2000年三者若手夏の学校講義録
於：パノラマランド木島平
7月21、22日

「標準模型を越えて」

講師：山口昌弘氏（東北大学）

作成：新潟大学
小野昌弘　金子悟　下山法之

目 次

1 導入 **1**

2 標準模型とそれを越える理論 **1**

2.1 ゲージ 対称性 2
2.2 ヒッグス機構 3
2.3 ゲージボソン 6
2.4 湯川相互作用 7
2.5 標準模型を越えて 10
2.5.1 実験 10
2.5.2 標準模型 の不自然さ 11
2.5.3 Strong CP 12
2.5.4 String 13
2.5.5 宇宙 13

3 大統一理論 (Grand Unified Theory) **14**

3.1 ゲージセクター 14
3.2 物質場セクター 15
3.3 ヒッグス-湯川相互作用 16
3.4 予言 17
3.4.1 ゲージ結合定数 17
3.4.2 陽子崩壊 18

4 超対称性 (Supersymmetry) **20**

4.1 超場 21
4.2 ２種類の超場 23
4.3 Lagrangian 24
4.4 極小超対称標準模型 (Minimal Supersymmetric Standard Model) 27
4.5 超対称性の破れ (SUSY Breaking) 28
4.6 超対称性理論の予言 (SUSY Predictions) 30

5 超対称大統一理論 (SUSY GUT) **31**

5.1 ゲージ構造 31
5.2 フレーバー構造 34
5.2.1 極小 SU(5) 34
5.2.2 Triplet-doublet Splitting 35
5.2.3 次元 5 の陽子崩壊 (Dimension5 Proton Decay) 36

5.2.4 フェルミオン質量 40
5.2.5 ニュートリノ質量 41

6 ブレーン世界 (Brane World) 42
6.1 弦理論 (String Theory) 43
6.2 ヘテロティック M 理論 44
6.3 ラディカルな提案 : 大きな余剰次元 (Large Extra Dimensions) 49

（1 日目）

1　導入

標準模型を越えてという題名で話を進めたいと思いますけれども、頭にあったのは標準模型を越えた枠組みのなかで一つは**超対称性 (Supersymmetry)** ともうひとつ**余剰次元 (Extra Dimensions)** です。時間があれば両方話したいんですけれども主に**SUSY GUT(Supersymmetric Grand Unified Theory)** の話をしたいと思います。標準模型は 1 時間でやって残りの時間を使って標準模型を越える話します。標準模型についてはアイディアのみを話したいと思います。標準模型の次に Grand Unification の非常に基本的なアイディアを話します。3 番目に階層性 (hierarchy) を安定化させるために超対称性の話をして SUSY GUT の構造などに触れたいと思います。SUSY GUT において、フェルミオンの質量とかフレーバーの構造をみてゆくと克服しなければならない困難もあります。それが越えられれば SUSY GUT を本当に信じることができます。今、いろいろなヒントが出つつある段階にあり、そういう話を主にしていきます。そして 5 番目にブレーン (brane) とかを使った話をします。したがって以下のような計画を立てます。

- 標準模型とそれを越える理論
- 大統一理論 (GUT)
- 超対称性
- SUSY GUT
- ブレーン世界 (Brane World)

この講義の目標としては、Brane World までいくことです。で、明らかに話せないことがあります。まず超対称性の詳細、それから超重力理論（Supergravity）については話せません。それと超対称性を話すときに非常に重要なのが超対称性がどのように破れるか hidden セクターというのがあって、どうやって伝わってきてるのかとかいう話や、さらに超対称性の現象論もしゃべれないので勘弁してください。それでは早速、素粒子の標準模型がどういう枠組みなのかポイントをしぼって話したいと思います。

2　標準模型とそれを越える理論

重要なことは標準模型はゲージ相互作用によって記述され、そのゲージ対称性が自発的に破れるということです。

標準模型 には クォーク、レプトンという場があります。

クォーク	u	c	t
	d	s	b
レプトン	e	μ	τ
	ν_e	ν_μ	ν_τ

それで重要なのはゲージ相互作用です。これには何個か種類がありまして一つは**強い相互作用**、**電磁相互作用**、それから **弱い相互作用** です。

ここで強い相互作用はゲージ相互作用 $SU(3)$ で記述されており、このときのゲージ粒子は零質量のベクトル粒子として現われます。今の場合はグルーオン (gluon) です。

それから $U(1)$ 相互作用、つまり Maxwell の理論です。ここに現われる粒子は光子（photon）です。弱い相互作用はちょっと見え方が違っていて質量をもつ粒子（$W^\pm$ あるいは中性カレントだと Z^0 ボソン）の交換によって作用しています。これらは $SU(2) \times U(1)$ のゲージ相互作用によって記述されます。

この他によく知られたゲージ相互作用として重力がありますが、今の議論を進めるうちは、しばらく見ないことにします。

2.1 ゲージ 対称性

ではこの $U(1)$ のゲージ理論をみながら、その本質的な部分はどこらへんにあるのかを復習します。要するに Maxwell の理論ですが、Lagrangian はこのように書けます:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \ . \tag{2.1}$$

F は場の強さ (Field Strength) で, A_μ で書けています。この理論には 次のようなゲージ対称性があります。

Λ というパラメタを使い、A_μ をシフトしてやります:

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda(x) \ . \tag{2.2}$$

この変換に対して Lagrangian は不変 ($\delta\mathcal{L} = 0$) です。$U(1)$ の場合は 場の強さ自身も不変になっています。

重要な点は電子とかの 相互作用 がコントロールされることです。物質場との結合は、物質場がどれだけの電荷をもっているかに支配されてしまうことです。だからこのゲージ変換で物質場が

$$\psi \longrightarrow \psi' = \exp(iQg\Lambda)\psi, \quad (g : \text{結合定数}、Q : \text{電荷}) \tag{2.3}$$

のように変換しますと物質場の相互作用 のところに現れる形 $\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ を先の ψ のゲージ変換で不変にするために A_μ の部分を共変微分に代えてやればよいわけです:

$$\partial_\mu \longrightarrow \partial_\mu - igQA_\mu \equiv D_\mu \ . \tag{2.4}$$

このようにして物質場とゲージ場の結合の仕方が決まるわけです。非可換ゲージ理論の時も同じ議論ができまして表現が決まれば相互作用がきまります。$U(1)$ の場合は電荷、非可換ゲージ理論はどのような表現を使うかで決まるということです。重要なことはこの Lagrangian には零質量の粒子が含まれてることです。そこでこれに無理やり次のような質量項をつけてやろうと思います。それはこんな形に書けるわけです:

$$\mathcal{L}_{\rm m} = +\frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu \ . \tag{2.5}$$

これをつけると明らかにゲージ不変でありません。これは質量項がゲージ不変性と矛盾せずにつけることはできないことを意味します。つまりゲージ不変の場合、入ってくるのは零質量ゲージボソンです。ベクトル粒子ではいってる理論のくりこみ可能性とかユニタリティに重要な役割をします。むりやり質量を入れると理論が破綻してしまうわけです。知ってることは何かというと弱い相互作用の部分は表現に完全に従う形で、物質場が W ボソンなどと結合しているということです。これは実験的に読み取れ、これは W ボソンがゲージ粒子であることを強く示唆しています。これは W ボソンが質量をもつことと一見矛盾していますがこれを解決してくれるのがヒッグス機構です。

2.2 ヒッグス機構

基本的には対称性の自発的破れで、例えば複素スカラーで電荷を $1(Q=1)$ をもってる理論を考えます。ポテンシャルは次のような形に書けます:

$$V(\phi) = m^2\phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2 \qquad m^2 < 0 \ . \tag{2.6}$$

今、m^2 の符号は負にとっておきます。この ϕ は実部と虚部があります。ポテンシャルの形は図 1 のようになります。こういうポテンシャルがあると、真空としてはワインボトルのそこのある一点をとることになります。これはどこにとってもいいのですが、例えば点 P にとったとします。すると ϕ が次のような値を持ちます:

$$< \phi >= \sqrt{-\frac{m^2}{2\lambda}} \equiv v \ . \tag{2.7}$$

これは対称性が自発的に破れたということを意味します。

で、まず大局対称性、つまり時空の各点に寄らない対称性を考えると **南部-ゴールドストンボソン (Nambu-Goldstone boson)** が出ます。これがどういうモードに対応してるかというと上の絵でみればわかるように複素スカラーの 2 つのモード (自由度) は動径方向と角度方向があり、ポテンシャルを動径方向にずらしてやります。このときスカラーポテンシャルの曲率は質量に相当します。また角度方向にずらすときはポテンシャルの障壁がなく、平坦ですから零質量の粒子が存在するということになります。したがって複素場を次のように 2 つに分けます:

$$\phi = \frac{1}{2}(v + \phi_1 + i\phi_2) \ . \tag{2.8}$$

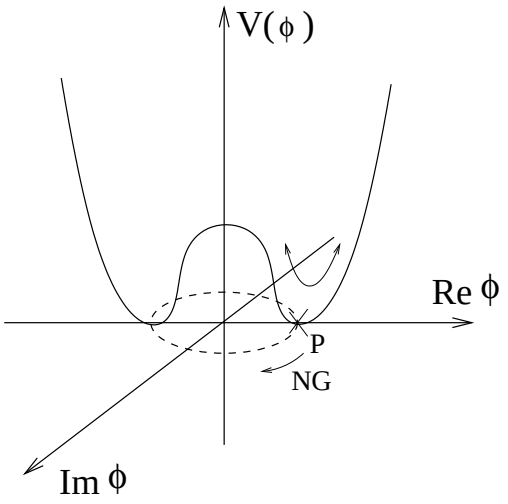

図 1: ヒッグスポテンシャル

ここで ϕ_1 は質量が $\sqrt{-2m^2}$、ϕ_2 が NG ボソンという 2 つのモードがあります。それで今の南部-Goldstane ボソンですが、どういう相互作用しているかを見る必要があるんですが、ちょっとやってる暇もないので先に進みます。

この場合はまず ϕ が現れてくるのは質量項だけです。ϕ の運動項は $\partial_\mu\phi$ の共変微分 $D_\mu\phi$ です:

$$|D_\mu\phi|^2 = |(\partial_\mu - igA_\mu)\phi|^2 \ . \tag{2.9}$$

これを眺めてみますと ϕ は期待値で置き換わり、A_μ の双線形項が出てきます:

$$\frac{1}{2}g^2v^2A_\mu A^\mu \ . \tag{2.10}$$

これは先ほどから欲しかったのだけど, 入れてしまうとゲージ不変性を壊してしまった質量項です。どうしてこんなのが現れたかというと、それも色いろな言い方がありますが、最も簡単な説明として自由度を眺めてやります。自由度は実で勘定します。もともとの粒子には A_μ と ϕ がありました。零質量ベクトル場の物理的な自由度は 2、一方複素場は実で 2 つの自由度があります。ϕ が期待値をもつと 南部-ゴールドストンボソン (NG ボソン) があり、これが A_μ に吸収されるという現象が起こります。すると A_μ は質量を獲得して 3 つの自由度が出ます。つまり、ヒッグス機構は ϕ のうちの一つの NG ボソンをゲージ場が吸収して質量を持ち、そしてもう一つが残ります。残った方を **ヒッグスボソン** と呼び、こういうのを起こすために導入された場をヒッグス場と言います。かなりは荒らく説明してるのでもっと詳しく知りたい人はちゃんと勉強してください。これでわかったつもりにはならないで。きちんとした背景がありますから。

今のは $U(1)$ の話ですが標準模型でもこういうことは起っていることが予想されます。それが標準模型のヒッグス機構ですが、この場合は $SU(2)$ と $U(1)$ の対称性です。$SU(2)$ はどうい

う生成子かというと、ちょうど Pauli 行列です:

$$SU(2)_{\rm L}: \quad \frac{\tau_i}{2} = I_i \quad (i=1,2,3)\ . \tag{2.11}$$

各生成子に対応してゲージボソン W^i_μ $(i=1,2,3)$ が存在します。それで $SU(2)_{\rm L}\times U(1)_{\rm Y}\to U(1)_{\rm em}$ まで破れるという話をするときに、はじめにやらなければならないのは、ヒッグス場としてどういうものをもってきたいか、電荷を幾つにするかということです。$SU(2)$ は $U(1)$ と異なり、例えば 2 表現をとるのか 3 表現をとるのかの違いがあるわけです。破れるのはどういう表現で破れるのかを指定しないと、例えば Z ボソンの質量などの関係が変わってきます。どうすれば実験とピッタリ合うかは知られていて、ヒッグス場として $SU(2)$ の 2 重項をもてくればいいことがわかっています。$U(1)_{\rm Y}$ の電荷は ±1 どっちでもいいのですが（-1 をとればこれの複素共役の表現を考えればいいだけです。）、それで例えばヒッグス場を次のように複素スカラーにとります:

$$H \equiv \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}\ . \tag{2.12}$$

$SU(2)$ と $U(1)$ はこれに作用します。今 自発的対称性の破れが起って H が凝縮（condense）したとします:

$$< H >= \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix}\ . \tag{2.13}$$

このように実部に真空期待値 (Vacuum Expectation Value:VEV) の方向ををもってきます。それには $SU(2)$ の対称性をつかって真空期待値を下にもってきます。その後 $U(1)$ の対称性を使って、真空期待値を完全に実にとれます。別になんら悪いことをしていないわけです。ベースをうまくとらないとやっかいなだけです。

今、生成子として I_1、I_2、I_3、Y がありますが I_1、I_2 は非対角な成分を持つ行列で、下の方向にあったベクトルを上の方向に、下の方向を上の方向にもっていきます。その方向ってのは対称性を破ってる方向です:

$$I_1\begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} \neq 0, \quad I_2\begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} \neq 0\ . \tag{2.14}$$

そういうのを **破れた生成子 (broken generator)** と言います。ここから W_μ ボソンが出ます。それから $I_3-\frac{Y}{2}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ という組み合わせもやはり破れた生成子で、ここから Z_μ ボソンが出ます。ここでハイパー電荷 1 は $Y=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で 2 次元のベクトルに作用します。もう一つの組み合わせである $I_3+\frac{Y}{2}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は、この方向に関して対称性 は破れてなくて $U(1)$ は保ってます。この対称性を $U(1)_{\rm em}$ と定義し、西島-ゲルマン則 $Q\equiv I_3+\frac{Y}{2}$ が出てきます。

2.3 ゲージボソン

ゲージボソンの質量を計算することができます。これは共変微分

$$D_\mu H = (\partial_\mu - igI_i W_\mu^i - ig'\frac{Y}{2}B_\mu)H, \quad H = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

を眺めてやればいいわけですが、今はゲージボソンの質量しか興味がないわけで、完全にゲージのところだけを見てます。したがって

$$D_\mu H = \begin{pmatrix} i\frac{g}{2}W_\mu^+ v \\ \frac{i}{2\sqrt{2}}(gW_\mu^3 - g'B_\mu v) \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

となります。ここで $W_\mu^\pm$ は、先ほどの W_1、W_2 を使って書きますと、$W^\pm = \frac{1}{2}(W_\mu^1 \pm iW_\mu^2)$ です。ここからすぐ読み取れることは W の質量が $\frac{1}{2}gv$ となることです:

$$\text{W ボソン 質量} : \frac{1}{2}gv \ . \tag{2.17}$$

$\frac{1}{2}$ がついているのは W ボソン自身が複素だからです。それで Z ボソンのほうは適当な線形結合になります。その混じり具合いをコントロールするのが **ワインバーグ角**; $\theta_{\rm w}$ と言われるものです;

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{\rm w} & -\sin\theta_{\rm w} \\ \sin\theta_{\rm w} & \cos\theta_{\rm w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

先の式をみればわかることですが Z ボソンの質量を計算しますと

$$m_Z = \frac{1}{2}\sqrt{g^2 + g'^2}v \tag{2.19}$$

となり、$\sin\theta_{\rm w}$ は

$$\sin^2\theta_{\rm w} = \frac{g'^2}{g^2 + g'^2} \tag{2.20}$$

となります。

10 年くらい前の話ですが、論文を書いていたとき僕がワインバーグ角と書いたらレフェリーから「Weak Mixing 角」と言えと言われました。彼はワインバーグが嫌いだったのかもしれません（笑)。

ゲージ結合定数 e は g、g' と関係がついていて

$$\frac{1}{e^2} = \frac{1}{g^2} + \frac{1}{g'^2} \tag{2.21}$$

という関係があります。これから $e = g\sin\theta_{\rm w}$ がわかります。

この時点で面白いことは W ボソンと Z ボソンの質量を使って $\cos\theta_{\rm w}$ は次のように書けます:

$$\cos\theta_{\rm w} = \frac{m_{\rm W}}{m_{\rm Z}} \ . \tag{2.22}$$

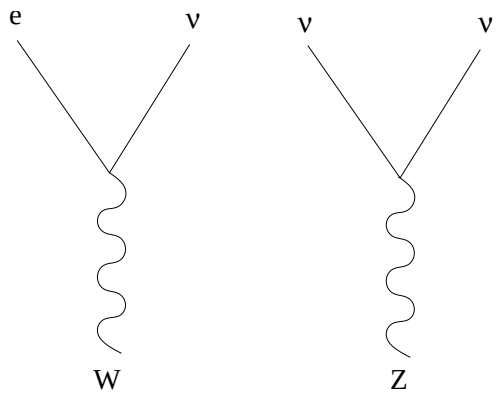

図 2: J_c、J_n のグラフ

実はこれは非常に重要な関係式です。中性の Z ボソンは中性カレント J_{m} と相互作用をし、電荷をもってる W ボソンは荷電カレント J_{c} と相互作用をします。つまり例えば図２のように書けます。W ボソンの質量と Z ボソンの質量はそれぞれ J_{c} 同士の相互作用の強さと J_{n} 同士の相互作用の強さをコントロールしています。実はそれぞれの相互作用の強さの比をとったものを ρ パラメータと言い、

$$\rho \equiv \frac{J_{\mathrm{n}} - J_{\mathrm{n}}}{J_{\mathrm{c}} - J_{\mathrm{c}}} = \frac{m_Z^2 \cos^2 \theta_{\mathrm{w}}}{m_{\mathrm{W}}^2} \tag{2.23}$$

