ。これ以外にも可能性はあるだろう。金字塔のように輝く『Coleman-Mandula/Haag-Lopuszanski-Sohnius の定理』の本当の意味する所は一体何だろうか?

2.3　テクニカルな道具としての超対称性

超対称性なんて信じられないから勉強しなくていいやと思っている読者もいるかも知れない。だが、ちょっと待ってもらいたい。たとえ自然界で超対称性が実現されていなかったとしても超対称性は全く無用の産物という訳ではない。以下を読んで見て欲しい。(もっともそういう読者はこの講義ノートを読んでいないかな?!)

4 次元の場の量子論を厳密に解くことや非摂動論的効果を求めることは一般的に難しい。これらの問題にアタックするアプローチとして

- 時空の次元を下げて解きやすくする
- 有効理論に置き換える

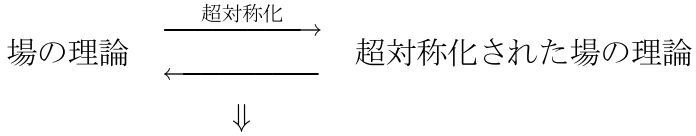
などが考えられる。しかし、これらの理論が解けたとしても、元の理論とのつながりがはっきりしない限り、本質的な問題の解決にはならないだろう。そこで物事の本質は変えずに、元の理論を解きやすい形に変更するようなアプローチとして次のような方法論が考えられるだろう。

『 対称性を課すことによって (縛りをきつくして) 問題を解きやすくする。』

あるいは

『 本質的な部分を取り出しやすくするために、あるいは逆に本質的ではないゴチャゴチャした部分を対称性を課して取り除く。』

この考え方に従って、超対称性に依存しない物理に対して、理論を超対称化して解くというアプローチが考えられる。



⇓

右の超対称化された場の理論を考察することによって、左の理論の性質を解き明かす。例えば、閉じ込めの機構は超対称性とは無関係だとすると、超対称 QCD 模型で閉じ込めの問題にアタックしても良いだろう。

では、超対称性は様々な問題を解く上で十分強力なのであろうか? 答えはこの講義ノートに書かれている。

そう、答えは、

その通り!

3　超対称性理論の基礎

この章では、この講義ノートを理解する上で必要とされる事柄に絞って、超対称性理論を紹介していく。そのため、他の教科書に書かれてあるような超対称性の導入のスタイルはとっていない。細かな定義や正確さにこだわる余りに本質を見失ってしまうことのないように、大胆なまでに枝葉を (時には幹さえも) バッサリ削ぎ落としてある。この講義ノートを理解する上で、どこが重要かあるいは気にしなくて良い点をなるべく指摘するようにしておいた。細かな定義などに惑わされずに本質を押えてもらいたい。既に超対称性理論を勉強した読者もこの章に目を通すことを強く勧める。これまで見逃していた重要なポイントを発見するかも知れない。

3.0　表記

- 計量 (metric) :

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \mathbf{0} \\ & & +1 & \\ & \mathbf{0} & & +1 \end{pmatrix} .$$

- γ-行列 :

$$\gamma^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mu} \\ \overline{\sigma}^{\mu} & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{+1} & \\ & \mathbf{-1} \end{pmatrix} .$$

但し、

$$\sigma^0 = \overline{\sigma}^0 = \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix} ,$$

$$\sigma^i = -\overline{\sigma}^i = \text{Pauli 行列} .$$

(3.1)

- 4 成分 Dirac v.s. 2 成分 Weyl スピノル:

$$\Psi \;=\; \begin{pmatrix} \psi \\ \overline{\chi} \end{pmatrix} \;. \tag{3.2}$$

但し、

Ψ : 4 成分 Dirac スピノル ,
ψ : 2 成分右巻き Weyl スピノル ,
$\overline{\chi}$: 2 成分左巻き Weyl スピノル .

コメント

- ここで気に止めておくことはほとんど無い。気にせず先に進もう!

3.1 超対称性とは?

ボゾン $\longleftrightarrow$ フェルミオン

(入れ替えの) 対称性

コメント

★★ ここで重要な事は、入れ替えられるボゾンとフェルミオンの自由度が同じでなければならないということである。

- 超対称性で結び付くボゾンとフェルミオンをお互いに superpartner(超相棒?) と呼ぶ。

3.2 カイラル/ベクトル超多重項

▷ カイラル超多重項 (chiral supermultiplet)

まず最初にスカラー場とスピノル場の間の超対称性を考えよう。このとき、スピノル場の (自由度の) 一番小さい表現である (右巻き)Weyl スピノルから出発するとわかりやすい。(**2.2** 章での表 1 を参照。)

右巻き Weyl スピノル場は 4 成分 Dirac スピノル場 Ψ が次式を満たすものとして定義される:

$$\gamma_5 \Psi_+ \quad = \quad +\Psi_+ \, . \tag{3.3}$$

3.0 章で定義した γ_5 の具体的な表示を用いると Ψ_+ は、

$$\Psi_+ \quad = \quad \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

と書けることがわかる。このとき ψ は 2 成分であり自由度は 2(粒子、反粒子の 2 自由度) である。超対称性を通じて Weyl スピノル場 ψ とペアを組むスカラー場は、**3.1** 章で強調した通り、自由度 2 を持っていなければならない。従って、スカラー場は実場で 2 つ、或は複素場で 1 つが必要とされる。

	複素スカラー場		Weyl スピノル場
	ϕ	$\longleftrightarrow$	ψ
自由度	2		2

(3.5)

この (ϕ, ψ) の組をカイラル超多重項と呼ぶ。

コメント

★★　スピノル場の自由度に合わせて、スカラー場は必然的に、実場ではなく複素場 (2 自由度) となる。スカラー場が複素場であるという事実は、後の解析で非常に重要な意味を持つ。

▷ ベクトル超多重項 (vector supermultiplet)

次に質量を持たないベクトル場 (ゲージ場) とスピノル場の間の超対称性を考えよう。質量を持たないベクトル場の (物理的な) 自由度は 2(**2.2** 章参照) なので、スピノル場の自由度も 2 でなければならない。自由度 2 のスピノル場は Weyl 型と Majorana 型の 2 種類が考えられるが、ゲージ場は実場なので、粒子、反粒子の区別を持たない Majorana スピノル場がゲージ場とペアを組む。

$$\begin{array}{lccc} & \text{ゲージ場} & & \text{Majorana} \\ & \text{(質量を持たない場)} & & \text{スピノル場} \\ & A_\mu & \longleftrightarrow & \lambda \\ \text{自由度} & 2 & & 2 \end{array} \tag{3.6}$$

コメント

- ゲージ群 G が非可換群のときは、それぞれの場に随伴表現のインデックスが付く。$\left(A^a_\mu, \lambda^a\,;\, a = 1, 2, \cdots, \dim(G)\,.\right)$
- Majorana スピノル場とは、荷電共役変換 (粒子、反粒子の入れ替え) の下で不変なスピノル場のことである。すなわち、c を荷電共役として

$$(\lambda)^c \;=\; \lambda. \tag{3.7}$$

したがって、Majorana スピノル場は粒子、反粒子の区別は無い。

- ベクトル場が質量を持っている場合は、ベクトル場の自由度が 3 となるため、このままでは、ボゾンとフェルミオンの自由度が等しくならない。このときは、更にボゾンの自由度 1、フェルミオンの自由度 2 を加えたものが超多重項を成す。(ボゾンの自由度＝フェルミオンの自由度＝ 4。)

3.3 超場形式

▷ カイラル超場 (chiral superfield)

前の章で、複素スカラー場 ϕ と 2 成分（右巻き）Weyl スピノル場 ψ がカイラル多重項を成すということを説明した。(ϕ, ψ) が超多重項をなすということは、(ϕ, ψ) が必ずペアで理論の中に現れるということである。そこでこの 2 つの場 (ϕ, ψ) をひとつの場—カイラル超場—で表すことを考えよう。このときボゾン場 ϕ とフェルミオン場 ψ の統計性の違いを補うために、(x によらない)2 成分 Weyl スピノル θ を導入する。θ は ψ と同じく反可換な量 (Grassmann 数) である。すなわち、

$$\theta^\alpha \theta^\beta \;=\; -\theta^\beta \theta^\alpha \qquad \Big(\text{特に、} (\theta^\alpha)^2 \;=\; 0\Big)\,. \tag{3.8}$$

この θ と ψ とで (スピノルの足に関して) 内積をとったもの $\theta \cdot \psi$ は Lorentz 変換の下でスカラーとなる。このようにして、ϕ と ψ を同時に含むカイラル超場 $\Phi(x, \theta)$ を次のように導入することができる:

$$\Phi(x, \theta) \;=\; \phi(x) + \sqrt{2}\theta \cdot \psi(x) + \cdots. \tag{3.9}$$

コメント

- 右辺第 3 項以降の「$\cdots$」は、以下での議論では重要でないので気にしないこと。右辺第 2 項の係数 $\sqrt{2}$ も気にしないこと。

★★ $\Phi(x, \theta)$ の表式で頭に入れておくべき重要な事は、次の 2 点である。

1. Φ は実場ではなく、複素場であること。
2. Φ は “本質的に” θ のみの関数で、$\bar{\theta} \equiv \theta^*$ にはよらないこと。

▷ 反カイラル超場 (anti-chiral superfield)

$$\Phi^* \left(x, \bar{\theta}\right) \;=\; \phi^* (x) + \sqrt{2}\bar{\theta} \cdot \overline{\psi} (x) + \cdots . \tag{3.10}$$

コメント

- $\bar{\theta} \equiv \theta^*$。
- $\overline{\psi} \equiv \psi^*$ は 2 成分左巻き Weyl スピノル場。

▷ ベクトル超場 (vector superfield)

カイラル超場と同様に、ベクトル超多重項 $\left(A_\mu^a, \lambda^a\right)$ に対して、それらを一まとめにしたベクトル超場 $V^a \left(x, \theta, \bar{\theta}\right)$ を導入することができる。この超場 V^a は $\left(A_\mu^a, \lambda^a\right)$ を次の形で含む:

$$\begin{aligned} V^a \left(x, \theta, \bar{\theta}\right) &= \cdots - \left(\theta \sigma^\mu \bar{\theta}\right) A_\mu - i \left(\bar{\theta} \cdot \bar{\theta}\right) \theta \cdot \lambda^a (x) + i (\theta \cdot \theta) \, \bar{\theta} \cdot \overline{\lambda}^a (x) + \cdots \\ &= \left(V^a \left(x, \theta, \bar{\theta}\right)\right)^* . \end{aligned} \tag{3.11}$$

あるいは場の強さのカイラル超場 (field strength chiral superfield) $\mathcal{W}^a (x, \theta)$ を導入することもできる:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^a (x, \theta) &\equiv -\frac{1}{4} \overline{D}^2 e^{-V} D e^V \qquad \longleftarrow \text{ 説明略} \\ &= -i\lambda^a (x) - i\sigma^{\mu\nu} \theta F_{\mu\nu}^a (x) + \cdots . \end{aligned} \tag{3.12}$$

ここで、

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &\equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \ , \\ \sigma^{\mu\nu} &\equiv \frac{1}{4} \left(\sigma^\mu \overline{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \overline{\sigma}^\mu\right) . \end{aligned} \tag{3.13}$$

但し、f^{abc} はゲージ群の構造定数である。

コメント

- 添字 a は、ゲージ群が非可換群のとき随伴表現のインデックスである。
- 「$\cdots$」と略記されている部分は気にしないこと。$V^a\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)$ と $\mathcal{W}^a\left(x,\theta\right)$ の詳細な定義は、以下での議論では全く必要ない。

★ 重要な事は $V^a\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)$ は (実場で)θ と $\bar{\theta}\ \equiv\ \theta^*$ の両方に依存し、$\mathcal{W}^a\left(x,\theta\right)$ は複素場で本質的に θ のみの関数 (カイラル超場) であるという点である。

▷ 超対称 Lagrangian

超対称性を持つ Lagrangian は、一般的に次の形に書き表すことができる:

$$\mathcal{L} \ = \ \underbrace{K\left(\Phi,\Phi^*,V\right)|_{\theta^2\bar{\theta}^2}}_{D\text{ 項}} + \underbrace{\left(W\left(\Phi,\mathcal{W}\right)|_{\theta^2}+\text{h.c.}\right)}_{F\text{ 項}}. \qquad (3.14)$$

これには少し解説が必要だろう。

- $K\left(\Phi,\Phi^*,V\right)$ は、Φ、Φ^*、V から成る (ゲージ不変な) 任意の関数。
- $W\left(\Phi,\mathcal{W}\right)$ は、Φ と $\mathcal{W}$ のカイラル超場のみ (あるいは θ のみ) から成る任意の関数。
- $|_{\theta^2\bar{\theta}^2}$ は、$K\left(\Phi,\Phi^*,V\right)$ を θ と $\bar{\theta}$ で展開して $\theta^2\bar{\theta}^2$ 項の係数を取り出すことを意味する。
- $|_{\theta^2}$ は、$W\left(\Phi,\mathcal{W}\right)$ を θ で展開して θ^2 項の係数を取り出すことを意味する。
- 右辺第 1 項は D 項、第 2 項は F 項と呼ばれる。また、$K\left(\Phi,\Phi^*,V\right)$ は Kähler ポテンシャル (Kähler potential)、$W\left(\Phi,\mathcal{W}\right)$ あるいは $W\left(\Phi,\mathcal{W}\ =\ 0\right)$ は超ポテンシャル (superpotential) と呼ばれることもある。

残念ながら、実際にこの Lagrangian が超対称性を持つことを示すためには、もう少し詳細な超場形式の議論が必要とされる。その

証明は他の教科書に譲るとして、ここではその概略のみを説明するに止める。

Lagrangian の第 1 項、第 2 項に対する超対称変換 (supertransformation) は次の構造を持つ:

$$\begin{aligned} \delta_s \left(K \left(\Phi, \Phi^*, V \right)|_{\theta^2 \bar{\theta}^2} \right) &= \partial_\mu X^\mu \ , \\ \delta_s \left(W \left(\Phi, \mathcal{W} \right)|_{\theta^2} \right) &= \partial_\mu Y^\mu . \end{aligned} \tag{3.15}$$

このように超対称変換の結果は全微分の形となる。(X^μ、Y^μ の具体的な表式は重要ではない。) 従って、Lagrangian(3.14) 式は超対称変換の下で不変ではないが、作用積分 (action) のレベルでは (全時空の積分がなされるので)、不変となっている。(時空の無限遠方で、場がゼロになると仮定する。)

コメント

ここで重要なポイントを列挙しておく。

★★ Lagrangian は、2 つの異なる構造を持ち、D 項と F 項から成る。

★★ F 項の超ポテンシャル $W(\Phi, \mathcal{W})$ は、カイラル超場 Φ 及び $\mathcal{W}$ のみの関数で、Φ^* や $\mathcal{W}^*$ にはよらない:

$$W = W \left(\Phi, \mathcal{W} \, ; \not{\Phi}^*, \not{\mathcal{W}}^* \right) = W \left(\Phi, \mathcal{W} \right) .$$

この性質を正則性 (holomorphy) と呼び、これからの議論で最も重要な性質の 1 つである。

★★ $W(\Phi, \mathcal{W})$ の中に現れる結合定数は一般に複素数にとれる。(この性質も後で重要となる。)

★ スカラー場及びスピノル場の運動項は D 項から得られ、ゲージ場の運動項は F 項から得られる。ゲージ相互作用は D 項に、他の相互作用やポテンシャルは一般に F 項に含まれる。

ここで、2 つ程超対称 Lagrangian の例を挙げておこう。

▷ Wess-Zumino 模型

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\rm WZ} &= \Phi^*\Phi|_{\theta^2\bar{\theta}^2} + \left(W(\Phi)|_{\theta^2} + \text{h.c.}\right) \\ &= \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - i\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi \\ &\quad - \left|\frac{\partial W(\phi)}{\partial\phi}\right|^2 - \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 W(\phi)}{\partial\phi^2}\psi\cdot\psi + \text{h.c.}\right). \quad (3.17)\end{aligned}$$

コメント

★ スカラーポテンシャル $\left|\frac{\partial W(\phi)}{\partial\phi}\right|^2$ は F 項から得られ、運動項は D 項から得られる。

★ 超ポテンシャル $W(\phi)$ の質量次元 (mass dimension) は、

$$[W] = 3. \quad (3.18)$$

なぜなら、Lagrangian の質量次元は 4、ϕ は 1 であるので、

$$[\mathcal{L}] = 4 \longrightarrow \left[\frac{\partial W}{\partial\phi}\right] = 2 \longrightarrow [W] = 3. \quad (3.19)$$

• 正確には、(3.17) 式の 2 つ目の等式は、補助場を消去して得られたものである。気にしないこと。

▷ 超対称 Yang-Mills 理論 (super Yang-Mills theory)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\rm SYM} &= \left(\frac{1}{4g^2} - i\frac{\theta_{\rm CP}}{32\pi^2}\right)\mathcal{W}^a\mathcal{W}^a\Big|_{\theta^2} + \text{h.c.} \\ &= \frac{1}{g^2}\left[-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a} - i\,\overline{\lambda}^a\overline{\sigma}^\mu D_\mu\lambda^a\right] - \frac{\theta_{\rm CP}}{32\pi^2}F^a_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu a}.\end{aligned} \tag{3.20}$$

但し、

$$\begin{aligned}\widetilde{F}^{\mu\nu a} &\equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F^a_{\lambda\rho}\ , \\ D_\mu\lambda^a &\equiv \partial_\mu\lambda^a - f^{abc}A^b_\mu\lambda^c.\end{aligned} \tag{3.21}$$

コメント

★★ $F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a}$ の前にゲージ結合定数 $\frac{1}{g^2}$ が現れている点に注意。この規格化では、共変微分 D_μ にゲージ結合定数は現れない。実際、

$$D_\mu\lambda^a = \partial_\mu\lambda^a - f^{abc}A^b_\mu\lambda^c$$

の第 2 項には、g が含まれない。ゲージ相互作用に関しては、このようにゲージ相互作用を表す共変微分の第 2 項 (上式参照) に結合定数が現れないような規格化が可能である。この性質は、**6** 章での非くりこみ定理の証明で重要な役割を果たす。

★★ 通常の場の量子論では、Lagrangian(3.20) 式に現れる 2 つの項

$$-\frac{1}{4g^2}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a} \quad , \quad -\frac{\theta_{\rm CP}}{32\pi^2}F^a_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu a}$$

の間には特別な関係は存在しなかったが、超対称性理論では、(3.20) 式からわかるようにそれぞれの項の係数は次の組み合わせで必ず現れる:

$$\frac{1}{4g_{\rm h}^2} \equiv \frac{1}{4g^2} - i\frac{\theta_{\rm CP}}{32\pi^2}\ . \tag{3.22}$$

(結合定数は全て複素化できることを思い起こせ。) この事実は、ゲージ結合定数 g の非くりこみ定理を証明する際に重要な役目を果たす。

★ $F^a_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu a}$ はゲージ不変量だが、CP の対称性を破る。CP 非保存の実験から $\theta_{\rm CP}$ は非常に小さくならなければならないことがわかっているが、何故このように小さいか (strong CP problem) は完全には理解されていない。また、この項は全微分の形に書き表すことができ ($F^a_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu a} \propto \partial_\mu X^\mu$)、摂動の範囲内では無視することができるが、実際はこの項は位相不変量であり、非摂動論的効果あるいはアノマリー (anomaly) を考慮する時には重要な役割を果たす。特に、Minkowski 時空から Euclid 空間にもっていったときに (Wick 回転)、インスタントン数と呼ばれる位相不変量を与える:

$$\frac{1}{32\pi^2}\int d^4x_{\rm E} F^a_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu a} \quad = \quad \text{インスタントン数.} \qquad (3.23)$$

インスタントンについてのわかりやすい解説が次の教科書に見られる:

T-P. Cheng and L-F. Li, "Gauge Theory of Elementary Particle Physics", Oxford.

