高次元ゲージ理論とゲージ階層性問題

３者若手 2002年度 夏の学校　講義

2002年８月１日～７日，パノラマランド 木島平（長野県）

稲見武夫（中央大学理工学部）

ノート作成

小橋有子，松永真理子，野口亜希子，表 文，杉安由美子，安田晃子
（お茶の水女子大学大学院）

初めに

中央大学理工学部の稲見と申します．私のこれまでの専門分野は半分は素粒子の現象論で，半分は場の理論と数理物理学を研究して来ました．

実は以前に２回程夏の学校で講義をさせて頂いたことがあります．今回は全然若手ではないのに，こういった機会を与えて頂いて，世話人の方に大変感謝しております．

一番最初に講義をしたのが今から丁度20年前でしたが，その時は「超対称性と大統一理論」という内容で，式を沢山使って話をしました．今回は難しい式を使わずに講義を進めたいと思っております．今回の私の講義は数日後に始まる中野さんの講義と少し関係しています.「高次元のゲージ理論とゲージ階層性問題」というタイトルです．話の内容は次のようなもの（目次を参照）を考えております．

追記　この夏の学校に参加されたお茶大の素粒子の院生の方が講演のテープを起こし，講義録を作成してくれました．想像を超える大変な仕事だったと思います．小橋有子さん，松永真理子さん，野口亜希子さん，表 文さん，杉安由美子さん，安田晃子さんに深く感謝致します．

目 次

目次で，1.1 節の「拡がりを持った物体」というのは string （弦），あるいは supermembrane といったものです．難しい内容ですので，できるだけ易しく説明したいと思います．さらに，超弦理論とM理論について話します．そこでは詳しい話をしないで introduction で済ませるつもりです．それから高次元ゲージ理論，これも全体のオーバービューです．もし参加者が主にM 2 以上であれば，そこで使う方法について詳しく説明しようと考えていました．ところが，M1 の方が大部分ということが，分かりました．

次に 2 章は「場の理論の初歩」です．具体的には，摂動論とは紫外（utra-violet, UV）発散についてです．非摂動論の方は内部対称性とその自発的な破れについてです．ゲージ理論における超対称性の破れ，これは中野さんの講義のテーマですから，私は簡単なまとめだけを話します．超対称性（supersymmetry）を略して SUSY と書くこともあります．

大統一理論では，この理論に現れるゲージ階層性問題に焦点を当てます．3 章，4 章です．そしてもう少し専門的な話題になりますけど，ゲージ階層性の問題に対する答え，それを幾つか具体的に求めます．これは何種類かありますが，特にその中から高次元ゲージ理論を紹介します．

時間的な余裕があれば，extra 空間がオービフォールド（orbifold）の場合も話したいと思います．オービフォールドの簡単な例は S^1/Z^2 で，現象論への応用もあります．具体的な例として，$SU(5)'\times SU(5)$ GUT 模型という新しい模型があります．

M理論のコンパクト化と高次元ゲージ理論の話の準備もして来ました．これらを全部話す時間はないかも知れません．場の理論の初歩を中心に説明する必要があれば，2 章から 3 章に重きを置きます．最近の発展に触れるためには，6〜8 章まで行きたいと考えています．

第1章　緒論と準備

1.1　緒論

先ず枠組みの説明から始めます．素粒子の3つの基本的な相互作用を統一した標準模型（standard model，略してSM）とはどういうものか説明します．具体的な模型よりは一般的な枠組みに重きをます．

時空間は花文字のMで書くことにします．

$$\text{時空間} \quad \mathcal{M} = \mathbf{R}^4 \tag{1.1}$$

ここで $\mathbf{R}^4$ は4次元ミンコフスキー空間です．その中を点粒子が運動していて，それは場の理論で記述されます．この場の理論の中には

ゲージ場

ヒッグス場

物質場

が含まれています．

これらの3種類の場はそれぞれ異なった役割を持っています．ゲージ場の役割は何かと言うと，それは対称性を作ります．ヒグス場は対称性の破れを決めます．こういう考え方は1970年代に出来上がりましたが，今ではこの枠組みは標準模型を超えて，色々な面で拡張されています．

ではどういう風に拡張されているか見てみます．現在では，時空間自体が拡張されています．

$$4\,\text{次元時空間} \to D\,\text{次元時空間}\ \mathbf{R}^D\ (D \geq 4). \tag{1.2}$$

これを実現するメカニスムはいろいろ知られてます．元々はKaluza-Klein模型から始まり，今では，弦模型とbrane worldの中心的な概念です．弦模型は時空間の次元がが26または10でないと作れないことが知られています．この次元を弦理論の臨界次元と言います．

我々の時空間は4次元ですが，4次元から D 次元へ拡張すると，高次元のゲージ理論を扱うことになります．時空間が4次元から D 次元へと拡がりますが，点粒子（0次元）も拡がりを持った物体（1次元以上，p-braneと言う）へと拡張するのが自然です．この考え方はすでに1971年頃に提案されています．偶然ですが，SM（standard model）もこれと同じ位長い歴史があります．

”拡がりをもった物体”の中で初めにあらわれるのは弦です．弦というのは1次元に拡がっていて，無限個の振動モードがあります．その中にゲージ場，ヒッグス

場，物質場という，上で述べた扱う３種類の場が全部含まれています．それと重力場も含まれています．ヒッグス場や物質場がどういう形で弦の中に入っているのかという問題は，ゲージ場がどういう風に入っているのかという問題よりずっと難しいです．今でも未解決な問題です．

物体の拡がりの次元をさらに拡張すると，M 理論と言う概念に行き着きます．私は大分以前に 11 次元の supermembrane の模型を研究したことがありますが，この模型は M 理論の原型となりました．このM理論から弦理論が出て来ると考えることもできます．