となり、Z ボソンの質量は分子に、W ボソンの質量は分母にきます。すると (2.22) から、$\rho = 1$ です。これは実験で測られていて、実験的にもこの関係は１であることが知られています。ヒッグスが２重項であるということからこの関係は出てきたのですが、一般的には２重項以外のものを考えるとこの関係は１からずれます。これがヒッグスを２重項におく理由です。

2.4 湯川相互作用

標準模型の大きな役割は湯川相互作用からクォークやレプトンの質量が出るということです。相互作用の形は例えば

$$y_{\mathrm{d}} \overline{\mathrm{q}}_{\mathrm{L}} d_{\mathrm{R}} H \tag{2.24}$$

です。ここでヒッグス場が真空期待値をもつことで、ここではダウン型のクォークが質量をもちます:

$$\frac{y_{\mathrm{d}} v}{\sqrt{2}} \overline{d}_{\mathrm{L}} d_{\mathrm{R}} \ . \tag{2.25}$$

ゲージ 相互作用 は表現を与えれば Lagrangian は書けるわけですが、次の表を与えておきます。

	$SU(3)_{\rm c}$	$SU(2)_{\rm L}$	$U(1)_{\rm Y}$	$Q = I_3 + \frac{Y}{2}$
Quarks $q_{\rm L} = \begin{pmatrix} u_{\rm L} \\ d_{\rm L} \end{pmatrix}$	3	2	$\frac{1}{3}$	$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$
$u_{\rm R}$	3	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$
$d_{\rm R}$	3	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
Leptons $l_{\rm L} = \begin{pmatrix} \nu_{\rm L} \\ e_{\rm L} \end{pmatrix}$	1	2	-1	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
$e_{\rm R}$	1	1	-2	-1

西島-ゲルマン則で $Q = I_3 + \frac{Y}{2}$ で計算するとこれが普通のクォークの電荷に対応します。1 重項の意味は変換しないってことです。また u_L とか u_R とか書きましたがそれは慣例として

$$\frac{1+\gamma_5}{2}u_L = 0, \quad \frac{1-\gamma_5}{2}u_R = 0 \tag{2.26}$$

になるようなカイラル射影したもので、ワイルスピノール (Weyl spinor) です。ワイルスピノールは超対称性の議論をするときに再度出てきます。またレプトンに関しては、これも 1 つだけ書くと l_L が $SU(2)$ 2 重項、下側が電子、電荷のない上側がニュートリノです。e_R は 1 重項です。また相互作用

$$y_{\rm L}\bar{\rm l}_{\rm e}e_{\rm R}H \tag{2.27}$$

が電子の質量を与えることになります。注意としては上に挙げた相互作用はダウン型クォーク、荷電レプトンに質量が与えるということです。H の複素共役表現を使った相互作用を持ってくれば、アップ型クォークにも質量が与えられます。アップ型クォーク、ダウン型クォーク、荷電レプトンのそれぞれがこういう方法で質量が与えられます。

標準模型ではニュートリノが **零質量 (massless)** です。最近のニュートリノ振動はニュートリノが質量を持つことを表し、明らかに標準模型を越える兆候です。

フェルミオンとゲージボソンの結合定数に関しては、電荷を与えたのでゲージ原理に従えば共変微分にすればそれですべて書けるのですが、実験的に重要なことは Z ボソン自身が Weinberg 角をからめている ($Z_\mu j_{\rm c}^\mu \leftarrow \theta_{\rm w}$ 入る) ということです。したがって Z ボソンとフェルミオンのバーテックス (vertex) $Z\overline{f}f$ を調べれば、その中に Weinberg 角が入ります。実験で色々なチャンネルで測った場合に Weinberg 角がいくつかということがわかり、そのことが標準模型の $SU(2)_{\rm L} \times U(1)_{\rm Y}$ が $U(1)_{\rm em}$ に破れるのだという直接的なテストになります。それは 90 年代の前半、LEP で 89 年くらいから始まり、95 年くらいまで走ってました。今も情報はどんどんアップグレードしています。とにかく最終的な結果は標準模型が非常にいい記述で健全な物理、少量のパラメータで非常に多くの現象を説明できたという意味でうまくいっています。それで標準模型が確立しました。

LEP1 は e^+e^- コライダーで Z ボソンのところで $\sqrt{s}$ を合わせておいて共鳴状態を起し Z ボソンを沢山作り、終状態を見てやります (図 3)。

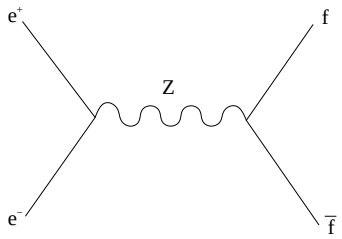

図 3: LEP1: e^+e^- コライダー

今はもっと高エネルギーになっていてLEP2が約200GeV のところで動いています。標準模型で現在のところ見つかってないのはヒッグスだけ。これがミッシングリンク (missing link) で、こいつを見つけたい訳です。そのため現在のサーチがなされています。これは e^+e^- が Z に行って Z がヒッグスにいく、ヒッグスが主に $b\bar{b}$ に崩壊します。

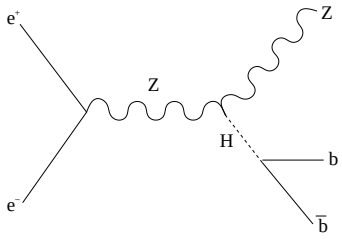

図 4: ヒッグスサーチ

去年 ('99) までのデータでは $\sqrt{s}$ ∼196GeV∼202GeV に合わせてヒッグスの質量は $m_{\rm H}$ >> 108GeV@95%CL(Confidence Level) です[1] 。これが直接のサーチでの bound です。また今まで標準模型は tree レベルで話しましたが実は量子補正を受ける。当然そのなかにヒッグスも飛びます。そこからヒッグスの質量がどれくらいにあるかという情報をひっぱり出してきます。これを電弱理論の精密測定 (precision mesurement) と言います。そういう量子補正などを全部合わせたものでヒッグスの質量は標準模型の範囲内で

$$m_{\rm H} = 77^{+69}_{-39}\,{\rm GeV},\quad m_{\rm H} < 217{\rm GeV}\,@\,95\%{\rm CL} \tag{2.28}$$

です。あとで議論する超対称性理論からの一般的な予言としてヒッグスの質量が 130GeV よりも小さいことがわかります。これは先のデータと矛盾してないわけです。LEP2 は今最終的な段階で $\sqrt{s}$ をどんどん上げて、ヒッグスサーチや超対称性理論のチャージーノ (chargino) を探す試みがなされています。それが終わるとテバトロン (Tevatron) というフェルミ研究所 (Fermi Lab.) のハドロンコライダー、RUN2 というのがありますがそれでルミノシティを上げてやって、ヒッグスサーチを行います。そして 2006 年から LHC で探すという流れです。あと 10 年ぐらいの間に見つかることが期待されます。

[1] 現在の bound は 113.5GeV。

2.5 標準模型を越えて

今までは標準模型が非常にうまくいっているという話をしてきました。標準模型の話はここまでで、ここからはどうやって標準模型を越えるかという話をしたいと思います。

2.5.1 実験

まず実験的な状況はどうなっているのかということですが、コライダーの物理を見る限りパーフェクトにいっています。これは標準模型でよさそうに見えます。多少論争になっている問題は、例えば CP の破れの問題（ϵ'/ϵ）です。そういったものも若干ありますが、基本的には、明らかな標準模型からのズレというのはないわけです。

それで、唯一問題があるのはニュートリノですね。これは先ほど言いましたが、標準模型では正確に零質量です。ところが大気ニュートリノ、太陽ニュートリノ、K2K の実験は全て質量をもつニュートリノを示唆しているわけです。ニュートリノ振動が見えているわけですからそもそもそのニュートリノに質量がないといけないわけです。それでニュートリノのフレーバー間の混合が起きるという具合いになっています。それで、これは明らかに標準模型を越えることが必要でありどういうものが必要かと考えてみると、例えば次のようなくりこみ不可能な次元の高いオペレーターを書いてみます:

$$\frac{1}{M}(\ell H)(\ell H)\ .$$

これは次元 5 ですから、このようなオペレーターを書くとヒッグスが真空期待値を持ったときにこれがニュートリノの質量になります。データですが、例えば大気ニュートリノから示唆されるような

$$m_\nu \sim 0.7 \times 10^{-1}\ \mathrm{GeV}$$

がニュートリノ質量だとしますと、だいたい M のスケールは 10^{14}GeV ですから、割と大きなスケールを示唆しているように見えます。そこまで、ひょっとすると場の理論的な描像で記述できるかも知れないです。そこで何か新しい物理が見えてくるというスケールになっているのかもしれません。だから、当然こういうくりこみ不可能な相互作用が出てくるのはそこのスケールの間に新しい物理があるわけですから、そういうことを考えないといけないわけです。で、これが非常に大きい 10^{14}GeV というスケールになっているというのは、本当に非常に大きなスケールの所にあるのか、あるいはそのスケール自身はそんな高いところにはないんだけれどニュートリノのところの結合定数が小さくて有効的にスケールが大きく見えるのか、という両方の可能性があり、今のところよく分からないんですが、いずれにしても 10^{14}GeV までには何かあるということを示唆しています。

2.5.2　標準模型 の不自然さ

標準模型を眺めてみたときに、どうしても気になるパラメータや不自然さがあります。最もアピーリングなのは電荷の量子化です。これはもともと、これから話すGUTに向かう動機になったことです。$SU(2)$ とか $SU(3)$ の電荷というものは、基本表現とかどういう表現に従っているかということで決まっています。ところが $U(1)$ の電荷というのはいくらであってもいいわけです。例えば電子の電荷は -1 ですが、アプリオリには -1.1 でもいいですし、陽子の電荷は$+1$ ですが、$+0.9$ でもいいわけですね。ところが電子と陽子の電荷をたすと 10^{-21} のオーダーでゼロになることが実験的に知られています。あと中性子の電荷もゼロです。これはどういうことかというと、クォーク達の分数電荷（fractional charge）がうまいこと完全に消えているというわけです。どうして電荷の量子化がなされているのか非常に興味があるわけです。

質問: 標準模型におけるアノマリー（anomaly）の相殺の条件はどうやって関連するのですか?

今のは良い質問です。標準模型におけるアノマリーの相殺条件を (世代ごとに) 要求すると結構強いしばりになり、勝手な電荷は許されません。つまり量子論的な理論の整合性が電荷をある程度制限するのは確かです。後に述べる大統一理論では、単純なアイディアで電荷の量子化を説明できます。

先ほど強い相互作用と言いましたがこれは文字通り強いわけです。それはゲージ理論の言葉で言うと、強結合のゲージ結合定数が大きいということですが、これがどうして大きいのだろうかと思うわけです。実は

$$g_{\rm s} > g > g^{'} \tag{2.29}$$

のオーダーになっています。こういったことはGUTのアプローチで考えていくことができます。

あと気になるのは、フェルミオンの質量構造です。どうして3世代を繰り返しているのかもよくわかりません。

また先のヒッグスメカニズムというのは非常に重要だったのですが、そのヒッグスの質量の自然さの問題があります。これは重要なので少し説明しておきます。ヒッグスの質量の輻射補正を計算すると、Wボソンからくる補正、湯川結合からくる補正などいろいろあります。そうすると

$$\delta m^2 \sim \frac{1}{(4\pi)^2}\Lambda^2, \quad \Lambda \gg m_W \tag{2.30}$$

のように2次発散があります。Λ というのは紫外（ultra）のカットオフです。ナイーブに Λ というのは電弱スケールよりはるかに大きいと考えると、2次発散をうまいこと手で相殺して電弱スケールを作る、といった具合いにしなければならず非常に不自然に見えるわけです。つまりヒッグス質量というのは電弱スケールを決めているわけですが、これが輻射補正で非常に不

安定になります。これでいいのかというと、これは場の理論の立場だと一応定義できるのだから別に構いません。くりこみ可能性の立場からも構いませんが、おそらく物理としてはこれをうまく説明するものが背後にあるだろうと思うわけです。

いくつかこの問題に対する解があります。１つはヒッグス場が実は基本的な場ではなくて、ヒッグス自身が強結合の力学に由来しているというものです。ヒッグスがスカラー場だと思って計算するから Λ^2 という発散がでるというわけです。ヒッグスが基本的な場でないと考えると電弱スケールを越えたところでは強い発散が起きません。発散の具合いは非常にマイルドになっているので、これが電弱対称性の破れにかかっているというアイデアです。この場合は Λ は 1TeV スケールくらいになります。

この考えは、標準模型におけるヒッグスメカニズムというものがゲージボソンに質量を与えるということだけであれば非常に魅力的です。それは例えばいわゆるテクニカラーです。QCD のときにはパイオンというのはほとんどゴールドストンボソンだったわけですね。パイオンをゴールドストンボソンとみなして吸収させてやるわけです。もちろん QCD の相互作用ではだめで、また新たな相互作用が必要になるんですが、アイデアとしては非常にきれいに電弱対称性の破れが説明できます。ところが、さっき強調したのは標準模型においてはフェルミオンの質量も同時にヒッグスメカニズムから説明できます。そこまで理論を拡張しようとするとものすごく複雑になって、現実的なモデルがありません。

２番目のアイデアは超対称性 (Supersymmetry) です。これは超対称粒子 (superparticle) が存在して、先の２次発散のグラフに超対称粒子が飛ぶグラフが加わり、うまく発散を相殺するというものです。これは後でもう少し詳しく見ます。

３番目の考え方は、そもそもカットオフスケールが高いというのは思い込みで、本当は低いというものです。つまり理論の基本スケール、例えば量子重力のスケールであったり、ストリングのスケールであるかもしれませんが、そういったスケールが低いということです。そもそもカットオフスケールが高いと思っているのはプランクスケール（10^{19}GeV）があるという事実のせいです。重力は長距離で非常に弱い力ですが、短距離にいけばいくほど他の力に比べて大きくなって見えていきます。そのときに他のゲージ相互作用に匹敵してくるのがプランクスケールくらいと思っているわけです。重力の相互作用が非常に小さいということからそれが他の力と統一されるスケールはものすごく高いスケールだというわけです。これはカットオフスケールが低いという考え方と相容れないように一見思えますが、解決法は重力の振る舞いを変えればよいということです。それがいわゆる余剰次元 (Extra Dimensions) というものの考え方です。講義ではここまで説明したいと思います。

2.5.3 Strong CP

くりこみ不可能な Lagrangian を書けというと、QCD $SU(3)$ のところで

$$\frac{\theta}{32\pi^2} F^a_{\mu\nu} \overline{F}^{\mu\nu\ a} \sim \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{B} \tag{2.31}$$

というのがあります。これはCPの変換をみてやりますとCP oddになります。こういうのはCP oddなオペレータに効いてきます。例えばEDM（electric dypole moment）を測ってやります。それは実験からくる制限があり、

$$|\theta| < 10^{-9} \tag{2.32}$$

となります。これは不自然に小さいというものです。これをどう説明したらいいかという問題があります。

2.5.4 String

ストリング理論としては量子重力との関連、またもう１つ重要な強調すべきことは、粒子相互作用の統一理論とストリング理論がどういうふうにつながっていくだろうというのが興味の対象としてあるわけです。

2.5.5 宇宙

もっと現実的な問題して、我々が入っている入れ物、宇宙がどういう性質をもっているかはかなり知ってるわけですが、粒子物理の標準模型で説明できないものが存在します。１つは**インフレーション (inflation)** です。これはインフレーションを起すスカラー場の力学を考慮しなければいけないのですが、まずそれが１つ。

また我々は、宇宙のエネルギー密度がどのくらいになってるかはだいたい知っています。宇宙の臨界密度に対してだいたい数十パーセントのダスト、つまり本当に止まってるようなものが本当に存在するということも知られており、**ダークマター (dark matter)** と呼ばれます。しかしそのダークマターの候補も標準模型では提供できません。標準模型を越える枠組みが必要になります。

後は宇宙のバリオン数です。これはインフレーション後に**バリオン生成 (Baryogenesis)** されたと思うのですがそのバリオン生成の理論では標準模型を越えたものが必要になります。

宇宙項の問題。これは先ほど臨界密度の40%くらいはダークマターで占められていると言いましたが、その残りは宇宙項だろうと思われています。それを示唆するような観測も行われています。そもそも宇宙項(cosmological constant)は正確にゼロだと思うこと自身非常に説明しづらいのですが、更に少しあるというのはどういう起源になっているのかというのは興味があります。

いろいろなことを挙げてみたのは、標準模型を越えるモデル作りの１つとして例えば宇宙論として破綻しているにも関わらず、平気で物理をやるっていうのはちょっとできないわけです。結構そういう人が多いわけですが（笑）。目標はあくまで全体がうまくいっている描像を得たいということで、僕は素粒子論をやる上でこれが非常に重要なことだと思うので、こういったことはしっかり押さえておきましょう。

3　大統一理論 (Grand Unified Theory)

それではいよいよ GUT(Grand Unified Theory) の話をします。この辺の論法はすべて Georgi と Glashow の 1 番最初の論文にしたがって話を進めていきます。

3.1　ゲージセクター

$U(1)_Y$ を $U(1)$ のまま残しておくと、電荷の量子化などが説明できないので、これを非可換ゲージ理論の群の中に埋め込んでやることを考えようというアイディアです。そうするとうまいこと電荷の量子化が説明できるという話です。群 G というものをもってきて、標準模型の群を中に埋め込みます:

$$G \supset SU(3)_{\rm c} \times SU(2)_{\rm L} \times U(1)_{\rm Y} \ . \tag{3.1}$$