3.4 超対称代数と超対称性の破れの指標

ここでは、超対称代数 (supersymmetry algebra) と超対称性の破れについて議論しよう。超対称変換を引き起こす生成子 (supercharge) を $\mathcal{Q}_\alpha$ としておく。このとき、$\mathcal{Q}_\alpha$ を 4 成分 Majorana スピノルとすると、$\mathcal{Q}_\alpha$ は次の反交換関係を満たす:

$$\mathcal{N}=1 \text{ 超対称代数}: \quad \{\mathcal{Q}_\alpha,\, \mathcal{Q}_\beta\} \quad = \quad (\gamma_\mu\gamma_0)_{\alpha\beta} P^\mu. \qquad (3.24)$$

コメント

- ここでは、γ 行列として Majorana 表示をとった。このとき、Majorana スピノル $\mathcal{Q}_\alpha$ は、$(\mathcal{Q}_\alpha)^* = \mathcal{Q}_\alpha$ を満たす。

- P_μ はエネルギー・運動量演算子である。
- 上での$\mathcal{N}$ は超電荷 (supercharge)$\mathcal{Q}_\alpha$ の種類の数を表わす。$\mathcal{N} \geq 2$ の場合を拡張された (extended) 超対称代数と呼ぶ。

(3.24) 式の両辺のトレースをとると、

$$2\sum_{\alpha=1}^{4}\left(\mathcal{Q}_\alpha\right)^2 \;=\; 4P^0 \;=\; 4H. \tag{3.25}$$

(但し、H は Hamiltonian)
すなわち、

$$H \;=\; \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{4}\left(\mathcal{Q}_\alpha\right)^2 . \tag{3.26}$$

このことから、エネルギー固有値 E は次式を満たすことがわかる:

$$E \;\geq\; 0\,. \tag{3.27}$$

≪ 証明 ≫

Hamiltonian$H$ の固有値 E に属する固有状態を $|E\rangle$ としておく。
すなわち、

$$H|E\rangle \;=\; E|E\rangle\,. \tag{3.28}$$

両辺に左から $\langle E|$ を乗じて、

$$\langle E|H|E\rangle \;=\; E\langle E|E\rangle \tag{3.29}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{4}\langle E|\left(\mathcal{Q}_\alpha\right)^2|E\rangle \;=\; E\langle E|E\rangle\,. \tag{3.30}$$

$\left(\mathcal{Q}_\alpha\right)^* \;=\; \mathcal{Q}_\alpha$ であることを思い出すと、

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{4}\|\;\mathcal{Q}_\alpha|E\rangle\;\|^2 \;=\; E\,\|\;|E\rangle\;\|^2\,. \tag{3.31}$$

すなわち、

$$E \;=\; \frac{\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{4} ||\;\mathcal{Q}_\alpha|E\rangle\;||^2}{4\,||\;|E\rangle\;||^2} \;\geq\; 0\,. \tag{3.32}$$

ここで、$||\;|E\rangle\;||$ は、状態 $|E\rangle$ のノルムを表す。 //　　証明終わり

実際、tree レベルでのスカラーポテンシャルは次の形で与えられ、確かに正定値をとる:

$$V(\phi) \;=\; \sum_a (D^a)^2 + \sum_i |F_i|^2 \;\geq\; 0\,. \tag{3.33}$$

但し、

$$\begin{aligned} D^a \;&\equiv\; \sum_i \phi_i^\dagger T^a \phi_i \qquad (T^a\text{はゲージ群の生成子})\,, \\ F_i \;&\equiv\; -\left(\frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi_i}\right)^*\,. \end{aligned} \tag{3.34}$$

コメント

- ゲージ群が $U(1)$ を含むときは、D には更に定数を加えることができる。この項は、後に超対称性の破れの機構とも関係する。

▷　超対称性の破れ

超対称性が破れていないということは、真空が超対称変換の下で不変 $(Q_\alpha|0\rangle = 0)$ であるということである。このとき、次のような一連の関係が成り立つ:

$$\begin{aligned} \text{超対称性が破れていない} \;&\longleftrightarrow\; \mathcal{Q}_\alpha|0\rangle \;=\; 0 \\ &\longleftrightarrow\; H|0\rangle \;=\; 0 \\ &\longleftrightarrow\; E_0 \;=\; 0\,. \end{aligned} \tag{3.35}$$

但し、E_0 は真空のエネルギー。

コメント

- 1 行目から 2 行目で、$\mathcal{Q}_\alpha|0\rangle = 0 \longrightarrow H|0\rangle = 0$ は自明だが、反対方向の矢印は次のようにして示される:

$$\begin{aligned} H|0\rangle = 0 &\longrightarrow \sum_\alpha \left(\mathcal{Q}_\alpha\right)^2 |0\rangle = 0 \\ &\longrightarrow \sum_\alpha \langle 0| \left(\mathcal{Q}_\alpha\right)^2 |0\rangle = 0 \\ &\longrightarrow \sum_\alpha || \ \mathcal{Q}_\alpha|0\rangle \ ||^2 = 0 \quad (\text{なぜなら、} \mathcal{Q}_\alpha^* = \mathcal{Q}_\alpha) \\ &\longrightarrow \mathcal{Q}_\alpha|0\rangle = 0 \ . \quad // \end{aligned} \tag{3.36}$$

(3.35) の対偶をとると次の関係を得る:

$$\begin{aligned} \text{超対称性が破れている} &\longleftrightarrow \mathcal{Q}_\alpha|0\rangle \neq 0 \\ &\longleftrightarrow H|0\rangle \neq 0 \\ &\longleftrightarrow E_0 \neq 0 \quad (E_0 > 0) \ . \end{aligned} \tag{3.37}$$

従って、超対称性の破れは真空エネルギーを求めればわかることになる。すなわち、

$$\begin{aligned} E_0 = 0 &\longleftrightarrow \text{超対称性は破れていない} \ , \\ E_0 \neq 0 &\longleftrightarrow \text{超対称性は破れている} \ . \end{aligned} \tag{3.38}$$

コメント

- 超対称性の破れの指標として、真空のエネルギー以外にも、フェルミオン場の超対称変換に対する真空期待値も秩序変数 (order parameter) となり得る:

$$\langle \delta_s \psi \rangle \neq 0 \longrightarrow \text{超対称性の破れ} \ . \tag{3.39}$$

3.5 $\mathcal{R}$ 対称性

超対称性理論固有の対称性として、$\mathcal{R}$ 対称性と呼ばれるものがある。この対称性は後の解析でも使われるので、ここで紹介しておこう。

超対称性理論における Lagrangian は、次の変換の下で不変である。超ポテンシャルを $W(\theta)$ と書くと、

$$W(\theta) \quad \xrightarrow{\mathcal{R}} \quad e^{2i\alpha} W\left(e^{-i\alpha}\theta\right) . \tag{3.40}$$

≪ 証明 ≫

超対称性理論の F 項は、$W(\theta)$ の θ^2 の項の係数を取り出したものなので、形式的に、

$$W(\theta)|_{\theta^2} \quad = \quad \frac{\partial W(\theta)}{\partial \theta^2} \tag{3.41}$$

と書いても良いだろう。このとき、(3.40) の変換で F 項は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(\theta)}{\partial \theta^2} \quad &\xrightarrow{\mathcal{R}} \quad \frac{\partial e^{2i\alpha} W\left(e^{-i\alpha}\theta\right)}{\partial \theta^2} \\ &= \quad \frac{\partial^2 W(\theta')}{\partial \theta'^2} \quad \left(\theta' \equiv e^{-i\alpha}\theta\right) \\ &= \quad W(\theta')|_{\theta'^2} \end{aligned} \tag{3.42}$$

となり F 項は不変である。 // 証明終わり

コメント

★　θ、$\bar{\theta}$ の $\mathcal{R}$ 電荷をそれぞれ -1、$+1$ とすると超ポテンシャルの $\mathcal{R}$ 電荷は 2 である。

- この対称性はちょっと特殊で $\mathcal{R}$ 変換によって Lagrangian は不変にするが、超ポテンシャル W は不変ではない。他の対称性は、一般に Lagrangian のみならず超ポテンシャル W 自身も不変にする。
- $\mathcal{R}$ 変換は θ の位相を回転させるので、同じ超多重項の中でもボゾンとフェルミオンは異なる $\mathcal{R}$ 電荷を持つ。

4　超対称性は何故パワフルなのか?

超対称性理論では、何故数多くの厳密な結果が得られているのか? その理由の 1 つは、F 項の持つ正則性の性質にある。(もちろんこれだけではない。) このことを実感するために次の問題を考えて見よう。

問題

z のみの関数 $f(z)$ が (無限遠方も含めて) 至る所解析的で、$f(\infty) = 0$ を満たすとしよう。
このような性質を満たす関数 $f(z)$ を求めよ。

i) $z \in \mathbf{R}$

まず z が実数の時を考えよう。この場合、上記の条件を満たす関数として、例えば、

$$f(z) \;=\; \frac{1}{1+z} \;,\; e^{-z^2} \;,\; \frac{1}{e^z + e^{-z}} \;,\; \cdots . \tag{4.1}$$

このように実関数の場合、解析性は $f(z)$ の関数形を制限するには条件が弱過ぎる。

ii) $z \in \mathbf{C}$

一方、z が複素数の場合は、$f(z)$ を z のみの (z^* を含まない) 複素関数とすると事態は一変する。このとき、$f(z)$ は一意的に決まり、

$$f(z) \;=\; 0 \tag{4.2}$$

でなければならない。

この結果は次の Liouville の定理から導かれる。

Liouville の定理

- $f(z)$ が至る所解析的で、$|f(\infty)| < \infty$ ならば $f(z)$ は定数である。

この定理を逆読みすると、

『 任意の正則な (z のみに依存し、z^* によらない) 関数は、その漸近的振る舞いと特異点の構造によって決定される。』

コメント

- 残念ながら本講義では、正則性のパワーの一部しか垣間見ることができない。正則性の性質を最大限に用いて解析に成功した例として、$\mathcal{N}$=2 Seiberg-Witten 模型がある。余力のある読者は一読を勧める:

  N. Seiberg and E. Witten, Nucl. Phys. **426** (1994) 19; **431** (1994) 484.

  Liouville の定理を逆読みしたものの中に現れる「漸近的振る舞い」や「特異点」の意味する所は、上記の Seiberg-Witten の論文を読むとわかるだろう。大雑把に言うと、漸近的振る舞いは摂動論的解析から押えられ、特異点は非摂動論的効果と関係する。そして、この 2 つの情報を元に、全体を再構築することができることを主張しているのである。

5　準備

ここでは次の章で用いられる重要な定義やテクニックを紹介する。

5.1　Wilson 流有効作用積分

これから量子補正を摂動論的にあるいは非摂動論的に議論していく訳だが、そのためには量子補正の定義を明確にしておく必要がある。

通常の教科書であれば、Feynman 規則 (Feynman rule) を導いて、摂動計算あるいはくりこみ (renormalization) へと進むことが多い。ここではやや形式的ではあるが (この方が後での議論では都合が良い)、経路積分表示に基づく Wilson による定式化を採用する。Wilson 流のくりこみについての詳しい議論は、Wilson 自身による解説がある:

K.G. Wilson and J. Kogut, Phys. Rep. **12C** (1974) 75.

あるいは次の教科書にも解説が与えられている:

M.E. Peskin and D.V. Schroder, "An Introduction to Quantum Field Theory ～ chapter 12", Addison-Wesley.

まず、次の経路積分表示から出発する:

$$Z \equiv \int \prod_{0 \leq |p| \leq \Lambda} [d\Phi(p)]\, e^{iS^{\Lambda}[\Phi]}\,. \tag{5.1}$$

表記を簡略化するため、ここでは Φ はスカラー場、スピノル場、ゲージ場を代表して書かれている。p は (正確には Euclid 化された)4 元運動量で、$\Phi(p)$ は場 $\Phi(x)$ の Fourier 変換されたものであり、上式では運動量の大きさについて $0 \leq |p| \leq \Lambda$ の範囲内での $\Phi(p)$ についての (汎関数) 積分を、形式的に $\int \prod_{0 \leq |p| \leq \Lambda} [d\Phi(p)]$ と表記した。

作用積分 $S^{\Lambda}[\Phi]$ は、$0 \leq |p| \leq \Lambda$ の範囲の運動量成分しか含まれていなことからも推測されるように、Λ 以下でのスケールの物理を記述する "tree" レベルの作用積分 ("tree" action) と見なすことができる。Λ はカットオフ (cutoff) を表し、Λ 以上のスケールの物理はこの作用積分 $S^{\Lambda}[\Phi]$ では記述することができない。$S^{\Lambda}[\Phi]$ はあくまでも Λ 以下でのスケールの物理を記述する作用積分である。(但し、Λ 以上のスケールの情報は $S^{\Lambda}[\Phi]$

の中に取り込まれていると考える。) $S^{\Lambda}[\Phi]$ がくりこみ可能な相互作用のみを含んでいれば、$\Lambda \to \infty$ とすることができ、そのときは全てのスケール $(0 \leq |p| < \infty)$ の物理を記述する作用積分と見なせる。(このことは逆に、カットオフ Λ を有限にとる限り、$S^{\Lambda}[\Phi]$ はくりこみ可能な相互作用に限定する必要がないことを意味する。)

次に Λ より低いエネルギースケール μ を考え、運動量の大きさを μ 以下と μ 以上に分け、μ 以上の運動量を持つ $\Phi(p)$ 成分を改めて $\widehat{\Phi}(p)$ と書くことにする:

$$\widehat{\Phi}(p) \;=\; \begin{cases} \Phi(p) & \text{for} \quad \mu < |p| \leq \Lambda \\ 0 & \text{for} \quad 0 \leq |p| \leq \mu \end{cases} . \tag{5.2}$$

この $\widehat{\Phi}(p)$ 成分について、(5.1) 式の中で積分を実行して次のように書き表すことにする:

$$\begin{aligned} Z &= \int \prod_{0 \leq |p| \leq \mu} [d\Phi(p)] \prod_{\mu \leq |p| \leq \Lambda} \left[d\widehat{\Phi}(p)\right] e^{iS^{\Lambda}\left[\Phi+\widehat{\Phi}\right]} \\ &= \int \prod_{0 \leq |p| \leq \mu} [d\Phi(p)]\, e^{iS^{\mu}_{\text{eff}}[\Phi]} . \end{aligned} \tag{5.3}$$

こうして定義される $S^{\mu}_{\text{eff}}[\Phi]$ を Wilson 流有効作用積分 (Wilsonian effective action) と呼ぶ。$S^{\mu}_{\text{eff}}[\Phi]$ は運動量の大きさが μ 以下のモードのみを含み、μ 以下のスケールの物理を記述する。$S^{\mu}_{\text{eff}}[\Phi]$ は ($S^{\Lambda}[\Phi]$ が有限個の相互作用しか含まなくても)、一般に無限個の相互作用項を含み、μ 以上のスケールの情報はそれらの無限個の係数に含まれている。つまり、$S^{\Lambda}[\Phi]$ で記述される物理も $S^{\mu}_{\text{eff}}[\Phi]$ で記述される物理も、μ 以下のスケールに限るならば、どちらも全く等価な物理を記述する。