この群を見て重要なことは対角化生成子 (diagonal generator) がどれくらいあるかということです。$SU(3)$ はゲルマン行列を使って、T_3 と T_8 の 2 つがあり、$SU(2)$ からは I_3 の 1 つ、$U(1)$ から 1 つで、合計 4 つ。こういうものを群のランク (rank) と言います。だからランク 3 の群にランク 4 の群は埋め込めないので、ランク 4 以上の群を G に選ばねばなりません。ランク 4 の群をしらみ潰しに調べて標準模型がきちんと入るかをみてやりますと、ふさわしいものとして $SU(5)$ が挙げられます。$SU(N)$ のランクは $N-1$ なので、$SU(5)$ のランクは 4 です:

$$\begin{aligned} SU(5): \quad & \mathrm{rank}=4, \quad 5\times 5 \text{ ユニタリー (unitary)}, \quad \det = 1 \\ \xrightarrow{\exp} \quad & U = e^{-iH}, \quad H: \text{エルミート (hermite)}, \quad \mathrm{tr}H = 0 \ . \end{aligned} \tag{3.2}$$

5×5 のエルミート行列 H の構造は対角成分が実で 5 つあり、非対角成分の上三角行列部分と下三角行列部分は復素共役の関係から同じなので、上側だけ数えて 10(実)×2、更にトレースレス条件からその自由度を 1 引いて、結局 H は 24 の独立な自由度があります:

$$H = \sum_{j=1}^{24} \alpha^j L^j, \quad \mathrm{Tr} L^i L^j = 2\delta^{ij} \ (\text{規格化}) \ . \tag{3.3}$$

この 24 の自由度をそれぞれ $SU(3), SU(2), U(1)$ に同定したいと思います。それには次のように L^j をとればよいことがわかります:

$$L^j{}_{(j=1\sim 8)} = \begin{bmatrix} \lambda^i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda^i{}_{(i=1\sim 8)}: \ 3\times 3 \ \mathrm{Gell-Mann} \text{ 行列} \longrightarrow SU(3)_{\rm c} \tag{3.4}$$

$$L^j{}_{(j=9,10,11)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau^i \end{bmatrix}, \quad \tau^i{}_{(i=1\sim 3)}: \ 2\times 2 \ \mathrm{Pauli} \text{ 行列} \longrightarrow SU(2)_{\rm L} \tag{3.5}$$

$$L^{12} = \begin{bmatrix} -2 & & & & & 0 \\ & -2 & & & & \\ & & -2 & & & \\ & & & 3 & & \\ 0 & & & & & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow U(1)_{\rm Y} \tag{3.6}$$

$$L^{j}{}_{(j=13\sim24)} = \begin{bmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{bmatrix}, \longrightarrow \text{X, Y ボソン} . \tag{3.7}$$

ここで$U(1)_Y$はユニークにその形しかありません。また、$j = 13 \sim 24$の12個の自由度は非対角部分に入ります。$SU(5)$GUTから標準模型の群に落ちるときに、やはりヒッグス機構でこの生成子に対応する質量を得たゲージボソンはすべて重くなったと考えます。そういうものをXボソン、Yボソンと言います。これは見えてないわけですから、壊れていないと困るわけです。(すぐあとで言いますがこのX、Yボソンを媒介して陽子崩壊が起ります。そうすると我々は存在できないわけです。)

この辺を勉強するのに面白い本はG.G.Rossの「Grand Unified Theories」です。かなり前に書かれたものですが本質的なアイディアを学ぶのにはよいと思います。

3.2 物質場セクター

今のがゲージセクターですが、次は物質場のセクターを見ます。物質場は2種類の表現に別れます。1つは$\overline{5}$表現で、もう1つは10表現です。$\overline{5}$表現はどのように場が入っているかというとダウン型クォークが3つとニュートリノ、電子の2重項です;

$$\overline{5} : [\ \ d_1^c \ \ d_2^c \ \ d_3^c \ \ e \ \ -\nu\ \ ]_L . \tag{3.8}$$

ここでcは荷電共役(charge conjugation)です。右巻きは荷電共役をしてすべて左巻きにそろえて書いてやりました。ですから$\overline{5}$を$SU(3)$と$SU(2)$に分解しますと

$$\overline{5} = (\overline{3},\ 1) + (1,\ 2) : \quad SU(3) \times SU(2) \tag{3.9}$$

となります。これだけから非常に面白いことがわかります。それは$U(1)$の量子化がここから出てくるのです。電磁相互作用の$U(1)$はもとをたどれば標準模型の生成子から作られていました。標準模型の生成子は今の場合$SU(5)$の生成子の1つですから、トレースレス条件を満たしています。ということは$\mathrm{Tr}_{\overline{5}} Q = 0$が成り立ちます。したがって$3Q_{d^c} + Q_\nu + Q_e = 0$ $(Q_\nu = 0)$より

$$Q_d = -Q_{d^c} = \frac{1}{3} Q_e = -\frac{1}{3} \tag{3.10}$$

となります。Q_eは-1に規格化してありましたので、ダウンクォークの電荷がこれで決まり、量子化ができたということになります。できたと同時に3は$SU(3)$を起源としており$U(1)$の

分数電荷が説明できるわけです。このことはGUTを信じたい理由の1つだと思います。おそらく電荷の量子化は何らかの形で残っているのだと思います。それを説明する場合僕が思うに、こういう非可換ゲージ理論の中に埋め込んでやってそれが説明されるか、あるいはもう少し高次元の幾何学的なもの、例えばストリング理論でのコンパクト化の仕方によって説明されるのではないか、と勝手に思っています。

それで先に明らかになったのは5表現で書くと

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & & & & \\ & -\frac{1}{3} & & & \\ & & -\frac{1}{3} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(L^{11} + \sqrt{\frac{5}{3}}L^{12}) \tag{3.11}$$

でした。これは西島-ゲルマン則 $(Q = I_3 + \frac{Y}{2})$ を使って書けば、

$$I_3 = \frac{1}{2}L^{12}, \quad \frac{Y}{2} = \sqrt{\frac{5}{3}}L^{12} \tag{3.12}$$

という面白い関係になります。これは後で $SU(5)$ からの予言を見ていくときに重要です。

あと10表現については答えだけ言っておきます。それは次のように分解できます;

$$\begin{array}{lccc} 10\text{表現}= & (3,\ 2) & +(\overline{3},\ 1) & +(1,\ 1). \\ & q_{\rm L} & u^{\rm c}_{\rm R} & e^{\rm c}_{\rm R} \end{array}$$

ここで下の表記は対応する場です ($u_{\rm R}$ と $e_{\rm R}$ は左巻きにするため荷電共役がとってあります)。

3.3 ヒッグス-湯川相互作用

あと必要なのはヒッグス場ですが、たとえば5表現をもってくれば $10, 10$ と組んで1重項を作ることができます。$\overline{5}$ 表現をもってくると $\overline{5}, 10$ と組んで1重項を作れます;

$$\Psi \ : \ 10 \times 10 = \overline{5} + 45 + 50 \Longleftrightarrow H_5 \tag{3.13}$$

$$\Psi \ : \ \overline{5} \times 10 = 5 + \overline{45} \Longleftrightarrow H_{\overline{5}} \ . \tag{3.14}$$

したがってこういったもので湯川相互作用が作れます;

$$\Psi_{10}\Psi_{10}H_5 \rightarrow \text{アップクォークに質量を与える} \tag{3.15}$$

$$\Psi_{\overline{5}}\Psi_{10}H_{\overline{5}} \rightarrow \text{ダウンクォーク、レプトンに質量を与える}. \tag{3.16}$$

基本的な構造はこのようになっています。

3.4 予言

ここまでの範囲内ではゲージ対称性が一つのシンプルな群で記述できるということを言いましたが、ここから出てくる予言を 2 つ言っておきます。

3.4.1 ゲージ結合定数

一つはゲージ結合定数の統一です。非可換ゲージ理論の群の場合にそれぞれの生成子に対して勝手にゲージ結合定数を割り振れるわけではなく、$SU(5)$ であれば g_5 という 1 つの結合定数で支配され、そいつがパラッと 3 つ（g_1, g_2, g_3）にばらけます。それぞれは同じ g_5 から出てこなければなりません;

$$g_1 = g_2 = g_3 = g_5, \quad g' = \sqrt{\frac{3}{5}} g_1. \tag{3.17}$$

ただし $U(1)$ の ハイパーチャージと $SU(5)$ に埋め込んだ生成子 g' には規格化因子の差があることに注意します。ここからの予言としてワインバーグ角 $\theta_{\rm W}$ は

$$\sin^2 \theta_{\rm w} = \frac{g'^2}{g^2 + g'^2} = \frac{3}{8} \tag{3.18}$$

となることがわかります。つまり GUT の予言としては 2 つあって、ワインバーグ角が先のようになることと、$SU(2)$ の結合定数 g_2 と強結合定数 g_3 が同じになることです。これは明らかにおかしい予言です。僕らが知ってるワインバーグ角は $\sin^2 \theta_{\rm W} \sim 0.23..$ だし、m_z のところで α_s と α_2 ($\alpha_i = \frac{g_i^2}{4\pi}$) はだいたい 0.12 と 1/20 ですから全然違います。それはどう思えばいいかというと、結合定数は見ているエネルギースケールによって変わるということです。ゲージ結合定数というのは、例えばフェルミオンの 2 体から 2 体の相互作用で決めることができるわけですが、その注入するエネルギーによってどういう結合定数を使えばいいかが変わってきます。それを **走る結合定数 (running coupling constant)** と言います。

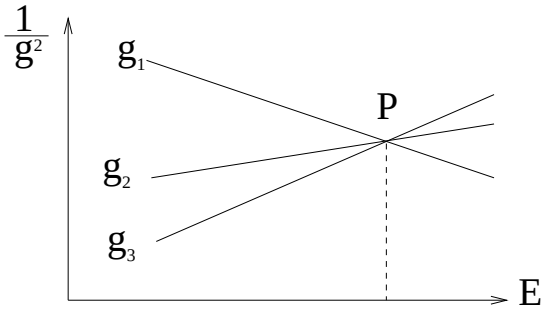

図 5: running coupling constant

それぞれのゲージ結合定数 g_1、g_2、g_3 についてもともと同じ値 (図 : 点 P) だったものが、それぞれ違うように走っていきます。

そんな都合良く考えられるのかというと、**くりこみ群方程式 (renomalization group equation)** というのを使って実際に計算してやることができます:

$$\begin{aligned} \mu\frac{dg_i}{du} &= -\frac{b_i}{(4\pi)^2}g_i^3 \ , \\ b_i &= \frac{11}{3}C_2(G) - \frac{2}{3}\sum_{\text{Weyl}} T(R) - \frac{1}{3}\sum_{\text{scalar}} T(R) \ . \end{aligned} \tag{3.19}$$

μ はエネルギースケールで、b_i はベータ関数 (β function) と呼ばれる量で、群を決めればすべて計算できます。ここで $C_2(G)$ は二次のカシミアと呼ばれる量で $C_2(g) = C_2(\text{Adj})$、$SU(N)$ のとき $C_2 = N$ となります。$T(R)$ はインデックス (index) で $T^aT^b = T(R)\delta^{ab}$ です。基本表現なら $T(\text{fund}) = \frac{1}{2}$、随伴表現なら $T(\text{adj}) = N$（$SU(N)$ の場合）です。このことから $b_3 > b_2 > b_1$ がわかり、それがそのグラフの傾きを与えます。したがって $g_3 > g_2 > g_1$ となります。

定性的な議論だけでなく定量的な議論もしたいと思います。これは SUSY GUT にいったときにピッタリ合うことを後でやります。ただ今の話で重要なことは、群の構造だけが効いて定性的な振る舞いが正しく理解できるということです。

3.4.2 陽子崩壊

次にもう 1 つの予言として陽子崩壊について話します。X, Y これがどのような群の生成子に結合してるかというと次の形です。

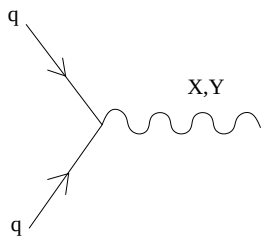

図 6: X、Y ボソン過程 1

ゲージ対称性というのは同じ多重項を回転させるような対称性です。ということはクォークとレプトンも同じ多重項に入っているのだからその間で回転が起るわけです。でその回転をゲージ不変にするためにクォーク、レプトンに結合する粒子もいるわけです。つまり図 7 のような相互作用も起ります。

この 2 つのグラフをつなぐと、クォークが 3 つ入ってきて、レプトンが 1 つ出ていくグラフが書けます。これはバリオン数、レプトン数ともに 1 ずつ変化してるということです ($\triangle B = \triangle L = 1$)。

クォークレベルではこうかけますが先のように書けますが、たとえば陽子崩壊を眺めてやるとこういう相互作用 があります。

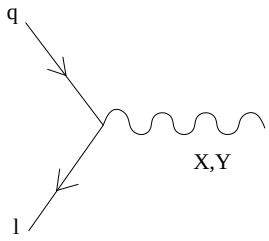

図 7: X、Y ボソン過程 2

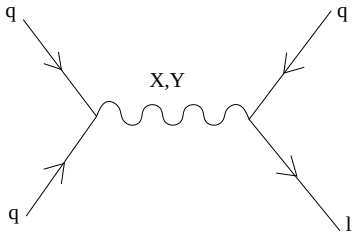

図 8: X、Y ボソン過程 3

中間子が $(\bar{q}q)$ できるのがわかります。陽子が π 中間子 (π^0) と陽電子 (e^+) に移ります。

散乱振幅は途中で X ボソンや Y ボソンが飛びますからその質量に比例するわけです。したがってその崩壊幅はどうなるかというと、振幅の 2 乗ですから、次のようになります:

$$\Gamma(p \to \pi^0 + e^+) \propto \left(\frac{1}{m_{\rm X}^2}\right)^2 \ . \tag{3.20}$$

基本的にはこれ掛ける陽子質量の 5 乗などがつきますけど。一方で 陽子寿命の制限は実験からついています:

$$\tau(p \to \pi^0 + e^+) > 1.6 \times 10^{33}{\rm yrs}({\rm SuperK'98}) \ . \tag{3.21}$$

するとここから $M_{\rm X} \sim M_{\rm GUT}$ の制限は

$$M_{\rm X} \sim M_{\rm GUT} \geq 10^{15}{\rm GeV} \tag{3.22}$$

が出てきます。つまり、この陽子崩壊モードだけを考えれば GUT の破れのスケールは 10^{15}GeV より大きくなければいけないという実験的な制限がつきます。

この実験的な制限 10^{15}GeV は電弱スケールから比べると 10^{13} くらい大きい訳です。その大きさがゲージ階層性問題と呼ばれるものになります。ゲージ階層性 $M_{\rm GUT} >> M_{\rm W}$ において、これを 2 つの側面に分けて考えたいと思います。

- Why $M_{\rm GUT} >> M_{\rm W}$? ～どうして $M_{\rm GUT}$ は $M_{\rm W}$ より大きいのかということ
- How stability? ～いかに輻射補正に安定になるか？

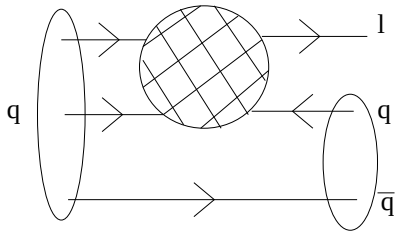

図 9: 陽子崩壊

この２つの側面は超対称性が解決します。２番目の話は２次発散がないという超対称性の特徴があります。１番目は、ちょっと頭をひねらないといけません。おそらくこれは力学的超対称性の破れのスケールと電弱スケールが関係している、つまりある力学が働いて比較的低いところで超対称性の破れが起ると思うわけです。これによって $M_{\text{SUSY の破れ}} << M_{\text{GUT}}$ となります。

（2 日目）

4　超対称性 (Supersymmetry)

今日は超対称性理論の Lagrangian を作ってみたいと思います。代数をもう 1 回書いておくと

$$\{Q_\alpha, \overline{Q}_\beta\} = 2\sigma^\mu_{\alpha\beta} P_\mu \tag{4.1}$$

$$\{Q, Q\} = \{\overline{Q}, \overline{Q}\} = 0 \tag{4.2}$$

$$[P, Q] = 0 \tag{4.3}$$

$$[P, P] = 0 \tag{4.4}$$

となります。基本的に、$SL(2, C)$ の言葉で言うと、Q と $\overline{Q}$ という 2 表現とその複素共役 (complex conjugate) の表現の２つに関しては反交換関係が P_μ、つまり並進になっています。他は全部交換で、P と Q は交換し、P と P も交換します。これが超対称性の代数なんですが、昨日はこれが 1 粒子状態に作用した場合にどういうふうな表現を与えるかを見ただけですが、ボソンの状態とフェルミオンの状態（スピンが 1/2 ずれた状態）というのがちょうど同じだけあるという構造をもっています。1 粒子の状態、つまりオンシェル (on-shell) の状態というのはそうなっています。

次にやりたいことは場の理論をつくることで、そのためには２つくらいの方法があります。１つは **超場 (superfield)** という概念で作るというもの。もう１つは成分場 (component field) でガチャガチャ超対称性の代数を普通の場の上で実現するというものです。$N = 1$ の場合は超場の上でやるのが１番手っ取り早いのでそれを紹介していきます。

4.1 超場

アイデアとしては、**超空間 (superspace)** というものを用意しておいてその上での場の理論を展開することにします。ですから、最初に超場が住んでいる空間を定義したいんですけれども、そのために Minkowski 空間をどう考えるかを見直してみましょう。これは x という時空間を表す座標で指定されているわけですが、これと時空の原点から並進して x という点まで持っていくという操作が１対１で対応しています。だから

$$x \leftrightarrow G(x) = e^{-iPx} \tag{4.5}$$

となり、P は並進の生成子 (generator) です。

たとえばスカラー場を考えたときは、原点での場に $G(x)$ というものを作用して作ることになります:

$$\text{場} : \phi(x) = G(x)\phi_0(x)G^{-1}(x) \ . \tag{4.6}$$

これは何のためにやっているかというと、P が場の上でどのように作用するかを読み取るためです。後でやりたいことは、これを超対称性の代数まで含んだ（超対称性の生成子まで含んだ）形に拡張して Q が超空間の上にどう作用しているかを一気に眺めたいのです。で、P_μ がどう作用しているのかを考えるのですが、当たり前なのですが例えば x という点から y だけ動かすということをやると当然 $x + y$ というところに行くわけです:

$$\begin{aligned} G(y)\phi(x)G^{-1}(y) &= G(y)G(x)\phi(0)G^{-1}(x)G^{-1}(y) \\ &= G(x+y)\phi(0)G^{-1}(x+y) \\ &= \phi(x+y) \ . \end{aligned} \tag{4.7}$$

$G(y)$ と $G(x)$ の掛け算は当然 P 同士が可換なので、exponential の肩を足せばいいだけです。ここから x を微少量だと思って考えてみますと、P が ϕ に作用したときの表現がどうなっているかが分かるわけです。ϕ が $x + y$ というところに行くわけです。ここから読み取れることは

$$\begin{aligned} \delta_y\phi(x) &= \phi(x+y) - \phi(x) \\ &= y^\mu \partial_\mu \phi(x) \end{aligned} \tag{4.8}$$

となり、ここから P_μ の作用は

$$r(P_\mu) = -i\partial_\mu \tag{4.9}$$

となります。これは当たり前のことなので、なんでこんな面倒くさいことをするかと思うかも知れませんが、こういうことを超空間上でやると、Q の表現を見ることができるからです。

まず、超空間というものを定義しますが、さっきの x に加えて θ、$\bar{\theta}$ というスピノールインデックス (spinor index) を持っている座標を定義します:

$$\text{超空間} : (x^\mu, \theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}) \ . \tag{4.10}$$

これの性質としては反交換の数だということです。そういう数を **Grassman odd** と言いました。質量次元としては x の半分（長さの 1/2 乗）を持っている座標を考えます。これに対して、さっき考えたのは G という作用です。さっきやったことに従って

$$G(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{-i(Px + Q\theta + \overline{Q}\bar{\theta})} \tag{4.11}$$

と定義するのが自然でしょう。この上で超場というものを定義します。それは x、θ、$\bar{\theta}$ によっていて、さっきの定義と全く同じ物です。

これをやっておくと何が便利かというと、さっき P がどういうふうに作用するかを眺めるためには、$G(x)$ と $G(y)$ の掛け算を眺めて $G(x+y)$ が出てきたわけで、それと同じことをここでやることができるということです。今度は、P の作用が微分になるということはどこへ行っても証明できることなので、超空間の θ の方向に動かしたときにどう変わるのかを見ていきます。そのために $G(y)G(x)$ という掛け算をもう一度実行します。つまり、x 方向に動かすというのは余分なので ξ という grassmann 数だけ動かしてみます。

今度は、Q と $\overline{Q}$ が反交換しないので、単に exponential の肩で足せばいいという具合いにはなりません。ここで **Campbell-Hausdorff の公式** というものを用いてみると単に肩にのせた部分の他に 2 つのものの交換関係のような形が一般的には無限個続いていくんですが、幸いなことに今の場合は Q と $\overline{Q}$ はその後は P に行き、P は他のものと全部交換するので 1 回交換関係を出すとその後は何も出てきません。それを用いると次のようになります:

$$G(0, \xi, \bar{\xi})G(x, \theta, \bar{\theta}) = G(x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\xi} - i\xi\sigma^\mu\bar{\theta}, \theta + \xi, \bar{\theta} + \bar{\xi}) \ . \tag{4.12}$$

ξ というのは超空間の Grassmann odd な部分にシフトを与えるんですが、それと x 方向に対して non-trivial な変換を与えます。それは Q と $\overline{Q}$ の反交換が P に行くという超対称性の一番重要な代数の所から出てきています。従って、さっきと同じ手順を踏んでやると Q がどういうふうに作用するかを読み取ることができます:

$$-i\, r(Q_\alpha) = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^\mu} \ . \tag{4.13}$$

まず、θ を ξ だけシフトしているので微分が入ってきます。また、x に作用する微分も入ってきます。同様のことを $\overline{Q}$ に対しても行うことができます。それは自分でやってみてください。

これで、超対称性が超場の上にどう作用するかについて基本的なアイデアを言ったわけです。でも僕らは超場の上で実験をやっているわけではないし、超場というのはよく分からなくて実

感できません。なので、成分にバラバラにしてそれぞれの場を眺める方がよっぽど分かりやすいわけです。各成分はどう変換しているんだろうかということを眺めてみることによって超対称性理論が分かったと思っているわけです。バラバラにするというのは θ で展開するということです:

$$\Phi(x,\theta,\bar{\theta}) = f(x) + \theta\psi(x) + \bar{\theta}\bar{\psi}(x) + \ldots + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}d(x)\ . \tag{4.14}$$

最終的にはこれはどこまでも行くのではなくて、$\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ というところで止まります。なぜかというと、今 $N=1$ の 4 次元の理論なので α は 1 と 2 しか走りません。これ自身は反交換の数ですから 2 つ同じものを並べると 0 になってしまうのです。だからここ（$\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$）で止まってしまいます。だから成分にバラしたときも有限個の成分場がドサッと変換していき、閉じているので見やすい形をしているのです。

4.2　２種類の超場

僕の目標は最終的には標準模型とかSUSY GUT とか、そういうことを議論したいので、それに必要なものを用意したいと思います。それは 2 種類の超場です。意味としては、今超場を定義したのですが、まだ超対称性の表現としては可約 (reducible) なものになっていて、もう少し小さい表現を考えることができるということです。1 つは **カイラル超場 (chiral superfield)** Φ です。定義は

$$\overline{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0 \tag{4.15}$$

です。$\overline{D}_{\dot{\alpha}}$ というのはある種の射影演算子 (projection operator) で

$$\overline{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^{\alpha}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \tag{4.16}$$

となります。特徴としては、$\{\overline{D},Q\}=\{\overline{D},\overline{Q}\}=0$ というふうになっています。この制限 (constraint) と超対称性は矛盾しないわけです。

もう一つは **ベクトル超場 (vector superfield)** というもので、V と書きます。これは実条件 (reality condition)

$$V = V^{\dagger} \tag{4.17}$$

を課します。これをベクトル超場と呼ぶ理由は、成分としてバラバラにするとその中にベクトルがいるからです。それをゲージ場として後で使えるわけです。

この両方の議論ができれば一番いいんですが、時間もないのでカイラル超場を主に議論していきたいと思います。ベクトル超場についてはコメントするだけにします。明日から坂本さんが超対称性理論の話をされると思います。彼の講義ではベクトル超場の構造というものはよく使うと思いますが、それは僕は教えていませんということを彼に言ってください（笑）。

まずカイラル超場の条件は簡単に解いてやることができます。答えを書くと

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi(y,\theta) \\ &= A(y) + \sqrt{2}\theta\psi y + \theta\theta F(y) \end{aligned} \tag{4.18}$$

となります。ただし y というのは

$$y^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta} \tag{4.19}$$

という組み合わせで書けます。これらの特徴は、y と θ は $\bar{D}$ で微分したときにゼロになるということです。これは簡単に計算（証明）できます:

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} y^\mu = \bar{D}_{\dot{\alpha}}\theta = 0 \ . \tag{4.20}$$

これで条件は解けました。この場で A、ψ、F に対して超対称性がどのように作用しているかというのは、さっきここに書いた超対称性の作用をうまく使ってやることで議論できます。答えだけを書いておきます。一番下の成分に作用すると、次に高いところへ行くという形になっていて比較的シンプルです:

$$\text{ボソン}: \delta_\xi A = \sqrt{2}\xi\psi \tag{4.21}$$

$$\text{フェルミオン}: \delta_\xi \psi = \sqrt{2}\xi F + \sqrt{2}i\sigma^\mu\xi\partial_\mu A \tag{4.22}$$

$$\delta_\xi F = \sqrt{2}\bar{\xi}\sigma^\mu\partial_\mu\psi \ . \tag{4.23}$$

今言ったことは超空間上で超対称性が $N = 1$ の場合に簡単に書けていることが分かるということです。

4.3 Lagrangian

次に、今までの話を基にして Lagrangian を作るということを考えてみます。

超空間上で超場を定義したので、作用 (action) が欲しいと思ったらスカラー不変な量を作っておいて、それを超空間上で積分すればよいということになります。そうすると超対称な理論が作れます。

そのときに x の積分は高校生以来知っているやり方でいいのですが、θ の積分はちょっと non-trivial です。θ の積分は **Berezin 積分** と呼ばれていて

$$\int d\theta\theta = 1 \quad , \quad \int d\theta 1 = 0 \tag{4.24}$$

と定義しています。積分の測度 (measure) というのはある対称性を不変にするように定義するわけですが、これは超空間上での並進に対して不変な測度になっています。これは示す時間がないので省略します。

そうすると、Lagrangian としてどういうものが書けるかというと、２つのタイプのものが定義できます。一つは

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta(\Phi\Phi^\dagger) = (\Phi\Phi^\dagger)\Big|_{\theta^2\bar{\theta}^2} \tag{4.25}$$

です。４乗積分は θ と $\bar{\theta}$ の両方の方向に積分するという意味です。一般に “積分しろ” と言いましたが、θ があったら１にして θ がなかったら落とせという意味なので $\Phi\Phi^\dagger$ の計算をした後に一番高い成分をとりなさいということです。Φ を展開して成分の計算をするわけです。この計算も省略して最後だけ書いておくと

$$\mathcal{L} = \ldots = FF^* - \partial_\mu A^* \partial^\mu A - i\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi \tag{4.26}$$

となります。これはスカラー場 A の運動項 (kinetic term)、ワイルフェルミオン ψ の運動項を与えます。F については後で言います。ここで読み取れることは F には微分項がないので、後で運動方程式を使って F を消去することができるということです。F というのは補助場です。今言ったのが一つ目のタイプの Lagrangian です。

もう一つは **超ポテンシャル (superpotential)** から作られるものです。これは何かというと、カイラル超場の正則 (holomorphic) な関数として書けるものです。カイラル超場 Φ の積、Φ^2 と Φ^3 は $\overline{D}$ を掛けたときにゼロになることは簡単に示すことができます。$\overline{D}$ というのは線形な演算子なので、$\Phi^\dagger$ が入っているのは $\overline{D}$ を掛けてもゼロになりません。Φ だけによっているものは Φ^2、Φ^3 を考えてもカイラルになっているということが分かります。そういう組み合わせを超ポテンシャルと言います。多項式に展開すると

$$W(\Phi) = \frac{1}{2}m^2\Phi^2 + \frac{1}{2}\lambda\Phi^3 \tag{4.27}$$

のようになります。Lagrangian としては θ^2 の方向だけで積分します:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F &= \int d^2\theta W(\Phi) \\ &= W(\Phi)|_{\theta\theta} \\ &= F\frac{\partial W}{\partial A} - \frac{1}{2}\psi\psi\frac{\partial^2 W}{\partial A^2} + h.c.\ . \end{aligned} \tag{4.28}$$

これは θ^2 があったらそこをひろいなさい、つまり一番高い成分のところをひろいなさいということです。この式の意味ですが、$\psi\psi$ の部分はフェルミオンの質量項になります。それからフェルミオン２発とスカラー１発の湯川結合 (Yukawa coupling) を与えます。従って、湯川結合は超ポテンシャルから来ます。

ここまで来ると、さっきの補助場 F の消去を行うことができます。全体の Lagrangian は $\mathcal{L}_D + \mathcal{L}_F$ なので

$$F^* = -\frac{\partial W}{\partial A} \tag{4.29}$$

となり、ここから

$$V = |F|^2 = \left|\frac{\partial W}{\partial A}\right|^2 \tag{4.30}$$

となります。スカラーポテンシャルがこのような形で与えられるということがわかります。

カイラルな方の Lagrangian の作り方をおおざっぱに説明したんですが、もう一つベクトル超場があります。これは $V = V^\dagger$ の条件を使って書くんですが、ちょっと考えれば分かるようにたくさんの成分で書くことができます。その全てが物理的な自由度かというと、そうではなくてほとんどはゲージ自由度で消せる部分なのです。だから、非常に余分なものを持つ表現になっているわけです。ゲージ自由度を全部落としてやって、非常に見易くするというのがいわゆる **Wess-Zumino ゲージ** をとるということです。これをとった後で物理的なものは

$$V \to v_\mu, \lambda, D \tag{4.31}$$

で、v_μ はベクトル場、λ は **ゲージーノ (gaugino)** と呼ばれる Weyl スピノール、D は F に相当する補助場です。ある処方箋に従ってやると、$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ とか、λ の運動項とかが出せるということになっていますが、その部分は省略します。

補助場を消去すると、スカラーポテンシャルを得ます。それをやると

$$\begin{aligned} V_D &= \frac{1}{2}g^2 D^2 \\ &= \frac{1}{2}g^2 (\sum_i A_i^* Q A_i)^2 \end{aligned} \tag{4.32}$$

のような構造になっています。ベクトル超場についてはあまり触れる暇がないので、興味のある人は Wess-Bagger の本などを読んでおいてください。

それから触れるだけなのですが、超対称な理論の非常に大きな特徴として**「非くりこみ定理」**というものがあります。これは輻射補正を超対称な場の理論でやると、輻射補正の出方は全て $\int d^4\theta$ の形で現れるというのが証明できるというものです。やり方としては超グラフ (supergraph) というものを使って超対称性の形を保ったまま、Feynman ルールをつくってゴチャゴチャ計算するということになります。つまり、D とか F という名前は歴史的につけているだけなので気にしなくてもいいのですが、**F 項 (F-term)** というのは θ の２乗で、**D 項 (D-term)** というのは θ の４乗で積分したのものなのです。ここで F 項、つまり超ポテンシャルというのはくりこみを受けないということがわかります。したがって、一番最初の、超対称性を破っていない段階ですが、スカラー質量の量子補正に関する問題で言うと、超ポテンシャルの中のこの項が大きな量子補正を受けてしまい、それによって階層性 (hierarchy) が不安定にならないということがわかります。

もちろん D 項のくりこみはあります。D 項は運動項ですから波動関数の方はくりこみを受けてしまいます。$N = 1$ の理論では、波動関数は常にくりこみを受けていくことになります。

かなり駆け足で超対称性の基本的なところを見てきたわけですが、ここまでで何か質問ありますか？... よろしいですかね。たぶん初めて聞いた人は細かいところは分からないと思いますが、基本的な枠組みとしてとりあえずだいたいの作り方をおさえておいてもらえればと思います。どうせこういう方向をやるのであれば教科書に基づいて手を動かしてやるしかありませんので。

4.4 極小超対称標準模型 (Minimal Supersymmetric Standard Model)

ここで、だいたい超対称性のアイデアを紹介したところで、少しだけ標準模型について言及したいと思います。ノート 1 枚くらいしかしゃべりませんが、**極小超対称標準模型 (Minimal Supersymmetric Standard Model)**、よくこれを **MSSM** と言います。これは粒子の内容 (particle content) を指定すれば基本的な Lagrangian の書き方は知っているので、それでいいということになります。よくカイラル多重項 (chiral multiplet) という言い方をするのでこう言うことにすると、基本的にはクォーク (quark)、レプトン (lepton)、ヒッグス (Higgs) が入ってるところをそう呼びます。

$SU(2)$ 1 重項 (singlet) なクォークにアップ (up) タイプとダウン (down) タイプのものがあります。全部に c をつけておいて、もともと右手型 (right handed) なのですが、荷電共役 (charge conjugation) をしてカイラルにそろえておきます。こうしておくと超ポテンシャルなどを考えるときに混乱しないで済みますので全部左手型 (left handed) にそろえておきます:

$$\begin{array}{cc} (\tilde{q}_{\mathrm{L}} & q_{\mathrm{L}}) \\ \tilde{u}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{R}} & u^{\mathrm{c}}_{\mathrm{R}} \\ \tilde{d}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{R}} & d^{\mathrm{c}}_{\mathrm{R}} \ . \end{array}$$

それと、レプトンがあります:

$$\begin{array}{cc} (\tilde{l}_{\mathrm{L}} & l_{\mathrm{L}}) \\ \tilde{e}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{R}} & e^{\mathrm{c}}_{\mathrm{R}} \ . \end{array}$$

左手型、つまり 2 重項 (doublet) なレプトンと 1 重項なレプトン (電子:electron) があります。これはスピンが 1/2 ですが、これに対してカイラル多重項 (multiplet) というのは先ほどの構造を見ても分かるようにスカラー ボソンが 1 つあります。それが超パートナー (superpartner) と呼ばれるものですけれど、記号としてはチルダ (˜) をつけておきます。これを **スクォーク (スカラークォーク)**、**スレプトン (スカラーレプトン)** と言います。

それとヒッグスです。これはハイパー電荷 (hypercharge) に関して逆のものを 2 つ用意しなければなりません:

$$\begin{array}{lccc} \text{ヒッグス}: & H_1 & \widetilde{H}_1 & Y = -1 \\ & H_2 & \widetilde{H}_2 & Y = +1 \ . \end{array}$$