ここで、$S^{\Lambda}[\Phi]$ と $S^{\mu}_{\text{eff}}[\Phi]$ の物理的意味を下にまとめておく。

- $S^{\Lambda}[\Phi]$:

  $S^{\Lambda}[\Phi]$ はカットオフスケール Λ 以下の物理を記述する作用積分。Λ を有限にとる限り、くりこみ可能な作用積分を採用する必要はない。($\Lambda \to \infty$ ととりたいときは、S^{∞} としてくりこみ可能な作用積分をとる。) Λ 以上のスケールのモードは含まれていない。

- $S^{\mu}_{\text{eff}}[\Phi]$:

  $S^{\mu}_{\text{eff}}[\Phi]$ は、μ 以下のスケールのモードのみを含み、μ 以下のスケールの物理を記述する有効作用積分。μ 以上のスケールでの情報は、

$S^{\mu}_{\rm eff}\left[\Phi\right]$ の (一般に) 無限個の係数に含まれている。μ 以下のスケールの物理に限定するなら、$S^{\Lambda}\left[\Phi\right]$ と $S^{\mu}_{\rm eff}\left[\Phi\right]$ は全く同じ物理結果を与える。

もう少し具体的なイメージを得るために、$S^{\Lambda}\left[\Phi\right]$ として超対称ゲージ理論の作用積分を考えて見よう:

$$S^{\Lambda}\left[\Phi,\Phi^{*},V\right] \;=\; \int d^{4}x\left\{\Phi^{*}e^{V}\Phi\Big|_{\theta^{2}\bar{\theta}^{2}}+\left[\left(\frac{1}{4g^{2}}\mathcal{W}^{a}\mathcal{W}^{a}+W_{\rm tree}\left(\Phi\right)\right)\Big|_{\theta^{2}}+{\rm h.c.}\right]\right\}\ . \tag{5.4}$$

右辺第 1 項は、カイラル超場 Φ の運動項とゲージ相互作用を与え、第 2 項はゲージ場 (ベクトル超多重項) の運動項、第 3 項は Φ の自己相互作用を与える。このとき、$S^{\mu}_{\rm eff}\left[\Phi\right]$ は一般に次のような形で与えられるだろう:

$$\begin{aligned}S^{\mu}_{\rm eff}\left[\Phi,\Phi^{*},V\right] \;=\; \int d^{4}x\,\Big\{&\left[Z_{\Phi}\Phi^{*}e^{V}\Phi+\cdots\right]\Big|_{\theta^{2}\bar{\theta}^{2}}\\&+\left[\left(\frac{1}{4g^{2}_{\rm eff}}\mathcal{W}^{a}\mathcal{W}^{a}+W_{\rm eff}\left(\Phi\right)+\cdots\right)\Big|_{\theta^{2}}+{\rm h.c.}\right]\Big\}\ .\end{aligned} \tag{5.5}$$

一般に $S^{\Lambda}\left[\Phi,\Phi^{*},V\right]$ に含まれていた項 $\Phi^{*}e^{V}\Phi$ や $\mathcal{W}^{a}\mathcal{W}^{a}$ の前の係数は元の値からずれ、$W_{\rm tree}$ に含まれていた相互作用の結合定数も一般には元と異なり得るだろう。また、「$\cdots$」で表されている部分のように、元々の $S^{\Lambda}\left[\Phi,\Phi^{*},V\right]$ に含まれていなかった (くりこみ可能でない) 相互作用項も一般に無限個現れ得る。

この講義ノートでは、$S^{\mu}_{\rm eff}\left[\Phi\right]$ に現れる係数について (全てではないが)、摂動の全次数あるいは非摂動論的に厳密に決定することが目的の 1 つである。

コメント

- Wilson 流の有効作用積分は、質量ゼロのモードが存在しなければ、1 粒子既約有効作用積分 (one-particle-irreducible effective action) と同じものを与える。しかしながら、質量ゼロのモードがあると一般に両者の結果は異なる。これは、質量ゼロのモードによる赤外発散と関係し、Wilson 流の有効作用積分は定義 (5.3) 式からわかるようにゼロモード ($p = 0$ のモード) を積分しないので、(1 粒子既約の有効作用積分と違って) その寄与を含まない。一般に赤外発散の問題は難しいのでここでは深入りしないことにする。興味のある読者は次の論文を参照 (でも、この論文は難解。) :

  M. Shifman and A. Vainshtein, Nucl. Phys. **B277** (1986) 456; **B359** (1991) 571.

- 有効作用積分には、理論の持つ対称性と矛盾しない項は一般的に全て現れる (禁止される理由がない?!) と期待される。しかしながら、超対称性理論の場合、対称性からは禁止されないにも関わらず、有効作用積分には現れない項が存在する。何故そのようなことが起こり得るかを明らかにすることも本講義の目的の 1 つである。

5.2 定数から場への格上げ

作用積分あるいは Lagrangian に含まれている質量や結合定数は時空の座標にはよらない定数であるが、それらを時空座標に依存する場だと思って計算し、計算の最後に元の定数に置き換えるというテクニックがある。ここでは、超対称性理論を考えているので超場に格上げすることを考える。λ を質量や結合定数を表すものとして、次のように超場に置き換える:

$$\lambda \longrightarrow \begin{cases} \lambda(x,\theta) & F \text{ 項の中では} \\ \lambda\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) & D \text{ 項の中では} \quad . \end{cases} \tag{5.6}$$

F 項の中ではカイラル超場しか含まれないので、λ はカイラル超場 $\lambda(x,\theta)$ に格上げされ、D 項の中は一般に θ と $\bar{\theta}$ の両方に依存することができるので、ベクトル超場と同様に θ と $\bar{\theta}$ に依存した $\lambda\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)$ に格上げすることにする。

コメント

★　このアイデア (定数 → 場) は、上記の説明からわかるように超対称性理論に限ったものではない。一般の場の量子論に対しても同様に使えるテクニックである。後の **6.4** 章で、3 次元ゲージ理論の Chern-Simons 項の非くりこみ定理の証明でその応用例を見ることができる。

- $\lambda(x,\theta)$ や $\lambda\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)$ だと思って計算の最後で元々の値 (定数) に置き換えると思っても良いし、それらを本当の場として運動項を加え、Feynman 図の内線に伝播させても良い。但し、そのときは運動項の前の係数を最終的に無限大にもっていくことによって (このとき伝播関数は 0 になる)、Feynman 図の内線に λ が伝播するグラフは実質効かないようにする。以下の議論はこれらの詳細にはよらない。

5.3　正則性

超対称性理論を特徴付ける最も重要な性質は正則性 (holomorphy) である。F 項はカイラル超場のみの関数で反カイラル超場は含まれない。このことから、結合定数 (及び質量)λ_I を含めて、超ポテンシャル W は (これは、tree レベルであろうが量子補正を含めた有効超ポテンシャルであろうが)、次の性質を満たす:

$$W \;=\; W\left(\Phi_i, \mathcal{W}^a, \lambda_I\,;\, \cancel{\Phi}^*, \cancel{\mathcal{W}}^*, \cancel{\lambda}_I^*\right) = W\left(\Phi_i, \mathcal{W}^a, \lambda_I\right). \qquad (5.7)$$

コメント

- 上の性質は、F 項が本質的に θ のみの関数で $\bar{\theta}$ によってはならないことに起因しているが、何故結合定数の複素共役 λ_I^* に依存しないかは少し説明がいるだろう。この事実は、前の **5.2** 章で述べた、λ_I を超場 (今の場合 F 項なのでカイラル超場 $\lambda_I(x,\theta)$) に格上げすることによって理解できるだろう。つまり、λ_I をカイラル超場 $\lambda_I(x,\theta)$ だと思うと、超ポテンシャル W の中には反カイラル超場 $\lambda_I^*(x,\bar{\theta})$ が現れることはできない。

- 正則性が量子効果で破れない限り、量子補正を含んだ有効超ポテンシャルに対しても (5.7) 式の性質は保たれる。Wilson 流の有効作用積分は正則性の性質を壊さないと思われている。
- D 項は、θ と $\bar{\theta}$ の両方に依存するので正則性の性質は持たない。
- 一般の場の理論は、正則性の性質を持たないが、もしそのような性質を持つ理論が見つかれば、後の **6** 章で得られるような様々な結果は、その理論に対しても適用できるかも知れない。

5.4 対称性

ここで使われる “対称性” は、通常用いられる対称性という言葉より広い意味で使われる。ここでの “対称性” とは、超場に対してだけでなく結合定数や質量にも変換性を与えて得られる広い意味での理論の対称性を指す。

具体的な例を挙げて説明した方がわかりやすいだろう。次の Lagrangian を考えよう:

$$\mathcal{L}(\phi,\lambda) \;=\; \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - \lambda\phi^4 - \lambda^*(\phi^*)^4 \,. \tag{5.8}$$

この Lagrangian は次の $U(1)$ 変換の下で不変である:

$$\begin{aligned} \phi \;&\longrightarrow\; \phi' \;=\; e^{i\alpha}\phi \;, \\ \lambda \;&\longrightarrow\; \lambda' \;=\; e^{-4i\alpha}\lambda \,. \end{aligned} \tag{5.9}$$

すなわち、

$$\mathcal{L}\left(e^{i\alpha}\phi, e^{-4i\alpha}\lambda\right) \;=\; \mathcal{L}(\phi,\lambda) \;. \tag{5.10}$$

従って、この対称性が (量子補正によって) 破れない限り、有効 Lagrangian もこの対称性を保っているはずである:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}\left(e^{i\alpha}\phi, e^{-4i\alpha}\lambda\right) \;=\; \mathcal{L}_{\text{eff}}(\phi,\lambda) \;. \tag{5.11}$$

コメント

上の “対称性” の議論を読んで混乱している読者もいるだろう。幾つかコメントを加えておこう。

- 上の例では、結合定数 λ も変換しているので、この “対称性” に基づく保存カレントや保存量は存在しない。(Noether の定理は適用できない。この “対称性” は通常の意味ではなく、単に選択則を導くためのものと考えても良い。)

- 上記の “対称性” の意味することを正確に言うと、$\mathcal{L}(\phi, \lambda)$ で定義される理論と異なる結合定数を持つ理論 $\mathcal{L}(\phi', \lambda')$ の間に、$\phi' = e^{i\alpha}\phi$ 及び $\lambda' = e^{-4i\alpha}\lambda$ なる関係があれば、両者の理論は量子論的に等価 (物理的に 1 対 1 対応) であるということである。結合定数が異なればそれらは違う理論なので、λ を変換する以上同じ理論 (同じ結合定数を持つ理論) の持つ対称性ではない。

- ここでの “対称性” を次のように解釈できるかも知れない。

  「λ を場 (field) だと思ってその “場” がゼロでない真空期待値を持って対称性が “自発的に” 破れた。」

- カイラル対称性のように対称性が量子補正によるアノマリーによって破れるときでも、ゲージ結合定数に適当なカイラル変換を与えてやると、見かけ上、対称性が回復したようにすることができる。

- “対称性” が自発的に破れる場合でも、$\mathcal{L}_{\text{eff}}$ はこの “対称性” を持つ。なぜなら、自発的対称性の破れの場合は、$\mathcal{L}_{\text{eff}}$ 自身が対称性を破っているのではなく、真空の配位が対称性を破っているからである。

★ 明らかなように、ここでの “対称性” の議論は超対称性とは無関係に成り立つ。

6　厳密な結果とその秘密

今までの準備をもとに、いよいよ摂動論の全次数、あるいは非摂動論的に厳密な様々な結果を導いていくことにする。そして、何故そのような厳密な結果が得られるのかの秘密を明らかにしていこう。この章のスタイルは、厳密な結果が成り立つための重要なポイントを「秘密」という形でまず抜き出しておく。その後で、その「秘密」に基づく厳密な結果の紹介と証明を与えることにする。

6.1　F 項の非くりこみ定理 I

まず手始めに、Wess-Zumino 模型の超ポテンシャルに関する非くりこみ定理を紹介する。この定理を証明するために必要とされる秘密は次の 2 つである。

秘密 2

N 個の複素数 $z_i (i = 1, \ldots, N)$ からなる複素関数 $f(z_1, \ldots, z_N)$ を考える。このとき、M 種類の保存 “電荷” が存在し、$\{z_1, \ldots, z_N\}$ が非自明な電荷を持っている場合、一般に $f(z_1, \ldots, z_N)$ は $N - M$ 個の複素数に依存する関数となる。

$$f(z_1, \ldots, z_N) = g(z'_1(z), \ldots, z'_{N-M}(z)). \tag{6.1}$$

特に、$N \leq M$ のときは、z 依存性は一意的に決まる。

秘密 3

次の性質を満たす関数 $f(x, y)$ を考えよう。

$$f(x, y) \quad \xrightarrow{x,y \to 0} \quad 1. \tag{6.2}$$

もし、上の極限が x と y を 0 にもっていく極限の取り方によらず、かつ、$f(x, y)$ が $z \equiv x/y$ のみの関数ならば

$$f(x, y) = 1 \tag{6.3}$$

である。

≪ 説明 ≫

秘密 2 の方は具体例で考えるとわかりやすいだろう。簡単のため、$f(z_1, z_2)$ が 2 つの複素数 z_1, z_2 の複素関数とし、2 つの保存電荷 Q, R があったとしよう。z_1, z_2 及び f の電荷をそれぞれ

$$\begin{aligned} Q(z_1) = q_1, \quad Q(z_2) = q_2, \quad Q(f) = q_f, \\ R(z_1) = r_1, \quad R(z_2) = r_2, \quad R(f) = r_f, \end{aligned} \tag{6.4}$$

としておこう。z_1, z_2 及び f が上の保存電荷を持っている（あるいは定義できる）ということは、関数 $f(z_1, z_2)$ が次式を満足することを意味する。

$$\begin{aligned} f(\mathrm{e}^{iq_1\alpha} z_1, \mathrm{e}^{iq_2\alpha} z_2) = \mathrm{e}^{iq_f\alpha}\, f(z_1, z_2), \\ f(\mathrm{e}^{ir_1\beta} z_1, \mathrm{e}^{ir_2\beta} z_2) = \mathrm{e}^{ir_f\beta}\, f(z_1, z_2). \end{aligned} \tag{6.5}$$

この関数が任意の α, β に対して成り立たなければならないということは、f の z_1, z_2 依存性は次式でなければならないことを意味する。

$$f(z_1, z_2) = c\,(z_1)^n\,(z_2)^m \tag{6.6}$$

ただし、n, m は次の方程式の解である。

$$\begin{cases} nq_1 + mq_2 = q_f, \\ nr_1 + mr_2 = r_f. \end{cases} \tag{6.7}$$

(6.6) 式の c は複素定数で、この議論の範囲内では決めることができない。

秘密 3 に関しては、条件より $z = \frac{x}{y}$ とおくと

$$f(z) \quad \xrightarrow{x,y\to 0} \quad 1. \tag{6.8}$$

仮定より、x, y の 0 への極限の取り方によらず、上の関係が成り立つので、$\frac{x}{y}$ すなわち z を任意の値に固定して $x, y \to 0$ ととることによって上式は

$$f(z) \quad \longrightarrow \quad 1 \quad \text{for } \forall z \tag{6.9}$$

となる。これは、$f(z) = f(x, y) = 1$ を意味する。// 説明終わり

さて、この秘密 2 と 3 を用いて次の非くりこみ定理を証明しよう。

厳密な結果 3

Wess-Zumino 模型の超ポテンシャル（superpotential）

$$W_{\rm tree}(\Phi, m, \lambda) = m\Phi^2 + \lambda\Phi^3 \tag{6.10}$$

への量子補正は、摂動論的にも非摂動論的にもない。すなわち、

$$W_{\rm eff}(\Phi, m, \lambda) = W_{\rm tree}(\Phi, m, \lambda). \tag{6.11}$$

≪ 証明 ≫

まず、Wess-Zumino 模型の持つ “対称性”（**5.4** 章参照）を調べよう。上の結果を導くには、$U(1)$ 対称性と質量次元を考慮すれば十分である。超ポテンシャル $W_{\rm tree}$ の $U(1)$ 電荷がゼロ、質量次元が 3 であることに注意すれば、それぞれの量の $U(1)$ 電荷と質量次元は次のように与えられることがわかる。

	Φ	m	λ	$W_{\rm tree}$
$U(1)$ 電荷	1	-2	-3	0
質量次元	1	1	0	3

(6.12)

量子補正を加えた有効超ポテンシャル $W_{\rm eff}$ も $W_{\rm tree}$ と同じ量子数を持っているはずなので、$W_{\rm eff}$ の $U(1)$ 電荷と質量次元は

	$W_{\rm eff}$
$U(1)$ 電荷	0
質量次元	3

(6.13)

となる。それでは、$W_{\rm eff}$ の関数形をこれまで述べてきたテクニックを用いて決定していこう。まず超ポテンシャルの正則性から

$$\begin{aligned} W_{\rm eff} &= W_{\rm eff}(\Phi, m, \lambda; \cancel{\Phi^*}, \cancel{m^*}, \cancel{\lambda^*}) \\ &= W_{\rm eff}(\Phi, m, \lambda). \end{aligned} \tag{6.14}$$

次に、結果を予想して $W_{\rm eff}$ を次のように書き表す。

$$W_{\rm eff} \equiv (m\Phi^2 + \lambda\Phi^3)\, f(\Phi, m, \lambda). \tag{6.15}$$

(注：これは関数 $f(\Phi, m, \lambda)$ の定義であって、ここではまだ何も仮定していない。)

$W_{\rm eff}$ 及び Φ, m, λ の量子数から関数 f の $U(1)$ 電荷と質量次元は、共にゼロであることがわかる。

	f
$U(1)$ 電荷	0
質量次元	0

(6.16)

従って、f は Φ, m, λ の関数であるが、2 つの保存 “電荷” の存在のため本質的に 1 変数の関数となる（秘密 2 参照）。すなわち、

$$W_{\rm eff} \equiv (m\Phi^2 + \lambda\Phi^3)\, f\left(\lambda\frac{\Phi}{m}\right). \tag{6.17}$$

(注：$\lambda\frac{\Phi}{m}$ は、$U(1)$ 電荷、質量次元ともにゼロの組み合わせである。)
ここで、$\lambda, m \to 0$ の極限を考えて見る。この極限は自由場の理論への極限（結合定数 $\lambda \to 0$ の極限）なので、（この極限が存在すれば）量子補正はゼロに近付き、$W_{\rm eff}$ と $W_{\rm tree}$ の比は漸近的に 1 に近付くはずである。すなわち、

$$\frac{W_{\rm eff}(\Phi, m, \lambda)}{W_{\rm tree}(\Phi, m, \lambda)} \quad \xrightarrow{\lambda, m \to 0} \quad 1. \tag{6.18}$$

(6.17) 式を代入すると

$$f\left(\lambda\frac{\Phi}{m}\right) \quad \xrightarrow{\lambda, m \to 0} \quad 1. \tag{6.19}$$

ここで、秘密 3 を用いると $f\left(\lambda\frac{\Phi}{m}\right) \equiv 1$ が結論付けられ、次式を得る。

$$\begin{aligned} W_{\rm eff}(\Phi, m, \lambda) &= m\Phi^2 + \lambda\Phi^3 \\ &= W_{\rm tree}(\Phi, m, \lambda) \quad /\!/ \end{aligned} \tag{6.20}$$

証明終わり

コメント

- 上記の証明では、暗に Wess-Zumino 模型が非摂動論的にも定義できると仮定した。実際には、Wess-Zumino 模型は、4 次元では非摂動論的には存在しないと思われているので、上記の証明は “対称性” や正則化をどのように用いるかの実演のためと思った方がよい。（摂動論的には問題はない。）ただし、3 次元以下では、非摂動論的に Wess-Zumino 模型は存在するので、上記の証明は非摂動論的にも厳密に成り立つ。

- この定理は、元々超場形式での摂動論を用いて証明された。これはかなり大変な労力が要求された。

  M.T. Grisaru, M. Roček and W. Siegel, Nucl. Phys. **B159** (1979) 429.