これも超パートナーに対してチルダをつけておいて**ヒッグシーノ (Higgsino)** と呼びます。で、ハイパー電荷の配分を一方を -1 一方を $+1$ とします。これはなぜかというと、今ヒッグシーノというカイラルなスピノールが入り、最初の時間に話をしなかったのですがアノマリー (anomaly) 相殺というのが標準模型では起っています。で、ヒッグシーノを 1 つだけ入れておくとアノマリーが相殺しないようになっています。例えば、$SU(2)$ と $U(1)$ の混合 (mixed) アノマリーが残ります。これをキャンセルするためにはハイパー電荷が逆のものをもう 1 つ入れておく必要があります。

それと、もう 1 つベクトル多重項の方もあります:

$$\begin{aligned} SU(3): &\quad \tilde{g}\,(\text{グルイーノ}) \quad g_\mu \\ SU(2): &\quad \widetilde{W}\,(\text{ウィーノ}) \quad W_\mu \\ U(1): &\quad \widetilde{B}\,(\text{ビーノ}) \quad B_\mu\ . \end{aligned}$$

もともと $SU(3)$、$SU(2)$、$U(1)$ のゲージ群に対してそれぞれゲージボソンがあったわけです。それに対する超パートナーとしてゲージーノというものが、ベクトル多重項のときは存在すると言ったのですが、それも 1 つあります。それをチルダ (˜) をつけて書いておきます。これも名前のつけ方は安直ですが、グルーオン (gluon) の超パートナーということで**グルイーノ (gluino)**、それから**ウィーノ (wino)**、**ビーノ (bino)** と呼びます。

ぼくの今回の講義ではこれらの現象論とか collider signature とかそういったことはやらないのですが、1 つの超対称な標準模型の現象論的に重要な研究というのは、こういう超パートナーというものがコライダーでどのように見つかるかということを探っていくということです。まあ、そのときに名前ぐらいは知っていた方がいろいろなことが理解できます。なかなか名前まで説明してくれないので知っていて損はないと思います。

4.5 超対称性の破れ (SUSY Breaking)

それで、こういうふうに書いてきたわけですが、この中の半分くらい見つかっていない粒子がいるわけです。基本的には**超対称粒子 (superparticle)** は見つかっていないわけです。それはどうしてかというと、超対称性がこの世の中では厳密には成り立っていなくて超対称性が破れているというおかげなのですが、それをどう理解するかということをひとこと言っておきます。アイデアだけしゃべります。

ボトムアップで考えていくと、スクォークとかゲージーノに質量を与えたいわけです。超対称性の破れ方としてもスクォークとかゲージーノに質量を与えるというありがたい破れ方をして欲しいのです。これをどうやって正当化するかということなんですが、まず最初に手で超対称性を破るということを考えます。で、スクォークと言ったときスレプトンも全部入っているいると考えますが、これらに質量を与えたり、ゲージーノに質量を与えたりします。このとき、一番気になるのは超対称性を手で破ったときに今まで考えてきたご利益を全部失っては嫌なわ

けです。それだったら最初から超対称でない理論を考えているのと同じです。一番のご利益は、一番最初の動機は、２次発散を生まずに階層性を安定化したいということだったわけです。それを壊すというのはいくらなんでもひどいですが、幸いなことにスクォーク質量とかゲージーノ質量を与える破れというのは２次発散を生まないということがわかります。そういうクラスの超対称性の破れを **ソフトな超対称性の破れ (soft SUSY breaking)** と言います。

それで、この時点で現象論的には一応合格なんですが、もうちょっと深く理解したいと思うと、多分、超対称性というものはもしあったとすると **超重力理論 (supergravity)** や **超弦理論 (superstring theory)** とかそういったものにつながっている、非常に基本的な対称性なんだろうと思うわけです。そのときにそれを手で破るとは何事かということになります。例えばゲージ対称性を手で破ったらそれまでのご利益は全部なくなってしまいます。そういうことはやりたくないので自発的 (sponteneous) に破りたいわけです。で、実際に自発的にダイナミカルな破れ (dynamical breaking) がどこかで起って、それが我々のセクターに伝わってくるということを考えると、最終的にソフトな超対称性の破れの項が hidden セクターを全て積分したあとに出てくるというのが議論できます。だから一応、スクォーク、スレプトン、ゲージーノに質量を与えておきたいという現象論的な要請というのはこういうことまで考えておくと正当化できます。こういうシナリオが描けるとかなり見通しが良いわけです。

ただ、ここの議論はかなり大変でして、質量を与えれば安心というわけではありません。その後に現象論的な要請としていろいろなことを考えなければいけません。

特に考えなければいけないのはフレーバーを変える中性カレント (flavor changing neutral current) というものを引き起こさないようにするということです。一つだけ言っておくと、$K\overline{K}$ 混合というものがあり、これは非常に（10^{-12}MeV で）抑制されています。しかし、一般的にダイヤグラムを書いてみるとそんなオーダーでとどまるはずはありません。非常に問題でした。標準模型の中では GIM メカニズムというのがあって、これがチャームクォークを導入する理論的な動機になったと今では言われているわけですが、本質的にはクォークの質量がゼロなら $K\overline{K}$ 混合がゼロになっています。で、実際に $K\overline{K}$ 混合が起っているのは、チャームクォークが質量を持っているからです。ところがチャームクォークは W ボソンと比べて非常に質量が小さいので抑制があります。ですから小さい $K\bar{K}$ 混合が出てくるのは自然なんですが、問題は超対称性を考えたときにそんな小さいパラメーターが入ってくるかということです。それは見た目ではないので、どう説明するかという問題が生じてきます。いろいろな解答があり、いろいろなシナリオがあって、さらにコライダーなどでチェックするためにはどうするかなどを考えるというのが一つあるのですが、今日の目標は SUSY GUT に行くことなのでそれはやめにします。

4.6 超対称性理論の予言 (SUSY Predictions)

とにかく超対称性を持つ標準模型の予言というものがあるのですが、一般的な予言としては当然、超対称粒子が存在するというものがあります。これが一番の予言です。さっきスクォーク質量、ゲージーノ質量を与えると言いましたが、ではどのくらいのところに与えるかということなのですが、ものすごく高く、例えばプランクスケール質量くらいあるとそこから下は必然的に超対称性を持っていない理論で、さっきの２次発散を生まないということを壊してしまうので、スクォーク/ゲージーノの質量は電弱スケール (electro-weak scale) よりそんなに高いところにあっては困ります。質量のオーダーとしては 1TeV よりも小さいということを期待しています。そうすると今稼働しているコライダーで見つかる可能性は十分にあります。予言と崩壊 (decay) を調べて超対称粒子を同定します。実際に稼働しているコライダーというのは LEP2、TevatronⅡ、LHC(Large Hadron Collider) です。

もう一つの予言は、軽いヒッグスがあるというものです。さっき、スカラーポテンシャルというのは D 項と F 項（D^2、F^2）とで書けると言いました。基本的には D^2 の部分からヒッグスのボソンの質量が来るというのが分かっています。というのは、４点結合に比例してヒッグスの質量が決まりますから、それが大きければヒッグスの質量が重いという具合いになります。ところが $SU(2)$ と $U(1)$ のゲージ結合で４点のところが抑えられます。そうすると簡単に期待できることとして、ヒッグスの質量というのはだいたい Z ボソンの質量くらいになるだろうということです。その期待に輻射補正を加えます。輻射補正として支配的 (dominant) なものはトップ-ストップの寄与です。そうすると、130GeV 以下になります:

$$m_{\rm h}^2 \sim m_{\rm Z}^2 + (\text{top} - \text{stop loop}) \leq 130\text{GeV} \ . \tag{4.33}$$

先ほども言ったように、コライダーの限界 (collider bound) は 180GeV くらいのところにあります。TevatronⅡ は、非常に楽観的には 120GeV まで排除領域 (exclusion reach) があると思います。LHC は、ちょっと時間がかかりますが 130GeV まで全てカバーできます。$b\overline{b}$ の崩壊のチャンネルが少し Z とかぶってしまうので、終状態に 2γ が出てくるものを探すのですが、それでも見つかります。だから、遅くとも LHC まで行けばこういう予言が正しいのかどうか決着します。そういう意味で、そういう明確な、逃れようのないところがある。やっぱり物理というのは逃れようがないところ、しっかりとした予言を抱えられるかどうかというのが、僕は非常に重要なところだと思っていて、そういう意味で LHC など将来のコライダーで標準的なこういうシナリオに乗った超対称性理論というのは完全に決着がつくということです。

ここまでで何か聞いておきたいことはありますか？

質問：130GeV というのは MSSM でのことですか？

山口：そうです。

質問：もっと一般的にはいくらでものばせるのですか？

山口：いくらでもは伸ばせません。例えば、ちょっと拡張して 1 重項を入れた next minimal 超対称標準模型というものがあるのですが、その場合でも 1 重項に摂動を要求しますと、限界は 150GeV とかそのくらいにしか上がりません。まあ、LHC ですとそこらへんはカバーできると思います。もちろん 1TeV くらいのところですべてが blow up しているという、わけのわからないことをやれば逃れようがありますが、今話してきた流れからそれは全然だめですよね。非常に弱いスケールに統一理論があって、それと電弱スケールとの階層性を説明したいという立場で超対称性を導入したので、そういう限定された超対称性は、もし LHC で見つからなかったら死んでいるというステートメントは正しいと思います。見つからなかったらもっと言い逃れることを考えます。あるいは捨てるか（笑）。

5　超対称大統一理論 (SUSY GUT)

ここでは話したいことは２つあって、１つは SUSY GUT の観点でゲージ相互作用の構造がどうなっているかという話です。ゲージ相互作用の構造の基本的なところは、昨日話した超対称性を入れていない場合の GUT と全く同じです。ゲージ構造というのは超対称性を入れたから変わるものでもないです。ただし、数値 (numenology) が変わります。例えば、β 関数の走り方というのは粒子をどれくらい入れたかによって変わってきます。あと、GUT スケールがどこにあるかも変わります。これから説明することは、ゲージ結合定数の統一 (gauge coupling unification) が SUSY GUT で起るということですが、それによって GUT スケールも明確に予言できます。したがって陽子 (proton) の寿命も言えるわけです。

5.1　ゲージ構造

まず、ゲージ構造ですけれども、$N = 1$ での β 関数ですが、これは昨日超対称性理論でない場合を書き下しました:

$$b = \frac{11}{3}C_2 - \frac{2}{3}\sum_{\text{Weyl}} T(R) - \frac{1}{3}\sum_{\text{scalar}} T(R)\ . \tag{5.1}$$

ゲージの項というのはゲージボソンがまわっているだけじゃなくて、ワイルフェルミオンとしてゲージーノというものもあるわけです。それはインデックスとして随伴表現 (adjoint representation) のインデックスを持っています。随伴表現なので、$T(R)$ というのがそのまま２次のカシミアになります。そうすると、β 関数はゲージからの寄与は $\frac{11}{3} - \frac{2}{3}$ で 3。もう一つ、カイラル場の方から来るものは、スカラーの部分とワイルフェルミオンの部分とがあります。ノートを見ればわかりますが、スカラーの部分が $-\frac{1}{3}$、ワイルフェルミオンの部分が $-\frac{2}{3}$ で、それらをまとめると -1 です。ですから

$$b_{N=1} = 3C_2(G) - \sum_{\text{chiral}} T(R) \tag{5.2}$$

と書けます。これは超対称な場の理論を使っている人には非常になじみの式です。これがあるとMSSMのβ関数が計算できます:

$$SU(3) \ : \ b_3 = 9 - 2N_g = 3 \qquad N_g : \text{generation の数} \tag{5.3}$$

$$SU(2) \ : \ b_2 = 6 - 2N_g - \frac{1}{2}N_H = -1 \qquad N_H : \text{ヒッグスの数} \tag{5.4}$$

$$U(1) \ : \ b_1 = -2N_g - \frac{3}{10}N_H = -\frac{33}{5} \ . \tag{5.5}$$

ゲージ結合定数がどう走るかはこれで指定できるので、実際に走らせてみると本当に３つの結合定数が一致するかということを見てみます。それをやっていってもいいんですが、定量的に扱うために、$g_1^2(m_{\rm Z})$、$g_2^2(m_{\rm Z})$に$m_{\rm Z}$のところの値をインプットして、$\frac{1}{g^2}$を走らせます。なぜ$\frac{1}{g^2}$でやるかというと、1-loopでやると走り方が直線になるので書きやすいからです。そうすると、当然２点ですからどこかで交わるわけです。これをGUTスケールと思います。$m_{\rm GUT}$、$g_{\rm GUT}$を決めます。これから３番目のβ関数を使って走らせます。

そうして実験値と比較します。実験値は、Weinberg角と構造定数(structure constant)を知っているとg_1とg_2が作れるので、それだけを書いておくことにします:

$$\sin^2\theta_{\rm W}(m_{\rm Z}) \ = \ 0.23124(24) \tag{5.6}$$

$$\alpha^{-1}(m_{\rm Z}) \ = \ 127.934(27) \tag{5.7}$$

$$\alpha_3(m_{\rm Z}) \ = \ 0.119(2) \ . \qquad (\ \ ) \text{内は誤差} \tag{5.8}$$

ちょっとうるさいことを言うと、スキーム(scheme)を全部指定しなければいけないのですが、$\overline{\rm MS}$(modified minimal subtract)というスキームでやります。Weinberg角というのはZの質量殻上(on-shell)での結合を見ることで決まります。αというのは構造定数で、ものすごく良く測られているようですが、低エネルギー（電子の質量くらい）から$m_{\rm Z}$のところまでもってくるということをやります。そのときに、数GeVくらいのところを通ってくるのですが、上がってくるときのデータが不足しているのでいろいろ問題があるので結構誤差があるのですが、それでもこのくらいです。それからZの上でのα_3、これは世界平均(world average)をとったものです。Particle Data Groupの値をそのまま借りてきました。それで、この処方箋にしたがってα_3を予言するわけです。知っていると思いますがαというのは$g^2/4\pi$です。

それで、α_3のMSSMでの予言は

$$\alpha_3(m_{\rm Z}) = 0.117 \tag{5.9}$$

です。これは実験の誤差の範囲内でピッタリ合っています。

もちろんこれは1-loopのしきい値の補正(threshold correction)とか2-loopのβ関数とかを入れて拡張しているわけですが、まあ問題ないレベルでは合っています。このデータが自覚されてきたのはLEPのデータが出て１年後くらいですから1990年から1991年くらいなんですが、それがSUSY GUTというものを示唆しているのではないかという非常に大きな根拠になっています。

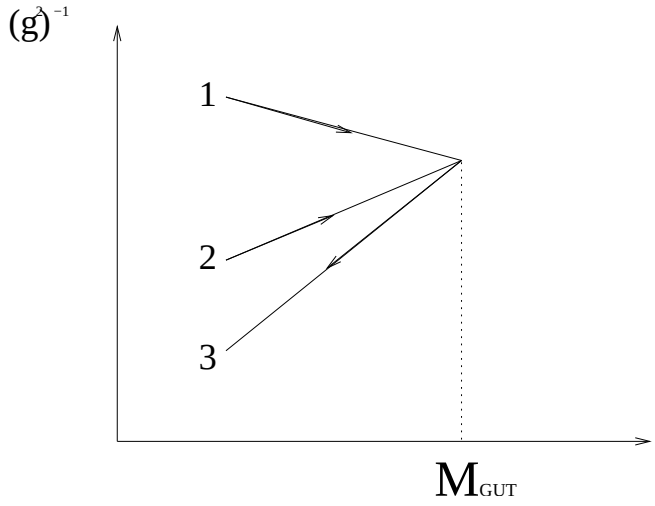

図 10: SUSY GUT でのゲージ結合定数の走り方

言いませんでしたが超対称でない標準模型で β 関数の走り方を見ると、だいたい 10σ くらいはずれて予言できます。全然はずれているわけです。そこから見ると、超対称性の場合はピッタリあっています。これは偶然ではないのではないかと思うわけです。これが SUSY GUT を考えたいという動機です。この 10 年くらい SUSY GUT というのがシリアスに議論されてきた動機でもあります。

もう一つ、陽子崩壊 (proton decay) の話をします。そのためには GUT スケールを知らないといけないのですが、これはさっきの方法で計算すると 2×10^{16}GeV です。これは昨日、陽子の寿命 (life time) から割り出してきた GUT スケールの下限 (lower bound) の 10^{15}GeV よりも１桁大きいわけです:

$$M_{\rm GUT} \simeq 2 \times 10^{16}{\rm GeV} \geq 10^{15}{\rm GeV} \ . \tag{5.10}$$

１桁大きいということは、実験的には $M_{\rm GUT}$ の４乗で寿命が延びていくので、４桁寿命が延びます。これは実験屋さんにとって大変なことで、多分技術革新が必要になると思います。実験屋さんによりますと、一般的なルールは３桁伸ばすには新しいアイデアが必要だということらしいです。まあ、今言っておきたいことは、とにかく X、Y ボソンの交換による陽子崩壊は実験と矛盾しないということです。

上の２つを合わせると、SUSY GUT というのは実験と非常によく合っているということになります。陽子崩壊の方は実験と矛盾しない。ゲージ結合定数の統一の方はすばらしい一致です。

もう一つ言っておくと X、Y ボソンで作られるような陽子崩壊というのは、さっきの超場の書き方で書いてやると

$$\frac{1}{M_X^2} \left(QQQ^\dagger L^\dagger\right)\Big|_{\theta^2\bar\theta^2} \tag{5.11}$$

と書けます。次元を数えてやると、次元 6 の演算子になっているということです。だから、こ

ういうものは次元6の陽子崩壊と呼ばれています。すぐ後に出てくるフレーバー構造の議論のときに次元5の陽子崩壊演算子というのが非常に問題になります。

ここまでで何か質問ありますか？...

ここまでは、SUSY GUTでみんながいいと思っているところでした。ここから先、フェルミオンの質量などのフレーバー 構造を見ていきたいんですが、ここはいまだに考えなければいけないことがたくさんあるので、この部分をクリアーするかどうかがSUSY GUTにとって非常に大きな部分です。

5.2 フレーバー構造

SUSY GUTの続きになりますが、今まではゲージセクターに関してはうまくいっていたということを言いました。SUSY GUTというのはゲージ構造を統一したいというのが動機だったわけで、そういう意味では超対称性にしたおかげで数値が非常にうまくいっています。それは、いかにもこのSUSY GUT的なシナリオがそのまま実現しているのではないかと思わせるわけですが、我々はさらにフレーバーの構造というか超ポテンシャルの構造も眺めてみたいと思います。ここがSUSY GUTにとってチャレンジングなところで、いろいろ苦心しなければならないところです。最終的なバージョンがまだできているとは思えず、ところどころにいろいろな正しい方向(right direction)が見えかくれしているという感じだと思います。そのことを伝えたいので、まず一番単純なモデルを持ってきてどこら辺でつまずくか、つまずいたところでどうしようかという話をしていきたいと思います。

5.2.1 極小SU(5)

一番簡単な$SU(5)$というのは、ヒッグスとしては$\mathbf{5}$と$\bar{\mathbf{5}}$表現を持ち、それと$SU(5)$を破るものとして$\mathbf{24}$表現を持っています:

$$\text{ヒッグス} \quad : \quad H(\mathbf{5}) \ , \ \overline{H}(\mathbf{5}) \ , \ \Sigma(\mathbf{24}) \ . \tag{5.12}$$

Σの方については適当な超ポテンシャルを書いてやればΣがゼロでない値をとったときにSU(5)が破れることになります:

$$W_\Sigma = \lambda_2 \Sigma^3 + M\Sigma^2 \ . \tag{5.13}$$

Σ の真空期待値としては

$$\langle\Sigma\rangle = M_\Sigma \begin{pmatrix} 2 & & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & -3 & & \\ & & & & -3 & \end{pmatrix} \tag{5.14}$$

のときに SU(5) が SU(2) × (1) に破れることがわかります。そして、この M_Σ というのはだいたい GUT スケールにあることを期待するわけです。

湯川結合の構造ですが、世代 (generation) の足を無視して書くと

$$W_{\rm Y} = y\psi(\mathbf{10})\psi(\mathbf{10})H(\bar{\mathbf{5}}) + y^{'}\psi(\mathbf{10})\phi(\bar{\mathbf{5}})\overline{H}(\bar{\mathbf{5}}) \tag{5.15}$$

となります。**10**、**5** 表現からつくられる部分と **10**、$\bar{\mathbf{5}}$ 表現からつくられる部分とがあります。H の中に 3 重項 (triplet)T と H_2、$\overline{\rm H}$ の中に $\overline{\rm T}$ と H_1 があります。T は $SU(3)$ の 3 重項、H は $SU(2)$ の 2 重項です。H_1 と H_2 は MSSM に出てくるヒッグス場です。この T というのは MSSM には出てこないようなカラー (color) を持ったヒッグス場です。まあ期待としては T、$\overline{\rm T}$ というのは GUT スケール (10^{16}GeV) くらいの質量を持ってほしいわけです。

5.2.2 Triplet-doublet Splitting

まず最初にぶち当たる困難は、いかにして T、$\overline{\rm T}$ を重くし、H_1、H_2 を軽くするかということです。それを **triplet-doublet splitting** と言います。どのように T、$\overline{\rm T}$ を重くするかということですが、極小 $SU(5)$ のシナリオでは、さらに次のような超ポテンシャルを書きます:

$$\begin{aligned} W &= MH\overline{H} + \lambda H\Sigma\overline{H} \\ &= (M + 2\lambda M_\Sigma)\, T\overline{T} + (M - 3\lambda M_\Sigma)\, H_1 H_2 \ . \end{aligned} \tag{5.16}$$

問題は第 2 項目なんですが、極小なシナリオだと手でこれをゼロにします。という意味は、パラメータを微調整 (fine-tuning) しておいて全部ゼロにするということです。あるいはゼロというのが嫌だったら、μ としておいて GUT スケールに比べたら非常に小さいというふうにします。微調整をして、量子補正 (radiative correction) を入れたときにどうなるかということですが、これは問題ないです。量子補正について安定だということは非くりこみ定理が保証しています。だから、tree レベルで微調整してあとは気にしないというのが極小 $SU(5)$ シナリオの立場です。

しかし、これはとても信じられません。もしこんなことしか、普通のこの問題に対する根拠が無いとしたら SUSY GUT なんてとても信じられないということになります。これは本当に悩ましい問題で、解決の方法が本当のところどういうところにあるのかよくわかりません。つ

まり、$SU(5)$ の構造を見る限り 3 重項と 2 重項があり、片方が重くて片方が軽いという構造がどうやって説明できるのか一般的にはわかりません。

しかし、一つのよりどころは **missing partner mechanism** です。他にもいろいろ考えがありますが、これが一番いい方法なんじゃないかと思います。アイデアとしては、T と違う場 T' があって、T は T' から $\overline{\mathrm{T}}$ は $\overline{\mathrm{T}}'$ から質量をもらうというふうになれいいというわけです。一方、2 重項の方に関しては質量を組む相手がいないというわけで質量がゼロ (mass less) になります。それが非常に魅力的に思えます:

$$T' \overset{M}{\longleftrightarrow} T \quad , \quad \overline{T} \overset{\overline{M}}{\longleftrightarrow} \overline{T}' \ . \tag{5.17}$$

このシナリオの最初の例は、Masiero、Nanopoulos、Tamvakis、Yanagida という人達の 80 年代半ばの仕事です。これは、$\mathbf{5}$ と $\bar{\mathbf{5}}$ の相棒として $\mathbf{50}$ と $\overline{\mathbf{50}}$ を持ってきます。これらを $SU(2)$ と $SU(3)$ に分解してやると

$$\mathbf{50} = (\mathbf{8},\mathbf{2}) + (\mathbf{6},\mathbf{3}) + (\bar{\mathbf{6}},\mathbf{1}) + (\mathbf{3},\mathbf{2}) + (\bar{\mathbf{3}},\mathbf{1}) + (\mathbf{1},\mathbf{1}) \tag{5.18}$$

となります。ポイントは $\bar{\mathbf{3}}$ があるということです。だから $(\mathbf{3},\mathbf{1})$ と組んで質量を与えることができます。一方で $(\mathbf{1},\mathbf{2})$ がなく、2 重項の方は相棒がいないので質量が組めない。そういう意味で missing partner と呼ばれているメカニズムです。

あと、言葉だけにしますがもう一つのアイデアとして、$SU(5) \times SU(3) \times U(1)$ を考え、我々の見ている $SU(3)$ というのは、$SU(5)$ から来ているものと $SU(3)$ ハイパーカラーの部分群 (subgroup) から来ているというふうにします。missing partner の起し方としては、ハイパーカラーの $SU(3)$ から持ってくるということになります。魅力的なところは結構小さい表現で missing partner メカニズムが実現できるということです。あまり大きな表現の多重項があると気持よくありません。それは摂動 (perturbativity) を GUT スケールから上ですぐ壊すとか、より基本的な理論に埋め込もうと思ったときにあまり高い次元の表現というのは、例えば弦理論から出すのはそんなに簡単ではないからです。なるべくシンプルに実現できるというのがいいと思います。また、具体的な実現は別としてこのアイデアというのは魅力的に思います。

5.2.3 次元 5 の陽子崩壊 (Dimension5 Proton Decay)

もう一つの問題として、次元 5 の陽子崩壊があります。これはさっきのカラー 3 重項の交換で起ります。

また極小 SU(5) に戻って議論しましょう。カラー 3 重項が湯川結合を通じて結合しているわけです。ダイアグラム的には図 11 のようになります。

オペレーターで言うと 2 つのタイプに分かれて、超場を大文字で書くと

$$\mathcal{O}_{\mathrm{A}} = (UUDE)|_{\theta\theta} \tag{5.19}$$

$$\mathcal{O}_{\mathrm{B}} = (QQQL)|_{\theta\theta} \tag{5.20}$$

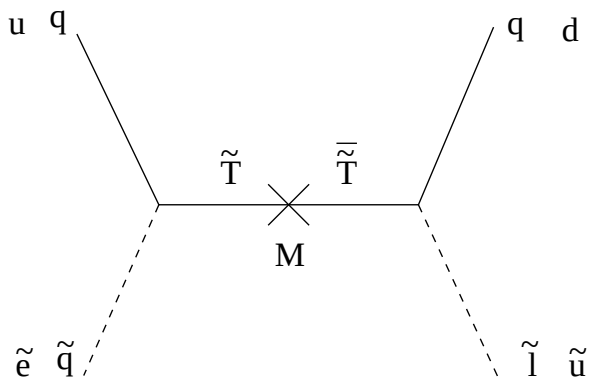

図 11: 次元 5 の陽子崩壊

になります。世代の足 (generation index) まで考えると、$SU(3)$、$SU(2)$ に関して不変に組ませてやろうと思うと、必ずどこかの足は 2 世代か 3 世代になるということが分かります。だから陽子崩壊としては K 中間子を含むようなものが起ります。次元 6 のオペレーターの場合は陽子が π 中間子と陽電子に行きました。今の場合の陽子崩壊は超対称粒子が飛んでいるわけなので、例えば図 12 のように引き起こされます。

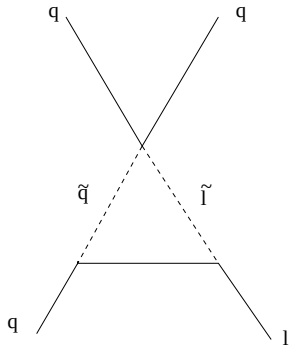

図 12: 次元 6 の陽子崩壊

これの振幅は結構効きそうですよね。というのは次元 6 のオペレーターというのはこういうふうに書けたときに GUT スケールの 2 乗分の 1 で抑えられているのですが、このダイアグラムの場合は GUT スケールの 1 乗分の 1 で抑えられるからです。だから非常にやばそうなんです。でも何とかなりそうなのは、非常に小さい湯川結合をひろってくるからです。典型的に書くと

$$\text{Amp} \sim \frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{M_{\rm T} m_{\rm SUSY}} \times (\text{small 湯川}) \tag{5.21}$$

です。$M_{\rm T}$ は 3 重項の質量です。

これで何とか頑張れば大丈夫だと思っていたんですが、実は極小 SUSY SU(5) というのはこ

の陽子崩壊で完全に排除 (rules out) されます。陽子崩壊は

$$P \longrightarrow K^+ + \bar{\nu} \tag{5.22}$$

というものです。詳細な計算によりますと $M_{\rm T}$ というのは

$$M_{\rm T} \gg 10^{17}{\rm GeV} \tag{5.23}$$

です。ただし $m_{\rm SUSY} \leq 1{\rm TeV}$ です。いろいろなパラメータによりますけれども 10^{17} より遥かに大きい、ギリギリ頑張って 10^{17} です。10^{17} ということは (5.16) 式の λ という湯川結合がめちゃくちゃ大きいということです。そういう非摂動論的 (non-perturbative) なところに入っていくというのはちょっと考えにくいので、まあこれで極小 SUSY SU(5) というのは排除されたわけです。これは 98 年の Goto-Nihei という仕事です。

で、問題はこれで SUSY GUT そのものが死んだのかということですが、これはおもしろいシナリオですが、もし死んだのであれば捨てるべき理論です。でも、多分これは SUSY SU(5) の一般的な結論ではなくて、極小 SU(5) という、ある種あまり良くない性質を持ったモデルが死んだのだと解釈できるのではないかと思います。というのは、やっぱり気になるのは質量の与え方です。この、微調整で忠実に質量を与えるというのをやったモデルに基づいて計算すると破綻するわけで、おそらく一つの考え方は、triplet-doublet mass splitting の仕方と陽子崩壊が何か関連しているのだろうということです。

一つ目は図 13 のようなものが出ないということです。

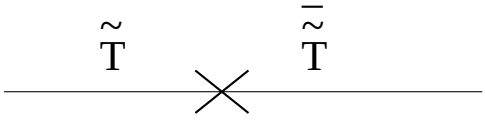

図 13: ヒッグス 3 重項の質量

T と T'、$\overline{T}$ と $\overline{T}'$ が完全に分離していれば良いのです。ただ、オリジナルの missing partner のアイデアというのが最終的にはこれらはつながって質量を組むようにしたいということだったので、巡り巡ってこのようなダイアグラムが書けてしまうんですけれど、まあアイデアとしてはそういう方向に行っている可能性がある。それだと割と慣例的な理解ができます。

あともう一つは対称性でいこうというアイデアです。それは $T\overline{T}$ というのを対称性である程度抑えればいいということです。T と H_1、H_2 は同じ多重項の中に入っていて H_1、H_2 を抑えるような相互作用なので、例えば **Peccei-Quinn 対称性** を課すということです。アイデアとしては $H\overline{H}$ について **Peccei-Quinn 電荷** というものがあるのですが、これは標準模型の困難の中に **強い CP の困難 (strong CP problem)** というのがあると言ったのですが、それを解決するアイデアです。その電荷を与えたときに $H\overline{H}$ の電荷がゼロでなければこの項が抑えられ

ます。これで多分、SUSY GUT に立脚していこうという立場からはこういう抑制が起っているのだろうというふうに思います。

ただし、この、カラーを持った (colored) ヒッグスの交換を抑えればそれで全てが終りかというと必ずしもそうではないです。それは、一般的には、多分 Planck スケールくらいが基本的なスケールだとしますと、あるいはもうちょっと下がってストリングスケール（5×10^{17}GeV）でもいいですが、$M_{\rm pl}$ で抑えられるようなくりこみ不可能な相互作用

$$\frac{1}{M}\mathcal{O}_{\rm A,B} \tag{5.24}$$

がそこから先はガバガバ出てきてもいいだろうということになります。カラーを持ったヒッグスの交換じゃなくてこういう項、“genuine non-renormalizable” な相互作用が出てきます。で、実は陽子崩壊からの制限というのはこの M というスケールに対して

$$M \ \geq \ 10^{25}\text{GeV} \quad \longleftarrow \quad \Gamma(P \to K \ + \ \bar{\nu}) \tag{5.25}$$

です。これはすごいことを言っていて、つまり Planck スケールの物理をコントロールできないとこの理論は信じられないということです。で、これは open problem なのです。

それで、多分ここら辺を考えることが次の物理につながるだろうと思います。一つ、ずっと僕が魅力的だなと思っている話があって、それはこれを対称性でコントロールしたいということです。非常にパワフルな対称性があって、B_3 という対称性です。これは Ibanez と Ross によって 90 年代のはじめだったと思いますけど提唱されたものです。答えを最初に書いておきますけど

	Q	$U^{\rm c}$	$D^{\rm c}$	L	$E^{\rm c}$	H_1	H_2
電荷	0	-1	1	-1	2	-1	1

です。これを $\mathcal{Z}_3$ で割ったような電荷、というのは mod 3 を要求するということです。例えば、H_2 というのは電荷が 1 でこれを 3 つ持ってくれば電荷が 3 ですよね。これは mod 3 で割ってそれを許すという対称性です:

$$B_3 \quad \text{mod } 3 \quad \longleftarrow \quad \mathcal{Z}_3 \quad \text{対称性 .} \tag{5.26}$$

そういう離散的な対称性 (discrete symmetry) を考えます。で、これのいいところは、さっき書いた $QQQL$ というオペレーターはこの対称性で禁止されるということです。この L は電荷が -1 なので対称ではないのです。$UUDE$ も禁止されることが同じようにして分かります。つまり、陽子崩壊の次元 5 のオペレーターは完全に抑えられます。

また、これはいわゆる “discrete gauge symmetry(離散的なゲージ対称性)” というものになっています。つまり、これを連続なゲージ理論に埋め込んでやるとアノマリーフリー[2] にするこ

[2] アノマリーの出ない理論を “アノマリーフリー (anomaly-free)” な理論と呼ぶ (編集者注)。

とができます。それのご利益を言います。量子重力 (quantum gravity) とかの効果で対称性が破れるか、大域的 (global) 対称性の場合は多分それで破るのではないかという議論がありました。一方、局所的 (local) ゲージ対称性の場合は量子重力の補正に強いという議論があります。つまり、くりこみ不可能なものをコントロールするのはきっとゲージ対称性だろうと、そういうところから離散的ゲージ対称性というものが考えられたのです。

また、B_3 というのはバリオン数 (baryon number) ですね。バリオン数を $\mathcal{Z}_3$ で割って不連続にしたようなものですね。これに適当に U(1) ハイパー電荷の電荷を足しておいてください。そうすると正にバリオン数になります。つまり、B_3 はバリオン数を破るようなものを禁止する、従って陽子崩壊を禁止するというのが分かると思います。

ただし、これは GUT に埋め込めません。Q、$U^{\rm c}$、$E^{\rm c}$ は **10** 表現に入っているわけですが **10** 表現同士で電荷がバラバラなわけです。そういうのを一つの GUT 群、一つの多重項に埋め込むことはできません。これは非常にきれいなんですが残念ながら GUT に埋め込むことはできません。

ここまで、次元 5 の陽子崩壊を禁止できなかったら GUT は捨てるべきなのかとかという悩みが出てくるわけです。これが SUSY GUT の最大の問題かもしれません。