  ここで与えた証明は、Seiberg の記念碑的仕事

  N. Seiberg, Phys. Lett. **B318** (1993) 469,

  に基づくもので、職人芸的証明から、一般庶民（?! ）にも理解できるものになった。

次に、非可換ゲージ場を含んだもう少し複雑な例を紹介しよう。今度は、非摂動論的効果に起因する有効超ポテンシャルが現れる。

$SU(3)$ のゲージ群に基づく QCD（量子色力学）を超対称ゲージ理論に拡張した、$\mathcal{N}=1$ $SU(N_{\rm c})$ SQCD(supersymmetric QCD) を考えよう。ここでは、$N_{\rm f}$ 種類のフレーバーを持つ質量ゼロのクォークをもつと仮定しよう。ゲージ群 $SU(N_{\rm c})$ の基本表現 ($\underline{N_{\rm c}}$ rep.) に属する（左巻きの）クォーク超場を Q_I $(I=1,\ldots,N_{\rm f})$、反基本表現 ($\underline{N_{\rm c}^*}$ rep.) に属する（左巻きの）クォーク超場を $\overline{Q}^I$ $(I=1,\ldots,N_{\rm f})$ としておく。この理論の唯一のパラメータは、ゲージ相互作用の結合定数 g である。g をくりこまれた（実際

の実験と直接比較のできる）結合定数とすると、量子論では一般に結合定数はエネルギースケール μ に依存する。もちろん、g は質量次元を持たないので、μ のエネルギーの次元を打ち消すためのエネルギースケール $\Lambda_{\rm QCD}$ が必然的に理論の中に現れる。

$$g = g(\mu/\Lambda_{\rm QCD}). \tag{6.21}$$

残念ながら、これ以上詳しく説明できないが、ゲージ結合定数 g の代わりに、このエネルギースケール $\Lambda_{\rm QCD}$ を理論のパラメータと取り直すことができる。（この現象を dimensional transmutation と呼ぶ。）この $\Lambda_{\rm QCD}$ は理論を特徴付ける典型的なエネルギースケールを与える。そこで、ゲージ結合定数 g の代わりに $\Lambda_{\rm QCD}$ を理論のパラメータだと思うと、有効超ポテンシャルは、Q_I, $\overline{Q}^I$ $(I = 1, \ldots, N_{\rm f})$ と $\Lambda_{\rm QCD}$ の関数となる。

$$W_{\rm eff} = W_{\rm eff}(Q_I, \overline{Q}^I, \Lambda_{\rm QCD}). \tag{6.22}$$

（注：今、考えている理論では、$W_{\rm tree} = 0$ である。）

さて、この理論に対して知られている結果は、

厳密な結果 4

$N_{\rm f}$ 種類の質量ゼロのクォークフレーバーを持つ、$\mathcal{N} = 1$ $SU(N_{\rm c})$ 超対称 QCD の有効超ポテンシャルは、$N_{\rm f} < N_{\rm c}$ のとき次の形を持つ。Affleck-Dine-Seiberg 超ポテンシャル（$N_{\rm f} < N_{\rm c}$）：

$$W_{\rm eff}(Q_I,\, \overline{Q}^I,\, \Lambda_{\rm QCD}) = \text{const.} \times \left[\frac{(\Lambda_{\rm QCD})^{3N_{\rm c}-N_{\rm f}}}{\det_{IJ}(\overline{Q}^I \cdot Q_J)}\right]^{\frac{1}{N_{\rm c}-N_{\rm f}}}. \tag{6.23}$$

≪ 証明 ≫

この定理の tree レベルのラグランジアンは次式で与えられる。

$$\mathcal{L}_{\rm SQCD} = \left(Q_I^\dagger\, {\rm e}^V\, Q_I + \overline{Q}^I\, {\rm e}^{-V}\, \overline{Q}^{I\dagger}\right)\Big|_{\theta^2\bar{\theta}^2} + \left(\frac{1}{4g^2}\, \mathcal{W}^a\, \mathcal{W}^a\Big|_{\theta^2} + \text{h.c.}\right) \tag{6.24}$$

この理論の持つ（量子論的に破れていない）対称性は、以下の通りである。

	$SU(N_{\rm c})$	$SU(N_{\rm f})_{\rm R}$	$SU(N_{\rm f})_{\rm L}$	$U(1)_{\rm V}$	$U(1)_{\mathcal{R}}$	質量次元
Q_I	$\underline{N_{\rm c}}$	$\underline{N_{\rm f}}$	$\underline{1}$	1	$-\frac{(N_{\rm c}-N_{\rm f})}{N_{\rm f}}$	1
$\overline{Q}^I$	$\underline{N_{\rm c}}^*$	$\underline{1}$	$\underline{N_{\rm f}}^*$	-1	$-\frac{(N_{\rm c}-N_{\rm f})}{N_{\rm f}}$	1
$\Lambda_{\rm QCD}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0	0	1
$W_{\rm eff}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0	2	3

(6.25)

簡単な説明：

- $SU(N_{\rm c})$ はゲージ対称性。
- $SU(N_{\rm f})_{\rm R}$ と $SU(N_{\rm f})_{\rm L}$ はクォークが質量を持たないときに存在するカイラル対称性と呼ばれるもので、それぞれ、Q_I あるいは $\overline{Q}^I$ を独立に変換する。表中で $\underline{1}$ はそれぞれの変換の下での不変量（singlet）を表す。
- $U(1)_{\mathcal{R}}$ は $\mathcal{R}$ 対称性で、これは anomaly を計算しないと、何故 Q_I と $\overline{Q}^I$ にこのような $\mathcal{R}$ 電荷を与えなければならないかに答えられない。ここは黙って認めることにして先に進もう！

以上の情報から $W_{\rm eff}$ の関数形を求めよう。まず、超ポテンシャルの正則性（holomorphy）から $W_{\rm eff}$ は Q_I, $\overline{Q}^I$ と $\Lambda_{\rm QCD}$ のみ（これらの複素共役量は含まれない）の関数である。まず、ゲージ対称性から $W_{\rm eff}$ はゲージ不変量でなければならない。$N_{\rm f} < N_{\rm c}$ の場合、Q_I と $\overline{Q}^I$ とから作ることのできるゲージ不変量は、$SU(N_{\rm c})$ のインデックス（Q_I, $\overline{Q}^I$ では省略してある）について内積をとることによって得られる。すなわち、

$$W_{\rm eff} = W_{\rm eff}(\overline{Q}^I \cdot Q_J,\, \Lambda_{\rm QCD}). \tag{6.26}$$

ここで、「$\cdot$」は $SU(N_{\rm c})$ のインデックスに対する内積を表す。次に、$W_{\rm eff}$ の質量次元を考慮して、次のように書き表しておこう。

$$\begin{aligned} W_{\rm eff} &\equiv (\Lambda_{\rm QCD})^3\, f(\overline{Q}^I \cdot Q_J,\, \Lambda_{\rm QCD}) \\ &= (\Lambda_{\rm QCD})^3\, f\left(\frac{\overline{Q}^I \cdot Q_J}{(\Lambda_{\rm QCD})^2}\right). \end{aligned} \tag{6.27}$$

2 行目は、f の質量次元が 0 であることを用いた（秘密 2）。更に、f は $SU(N_{\rm f})_{\rm R} \times SU(N_{\rm f})_{\rm L} \times U(1)_{\rm V}$ の変換の下で不変でなければならないので、

質量次元を持たない唯一の $SU(N_{\rm f})_{\rm R} \times SU(N_{\rm f})_{\rm L} \times U(1)_{\rm V}$ 不変量 $\det_{IJ}(\overline{Q}^I \cdot Q_J)/(\Lambda_{\rm QCD})^{2N_{\rm f}}$ の関数になっているはずである。更に、f は $U(1)_{\mathcal{R}}$ の電荷を 2 を持つことから、f の関数形は比例定数を除いて完全に決定される。

$$W_{\rm eff}(Q_I,\, \overline{Q}^I,\, \Lambda_{\rm QCD}) = \text{const.} \times \left[\frac{(\Lambda_{\rm QCD})^{3N_{\rm c}-N_{\rm f}}}{\det_{IJ}(\overline{Q}^I \cdot Q_J)}\right]^{\frac{1}{N_{\rm c}-N_{\rm f}}} \quad /\!/ \qquad (6.28)$$

証明終わり

コメント

- $W_{\rm eff}$ の右辺の比例定数は、結合定数にもよらない数である。ここでの議論ではこの比例定数がゼロでないかどうかはわからない。

- $W_{\rm eff}$ の表式は $N_{\rm f} < N_{\rm c}$ でのみ正しい。$N_{\rm f} > N_{\rm c}$ のときは、$\Lambda_{\rm QCD} \to 0$ で $W_{\rm eff}$ は発散してしまうが、$\Lambda_{\rm QCD} \to 0$ の極限は（漸近的自由性を持つ理論では）ゲージ結合定数でみると $g \to 0$ の極限（自由場への極限）であり、このとき $g \to 0$ の極限がとれると信じられているので、実際は $N_{\rm f} > N_{\rm c}$ のときは比例係数が 0 となっているはずである。また、$N_{\rm f} = N_{\rm c}$ のときは、この表式は意味をなさない。

- $N_{\rm f} = N_{\rm c} - 1$ のときは、

$$W_{\rm eff} = \text{const.} \times \frac{(\Lambda_{\rm QCD})^{3N_{\rm c}-N_{\rm f}}}{\det_{IJ}(\overline{Q}^I \cdot Q_J)} \tag{6.29}$$

となる。$\Lambda_{\rm QCD}$ とゲージ結合定数 g との関係

$$(\Lambda_{\rm QCD})^{3N_{\rm c}-N_{\rm f}} \propto {\rm e}^{-\frac{8\pi^2}{g^2}} \tag{6.30}$$

を用いると丁度右辺は、one-instanton 効果からの寄与（非摂動論的効果）であることが推測される。具体的な one-instanton 計算によって (6.29) 式の比例係数はゼロでないことが示されている。（比例係数は結合定数によらないのであるからこの結果は厳密に正しい。）$N_{\rm f} < N_{\rm c} - 1$ のときは、直接 one-instanton 効果によるものではなく、グルーオンの超対称な相棒（gluino）の凝縮（gluino condensation）を通じてこの項が生じている。

- 文献

I. Affleck, M. Dine and N. Seiberg, Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 1026; Nucl. Phys. **B241** (1984) 493.

6.2 F 項の非くりこみ定理 II

ここでは、**6.1** 章より一般化した F 項に関する非くりこみ定理（ただし、摂動論の枠内）を紹介しよう。その前に、その定理を導くための秘密を明らかにしておこう。

秘密 4

N 個の複素変数 $\{z_1, \ldots, z_N\}$ の正のべき級数からなる関数 $f(z_1, \ldots, z_N)$ を考える。z_i 及び関数 f がそれぞれ保存 “電荷” r_i 及び r_f を持っているとしよう。もし、r_i が全て正（あるいは全て負）の量ならば、関数 f は $\{z_1, \ldots, z_N\}$ の高々有限個の項からなる関数である。すなわち、

$$f(z_1, \ldots, z_N) = \sum_{n_1 r_1 + \cdots + n_N r_N = r_f} C_{n_1 \cdots n_N} (z_1)^{n_1} \cdots (z_N)^{n_N}. \quad (6.31)$$

秘密 5

複素数 z の正則な関数 $f(z)$ が、c を任意に実数として、

$$f(z + ic) = f(z) \quad (6.32)$$

を満たすならば、$f(z)$ は z によらない定数である。

≪ 説明 ≫

秘密 4 の説明は不要であろう。秘密 5 は複素関数論の定理の 1 つである。この定理の意味する所は、（z^* を用いずに）z のみで z の実部だけに依存する関数を作ることはできないということである。// 説明終わり

コメント

先に進む前に、「秘密 4」の応用として、3 次元量子電磁力学（3-dimensional QED）を考えると面白い。（ここは、脱線なので飛ばして読んでも可。）電子が質量を持たない場合、ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{\rm tree} = -\frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \overline{\psi} i \not{D} \psi \qquad (\not{D} \equiv \gamma^\mu(\partial_\mu - iA_\mu)) \tag{6.33}$$

で与えられる。3 次元ではラグランジアンの質量次元が 3 であることに注意すると、A_μ, ψ, e^2 の質量次元は次のようになることがわかる。

	A_μ	ψ	e^2
質量次元	1	1	1

（全て正の量だ！） (6.34)

ここで量子補正を含めた有効ラグランジアンを

$$\mathcal{L}_{\rm eff} = Z_A(e^2)\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + Z_\psi(e^2)\, \overline{\psi} i \not{D} \psi + \cdots \tag{6.35}$$

とおくと $Z_A(e^2)$,$Z_\psi(e^2)$ の質量次元はそれぞれ -1 と 0 なので、**e^2 以外に質量次元を持った量がなければ**、$Z_A(e^2)$,$Z_\psi(e^2)$ はそれぞれ e^{-2},e^0 に比例する以外にない！ これは量子補正が一切ないことを意味する。

この主張は、理論が発散を一切含まず有限な理論であれば正しい。もし、紫外発散や赤外発散があれば、くりこみで有限にするために質量次元を持った量（カットオフに相当）を持ち込まざるを得ない。そのときは、上の主張は成り立たない。さて、軍配はどちらにあがるのだろうか?

それでは、本題の非くりこみ定理を紹介しよう。

厳密な結果 5

一般的なくりこみ可能な超対称ゲージ理論を考える。

$$\mathcal{L}_{\rm tree} = \Phi^* \, {\rm e}^V \, \Phi \Big|_{\theta^2\bar{\theta}^2} + \left[\left(\tfrac{1}{4g^2} \, \mathcal{W}^a \, \mathcal{W}^a + W_{\rm tree}(\Phi) \right) \Big|_{\theta^2} + {\rm h.c.} \right] . \tag{6.36}$$

このとき、有効ラグランジアンは摂動の全次数で次の形を持つ。

$$\mathcal{L}_{\rm eff} = K(\Phi, \, \Phi^*, \, V)|_{\theta^2\bar{\theta}^2} + \left[\left(\tfrac{1}{4g_{\rm eff}^2} \, \mathcal{W}^a \, \mathcal{W}^a + W_{\rm tree}(\Phi) \right) \Big|_{\theta^2} + {\rm h.c.} \right] . \tag{6.37}$$

ただし、

$$\frac{1}{g_{\rm eff}^2} = \frac{1}{g^2} \ + \ \text{1-loop 補正.} \tag{6.38}$$

コメント

- この定理のポイントは、F 項はゲージ結合定数 g に対する 1-loop 補正 (6.38) 式以外は摂動の全次数で量子補正はないということである。つまり、ゲージ場の運動項の前の係数 $(1/g^2)$ には 1-loop からの補正があるが、カイラル超場 Φ の自己相互作用 $W_{\rm tree}(\Phi)$ には量子補正は摂動の全次数でゼロである。更に、Φ と $\mathcal{W}^a$ の間の相互作用も量子補正から現れることはない。

- D 項の $K(\Phi, \, \Phi^*, \, V)$ については、ゲージ不変な関数以上のことは、ここでは議論できない。

- この定理は、くりこみ不可能な相互作用を含んでいる場合にも拡張できる。

S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **80** (1998) 3702.