5.2.4 フェルミオン質量

次に考えなければいけないのはフェルミオン質量の問題ですね。ここで言いたいことは次のことです。さっき書いた **10** 表現と $\bar{\mathbf{5}}$ 表現のヒッグスの相互作用の中にダウンクォークの 1 重項の部分と右手型の 1 重項の部分が入っています。ですから、これらに一つの湯川 結合が質量を与えるのでダウンクォークの質量とレプトンの質量が一致することが分かります。これは第 3 世代に対しては結構いいんです。$m_{\rm Z}$ のスケールで running mass は $m_{\rm b} \sim 3{\rm GeV}$、$m_\tau \sim 1.8{\rm GeV}$ くらいですが、これを GUT スケールまで持ってくると、トップクォークの湯川結合定数とかにもよりますが

$$m_{\rm b} = m_\tau \quad @ \quad M_{\rm GUT} \tag{5.27}$$

となります。おおざっぱに言ってこういうことが起ります。

ところが第 1、2 世代に行くととてもこんなことは起りません。そもそも質量がどのくらい違うかというと

$$\frac{m_{\rm d}}{m_{\rm e}} \sim 10 \quad , \quad \frac{m_{\rm s}}{m_\mu} \sim 1 \tag{5.28}$$

です。こういうものが、くりこみ群で走らせたときに全て一致するとは思えないわけです。全然違う関係式におさまっているものが GUT スケールで合うとは思えないわけです。これは、GUT というのはある種、フレーバー構造を複雑にしなければいけないということを言っています。

これを説明するために２つくらいアイデアがあります。１つは Georgi-Jarlskog のアイデアです。それは 45 次元のヒッグスをさらに持ってきなさいというものです。アイデアとしては **10** 表現と $\bar{\mathbf{5}}$ 表現を組んだときに **5** 表現が出る他に $\overline{\mathbf{45}}$ 表現が出るので、これと **45** 表現を組んで $SU(5)$ の 1 重項をつくるというものです。だからヒッグスとして $\bar{\mathbf{5}}$ の他に 45 次元のものがある可能性があるわけです。そのとき群論的な構造から、質量は

$$\frac{m_{\rm s}}{m_\mu} = \frac{1}{3} \quad @ \quad M_{\rm GUT} \tag{5.29}$$

になります。ストレンジクォークと μ レプトンの比を GUT スケールで 1/3 くらいにしておくと、くりこみ群で走らせたときにストレンジクォークの方が QCD のおかげで重くなってだいたいオーダー 1 を与えます。もう少し工夫すると $m_{\rm d}/m_{\rm e}$ を 3 くらいにすることもできます。ある種のシーソー (see-saw) みたいな議論が彼らによってなされています。そうすると 10 倍くらいの質量が説明できるというのがアイデアです。

もう一つのアイデアは、まあ第 1、2 世代の湯川結合というのは非常に小さいゴミみたいなものなので、それはくりこみ不可能な相互作用でいくらでも汚染されるだろうというものです。つまり、超対称性の破れの効果を Σ で書いて

$$\frac{1}{M}\Sigma\overline{H}\psi\phi \tag{5.30}$$

のように書けるものです。これが小さい湯川結合を与えてうまいこと合わせるというアイデアです。

5.2.5　ニュートリノ質量

あと面白いのはニュートリノの質量です。大気ニュートリノ (atmospheric neutrino) の大混合角 (large mixing angle) というのは非常にインパクトがありました:

$$\sin^2 2\theta_{\rm atm} \ . \tag{5.31}$$

最近は太陽ニュートリノ (solar neutrino) の方でも大混合角が 95%の信頼度 (confidence level) で支持されています:

$$\sin^2 2\theta_{\nu_\odot} \ . \tag{5.32}$$

こういうことは 98 年に Super K[3] で大気ニュートリノが確認されて分かりました。それまでは Kamiokande のデータがあったんですけれども、ああだこうだ文句がついていて我々も良く言って半信半疑でした。だからやっぱりこれはすごい衝撃でした。

考えてみるとフェルミオン質量の問題はずっと考えられてきたんですけれども、主にというか完全にクォークセクターだけが注目されていました。クォークというのは世代に関してほと

[3] 岐阜県神岡にあるスーパーカミオカンデのこと（編集者注)。

んど対角的 (diagonal) な構造を持っているので小さな非対角 (off-diagonal) なところを出せば良いという感じです。

世代間混合が非常に大きいというのはやはり衝撃的で、98 年までのほとんどの提案はコケました。それまではニュートリノのところは相当悪あがきしなければいけないという状況で、例えば sterile(active でない 3 世代以外の) ニュートリノを入れてみたりしていました。で、ここら辺を合わせて考えていくというのが今後の面白い問題です。

ここら辺が成功するかどうかが、SUSY GUT を信じるかどうかということに関わってくるのでしょう。何か、考えてみると SUSY GUT としては次のフェイズに入っているのかも知れないですね。こういうところが理解できると SUSY GUT 的な描像がかなり面白いということになる気がします。

ただ、陽子崩壊の次元 5 のオペレーターの問題はうまくいかないし、一方さっき言った B_3 という対称性は非常に魅力的だとかそういうことを考えていくと、どっちに転ぶかわからないのでいろんな方向を模索するというスタンスもあり得るという気がします。ある意味で、どっちの方向に行こうかという岐路に来ているんじゃないかという気がここのところずっとしています。今日こういう話をしたのは、自分がかなりこういう事が気になっているからというのもあります。

何か質問はありますか？よろしいですかね。

ここのところは open problem が多いので、それらを考えていくことが今後の物理の方向を決めていくことになると思います。

6 ブレーン世界 (Brane World)

名前としては**ブレーン世界 (Brane World)** とつけていますがあまりそんなに大したことを話すつもりはないです。

例えば今までは SUSY GUT という枠組みで話をしてきたわけですが、SUSY GUT がたとえ正しいとしても多分そこでとどまるわけではないんだと思います。SUSY GUT のスケールは 10^{16}GeV くらいのことろにあるんですが、それより 1 ケタか 2 ケタくらい高いところに、多分より基本的な理論がいるんだろうと思います。多分それは例えば弦理論とかそういうもの、つまり重力まで含むような理論を考えたいわけです。僕らが知ってるのは弦理論しかないですし、弦理論は非常に無矛盾 (consistent) だし豊富な構造を持っているからそこのところは特に批判するところもないので、まあ弦理論みたいなものになっているのだろうと思ったとします。

6.1 弦理論 (String Theory)

そうするとこれは量子重力の非常にいい候補です。ストリング (string) というのは点粒子じゃなくて、端点 (end point) を持っているような開いた弦 (open string) とか、端点を持っていない閉じた弦 (closed string) を考えるのですが、一番古い所見は閉じた弦のスペクトルの中にスピン２を持った質量ゼロの粒子がいるというものです。それが重力子 (graviton) と同定できるということです。さらに重力を含んでいるにもかかわらず摂動論は有限にできるということもあります。

弦理論の見方はそれだけじゃなく、重要なのは素粒子の統一模型として見るという見方です。これは歴史的に 1984 年ころからです。80 年代に弦理論が非常に研究された時期があって、ヘテロティックストリングが出てきたのがそれの非常に重要な点でした。それは、ご存じのように弦理論は 10 次元で定義されているのですが、N=1 の超対称性を持っているのでカイラルな理論を作れる可能性があります。しかもゲージ群の構造が良くて $E_8 \times E_8$ です。すぐに分かることは、これを **Calabi-Yau コンパクト化** するのですが、**standard embedding** という方法では、ゲージ群が E_6 まで落ちます。Calabi-Yau にコンパクト化しているので N=1 が実現されています：

$$\begin{aligned} E_8 \quad &\times \quad E_8^{'} \ \ (\mathrm{10D}\ ,\ \mathrm{N}=1) \\ &\downarrow \quad \ \mathrm{Calabi-Yau\ compact\ 化} \\ E_6 \quad &\times \quad E_8^{'} \ \ (\mathrm{4D}\ ,\ \mathrm{N}=1)\ . \end{aligned}$$

E_6 に落ちると $SU(3)$ と $SU(2)$ と $U(1)$ を含むわけです。自然な形で標準模型の群が埋め込まれていることになります。さらに物質場を調べてみると **27** 表現に従います。E_6 の **27** 表現というのは $SO(10)$ の言葉で言うと 16 と 10 と 1 で、$SO(10)$ の **16** 表現というのは $SU(5)$ では **10** 表現と $\bar{\mathbf{5}}$ と **1** とに落ちます。あるいは $SO(10)$ の **10** 表現は **5** と $\bar{\mathbf{5}}$ に落ちますから、いずれにしてもほしいものが全部一応埋め込まれています。クォークとレプトンとヒッグスあるいは右手型のニュートリノがあってもいいんですが、そういうものが全部埋め込めるという形になっています。だからかなり魅力的です。

こういう現象論的な動機に基づいて研究されていたわけですが、次はモデルを作るということになります。モデルを作る段階では Calabi-Yau の standard embedding 以外にいろいろな方法が考えられまして、この段階で言っておきたいのは、いろいろな群構造を持ったものがあって一つは $SU(5)$ を含むものも実現できるということです。こんなストリングモデルに基づくと SUSY GUT 的なものもできます。

それから、SU(5) を含まないものも実現できます。この場合、標準模型が GUT を経ずにそのまま弦理論に行っています。これは **string unification** と言います。こういう描像では、例えば U(1) の電荷の量子化ということがあって GUT を持ち出したんですが、それは string unification ではコンパクト化の詳細とかそういうものによるような描像に入れ代わることができるわけ

です:

$$G \supset SU(5) \rightarrow \text{SUSY GUT}$$
$$G \not\supset SU(5) \rightarrow \text{string unification .}$$

弱結合なヘテロティックストリングの場合でさえそうだったんですが、90 年代に入ってもう少しいろいろなことが分かってきました。もう少しと言うよりかなりドラスティックに変わって、例えばそれは D-brane みたいな、超重力理論で言うとソリトン的 (solitonic) なストリングのオブジェクトや、あるいは M 理論みたいなものがあるということが分かってきたということです。

弦理論の真空の構造がより豊かになったということが効いて、それに伴う現象論的な帰結も増えてきたわけです。で、ある種の描像が現象論的なモデル作り (model building) に使えるところがあるのではないかということが言えます。例えば 95 年以降の流れがそういうことなわけですが、例えば摂動論的な（弱結合な）ヘテロティックストリングの強結合極限を使ってやります。それは **ヘテロティック M 理論** と呼ばれるもので現象論のモデル作りにふさわしいものです。これが SUSY GUT と無矛盾なより基本的な描像として浮かび上がってきます。

それから、SUSY GUT を離れてもう少し代替的な描像として、より積極的にブレーンを使ってやっていくという方法があります。それのラディカルな、突き詰めていった方法というのが、例えば昨日の研究会で議論されていたと思いますが、**大きな余剰次元 (large extra dimensions)** と **ワープ余剰次元 (warped extra dimension)** です。本当は二つしかないのではなくて、ただ代表的なものを言っているのですが。

で、弦理論を少し知っている人のために言葉だけ言っておくと、例えば大きな余剰次元というのは type I とかそれの双対 (dual) な理論である type I$'$ を使って実現されるものです。

それからワープ余剰次元というアイデアは何かというと、5 次元の Anti-de Sitter 空間を考えてそれをスライスしてブレーンの張力 (tension) を合わせておくと、全体として 4 次元で見たときに宇宙定数はゼロになります。ところが Anti-de Sitter というのは AdS-CFT の言葉でも分かるように AdS の無限からの距離というものがエネルギースケールに対応しています。従って適当な位置に、我々の標準模型が乗っているブレーンを固定できたとすると、そこのスケールは自然に電弱スケールにできます。こういうアイデアが Randall と Sundrum によって提唱されました。でも、Randall と Sundrum が提唱したときにどのくらい **AdS/CFT 対応** が意識されたのか分かりませんけれども、AdS/CFT 対応は Verlinde とかそういう人達が精力的に言っていたわけです。

6.2 ヘテロティック M 理論

ヘテロティック M 理論から少しだけ話をしていこうかと思います。

まず、かなり前からやられている議論ですが、摂動論的なヘテロティックストリングの有効

作用というものをにらんでやります:

$$S_{\rm eff}^{\rm het} = -\int d^{10}x\sqrt{-g}e^{-2\phi}\left(\frac{4}{{\alpha'}^4}R + \frac{1}{{\alpha'}^3}{\rm tr}F^2\right) + \cdots \ . \tag{6.1}$$

( ) の中の第 1 項目というのは重力を与えます。R というのはスカラー曲率です。第 2 項目の F^2 はゲージ場の作用を与えます。それでまず notation ですが、ϕ はディラトン (dilaton) 場で $e^{-2\phi}$ はストリングのループ結合定数を与えます。

あの、僕がこれをはなしている目的はですね、まあフォーマルなことをやっている人はこういうことは常識的に知っていなきゃいけないと思うし、まあ現象論をやっている人だとなかなかこういうことを聞く機会もないのでまあ少ししゃべっておこうと思ってやっているのです。現象論をやっている人がこういうことを知らないと何もできないと思われると困るので断っておきます。まあお話程度に聴いておいてください。

α' というのはストリングの張力をコントロールしているようなパラメータで、α' の $-1/2$ 乗が質量次元に相当します。これをストリングスケールと呼ぶことにしましょう:

$$\text{ストリングスケール} \ : \ M_{\rm str} \equiv \frac{1}{\sqrt{\alpha'}} \ . \tag{6.2}$$

まず、何も言いませんでしたが、ヘテロティックストリングというのは基本的には閉じた弦だけからできている理論です。閉じた弦だけからできているという特徴が、この $e^{-2\phi}$ で重力の方もゲージの方もコントロールされているということに関係しています。それでこの理論を 4 次元に落としてやります。4 次元に落とすために単純に dimensional reduction をやります。そうすると

$$\int d^4x\sqrt{-g}V + \cdots \tag{6.3}$$

となります。もちろん何か余計なものも出てきますが、そういうものは忘れてここだけに注目するとこれでいいわけです。V というのはコンパクト化したときの内部空間の大きさですが、こういうものを組み合わせて Newton 定数とかゲージ結合定数が書けます。で、それを書いてやると

$$G_{\rm N} = \frac{e^{2\phi}{\alpha'}^4}{16\pi V} \quad , \quad g^2 = \frac{e^{2\phi}{\alpha'}^3}{4V} \tag{6.4}$$

となり、ここから $e^{2\phi}$ を消去してやりますと

$$G_{\rm N} = \frac{g^2\alpha'}{4\pi} \tag{6.5}$$

となり、例えば GUT スケールでの g^2 というのは知っているわけですからそれを代入してやると $M_{\rm str}$ は Planck スケールなみになり、16π とかがあるので一桁落ちて

$$M_{\rm str} \ \sim \ 10^{18}{\rm GeV} \tag{6.6}$$

になります。もっと正確にやると (several) $\times 10^{17}$GeV ですが、まあだいたいこんなオーダーが出てきます。ここでのミソはヘテロティックストリングを考えるとストリングスケールというのは 10^{18}GeV に固定されてしまうということです。そのときは普通のダイナミクスを考えたときには V というものもだいたいそのオーダーになるのが自然でしょうね:

$$V^{-1/6} \ \sim \ M_{\rm str} \ . \tag{6.7}$$

そうすると要するに重力の方を統一するスケールというのがストリングスケールですが、それは 10^{18}GeV くらいのところにあって、一方 GUT というのはゲージ群だけは 10^{16}GeV で合ってしまうわけです。そのギャップをどう考えるのかというのが問題です。

つまり、今議論してるのは何かというと、図 14 のようなギャップをどうしようかということです。

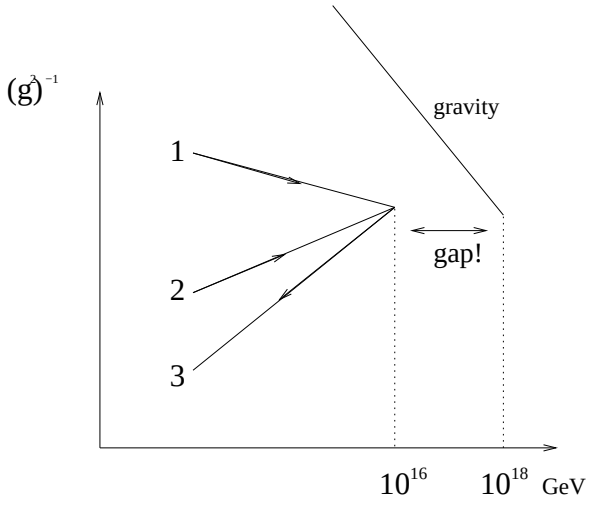

図 14: GUT スケールとストリングスケールとのギャップ

さっき言った string unification の立場からはいろいろな粒子を入れて合わせるとか、しきい値の補正 (threshold correction) をめちゃくちゃ多くとってやってこれをうまく合わせるとかいろいろなことが考えられたのですが、おそらく一番自然だろうと思われる描像は次のようなものです。

それは、そもそもコンパクト化のスケールが GUT スケールにあってそこから先は基本的な理論に行っているという立場です。その立場をヘテロティックストリングでやろうとすると何が起るかというと、V^{-1} を小さくとりたいわけで、そうすると V は大きくなりますから結合定数を同じようにしようと思うと $e^{2\phi}$ は非常に大きくなります。$e^{2\phi}$ というのはストリングループの結合定数ですが、要するにヘテロティックストリングの立場からみると相互作用がめちゃくちゃ強いものになってしまうわけです。

このくらいのことは８０年代から知っていたわけですが、そのころは強い相互作用になった理論は、摂動論でしか定義されていないストリングではもう扱えないと思っていたんですが、