≪ 証明 ≫
出発点のラグランジアンを次のように変更する。

$$\mathcal{L}^{X,Y}_{\rm tree} \equiv \Phi^* \, {\rm e}^V \, \Phi \Big|_{\theta^2\bar{\theta}^2} + \left[(X \, \mathcal{W}^a \, \mathcal{W}^a + Y \, W_{\rm tree}(\Phi)) \big|_{\theta^2} + {\rm h.c.} \right]. \quad (6.39)$$

ここで $X = 1/4g^2$, $Y = 1$ とおけば元の $\mathcal{L}_{\rm tree}$ に戻る。この $\mathcal{L}^{X,Y}_{\rm tree}$ において、F 項が $\mathcal{R}$ 対称性の $\mathcal{R}$ 電荷 2 を持つことから（**3.5** 章参照）、Φ, $\mathcal{W}^a$, X, Y にそれぞれ次のように $\mathcal{R}$ 電荷を定めることができる。

	Φ	$\mathcal{W}^a$	X	Y
$\mathcal{R}$ 電荷	0	1	0	2

(6.40)

ここで、全ての $\mathcal{R}$ 電荷が正あるいは 0 であることに注意せよ（秘密 4 を適用可！）。量子補正を含めた有効超ポテンシャルを $W_{\rm eff}(\Phi, \mathcal{W}^a, X, Y)$ としておくと、$W_{\rm eff}$ は $\mathcal{R}$ 電荷 2 （超ポテンシャルの $\mathcal{R}$ 電荷は 2）を持つので、$W_{\rm eff}$ は Y に関しては 1 次もしくは $\mathcal{W}^a$ に関して 2 次でなければならない。したがって、$W_{\rm eff}$ は次の形に書き表すことができる。

$$W_{\rm eff}(\Phi, \mathcal{W}^a, X, Y) = f(\Phi, X) \, \mathcal{W}^a \, \mathcal{W}^a + Y \, F_{\rm eff}(\Phi, X). \quad (6.41)$$

次に、X に関する次の摂動論的不変性

$$X \quad \longrightarrow \quad X + ic \quad （c は任意の実数） \quad (6.42)$$

を用いる。この不変性は次の性質から来る。

$$\int {\rm d}^4x \, \mathcal{L}^{X,Y}_{\rm tree} \quad \xrightarrow{X \to X + ic} \quad \int {\rm d}^4x \, \mathcal{L}^{X,Y}_{\rm tree} + c \int {\rm d}^4x \, F^a_{\mu\nu} \, \tilde{F}^{\mu\nu a}. \quad (6.43)$$

右辺第 2 項の $F^a_{\mu\nu} \, \tilde{F}^{\mu\nu a}$ は全微分の形に書き直すことができる（すなわち、$F^a_{\mu\nu} \, \tilde{F}^{\mu\nu a} = \partial_\mu K^\mu$ の形に書ける）ので、摂動論の範囲内では全微分量の積分はゼロとして良いので (6.43) 式の右辺第 2 項は消える。（非摂動論的には、インスタントンなど位相的に非自明な配位が存在するので、このときは上式の第 2 項をゼロとすることはできない。）(6.42) 式の不変性を $W_{\rm eff}$ に課すと（秘密 5！）

$$W_{\rm eff}(\Phi, \mathcal{W}^a, X, Y) = (X + f(\Phi)) \, \mathcal{W}^a \, \mathcal{W}^a + Y \, F_{\rm eff}(\Phi) \quad (6.44)$$

となる。

注 1 ： 右辺第 1 項は、$\mathcal{L}^{X,Y}_{\rm tree}$ の第 2 項そのものである。この項が許されるのは、(6.43) 式の下で説明した理由による。

注 2： もう 1 つの注意は、ここでは摂動論を考えているので、X, Y を結合定数とみるなら、量子補正項は必ず X, Y の正べきに比例することになる。上の第 1 項は、tree レベルの項そのものであるので（X, Y の高次のべきを含んでいないので）、係数を含めて元々の $\mathcal{L}_{\rm tree}^{X,Y}$ の中の項そのものでなければならない。

$F_{\rm eff}(\Phi)$ は X にも Y にもよらず、かつ、自由場の理論への極限 $X \to \infty$, $Y \to 0$ （注：$X = \frac{1}{4g^2} \xrightarrow{g\to 0} \infty$）では、$W_{\rm tree}(\Phi)$ に漸近的に近付かねばならない、すなわち、

$$\frac{Y\, F_{\rm eff}(\Phi)}{Y\, W_{\rm tree}(\Phi)} \quad \xrightarrow[Y\to 0]{X\to\infty} \quad 1. \tag{6.45}$$

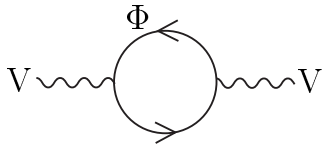
従って、$F_{\rm eff}(\Phi)$ は $W_{\rm tree}(\Phi)$ に等しくなければならない。

$$F_{\rm eff}(\Phi) = W_{\rm tree}(\Phi). \tag{6.46}$$

次に、$f(\Phi)$ の Φ 依存性を求めるために、$f(\Phi)$ は Y に依存していないことに注意して $Y = 0$ とおくと、$\mathcal{L}_{\rm tree}^{X,Y=0}$ は $\Phi \to {\rm e}^{i\alpha}\Phi$ の不変性を持つ。$f(\Phi)$ は Φ^* によらないことに注意すると、この変換の下で $f(\Phi)$ が不変ということは $f(\Phi)$ は Φ によらないことを意味する。従って、f は Φ にも X にも Y にも（もちろん $\mathcal{W}^a$ にも）よらないのであるから、結局、f は結合定数にもよらない（X,Y を結合定数と見なせるので）単なる定数（数値）でなければならない。

$$f(\Phi) = \text{結合定数にもよらない定数} \equiv f. \tag{6.47}$$

従って、$W_{\rm eff}$ の中の $f\,\mathcal{W}^a\,\mathcal{W}^a$ 項は結合定数によらない量子補正からの寄与を表す。実際、結合定数に比例しない量子補正は存在し、それはゲージ相互作用のみからなる 1-loop の Feynman 図で与えられる。例として



$\Longrightarrow$ ゲージ結合定数への
1-loop の補正

このグラフがなぜ結合定数によらないかというと、前に説明したように、我々が採用したゲージ相互作用の規格化では、物質場とゲージ場とのゲージ相互作用項にゲージ結合定数が現れないからである。

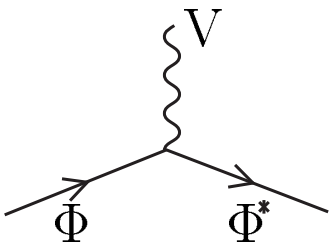


図 1: 物質場とゲージ場とのゲージ相互作用は g に依存しない。

(その代わりに、ゲージ場の運動項の前にゲージ結合定数が現れる。) 摂動の高次 (2-loop 以上) からは、ゲージ結合定数あるいは他の結合定数の正べきに比例する。(摂動の高次なのだから、当然、結合定数のべきは上がる。)

以上をまとめると

$$W_{\text{eff}}(\Phi, \mathcal{W}^a, X, Y) = (X + \text{1-loop 補正})\, \mathcal{W}^a\, \mathcal{W}^a + Y\, W_{\text{tree}}(\Phi). \tag{6.48}$$

$X = \frac{1}{4g^2}$, $Y = 1$ とおくと、最終的な結果 (6.37) 式が得られる。// 証明終わり

コメント

- 上で用いた $\mathcal{R}$ 対称性と $X \to X + ic$ の不変性は共に非摂動論的効果で破れ得る。実際、厳密な結果 4 で見たように、非摂動論的な量子補正によって有効超ポテンシャルが生じる場合がある。

6.3 F 項の非くりこみ定理 III

ここでの秘密は、

秘密 6

$\{f_i,\ i=1,2,\cdots\}$ 及び $\{d_a,\ a=1,2,\cdots\}$ をそれぞれ F 型 及び D 型の変数としよう。(F 型、D 型の定義はここでは必要ない。) W が F 型のみの変数からなる関数で D 型変数から F 型の変数が作れないとすれば、W は $\{d_a\}$ に依存しない。

≪ 説明 ≫
自明すぎて説明しようがない !!

この秘密 6 (これが「秘密」と言えるのかぁ?!) を用いると次の厳密な結果 7 を得ることができる。

厳密な結果 7

D 項に含まれている結合定数 (あるいは相互作用) は、F 項 (超ポテンシャル) への量子補正に寄与しない。

≪ 証明 ≫
D 項に含まれる結合定数 λ は、θ と $\bar{\theta}$ の両方に依存する超場 $\lambda(x,\theta,\bar{\theta})$ に格上げすることができる。一方、超ポテンシャルは F 項であるので (θ のみを含んだ) カイラル超場のみから成り、$\bar{\theta}$ を含んだ超場が現れることはない。従って、D 項に含まれる結合定数 (あるいは相互作用) は F 項への量子補正に寄与しない。// 証明終わり

コメント

- ここで考えている D 項の相互作用は、くりこみ不可能な項に対応する。

6.4 $U(1)$ D 項の非くりこみ定理

さて、ここで紹介する非くりこみ定理は次の秘密 7 を用いて証明される。

秘密 7

ある変換 G の下で次の様に変換する量があったとしよう。

$$\mathcal{V}(x) \quad \stackrel{G}{\longrightarrow} \quad \mathcal{V}(x) + \partial_\mu K^\mu(x). \tag{6.49}$$

$f(x)$ を G 不変な関数としたとき、

$$\int \mathrm{d}^4x\, f(x)\, \mathcal{V}(x) \tag{6.50}$$

は $f(x)$ が x に依存しないときのみ、G 不変となる。

秘密 7 の説明は特に必要ないであろう。($K^\mu(x)$ は無限遠方では十分速くゼロになると仮定した。) これまで、F 項に関する非くりこみ定理を幾つか紹介してきた。D 項は正則性 (holomorphy) を持たないため、D 項に関する非くりこみ定理はほとんど知られていないが、ゲージ群が $U(1)$ を含むときは、次の非くりこみ定理が知られている。

厳密な結果 8

$V_{U(1)}(x,\theta,\bar\theta)$ を $U(1)$ ゲージ場に対するベクトル超場とする。Fayet-Illiopoulos $U(1)$ D 項と呼ばれる次の項

$$\xi \int \mathrm{d}^4x\, V_{U(1)}(x,\theta,\bar\theta)\Big|_{\theta^2\bar\theta^2} \tag{6.51}$$

に対する 2-loop 以上からの量子補正はない。もし、カイラル超場 $\Phi_i\,(i = 1,2,\cdots)$ の $U(1)$ 電荷の和が 0 ならば 1-loop からの量子補正もゼロとなる。

≪ 証明 ≫

tree レベルの結合定数 λ_I と書くと、これまで説明してきたように 全て超場 $\lambda_I(x,\theta)$ (あるいは $\lambda_I(x,\theta,\bar\theta)$) に格上げすることを考える。

$$\lambda \quad \longrightarrow \quad \lambda_I(x,\theta) \quad \Big(\text{あるいは}\lambda_I(x,\theta,\bar\theta)\Big)\,. \tag{6.52}$$

このようにしても $\lambda_I(x,\theta)$ をゲージ変換の下で不変としておけば、作用積分 (action) はゲージ不変性を保つ。この状況の下で $U(1)$ D 項への量子補正は（あったとすれば）次の形となるだろう。

$$\int \mathrm{d}^4x\, \xi_{\text{eff}}\left(\lambda_I(x,\theta)\right)\, V_{U(1)}(x,\theta,\bar{\theta})\Big|_{\theta^2\bar{\theta}^2}. \tag{6.53}$$

ところで、$V_{U(1)}(x,\theta,\bar{\theta})$ はゲージ変換（正確には、超対称化した超対称ゲージ変換）の下で不変ではなく、次の変換性を持つ。（秘密 7 を見よ！）

$$V_{U(1)}(x,\theta,\bar{\theta})\Big|_{\theta^2\bar{\theta}^2} \quad\longrightarrow\quad V_{U(1)}(x,\theta,\bar{\theta})\Big|_{\theta^2\bar{\theta}^2} + \partial_\mu K^\mu(x). \tag{6.54}$$

従って、秘密 7 の議論から（超対称）ゲージ変換の対称性が破れないためには、ξ_{eff} は x に依存してはならない。すなわち、結合定数 λ_I の依存性はあってはならないことになる。結合定数に比例しない量子補正の Feynman 図は下図のみである。（我々のゲージ結合定数の規格化では、Φ_i と $V_{U(1)}$ の間のゲージ相互作用にゲージ結合定数は現れないことを思い出せ。）

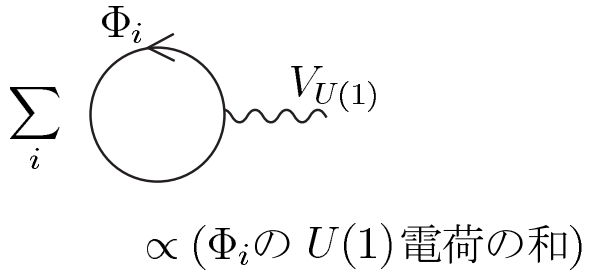


図 2: 結合定数に比例しない量子補正の Feynman 図

従って、上図の 1-loop の補正を除いて、Fayet-Illiopoulous $U(1)$ D 項への量子補正は存在しない。また、上図の寄与はカイラル超場の $U(1)$ 電荷の総和に比例するので、もし $U(1)$ 電荷の和がゼロであれば量子補正は全くないことになる。// 証明終わり

コメント

- Feynman 図を用いた摂動論的証明は最初に

  W. Fichler *et al*, Phys. Rev. Lett. **47** (1981) 757,

  で与えられた。ここでの証明は、

  M. Dine, in Fields, Strings and Duality:
  TASI96, C.Efthimiou and B.Greene, eds. (World Scientific);
  S. Weinberg, Phys .Rev. Lett. **80** (1998) 3702,

  に基づくものである。

秘密 7 は、超対称性理論に固有の性質ではない。秘密 7 を適用できる超対称性理論ではない例を挙げておこう。

厳密な結果 9

宗-Coleman-Hill の定理

3 次元ゲージ理論における Chern-Simons 項への量子補正は、1-loop のみである。

≪ 証明 ≫

3 次元ゲージ理論では、次の Chern-Simons 項と呼ばれる項をラグランジアンに加えることができる。

$$\mathcal{L}_{\rm CS} = \kappa\, \varepsilon^{\mu\nu\lambda}\, {\rm tr}\, \left(A_\mu \partial_\nu A_\lambda + \frac{2}{3} A_\mu A_\nu A_\lambda \right). \tag{6.55}$$

ここで、$A_\mu \equiv A_\mu^a\, T^a$（$T^a$ はゲージ群の生成子 (generator)）で、tr は行列 T^a に関するトレースを意味する。この項の特徴は、ゲージ変換の下では不変でなく次のように変換する。

$$\mathcal{L}_{\rm CS} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{L}_{\rm CS} + \partial_\mu K^\mu \quad (+\text{topological term}). \tag{6.56}$$

（秘密 7 を適用できるケースだ！ topological term は摂動を考える限りは無視して構わない。）秘密 7 と厳密な結果 8 で使われた論理をここで適用すると、前と同じくこの Chern-Simons 項への量子補正は、（あるとすれ

ば）結合定数に一切よらないFeynman図のみが寄与できる。これまた前と同様に、結合定数によらないグラフは、ゲージ相互作用のみから成る1-loopグラフだけである。ゲージ相互作用以外の相互作用を含むFeynman図や2-loop以上のグラフは必ず何らかの結合定数を含むので、そのような（Chern-Simons項への）量子補正は、ゲージ不変性の要請から禁止される。//

証明終わり

コメント

- この定理は宗氏によって初めて証明された。

  H. So, Prog. Theor. Phys. **74** (1985) 585,

  しかし、世間では不当にもColeman-Hillの定理と呼ばれている。

  S. Coleman and B. Hill, Phys. Lett. **B159** (1985) 184.

  歴史的評価は正しくすべきであり、この定理は、So-Coleman-Hillの定理と呼ぶべきであろう。また、ここでの証明は、下記の論文によるものである。

  M. Sakamoto and H. Yamashita, Phys. Lett. **B476** (2000) 427.

6.5　超対称性の破れ

超対称性は少なくとも現在の実験のエネルギースケールでは観測されていないので、もし超対称性が自然界で実現されているとするならば、超対称性は何らか形で破れていなければならない。今まで見てきた非くりこみ定理の帰結として超対称性の破れに関する次の重要な定理が知られている。

厳密な結果 10

Fayet-Illiopoulous の $U(1)$ D 項（**6.4** 章参照）が存在せず、tree レベルの超ポテンシャルに対して

$$\frac{\partial W_{\rm tree}(\Phi, \mathcal{W}^a = 0)}{\partial \Phi_i} = 0 \qquad \text{for all } i \tag{6.57}$$

を満たす解が存在するならば、超対称性は摂動の任意の次数で破れない。

コメント

- この定理は、色んな論文で断片的に述べられているが、はっきりとこのような形で証明を与えたのは次の論文である。

  S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **80** (1998) 3702.