実は最近、強結合極限がどうなっているかが分かってきて、それがさっき書いたヘテロティック M 理論です。

だから、V のスケールを GUT スケールくらいにとりたいのですが、そうすると相互作用が強くなり、強結合極限というのは次のような理論になっていることが Horava と Witten によって 96 年に提唱されました。それは 10 次元の理論じゃなくて 11 次元の理論です。しかも 11 次元の超重力理論で、11 次元のスペースを 10 次元と S^1/Z_2 に割ります。S^1/Z_2 というのは線分になります。なぜ線分にするかというと、超対称性の数を考えてみると 11 次元の N=1 の超対称性というのはそのまま落としてくると 10 次元で N=2 の超対称性になります。それで、欲しいのは N=1 の超対称性なので 1 個殺してやりたいわけです。それを殺す標準的な方法というのは、線分に落としてやって Z_2 の射影 (projection) をかけて一つ殺すということです。殺したあとに 2 点のとがった点ができます。そこで重力アノマリー (gravitational anomaly) を考えると、11 次元の理論からスタートしているのでスムースな所というのは重力アノマリーが完全に相殺していないのですが、端の所は重力アノマリーが出てきてしまいます。それを相殺するためには **Super Yang-Mills 場** をそこにくっつける必要があります。２つの境界 (boundary) の上に E_8 の超 Yang-Mills をくっつけるわけです:

$$\mathbf{R}^{10} \times \frac{S^1}{Z_2} \oplus (10\,\mathrm{dim.\,E_8\ Super\,Yang\text{–}Mills})^2 \ . \tag{6.8}$$

絵で書くと図 15 のようになります。

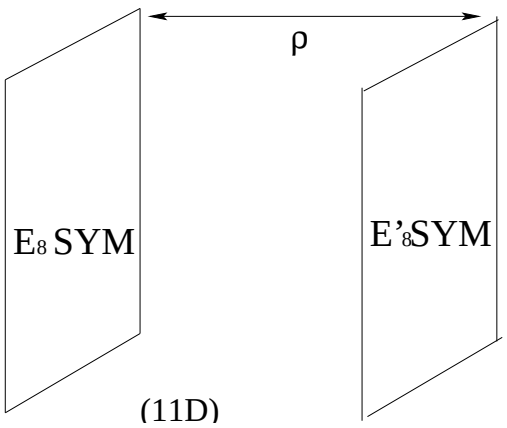

図 15: ヘテロティック M 理論

だから 11 次元のバルク (bulk) のところに重力が住んでいて、10 次元の境界のところに超 Yang-Mills が住んでいるという世界観ができあがります。

11 次元で見ているとどういう構成でやっているのかよく分からないですが、一つ次元を落として眺めてみるとオリエントフォールド (orienthold) の固定点 (fixed point) に **D-brane** をペタペタくっつけていて、アノマリーがフリーな理論にしているようなものになっています。だから、ある意味で弦理論の立場から見てこういう構成の仕方というのは理解できるわけです。

それで、僕にとって重要なことは、別にどう作ったかというなことではなくて、これで numenology をやってみるということです。本当は Lagrangian を書いてやればいいんですが時間もないので答えだけ書きます。興味のある人は僕らの論文とかいろいろ見てください。

この入れ物の構造なんですが、今 GUT スケールにコンパクト化のスケールを合わせたとします。そうすると 11 次元の理論の Planck スケールはだいたい 4×10^{16}GeV くらいのところにきます。11 次元目の長さを ρ とすると、大体 5×10^{15}GeV くらいです:

$$M_{\rm GUT} \sim 2 \times 10^{16}{\rm GeV} \tag{6.9}$$

$$M_{\rm pl}^{(11)} \sim 4 \times 10^{16}{\rm GeV} \tag{6.10}$$

$$\rho^{-1} \sim 5 \times 10^{15}{\rm GeV}\ . \tag{6.11}$$

これはどういうことになっているかというと、エネルギー的にちょっと低いということはサイズ的には少し大きいわけです。11 次元目のほうがサイズ的 (長さ的) に大きいということなのでさっきの絵に重ねると絵で書くと図 16 のようになります。

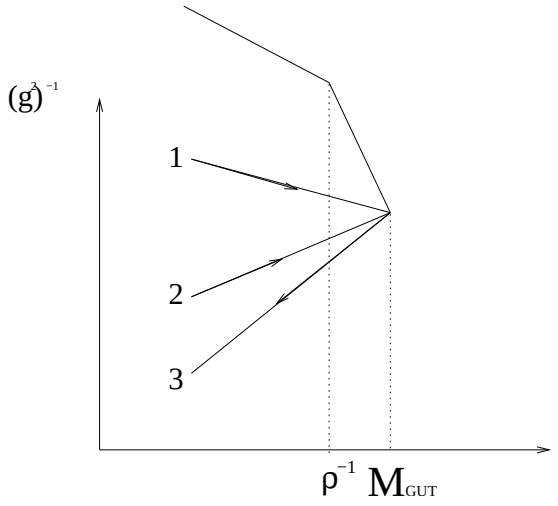

図 16: ヘテロティック M 理論でのゲージ結合定数の走り方

これはけっこう魅力的で、GUT スケールというのが、これだと変なスケールじゃないわけです。今までどうも分からないのは、GUT スケールというのは Planck スケールより 2 ケタくらい低いところにあることです。たまたまなのかとも思うんですが、2 ケタというのは $4\pi^2$ で作れますよね。だからここはループで抑制したスケールだとかいろいろ考えるわけですが、GUT スケールのところに全てがあるとするためには、言えることは余剰次元の 5 次元目、あるいは 11 次元目というのが入ってきてそこで重力の振る舞いが変わって下のスケールで統一するということを可能にするということです。

僕はこれの超対称性の破れとかに興味があっていろいろ調べているんですが、超対称性の破れは、今回は残念ながら話せません。

あと、Horava-Witten の構造ではこのスケールが自由に変えられるわけじゃなくて、ちょっとした障害があって、Calabi-Yau に埋め込んだときの standard embedding で考えたときには自由に長さは変えられなかったんですが、type I とかそういうところに行くともうちょっと自由に余剰次元の長さを変えることができます。それはストリングスケールももうちょっと自由になるということなんですが、そのためにもうちょっと先に進めると、もうちょっとラディカルな主張が可能です。

6.3 ラディカルな提案：大きな余剰次元 (Large Extra Dimensions)

ラディカルな主張というのは大きな余剰次元というものですが、それはストリングスケールのような基本スケールを 1TeV に持ってくるということが可能になるということを主張しています。それは Arkani-Hamed、Dimopoulos、Dvali によって 98 年に行われた仕事です。

それは描像としては、3-brane というか 4 次元の壁を考えるというものです。これは brane で実現されると思っていて、その中に標準模型が埋め込まれています。だから標準模型の相互作用は 4 次元の中で起るということになります。それに加えて余剰次元の方向があって、そこを重力子が飛んでいます（図 17)。

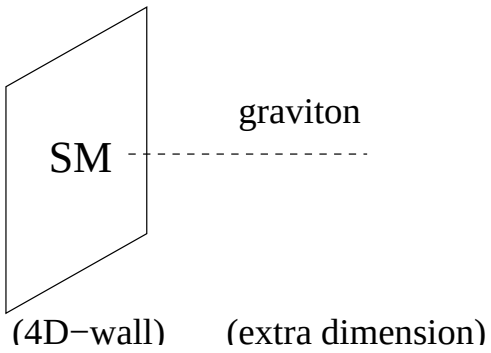

図 17: 大きな余剰次元模型

そうしますとさっきの話であったように、次元が変わると重力の振る舞いも変わります。それはどうやって見ればいいかというと、余剰次元が n 個あるとしてその半径を R としましょう。そうすると重力の振る舞いというのは、半径より大きいところ、つまり赤外 (infra) の方へ行くと余剰次元というのは見えなくなるので、重力は普通に振る舞います:

$$r > R \quad \longrightarrow \quad G_{\rm N}\frac{1}{r}\ . \tag{6.12}$$

一方、半径よりも小さいところにくると重力は Gauss の法則によって (n+1) 乗で広がっていきます:

$$r < R \quad \longrightarrow \quad G_{\rm N}^{(4+n)}\frac{1}{r^{n+1}}\ . \tag{6.13}$$

それで、$r = R$のところで一致(matching)をとります:

$$G_{\rm N} = G_{\rm N}^{(4+n)} \frac{1}{R^n} \ . \tag{6.14}$$

$G_{\rm N}$というのは4+n次元でのPlanckスケールと関係づいていると思ってください。4+n次元でのPlanckスケールをM_*と書くことにしますと、これは簡単な関係式を満たしまして

$$M_{\rm pl}^2 = M_*^{2+n} R^n \tag{6.15}$$

となります。ここでM_*を下げたいわけですが、$M_{\rm pl}$を固定してM_*を下げるということはRをどんどん大きくしなければならないということがわかります。つまり、余剰次元を大きくしてやって、我々が観測している重力が非常に弱くなっているということを説明したいわけです。重力が余剰次元をクルクル伝搬しているために重力が弱いというふうに説明したいわけです。

で、今M_*を1TeVに固定したとしましょう。それでRを見てやると

$$R = \begin{cases} 10^{13}\ {\rm cm} & (n=1) \\ 0.1\ {\rm mm} & (n=2) \\ \cdots & \cdots \\ 1\ {\rm fm} & (n=6) \end{cases} \tag{6.16}$$

となります。n=2から下の部分は重力のテストではO.K.ということになっています。つまり、重力の逆2乗則がどのくらい実験的にテストされているかというと、1mmとか1cmくらいのところまでしか到達していないのです。

もちろん、余剰次元が10^{13}cmというのは排除されます。それは、10^{13}cmのスケールでは重力は全て5次元的に見えるわけで、これは多分地球と太陽の距離くらいのスケールが入ってくる長さなので、地球が太陽の周りを回転するのにNewtonポテンシャルじゃなくてR^3ポテンシャルで回転するということが起ります。そうするとまるで違ってしまうのでダメということになります。

こういう考えが可能になるのは、1つにはもちろんD-brane的な描像が成り立つということです。もう1つは次のようなことです。ヘテロティックストリングの場合だとゲージセクターも重力セクターも閉じた弦で書けているので、ストリングスケールと重力の2つのスケールが一意的に関係づいていました。しかし、type Iストリングの場合だと重力は閉じた弦からきていてゲージボソンは開いた弦から来ています。閉じた弦と開いた弦の違いというのは指数因子が$e^{-2\phi R}$になるか$e^{-\phi F}$になるかということです。さっきの議論と全くパラレルに展開してやりますと、重力スケールとストリングスケールを関係付けるときに1個e^{ϕ}というファクターが残ります。それは、ストリングの結合定数が自由にとれたとするとストリングスケールというのがPlanckスケールに近くなくてもよくなるということです。今のことは、type Iで見たときに非常に弱いものが実現できたとすると1TeVに持ってこれるというわけです。ただし、そういった配位(configuration)は弦理論の解(真空)として出てくるかというのはまた別問題で、それはもう少しダイナミクスが分からないと答えられない状況です。

この理論のポイントは、まず、基本スケールが 1TeV になれば階層性の問題がもともとないことになります。だから **“New approach to hierarchy problem”** となります。それともう１つは TeV スケールに重力があるわけですから **“TeV 重力”** となりこれはテスト可能なわけです。このテストというのは２つくらいあって、１つは非常に大きな余剰次元というのがあるおかげで重力のいわゆる **Kaluza-Klein モード** というものが存在し、それが見えるということです。もう１つは Peskin 達がやっていることですが、ストリング的なモードも 1TeV くらいのところにあるだろうというもので、それもテストにひっかかるというわけです。もともとこういうことを言い出したのは Antoniadis ですかね。

Kaluza-Klein モードからくる描像ですが、$h_{\mu\nu}$ は余剰次元 y というものを感じているわけですが、それでモード展開してやります。今は平坦なバックグラウンドを考えているとしますと

$$h_{\mu\nu}(x,y) = \sum_n h_{\mu\nu}^{(\vec{n})}(x) e^{i\vec{n}\cdot\vec{y}/R} \tag{6.17}$$

となります。あと、前に適当な規格化 (normalization) を掛けておきます。質量スケールは

$$(\text{質量})^2 = \frac{\vec{n}^2}{R^2} \tag{6.18}$$

と書けるわけです。で、R 自身が非常に大きいわけですから、例えば 0.1mm というような値をとってやりますと $1/R$ は 10^{-3}eV くらいになります。ですから非常に軽い Kaluza-Klein モードがあるわけです。

.....

それから、どうでもいいことですが、英語で Kaluza と言うときは “u” にアクセントがきます。あるとき僕がこの話をしていて “Kaluza-Klein” と言ったら、日本人はどうしてそんなに一番最初のところにアクセントを置くのかとからかわれました。これだけはっきり “l” があればここにアクセントをつけますよね。でも言いにくいので（笑）どうしても日本語で話しているときは最初にアクセントをつけてしまいます。

.....

それで、Kaluza-Klein モードのタワーがあって１つ１つの相互作用は重力と同じなので $1/M_{\rm pl}$ で抑えられます。こんな、$1/M_{\rm pl}$ で抑えられるような相互作用が効くかというと、実は効きます。１つ１つは小さいんですが束ねるとものすごく多くのチャンネルがあるので見えてくる可能性があるのです。

例えば LEP2 では図 18 のような、Kaluza-Klein モードの交換で 4-fermi が出てくるようなものを調べます。ここから M_* に対する制限がついていて

$$M_* \geq 600 \sim 1300 \text{ GeV} \tag{6.19}$$

となります。これは LEP の 99 年の制限です。1TeV に届くような感じですね。今年どのくらいの解析が進んでいるのか知りませんが。

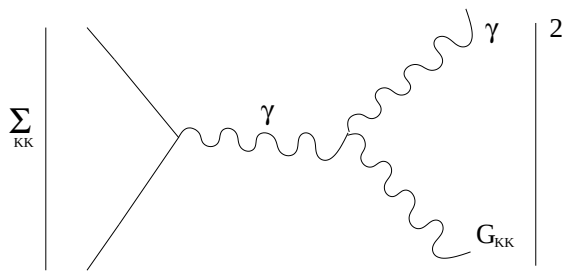

図 18: Kaluza-Klein モードの寄与

LHC だとさっきのグラフをでフォトンをグルーオンに変えたようなグラフによって

$$M_* \sim 5 - 8 \text{ TeV} \tag{6.20}$$

となり、それでさっきの純粋な大きな余剰次元のシナリオを確かめることができます。

このシナリオは面白いんですがいろいろ困難があるという話をしてこの講義を終わりたいと思います。1 つは**コンパクト化の半径の安定化 (radius stabilization)** です。これは 2 つ意味があります。1 つはどうやって大きな余剰次元を実現するのかということです。これはインフレーションとかのダイナミクスとからんで、そもそも我々の宇宙は 4 次元だけがこれだけでかい理由がそれだけではよく分からないわけです。それと宇宙定数の問題と関係していると思いますが、我々の 4 次元の部分は大きさにして数千メガパーセクあり、とにかく大きいわけです。だから多分余剰次元の部分というのはある程度広がって止まってしまったものなんだろうな（そういうダイナミクスがあるんだろうな）という気がします。ただしそれだけじゃなくて、僕らは Big Bang から 1 秒後以降、宇宙で何が起こったのかだいたいは知っているわけです。それは例えば元素合成があってその時期まで余剰次元がフラフラしていると重力相互作用がどんどん変わってしまいます。しかし、重力相互作用はその時期にはほとんど決まっていなければなりません。どうしてかと言うと元素合成を決めているのは宇宙の膨張率 (expansion rate) と、弱い相互作用がどのくらい強くはたらいているかということです。だから、半径がフラフラしていると宇宙の膨張率が変わってしまい、問題だろうと思います。だからそのころまでピタッと止まっていて欲しいわけです。でも余剰次元でずっと遠くまで行けるとすると、そのスカラーポテンシャルを書けと言われたら多分ものすごく平坦なポテンシャルになっているんじゃないかと思うわけです。それでピタッと止めるのは至難の業だなあというのが 1 つですね。

もう 1 つは**再加熱温度 (reheat temperature)** に対する制限です。再加熱温度が 1GeV よりはるかに小さくなければいけないわけです。これはどこからくるかというと、Kaluza-Klein モードの重力が宇宙の初期に作られこれが崩壊するわけです:

$$G_{\rm KK} \longrightarrow \gamma\gamma \, . \tag{6.21}$$

それで寿命が宇宙の寿命より長くなります。それはセーフかというと全然セーフじゃありません。なぜかというと、これは少ないけれどもちょろっと崩壊するわけです。フォトンのバック

グラウンドがどのくらいあるのか調べられていてその制限にひっかからないようにしなければいけません。で、再加熱温度が大きければ大きいほど Kaluza-Klein モードの数が増えるので、再加熱温度に対して非常に強い制限がつきます。ここからバリオンをどうやって作るのかという方針が全く立ちません。というわけで M_* が 1TeV というのは難しいという気がしていて何か革命的なアイデアがないとなかなか難しいと思います。

あとは、ゲージ階層性の問題を解決したいというのは面白いのですが、ゲージ結合定数の統一は捨てなければならないし、陽子崩壊はどうするんだという問題もあるわけです。そういうものをクリアーしないといけません。いろんなアイデアが出されていますし、僕もいろいろやっていたんですがなかなか自然なアイデアが出せないですね。

あと、ワープ余剰次元というアイデアもあります。それは Anti-de Sitter スライスを使う理論で、計量が指数的に振る舞います。それを使って電弱スケールを自然に説明しようとするアプローチですがこれは時間の関係で省略します。

まあ言いたいことは、SUSY GUT 的な描像にしろ、大きな余剰次元の描像にしろ、ワープ余剰次元の描像にしろ、それぞれ予言を持っているということが重要で、それは将来の実験で識別可能な理論になっていると言うことです。理論屋としてはシナリオをより魅力的にするためにいろいろ考えなければならないと思います。そういう方向があるということ伝えるのがこの講義の目的です。じゃ、ちょっと延びましたが終りにしたいと思います。

この講義録を作成するに当たって、講師の山口先生には、お忙しい中私たちが書いた粗雑な文章を丁寧に校正していただきました。この場を借りてお礼を申し上げます。本当にありがとうございました。

講義録作成者一同