≪ 証明の概略 ≫

3.4 章で議論したように、超対称性の破れは真空のエネルギーがゼロかゼロでないかを調べることによって知ることができる。すなわち、スカラーポテンシャルをゼロにする場の配位があるかどうかを調べればよい。D 項と F 項の両方からスカラーポテンシャルへの寄与があるが、D 項から与えられるスカラーポテンシャルの方は（Fayet-Iliopoulous の $U(1)$ D 項がなければ）、必ずゼロとなる場の配位が摂動の範囲内では存在することが示せる。従って、摂動の範囲内では F 項から来るスカラーポテンシャルの最低値（がゼロか正か）を調べれば良いことになる。今まで述べて来た F 項に関する非くりこみ定理から、F 項 すなわち（F 項から得られ

る）ポテンシャルには量子補正がない。tree レベルの超ポテンシャルを $W_{\rm tree}$ とすると、F 項から得られる tree レベルでのスカラーポテンシャル

$$V(\Phi) = \sum_i \left| \frac{\partial W_{\rm tree}(\Phi)}{\partial \Phi_i} \right|^2 \tag{6.58}$$

は、そのまま摂動の全次数で厳密であり、摂動の範囲内では このポテンシャルを調べれば十分である。上の表式から明らかなように、超対称性が破れない、すなわち、真空エネルギーが 0 であるための条件は

$$\frac{\partial W_{\rm tree}(\Phi)}{\partial \Phi_i} = 0 \qquad \text{for all } i \tag{6.59}$$

である。// 証明終わり

上の定理は、現象論的模型を構築する際に重要となる。「厳密な結果 10」の定理を逆読みすると、超対称性を破るためには 次の 4 つの可能性しかないことがわかる。（実は、4 つ以外にも可能。下のコメント参照。）

厳密な結果 $10'$

i) 手で（by hand）超対称性を破る。

ii) tree レベルで (6.57) 式の解が存在しない超ポテンシャルを用意する。（O'Raifeartaigh 模型）

iii) Fayet-Illiopoulous の $U(1)$ D 項を用いる。

iv) 非摂動論的効果で超対称性を破る。

コメント

- i) は超対称性を（陽に）破る項（通常、soft supersymmetry breking terms と呼ばれる項）を加える。理論的には望ましいやり方ではないが、現象論的には有力な手段である。超対称性の破れの機構がよく理解できていない現状では、破れの項を直接導入して模型を構築する方が現実的である。

- つい最近まで、tree レベル あるいは摂動論的に自発的超対称性の破れを引き起こす機構は、ii) と iii) の方法しかないと思われていたが、余剰次元 (extra dimensions) を利用する新しい機構が最近発見された。この機構は、D 項から得られる運動項も超対称性の破れと関与するという点で「厳密な結果 10」とは矛盾しない。(というより、「厳密な結果 10」ではこの可能性を考慮していなかったと言うべきか。)

  M. Sakamoto, M. Tachibana and K. Takenaga, Phys. Lett. **B458** (1999) 231.

- O'Raifeartaigh 模型は、(6.57) 式に解がない超ポテンシャルを導入することによって超対称性を自発的に破る機構である。

  L. O'Raifeartaigh, Nucl. Phys. **B96** (1975) 331.

  例として、次の超ポテンシャルを考えてみよう。

$$W_{\rm tree}(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3) = \lambda\,\Phi_1\left(\left(\Phi_3\right)^2 - v^2\right) + \mu\,\Phi_2\,\Phi_3. \tag{6.60}$$

  これから、(6.57) 式を求めると

$$\frac{\partial W_{\rm tree}(\Phi)}{\partial \Phi_1} = \lambda\left(\left(\Phi_3\right)^2 - v^2\right) = 0, \tag{6.61}$$

$$\frac{\partial W_{\rm tree}(\Phi)}{\partial \Phi_2} = \mu\,\Phi_3 = 0, \tag{6.62}$$

$$\frac{\partial W_{\rm tree}(\Phi)}{\partial \Phi_3} = 2\lambda\,\Phi_1\,\Phi_3 + \mu\,\Phi_2 = 0. \tag{6.63}$$

  明らかに、初めの 2 式の条件は互いに矛盾している。このような超ポテンシャルの構成のためには、カイラル超場の数が 3 種類以上必要であることが知られている。

- ゲージ群が $U(1)$ を含むときは、次の Fayet-Illiopoulous の $U(1)$ D 項をラグランジアンに付け加えることができる。

$$\mathcal{L}_{\text{F-I}} = \xi\,V_{U(1)}(x,\theta,\bar\theta)\Big|_{\theta^2\bar\theta^2}. \tag{6.64}$$

  この項は、D 項から来るスカラーポテンシャルに次の様に寄与する。

$$V_D(\phi) = \left|\,\xi + \sum_i e_i\,\phi_i^\dagger\phi_i\,\right|^2. \tag{6.65}$$

従って、$\xi \neq 0$ のとき

$$V_D = 0 \longrightarrow \quad \exists < \phi_i > \neq 0 \longrightarrow U(1) \text{ 対称性の破れ},$$
$$V_D \neq 0 \longrightarrow \quad \text{超対称性の破れ（} \oplus U(1) \text{ 対称性の破れ）}. \quad (6.66)$$

P. Fayet and J. Illiopoulous, Phys. Lett. **B51** (1974) 461.

それでは、iv) の可能性、すなわち、非摂動論的に超対称性が破れる模型の例を下に与えておこう。

「厳密な結果 4」で議論した $N_{\rm f}$ クォークフレーバーを持つ $\mathcal{N} = 1$ $SU(N_{\rm c})$ 超対称 QCD 模型 $(N_{\rm f} < N_{\rm c})$ を再び考えよう。ここでは、クォーク超場以外に、ゲージ変換の下で不変な (gauge singlet) $N_{\rm f}$ 個のカイラル超場 L^I $(I = 1, \ldots, N_{\rm f})$ を導入し、次の超ポテンシャルを tree レベルで仮定する。

$$W_{\rm tree}(Q_I, \overline{Q}^I, L^I) = \sum_{I,J=1}^{N_{\rm f}} \lambda_J \, \overline{Q}^J \cdot Q_I \, L^I. \quad (6.67)$$

厳密な結果 11

上記の相互作用を持つ、$SU(N_{\rm c})$ 超対称 QCD 模型 $(N_{\rm f} < N_{\rm c})$ は、非摂動論的効果によって超対称性が破れる。

≪ 証明 ≫
この模型での（量子補正を含んだ）有効超ポテンシャルは tree レベルでの超ポテンシャルに「厳密な結果 4」で求めた 非摂動論的補正、Affleck-Dine-Seiberg の超ポテンシャル (6.23) 式を加えたものに等しいことが、前と同様の議論を繰り返すことによって示すことができる。すなわち、

$$W_{\rm eff}(Q_I, \overline{Q}^I, L^I) = \sum_{I,J=1}^{N_{\rm f}} \lambda_J \, \overline{Q}^J \cdot Q_I \, L^I + c \left[\frac{(\Lambda_{\rm QCD})^{3N_{\rm c}-N_{\rm f}}}{\det_{IJ}(\overline{Q}^I \cdot Q_J)} \right]^{\frac{1}{N_{\rm c}-N_{\rm f}}} \quad (6.68)$$

カイラル超場 $Q_I, \overline{Q}^I, L^I$ のスカラー場の部分をそれぞれ、$Q_I(x,\theta) = \phi_{Q_I}(x) + \cdots$, $\overline{Q}^I(x,\theta) = \phi_{\bar{Q}^I}(x) + \cdots$, $L^I(x,\theta) = \phi_{L^I}(x) + \cdots$ $(I =$

$1, \cdots N_{\rm f}$) としておくと、上の超ポテンシャルから得られるスカラーポテンシャルは

$$V(\phi_{Q^I}, \phi_{\bar{Q}^I}, \phi_{L^I}) = \sum_{I=1}^{N_{\rm f}} \left\{ \left| \frac{\partial W_{\rm eff}(\phi_{Q^I}, \phi_{\bar{Q}^I}, \phi_{L^I})}{\partial \phi_{Q_I}} \right|^2 + \left| \frac{\partial W_{\rm eff}(\phi_{Q^I}, \phi_{\bar{Q}^I}, \phi_{L^I})}{\partial \phi_{\bar{Q}^I}} \right|^2 + \left| \frac{\partial W_{\rm eff}(\phi_{Q^I}, \phi_{\bar{Q}^I}, \phi_{L^I})}{\partial \phi_{L^I}} \right|^2 \right\} \quad (6.69)$$

となる。もし超対称性が破れないとすると、真空のエネルギーはゼロでなければならないので、次式を満足する解があるはずである。

$$\frac{\partial W_{\rm eff}(\phi_{Q^I}, \phi_{\bar{Q}^I}, \phi_{L^I})}{\partial \phi_{Q_I}} = 0, \quad (6.70)$$

$$\frac{\partial W_{\rm eff}(\phi_{Q^I}, \phi_{\bar{Q}^I}, \phi_{L^I})}{\partial \phi_{\bar{Q}^I}} = 0, \quad (6.71)$$

$$\frac{\partial W_{\rm eff}(\phi_{Q^I}, \phi_{\bar{Q}^I}, \phi_{L^I})}{\partial \phi_{L^I}} = 0, \qquad \text{for} \quad I = 1, \cdots N_{\rm f}. \quad (6.72)$$

第 3 式を具体的に書くと

$$\frac{\partial W_{\rm eff}(\phi_{Q^I}, \phi_{\bar{Q}^I}, \phi_{L^I})}{\partial \phi_{L^I}} = \sum_{J=1}^{N_{\rm f}} \lambda_J \left(\phi_{\bar{Q}^J} \cdot \phi_{Q_I} \right) = 0. \quad (6.73)$$

この式は、行列 $M^J{}_I \equiv \phi_{\bar{Q}^J} \cdot \phi_{Q_I}$ に ゼロ固有値が存在することを意味している。(λ_J がゼロ固有値に属する固有ベクトルである。) 従って、その行列式はゼロになるはずである。すなわち、$\det_{IJ} \left(\phi_{\bar{Q}^J} \cdot \phi_{Q_I} \right) = 0$。しかしながら、これは超ポテンシャル $W_{\rm eff}$ の特異点になっている。この事実から、(6.72) 式の解は (6.70) 式及び (6.71) 式の解とはなれない (あるいはポテンシャルの最低点とはなれない) と推測される。よって ゼロエネルギー解 ((6.70) 式 〜 (6.72) 式を同時に満たす解) が存在しないので、超対称性は破れることになる。// 証明終わり

6.6　異なる役者の連携プレー

一人一人別々では それ程目立った働きをしないのだが、二人がペアを組むと別々のときには考えられないような能力を発揮することがある。

秘密 8

役割の異なる役者がペアを組むと非自明な結果が得られることがある。

まずは、常識的な結果から始めよう。

厳密な結果 12

超場（超多重項）の中の 1 つの場が質量を持たないことが保証されているならば、その相棒 (superpartner) も質量を持つことができない。

幾つか例を挙げておこう。

カイラル超場：

- もし カイラル対称性があると $\longrightarrow$ スピノル場 ψ が $m_\psi = 0$,
  $\longrightarrow$ 相棒のスカラー場 ϕ も $m_\phi = 0$.

- もし 連続的な対称性が自発的に破れると $\longrightarrow$ スカラー場 ϕ が $m_\phi = 0$,
  （ϕ が N-G ボゾン）
  $\longrightarrow$ 相棒のスピノル場 ψ も $m_\psi = 0$.

ベクトル超場：

- ゲージ対称性 $\longrightarrow$ ゲージ場 A_μ が $m_A = 0$,
  $\longrightarrow$ 相棒のスピノル場 λ も $m_\lambda = 0$.

コメント

- 超対称性が破れれば、ボゾンとフェルミオンは異なる質量を持てる。

上の結果は、超対称性によってボゾンとフェルミオンがペアを組んだ結果、質量の縮退が両者の間で起きた。この結果は超対称性の観点からは自明である。以下では、自明でない例を幾つか紹介していこう。

厳密な結果 13

量子補正を取り入れた有効ゲージ結合定数 (effective gauge coupling constant)$g_{\rm eff}$ は 一般に次の形の量子補正を受ける。

$$\frac{8\pi^2}{g_{\rm eff}^2(g^2)} = \frac{8\pi^2}{g^2} + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, {\rm e}^{-n\frac{8\pi^2}{g^2}}. \tag{6.74}$$

ここで、g^2 は tree レベルでのゲージ結合定数である。

コメント

右辺第 1 項は tree, 第 2 項は 1-loop からの寄与を表す。第 3 項は $g = 0$ のまわりで展開できないことからもわかるように、非摂動論的寄与に対応する。ただし、ここでの議論では、$\{a_n\}$ の具体的な値を求めることではない。

≪ 証明 ≫

超対称ゲージ理論では、g(gauge coupling) と $\theta_{\rm CP}$(strong CP violeting parameter) は常に、次の組み合わせで現れることを見た。(**3.3** 章参照。)

$$\frac{1}{4g_{\rm h}^2} \equiv \frac{1}{4g^2} - i\frac{\theta_{\rm CP}}{32\pi^2}. \tag{6.75}$$

$\theta_{\rm CP}$ の項は位相不変量なので、量子論的に次の不変性を持つ。

$$\theta_{\rm CP} \quad \longrightarrow \quad \theta_{\rm CP} + 2\pi. \tag{6.76}$$

この不変性は、経路積分表示を用いて考えると理解しやすい。量子論的分配関数 (partition function) は 次式で与えられる。

$$Z = \int [{\rm d}\phi \, {\rm d}\psi \, {\rm d}A_\mu] \, \exp\left\{iS[\phi, \psi, A_\mu]\right\}. \tag{6.77}$$

この表式から、(6.76) 式の変換で作用積分の変化分が $2\pi \times$(整数) ならば、量子論として不変であると結論付けることができる。実際に、(6.76) 式の変換で作用積分は 次の様に変換する。

$$\begin{aligned} \exp\{iS\} \xrightarrow{\theta_{\rm CP} \to \theta_{\rm CP} + 2\pi} & \exp \left\{ iS + i2\pi \int {\rm d}^4x \, \frac{1}{32\pi^2} \, F^a_{\mu\nu} \, \tilde{F}^{\mu\nu a} \right\} \\ = & \exp \left\{ iS + i2\pi \times (\text{整数}) \right\} \\ = & \exp \left\{ iS \right\}. \end{aligned} \tag{6.78}$$

この不変性を用いると、$g^2_{\rm eff}(g^2_{\rm h})$ は $\theta_{\rm CP}$ に関して 2π の周期性を持たねばならないので、次の様にフーリエ展開できるはずである。

$$\frac{8\pi^2}{g^2_{\rm eff}(g^2_{\rm h})} = \frac{8\pi^2}{g^2_{\rm h}} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \, {\rm e}^{-n\frac{8\pi^2}{g^2_{\rm h}}}. \tag{6.79}$$

非可換ゲージ理論は 弱結合の極限 $g^2_{\rm h} \to 0$ が存在すると思われているので、$g^2_{\rm h} \to 0$ の極限で上式の右辺が発散しないためには、$a_n = 0$ $(n < 0)$ となっているはずである。すなわち、

$$\frac{8\pi^2}{g^2_{\rm eff}(g^2_{\rm h})} = \frac{8\pi^2}{g^2_{\rm h}} + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, {\rm e}^{-n\frac{8\pi^2}{g^2_{\rm h}}}. \tag{6.80}$$

右辺第 1 項は tree レベルの値で、第 2 項は結合定数によらない量子補正、すなわち、これまで何度も出会った 1-loop からの寄与に対応する補正項である。第 3 項は、$g_{\rm h} = 0$ のまわりでの級数展開ができないので 非摂動論的寄与に（もしあれば）対応している。// 証明終わり

コメント

- 非摂動論的寄与（a_n $(n \geq 1)$ の項）は、n インスタントンからの寄与と同じ g 依存性を持っている。

- 理論の中に anomalous axial $U(1)_{\rm A}$ 対称性（説明略）を含む場合、$\theta_{\rm CP}$ は非物理的パラメータとなるので（つまり $U(1)$ カイラル変換によって、$\theta_{\rm CP}$ を任意の値に変えることができるので）、$g^2_{\rm eff}$ への量子補正の中には $\theta_{\rm CP}$ が含まれていないはずである。つまり、$g^2_{\rm eff}$ の量子補正部分には $g^2_{\rm h}$ の虚数部分は含まれていないはずである。従って、「秘密 5」より $g^2_{\rm eff}$ の量子補正は $g^2_{\rm h}$ によってはならない。すなわち、非摂動論的寄与はこの場合にはない。$(a_n = 0)$

- 読者の混乱を与えるかも知れないが、興味のある読者のために、更にコメントを加えておくと、次の論文で

  V.A. Novikov, M.A. Shifman, A.I. Vainstein and V.I. Zakharov, Nucl. Phys. **B229** (1983) 381

  $\mathcal{N} = 1$ 超対称ゲージ理論の β-関数（説明略）が、次の形で求められた。

$$\beta_{\rm NSVZ}(g) = -\frac{1}{16\pi^2}\,\frac{3C_2({\rm adj}) - \sum_i C_2(i)\,(1-\gamma_i)}{1 - C_2({\rm adj})\,g^2/8\pi^2}. \qquad (6.81)$$

ここで、γ_i は物質場のカイラル超場 Φ_i の異常次元 (anomalous dimension) で、C_2 はゲージ群の生成子 (generator) の 2 次のカシミアである。この β-関数は、2-loop 以上の補正が存在し、ここで得られた結果（摂動論的には 1-loop までの補正しかない）と矛盾する。その理由は、$\beta_{\rm NSVZ}$ は 1 粒子既約の有効作用積分から得られたものであり、我々が議論している Wilson 流の有効作用積分から得られたものではないからである。$\beta_{\rm NSVZ}$ の表式は摂動の全次数で厳密に正しいと考えられている。$\beta_{\rm NSVZ}$ と「厳密な結果 13」の間の関係は、次の論文に明確に述べられている。

N. Arkani-Hamed and H. Murayama, JHEP **06** (2000) 030 (hep-th/9707133).

（β-関数の 3-loop 以上の g 依存性はくりこみの処方に依存するので、くりこみの処方箋を正確に定義しない限り、“厳密” と言っても余り意味をなさない。）

- 1 粒子既約の有効作用積分から計算される β-関数には 一般に 2-loop 以上の寄与が（ここで考えている理論に対しても）存在する。1 粒子既約の有効作用積分から定義される β-関数は、2-loop までは くりこみの処方箋によらないことが知られている。ところが、Wilson 流の有効作用積分から得られる β-関数は 1-loop までの補正しか存在しないので、Wilson 流の β-関数は “物理的” ではない。

次にちょっと毛色を変えて、「秘密 8」に基づく超弦理論 (superstring theory) での非くりこみ定理を紹介しておこう。超対称性理論での非くりこみ定理の証明とはかなり趣が異なる。

厳密な結果 14

超弦理論のループ展開による有効超ポテンシャルへの補正はない。

≪ 証明 ≫

超弦理論では、2 つのボゾン場、ディラトン (dilaton) 場 $\phi_{\rm D}(x)$ と反対称テンソル場 $B_{\mu\nu}(x)$ が同じ超多重項のボゾンペアを組んでいる。(超対称性理論では、ボゾン場は自由度 2 の複素場から成ることを思い出せ。) ディラトン場 $\phi_{\rm D}(x)$ は、弦のループ展開のパラメータ $g_{\rm s}$ と次の関係がある。

$$g_{\rm s} = {\rm e}^{<\phi_{\rm D}>}. \qquad (<\phi_{\rm D}>\text{は}\phi_{\rm D}\text{の真空期待値}) \tag{6.82}$$

一方、反対称テンソル場 $B_{\mu\nu}(x)$ は、場の強さ (field strength) $H_{\lambda\mu\nu}(x)$ の形でしか作用積分の中に現れないことがわかっている。$H_{\lambda\mu\nu}(x)$ は $B_{\mu\nu}(x)$ を微分した形で含む ($H_{\lambda\mu\nu}(x) = \partial_\lambda B_{\mu\nu}(x) - \cdots$)。ここで、$\phi_{\rm D}$ と $B_{\mu\nu}$ に関する有効超ポテンシャル $W_{\rm eff}(\phi_{\rm D}, B_{\mu\nu})$ を考える。$B_{\mu\nu}$ は $H_{\lambda\mu\nu}$ の形でしか作用積分に現れないこと、$H_{\lambda\mu\nu}$ は $B_{\mu\nu}$ の微分 ($\partial_\lambda B_{\mu\nu}$ 等) しか含まないこと、また、ポテンシャルは微分項を含まないこと、更に $\phi_{\rm D}$ と $B_{\mu\nu}$ はペアで現れなければならないことを合わせて考えると、$W_{\rm eff}$ は $(\phi_{\rm D}, B_{\mu\nu})$ を含まないことが結論付けられる。すなわち、

$$\begin{aligned}
W_{\rm eff}(\phi_{\rm D}, B_{\mu\nu}) &= W_{\rm eff}(\phi_{\rm D}, H_{\lambda\mu\nu}) \\
&\quad (\text{なぜなら、}B_{\mu\nu}\text{は}H_{\lambda\mu\nu}\text{の形でのみ現れる。}) \\
&= W_{\rm eff}(\phi_{\rm D}, 0) \\
&\quad (\text{なぜなら、}W_{\rm eff}\text{の中には微分項は含まれない。}) \\
&= W_{\rm eff}(0, 0) \\
&\quad (\text{なぜなら、}\phi_{\rm D}\text{と}B_{\mu\nu}\text{はペアを組む。}) \\
&\Longrightarrow \text{弦のループ展開 } (g_{\rm s} = {\rm e}^{<\phi_{\rm D}>}) \text{ による補正はない！}
\end{aligned} \tag{6.83}$$

// 証明終わり

「秘密 8」の最後の応用例として、超対称性を非摂動論的に破りうる機構の 1 つを紹介しよう。

厳密な結果 15

次の性質を満たす超対称性模型は、超対称性を非摂動論的に破ると期待できる。
「理論の中に連続的な大局的対称性の破れに伴う Nambu-Goldstone ボゾンを含み、その（ボゾンの）相棒（スカラー場は複素場であったことを思い出せ）が N-G ボゾンでなく、かつ、ポテンシャルにエネルギーの値が一定の平らな方向 (flat direction) がない。」

≪ 説明 ≫

N-G ボゾンは、もともとあった大局的対称性による等ポテンシャル面の方向の存在のため、$m = 0$（ポテンシャルの山を感じない）となることが保証されているが、その相棒（今の場合 bosonic partner）は仮定によりそのような等ポテンシャル面を持たないので、それぞれのボゾンは異なるポテンシャルを感じていることになる。同じ超対称多重項に属するボゾンでありながら、異なるポテンシャルを感じていることになる。この様な異なる環境に置かれている 2 つのボゾンが、超多重項を組んで共に質量を持たない状態に止まっていられるというのは考えにくい。従って、ダイナミカルに超対称性の破れを引き起こすと期待される。// 説明終わり

6.7　指数定理

この章では位相不変量に基づく厳密な結果を幾つか紹介しよう。ここで紹介する結果は全て次の「秘密 9」がキー となる。

秘密 9

次の性質を満たす演算子 $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ を考えよう。

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^2 &= 1, \\ \mathcal{Q}^\dagger &= \mathcal{Q}, \\ \mathcal{P}\mathcal{Q} &= -\mathcal{Q}\mathcal{P}. \end{aligned} \tag{6.84}$$

$H \equiv \mathcal{Q}^2$ とおくと、H と $\mathcal{P}$ は可換なので H と $\mathcal{P}$ は同時対角化可能、すなわち、

$$\begin{aligned} H\,|E,\lambda\,\rangle &= E\,|E,\lambda\,\rangle, \\ \mathcal{P}\,|E,\lambda\,\rangle &= \lambda\,|E,\lambda\,\rangle. \qquad (\lambda = \pm 1) \end{aligned} \tag{6.85}$$

このとき、次式で定義される量 Δ は位相不変量 (topological invariant) となる。

$$\Delta \equiv N_{\lambda=1}^{E=0} - N_{\lambda=-1}^{E=0}. \tag{6.86}$$

ここで、$N_{\lambda=\pm 1}^{E=0}$ は $E=0$ で $\lambda = \pm 1$ の固有状態の数を表す。

≪ 証明 ≫

$\mathcal{Q}$ はエルミート演算子であり $H = \mathcal{Q}^2$ なので、H の固有値 E は $E \geq 0$ を満たす。

$$E = \frac{\langle\, E|H|E\,\rangle}{\langle\, E|E\,\rangle} = \frac{\langle\, E|\mathcal{Q}^2|E\,\rangle}{\langle\, E|E\,\rangle} = \frac{\|\ \mathcal{Q}|E\,\rangle\,\|^2}{\|\ |E\,\rangle\,\|^2} \geq 0. \tag{6.87}$$

(ここで、$\|\ |E\,\rangle\,\|$ は状態 $|E\,\rangle$ のノルムを表す。)

$\mathcal{P}$ の固有値は $\mathcal{P}^2 = 1$ であることより、$\mathcal{P} = \pm 1$ である。次に、$E > 0$ ならば、$\mathcal{P} = +1$ の状態と $\mathcal{P} = -1$ の状態が 必ず縮退することを示そう。$|E,+\,\rangle$ の状態 $(E > 0)$ から出発して、$|E,-\,\rangle$ の状態を次式で定義する。

$$|E,-\,\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{E}}\,\mathcal{Q}\,|E,+\,\rangle. \tag{6.88}$$

このとき、H と $\mathcal{Q}$ は可換、$\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ は反可換であることに注意すると、上で定義される状態 $|E,-\rangle$ は確かに H と $\mathcal{P}$ の固有値がそれぞれ E と -1 を持つ固有状態になっていることがわかる。すなわち、

$$\begin{aligned} \bullet\ H|E,-\rangle &= H\frac{1}{\sqrt{E}}\mathcal{Q}|E,+\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{E}}\mathcal{Q}H|E,+\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{E}}\mathcal{Q}E|E,+\rangle \\ &= E|E,-\rangle \end{aligned} \tag{6.89}$$

$$\begin{aligned} \bullet\ \mathcal{P}|E,-\rangle &= \mathcal{P}\frac{1}{\sqrt{E}}\mathcal{Q}|E,+\rangle \\ &= -\frac{1}{\sqrt{E}}\mathcal{Q}\mathcal{P}|E,+\rangle \\ &= -\frac{1}{\sqrt{E}}\mathcal{Q}|E,+\rangle \\ &= -|E,-\rangle . \end{aligned} \tag{6.90}$$

また、$|E,+\rangle$ が規格化可能であれば ($\||E,+\rangle\| < \infty$)、$|E,-\rangle$ も規格化可能である。

$$\begin{aligned} \langle E,-|E,-\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{E}}\langle E,+|\mathcal{Q}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\mathcal{Q}|E,+\rangle\right) \\ &= \frac{1}{E}\langle E,+|H|E,+\rangle \\ &= \langle E,+|E,+\rangle . \end{aligned} \tag{6.91}$$

以上のことから、$E > 0$ では $\mathcal{P} = +1$ と $\mathcal{P} = -1$ の状態は H の固有値に関して必ず縮退することがわかった。一方、$E = 0$ のときは、$\mathcal{Q}|E = 0,+\rangle = 0$ なので $|E = 0,+\rangle$ から $|E = 0,-\rangle$ の状態（あるいは逆）を作ることはできない。

$$\begin{aligned} 0 &= \langle E = 0,\lambda|H|E = 0,\lambda\rangle \\ &= \langle E = 0,\lambda|\mathcal{Q}^2|E = 0,\lambda\rangle \\ &= \|\ \mathcal{Q}|E = 0,\lambda\rangle\|^2 \\ \Longleftrightarrow\ & \mathcal{Q}|E = 0,\lambda\rangle = 0 \end{aligned} \tag{6.92}$$

従って、$E=0$ の状態は $\mathcal{P}=+1$ と $\mathcal{P}=-1$ とで縮退する必要はない。ここまでわかったことを図式的に表しておこう（図 3）。さて演算子

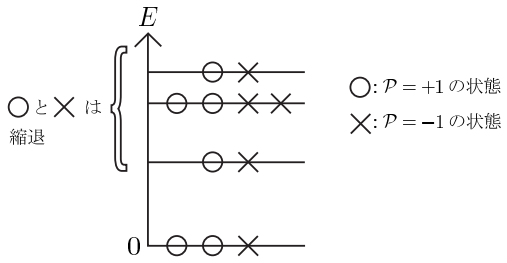


図 3:

$\mathcal{Q}$ の中に含まれているパラメータを連続的に変化させることを考えてみよう。このとき、$E=0$ の状態はどのように変化するのであろうか? パラメータの変化によって固有値 E のそれぞれの値は連続的に変化するであろう。しかし、$E\neq 0$ の状態は必ず $\mathcal{P}=+1$ と $\mathcal{P}=-1$ の状態とでペアを組んでいなければならないので、次の 2 通りの場合が考えられるであろう（図 4、5)。 従って、パラメータの連続変形で 一般に $N_{\lambda=1}^{E=0}$、あ

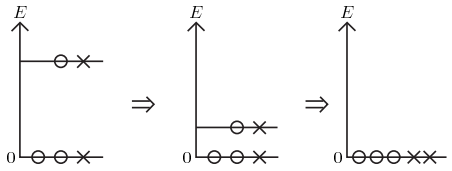


図 4:

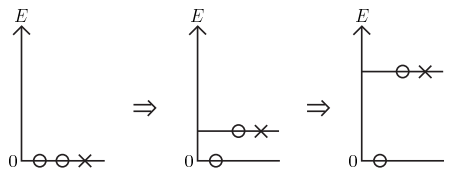


図 5:

るいは $N_{\lambda=-1}^{E=0}$ は変わりうるが、その差 $\Delta=N_{\lambda=1}^{E=0}-N_{\lambda=-1}^{E=0}$ は不変である

ことがわかる。つまり、Δ は位相不変量 (topological invariant) である。

// 証明終わり

コメント

- パラメータの連続変形で Δ は不変であると主張したが、このとき、パラメータの変形で $H = \mathcal{Q}^2$ の漸近的振舞いを変えるような変形は含めない。このような変形で Δ の値は一般に不連続に変わりうる。
- 上記の証明では エネルギーギャップの存在（$E = 0$ と $E \neq 0$ の間に有限のギャップが存在）を暗に仮定した。もし、$E = 0$ から固有値が連続的に存在する場合、あるいは質量ゼロのモードが存在する場合は、$E = 0$ の状態を取り出すことが自明でなくなるので、より注意深い解析が要求される。

それでは、「秘密 9」の適用例を幾つか挙げることにしよう。

厳密な結果 16

超対称性理論において、演算子 $\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ を

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= (-1)^F, \\ \mathcal{Q} &= \text{超電荷 (supercharge) のどれか 1 成分}, \end{aligned} \tag{6.93}$$

ととると「秘密 9」の性質を満たす。ここで、F はフェルミオン数演算子で、ボゾンの状態に対しては 0、フェルミオンの状態に対しては 1 をとる。このとき、$H = \mathcal{Q}^2$ の固有値はエネルギーに対応し、$\mathcal{P} = +1$ はボゾンの状態、$\mathcal{P} = -1$ はフェルミオンの状態に対応する。「秘密 9」で定義される位相不変量は、Witten index と呼ばれ 次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathrm{W}} = &(E = 0 \text{ のボゾンの状態数}) \\ &-(E = 0 \text{ のフェルミオンの状態数}). \end{aligned} \tag{6.94}$$

≪説明≫

（$\mathcal{N}=1$ の）超対称代数 (supersymmetry algebla) は、Majorana 型超電荷 $\mathcal{Q}_\alpha$ ($\mathcal{Q}^*_\alpha = \mathcal{Q}_\alpha$) を用いて表すと次式で与えられる。

$$\{\mathcal{Q}_\alpha,\, \mathcal{Q}_\beta\} = (\gamma_\mu\gamma_0)_{\alpha\beta}\, P^\mu. \tag{6.95}$$

ここで、P^μ はエネルギー・運動量演算子である。静止系 ($\boldsymbol{P}=0$) では、上式は $P^0 = H$ とおいて

$$\{\mathcal{Q}_\alpha,\, \mathcal{Q}_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}\, H \tag{6.96}$$

となる。従って、超電荷 $\mathcal{Q}_\alpha$ ($\alpha = 1, \cdots, 4$) のどれか 1 成分を選ぶと

$$(\mathcal{Q}_\alpha)^2 = \frac{1}{2} H \quad (\alpha\text{について和はとらない。}) \tag{6.97}$$

を得る。$\mathcal{Q}_\alpha$ は反可換な量でフェルミオン数 1 を持っているので、$\mathcal{P} \equiv (-1)^F$ とは反可換となる。

$$\mathcal{Q}_\alpha\, \mathcal{P} = -\mathcal{P}\, \mathcal{Q}_\alpha. \tag{6.98}$$

また、定義より $\mathcal{P}^2 = 1$ は自明であろう。// 説明終わり

コメント

- この指数 $\Delta_{\rm W}$ は、理論的にも現象論的にも重要な意味を持つ。Witten index に関しては、Witten の原論文は一読に値する。

  E. Witten, Nucl. Phys. **B202** (1982) 253.

- もし、$\Delta_{\rm W} \neq 0$ ならば、(ボゾン的であれ フェルミオン的であれ) エネルギー 0 の状態が存在することになる。このとき、**3.4** 章で議論したように超対称性は破れていないことになる。従って、現象論的模型の構築の際には、$\Delta_{\rm W} = 0$ の模型を採用する必要がある。(注 : $\Delta_{\rm W} \neq 0$ ならば超対称性は破れないが、$\Delta_{\rm W} = 0$ のときは超対称性が破れるかどうかは Witten index からは直接答えることはできない。)

- Witten index が有用な理由の 1 つは、多くの模型で厳密に計算可能であることが挙げられる。これは、$\Delta_{\rm W}$ が位相不変量なので漸近的振舞いを変えない限り、弱結合の極限 (weak coupling limit) や重い質量の極限 ($m \to \infty$; decoupling limit) 等で求めた値が厳密な値に等しいからである。上記に挙げた Witten の論文に数多くの例が具体的に計算されている。

♣ ♢ ♠ ♡ ♣ ♢ ♠ ♡ ♣ ♢ ♠ ♡ ♣ ♢ ♠ ♡ ♣ ♢ ♠ ♡ ♣ ♢ ♠ ♡ ♣ ♢ ♠ ♡
♢ ♠ ♡ ♣ ♢ ♠ ♡ ♣ ♢ ♠ ♡ ♣ ♢ ♠ ♡ ♣ ♢ ♠ ♡ ♣ ♢ ♠ ♡ ♣ ♢ ♠ ♡ ♣

摂動では超対称性は破れないが、非摂動論的効果で超対称性が破れる模型とは数学的にどのような構造を持っているのだろうか? このことを Witten index との絡みで、簡単な例を用いて その雰囲気を味わってみよう。

非摂動論的効果の “感触” を得るために、次の積分を考えると面白い。(実は、この積分表示は超ポテンシャル $W(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{\lambda}{3}x^3$ を持つ超対称量子力学に対する Witten index の積分表示に相当するものである。)

$$\Delta_{\rm W} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{{\rm d}x}{\sqrt{\pi}} \, (1 + 2\lambda x) \, {\rm e}^{-\left(x + \lambda x^2\right)^2}. \tag{6.99}$$

まず、摂動論的に λ で展開して $\Delta_{\rm W}$ を求めてみよう。公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{{\rm d}x}{\sqrt{\pi}} \, x^{2n} \, {\rm e}^{-x^2} = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \tag{6.100}$$

を用いると

$$\begin{aligned}
\Delta_{\rm W}^{\text{摂動}} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{{\rm d}x}{\sqrt{\pi}} \, {\rm e}^{-x^2} \, \Big\{ 1 + \lambda \left(2x - 2x^3 \right) \\
&\quad + \lambda^2 \left(-5x^4 + 2x^6 \right) + \lambda^3 \left(-2x^5 + 6x^7 - \frac{3}{4} x^9 \right) \\
&\quad + \lambda^4 \left(\frac{9}{2} x^8 - \frac{14}{3} x^{10} + \frac{2}{3} x^{12} \right) + \cdots \Big\} \\
&= 1 + \lambda \, (0 + 0) + \lambda^2 \left(-5 \cdot \frac{3!!}{8} + 2 \cdot \frac{5!!}{16} \right) \\
&\quad + \lambda^3 \, (0 + 0 + 0) + \lambda^4 \left(\frac{9}{2} \cdot \frac{7!!}{32} - \frac{14}{3} \cdot \frac{9!!}{64} + \frac{2}{3} \cdot \frac{11!!}{128} \right) \\
&\quad + \cdots \\
&= 1 + 0 \times \lambda + 0 \times \lambda^2 + 0 \times \lambda^3 + 0 \times \lambda^4 + \cdots .
\end{aligned} \tag{6.101}$$

λ のべき展開の各係数が全て 0 になる理由は、$\Delta_{\rm W}$ が位相不変量であり λ の連続変形の下で $\Delta_{\rm W}$ は不変であるからである。

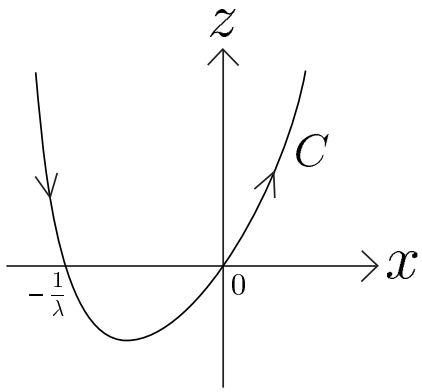
上で見たように、$\Delta_{\rm W}$ は摂動論的には 1 であった。これを非摂動論的に厳密に評価した場合、厳密な値は幾つであろうか? 色々な導出の仕方があるが、ここでは非摂動論的効果が見やすいように 次の変数変換を考えてみる。

$$z \equiv x + \lambda x^2. \tag{6.102}$$

この変数変換の下で $\Delta_{\rm W}$ の表式は次のように変形される。

$$\begin{aligned} \Delta_{\rm W} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{{\rm d}x}{\sqrt{\pi}} \left(1 + 2\lambda x\right) {\rm e}^{-\left(x+\lambda x^2\right)^2} \\ &= \int_C \frac{{\rm d}z}{\sqrt{\pi}} {\rm e}^{-z^2}. \end{aligned} \tag{6.103}$$

ここで、z の積分路 C が重要である。



上図の z の積分路からわかるように、x が $-\infty$ から $+\infty$ に値を変えるとき、z は $+\infty$ から再び $+\infty$ へ戻ってくる。すなわち、

$$\Delta_{\rm W}^{\rm exact} = 0. \tag{6.104}$$

もし、z の積分路を $z : -\infty \to +\infty$ にとると、摂動計算での値 $\Delta_{\rm W}^{\text{摂動}} = 1$ に一致する。(摂動論的には $\lambda = 0$ とおいたときの積分路 $z : -\infty \to +\infty$ をとることになる。) このように、非摂動論的効果は変数変換における積分路に現れている。このような変数変換 (Gauss 積分 (自由場) に持っていくような変数変換) のことを Nicolai mapping と呼ぶ。

少しは、非摂動論的効果を “体感” できただろうか?

$$\left(\begin{array}{l} \Delta_{\rm W}=0 \text{ の別証明：} \\ \qquad y\equiv -x-\dfrac{1}{\lambda} \text{ とおくと} \\ \qquad\quad \Delta_{\rm W}=-\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{{\rm d}y}{\sqrt{\pi}}\,(1+2\lambda y)\,{\rm e}^{-\left(y+\lambda y^2\right)^2}=-\Delta_{\rm W} \\ \qquad \Longrightarrow \Delta_{\rm W}=0 \end{array}\right) \tag{6.105}$$

♢ ♠ ♡ ♣ ♢ ♠ ♡ ♣ ♢ ♠ ♡ ♣ ♢ ♠ ♡ ♣ ♢ ♠ ♡ ♣ ♢ ♠ ♡ ♣ ♢ ♠ ♡ ♣
♣ ♢ ♠ ♡ ♣ ♢ ♠ ♡ ♣ ♢ ♠ ♡ ♣ ♢ ♠ ♡ ♣ ♢ ♠ ♡ ♣ ♢ ♠ ♡ ♣ ♢ ♠ ♡

「秘密 9」は、直接 超対称性とは関係のない定理である。次に、カイラルフェルミオンを含むゲージ理論（超対称性理論である必要はない）への応用を紹介しておこう。

厳密な結果 17

演算子 $\mathcal{P},\ \mathcal{Q}$ として 次のようにとる。

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{P}=\gamma_5\ , \\ \mathcal{Q}=i\not{D}=i\gamma^\mu\left(\partial_\mu-iA_\mu\right)\ . \end{array}\right. \tag{6.106}$$

ここでは、ミンコフスキー時空から Wick 回転をした 4 次元ユークリッド空間を考える。4 次元ユークリッド空間では、全ての γ^μ をエルミート行列にとれ、$\gamma_5\,\gamma^\mu=-\gamma^\mu\,\gamma_5$ を満たすので、上で定義された $\mathcal{P},\ \mathcal{Q}$ は「秘密 9」での性質を満たしている。従って、次の位相不変量を得る。

$$\begin{aligned} \Delta_{\rm anomaly}\equiv &\left(\not{D}^2=0 \ \text{ かつ } \ \gamma_5=1 \text{ の状態数}\right) \\ &-\left(\not{D}^2=0 \ \text{ かつ } \ \gamma_5=-1 \text{ の状態数}\right). \end{aligned} \tag{6.107}$$

コメント

- 古典論で存在した対称性が量子論で破れるという現象（anomaly と呼ばれる）が起こる。Δ_{anomaly} はカイラル対称性の破れと関係する位相不変量である。（数学的には、Atiyah-Singer の指数定理や Pontryagin 指数とも関係する。）
- 大局的対称性はアノマリーによって量子論的に破れても理論的には問題ないが、ゲージ対称性がアノマリーによって破れると理論の整合性が失われる。我々が標準模型 (Standard Model) と呼ぶ理論は、ゲージ対称性に対するアノマリーが見事に相殺している。このように、Δ_{anomaly}（あるいは これの拡張版）は現象論的模型を構築する上で重要な指針となる量である。また、アノマリーは、$\pi^0 \to 2\gamma$ の崩壊で実験的に観測されている。
- アノマリーについての解説はたくさん出ているが、経路積分表示を用いたアノマリー研究の第一人者である 藤川和男 氏による解説が

  藤川和男、“ゲージ場の理論（岩波講座、現代物理学 20）”、岩波書店

  で読むことができる。

最後に、非自明な背景場の下でのディラック演算子 $\not{D}$ のゼロモードの数に関する指数定理を紹介することにしよう。

これは、最近 脚光を浴びている高次元（余剰次元）の物理と関係する重要な指数である。4 次元以上の高次元時空から 4 次元の我々の世界を記述するために、4 次元以外の空間は何らかの機構で（少なくとも現在の実験の精度内で）観測にかからないように なっていなければならない。（通常は半径の小さいコンパクトな空間が仮定されるが、必ずしもコンパクトである必要はない。）しかしながら、一般的にこのようにして得られた理論には、標準模型に含まれているカイラルフェルミオンが現れない。（左巻きと右巻きのカイラルフェルミオンが対称的に現れてしまう。）今から述べる指数定理が教えてくれることは、4 次元でのカイラルフェルミオンの存在を保証するためには、余分な次元の空間が非自明な位相（トポロジー）をもつ、あるいは位相的に非自明な背景場が存在するなど位相的に非自明なものが存在しなければならないということである。高次元の理論を用いて現象論の構築を目指す人は、この定理を避けて通るこ

とはできない。この一般論を展開することは（私には）難しいので、ここでは具体例で理解することにしよう。

話を簡単にするため、余分な次元 (extra dimension) は 1 次元として 5 次元時空を考える。5 次元目の座標 y のみに依存するスカラー場 $\phi(y)$ を背景場にもつ 5 次元ディラック方程式を考えよう。（$\phi(y)$ はあとで キンク解にとる。）

$$\left[i \sum_{\mu=0}^{3} \partial_\mu \gamma^\mu + \partial_y \gamma_5 + m + g\,\phi(y) \right] \Psi(x^\mu, y) = 0. \tag{6.108}$$

（注：5 次元目方向の γ-行列は、$i\gamma_5$ にとれる。）
ここで、次の微分演算子 $\mathcal{M}(y)$ の固有値方程式を考える。

$$\mathcal{M}(y)\, u_n(y) = M_n\, u_n(y), \tag{6.109}$$

ただし、

$$\mathcal{M}(y) \equiv \partial_y \gamma_5 + m + g\,\phi(y). \tag{6.110}$$

この固有関数 $u_n(y)$ を用いて $\Psi(x^\mu, y)$ を展開したとすると (すなわち、$\Psi(x^\mu, y) = \sum_n \psi_n(x^\mu)\, u_n(y)$)、(6.108) の方程式は

$$\left[i \sum_{\mu=0}^{3} \partial_\mu \gamma^\mu + M_n \right] \psi_n(x^\mu) = 0 \tag{6.111}$$

となり、ちょうど $\psi_n(x^\mu)$ は 4 次元で見たとき 質量 M_n を持つディラック粒子を表していることがわかる。特に低エネルギーでは質量ゼロ（$M_n = 0$）のモードに興味があるので

$$\mathcal{M}(y)\, u(y) = 0 \tag{6.112}$$

の解を探すことにしよう。ここで γ_5 の固有状態（$\gamma_5 = \pm 1$）を考えると、上の方程式は次の 2 つに分れる。

$$\begin{cases} \mathcal{D}\ u_+(y) \equiv [\partial_y + m + g\,\phi(y)]\, u_+(y) = 0\ , \\ \\ \mathcal{D}^\dagger\, u_-(y) \equiv [-\partial_y + m + g\,\phi(y)]\, u_-(y) = 0\ . \end{cases} \tag{6.113}$$

$$\left(\begin{array}{ll} \text{注：} & \text{運動量演算子 } p = -i\frac{\partial}{\partial x} \text{ がエルミートであることを} \\ & \text{思い出すと } (\partial_y)^\dagger = -\partial_y\text{。また } \phi(y) \text{ は実場である。} \end{array} \right)$$

また、$u_\pm$ の定義より、4 次元時空の観点から u_+, u_- はそれぞれ右巻き (right-handed)、左巻き (left-handed) のモードに対応する。ここまで来ると、「秘密 9」での演算子 $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ を具体的に定義することができる。

$$\begin{cases} \mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \\ \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D}^\dagger \\ \mathcal{D} & 0 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{6.114}$$

容易に示すことができるように、これらの演算子は望まれた関係式

$$\begin{cases} \mathcal{P}^2 &= 1\,, \\ \mathcal{Q}^\dagger &= \mathcal{Q}\,, \\ \mathcal{P}\,\mathcal{Q} &= -\mathcal{Q}\,\mathcal{P}\,. \end{cases} \tag{6.115}$$

を満たす。このとき、

$$H = \mathcal{Q}^2 = \begin{pmatrix} \mathcal{D}^\dagger\,\mathcal{D} & 0 \\ 0 & \mathcal{D}\,\mathcal{D}^\dagger \end{pmatrix} \tag{6.116}$$

となるので、「秘密 9」の結果より 次の位相不変量を得る。

$$\begin{aligned} \Delta \equiv & \Big(\mathcal{D}^\dagger\,\mathcal{D} = 0 \text{ の固有値の数}\Big) \\ & - \Big(\mathcal{D}\,\mathcal{D}^\dagger = 0 \text{ の固有値の数}\Big)\,. \end{aligned} \tag{6.117}$$

ところが、$\mathcal{D}^\dagger\,\mathcal{D} = 0$ $(\mathcal{D}\,\mathcal{D}^\dagger = 0)$ の固有関数は同時に $\mathcal{D} = 0$ $(\mathcal{D}^\dagger = 0)$ の固有関数と等価である。

$$\left(\begin{array}{l} \text{なぜなら、} \\ \quad \begin{array}{rcll} \mathcal{D}^\dagger\,\mathcal{D}\,|E\rangle = 0 & \Longrightarrow & 0 & = \langle E|\,\mathcal{D}^\dagger\,\mathcal{D}\,|E\rangle \\ & & & = \|\,\mathcal{D}\,|E\,\rangle\|^2 \\ & \Longrightarrow & \mathcal{D}\,|E\rangle = 0 & \\ \\ \mathcal{D}\,\mathcal{D}^\dagger\,|E\rangle = 0 & \Longrightarrow & 0 & = \langle E|\,\mathcal{D}\,\mathcal{D}^\dagger\,|E\rangle \\ & & & = \|\,\mathcal{D}^\dagger\,|E\,\rangle\|^2 \\ & \Longrightarrow & \mathcal{D}^\dagger\,|E\rangle = 0 & \end{array} \\ \\ \quad \text{逆も当然成り立つので、} \\ \quad \begin{array}{l} \mathcal{D}^\dagger\,\mathcal{D}\,|E\rangle = 0 \Longleftrightarrow \mathcal{D}\,|E\rangle = 0 \\ \mathcal{D}\,\mathcal{D}^\dagger\,|E\rangle = 0 \Longleftrightarrow \mathcal{D}^\dagger\,|E\rangle = 0 \end{array} \end{array} \right)$$

従って、(6.117) 式は次のように書き直すことができる。

$$\Delta = (\mathcal{D} = 0 \text{ の固有値の数}) - \left(\mathcal{D}^\dagger = 0 \text{ の固有値の数}\right). \tag{6.118}$$

更に、$\mathcal{D} = 0$ $(\mathcal{D}^\dagger = 0)$ の固有関数は $u_+(y)$ $(u_-(y))$ であり、$u_\pm(y)$ は γ_5 の ± 1 の固有状態と対応していたので、(6.118) 式を 4 次元時空の物理の言葉に焼き直すならば、次のように書き表すことができるであろう。

$$\Delta = (\text{右巻きのカイラルフェルミオンの数}) - (\text{左巻きのカイラルフェルミオンの数}). \tag{6.119}$$

上で定義される Δ は位相不変量であることはわかった。では、系のどんな位相不変量と関係しているのであろうか? 答えは、$m(y) \equiv m + g\,\phi(y)$ として

$$\Delta = \frac{1}{2}\left\{\frac{m(\infty)}{|m(\infty)|} - \frac{m(-\infty)}{|m(-\infty)|}\right\} = \text{キンク 数.} \tag{6.120}$$

である。残念ながら、(6.119) 式で定義される Δ が (6.120) 式の右辺で与えられことを証明するのはやさしくない。ここでは、文献を挙げるに止めよう。

E. Weinberg, Phys. Rev. **D24** (1981) 2669.

以上の結果をまとめると

厳密な結果 13

4 次元時空での右巻きと左巻きのカイラルフェルミオンの差は位相不変量であり、それは背景場 $\phi(y)$（正確には $m + g\,\phi(y)$）のキンク数に等しい。すなわち、

$$\begin{aligned}\Delta \;&\equiv\; (\text{右巻きのカイラルフェルミオンの数}) \\ &\qquad - (\text{左巻きのカイラルフェルミオンの数}) \\ &=\; \text{キンク数.}\end{aligned} \tag{6.121}$$

7　まとめ

この講義ノートでは、超対称性理論を中心に 知られている様々な厳密な結果をその背後に隠れた秘密と共に紹介した。ここで紹介し切れなかった厳密な結果も数多く存在する。時間的制約、私の能力等の理由で ここまでとしたい。

この講義ノートを最後まで我慢強く読んでくれた読者は、「厳密な結果」にはそれなりの “存在理由” があるということを体感できたのではないかと思う。これからは、この経験を生かして、摂動論的にでも非摂動論的にでも厳密な結果に出会ったら、背後に潜んでいる秘密を暴き出して欲しい。既に知られている結果に対しても、新しい知見が得られるに違いない。摂動を越えた真の場の量子論の理解に、また一歩近付いたたことになる。

この講義ノートは、2000 年 木島平における三者夏の学校での講義ノートに（大幅な）説明を加えたものである。最後に、夏の学校では大変お世話になり、この原稿の件でも尽力を尽くして頂いた新潟大の素粒子論研究室の方々には心からお礼を申し上げたい。