この講義では，何故これらの問題を研究するのか，その目的を説明し，それとその研究のために必要な場の理論および数学の道具の話をします．

ところで私自身がどういう所で上のようなテーマに関係して仕事をして来たか，簡単に触れておきます．M 理論 (11 次元 supermembrane) と高次元ゲージ理論に関して，数編の論文があります．

- M 理論の原形
  ”Superstrings in D=10 from supermembranes in D=11” (1987)

- Large extra dimension
  ”The gauge hierarchy problem and higher-dimensional gauge theories” (1998)

私は数年前に京大を辞めて，現在はは中央大学で教えています．上の論文はどちらも京都大学にいた時に書きました．

1.2　点粒子から拡がりを持った物体へ

1.2.1　点粒子

しばらくは場の理論で使う道具の話をします．

先ず，点粒子から始めます．点粒子は $D-1$ 次元空間内を運動します．その空間座標を $X^\mu(\mu=1,2,...,D-1)$，時間座標を X^0 で表します．D 次元時空間を花文字 $\mathcal{M}$ で表します．図 1.1 で，粒子の軌跡は曲線 $L(s)$ で表され，この曲線を世界線と言います．s は世界線の距離です．世界線は $X^\mu(s)$ で表され，世界線の時空間への埋め込みを定義します．「埋め込み」は”embedding”あるいは「写像」とも言います．だから X^μ というのは，世界線 L から時空間 $\mathcal{M}$ への埋め込みです．

$\mathcal{M}=\mathbf{R}^D$　時空間

$L(s)$　世界線
$X^\mu:\ L\ \to\mathcal{M}$　世界線の時空間への埋め込み

点粒子の運動の作用は世界線の長さで与えられます．

$$S=-m\int d\tau\sqrt{\dot{X}^\mu\dot{X}_\mu}. \tag{1.3}$$

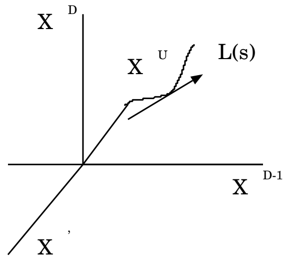

図 1.1: 点粒子の世界線

ここで，ドットは τ 微分を表します．これはいわば点粒子に対する Nambu-Goto 型の作用です．これと等価で形が違う Polyakov 型の作用というものもありますが，今は時間の都合上書きません．２つのタイプの作用の関係については，後で弦模型のところ（1.3.1）で述べます．

上の点粒子の考察は古典的なレベルですが，粒子の生成と消滅を扱おうとすると，場の理論を用いることが必要になります．上と同じような見方で，場 ϕ は時空間 M から実数体 $\mathbf{R}$ への写像です．紛らわしいですが，今度は時空間は堅い M で書きます．M が D 次元空間 $\mathbf{R}^D$ とすると，

$$
\begin{gathered}
\text{粒子の生成・消滅} \longrightarrow \text{場の理論} \\
\phi(x^\mu) \quad \text{or} \quad \phi(x) \\
\phi \;\;:\;\; \mathbf{R}^D \longrightarrow \mathbf{R}(\mathbf{C})
\end{gathered}
$$

上で体（field）と言う数学の言葉を使いましたが，その正確な定義を知らなくても大丈夫です．

ϕ は実数または複素スカラー場です．$\mathbf{R}^D$ を base manifold (mfd) と言います．

ところで，この $\mathbf{R}(\mathbf{C})$，つまり写像の行きつく先のことを何と言うか知っていますか？

行き着く先の空間を target space，あるいは日本語で標的空間と言います．上の X^μ では target space は時空間でしたが，場 ϕ では時空間 M は base manifold で標的空間は実数体 $\mathbf{R}$，複素数体 $\mathbf{C}$ などです．結局，場の理論は base manifold と標的空間を定義することによって決まります．

もっと一般の場の理論では，標的空間として実数体や複素数体の代わりに，群（あるいは群多様体と言います）や coset を考えることもできます．coset とは群 G をその部分群 H で割ったもので，coset $= G/H$ と書きます．

群多様体を知っていますか？

多様体というのは簡単に言えば空間みたいなものです．１次元ユニタリー群 $U(1)$ は群多様体の簡単な例です．$U(1)$ は円周（circle，記号は S^1）と同じで，多様体の１種です．群 $SU(2)$ というのは，実はこれは 3 次元球面 S^3 と同じであることが分かり，だから $SU(2)$ 自身が多様体になっています．

coset の方は少し難しいです．2 次元球面を S^2 で表します．1 次元球面 S^1，3 次元球面 S^3 は $O(2)$，$O(3)$ と同じで，群です．2 次元球面は群にはならなくて，$O(3)$ を $O(2)$ で割ったものと同じです．式で書くと，

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M} = G & \text{mfd} & U(1) = S^1, \quad SU(2) = S^3 \\ \mathcal{M} = G/H & \text{coset} & \qquad S^2 = O(3)/O(2) \end{array}$$

ですから，場というのは一般的にいえば，時空間 $\mathbf{R}^D$ から群や coset への写像です．図 1.2 を見て下さい．

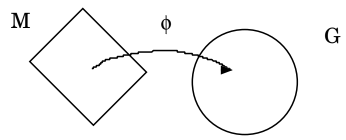

図 1.2: 時空間 $\mathbf{R}^D$ から群への写像

場が決まれば作用も大体決まります．場の理論の作用は一般的に

$$S = \int d^D x \mathcal{L}[\phi] \tag{1.4}$$

と書けます．

例 1.2.1　線形シグマ模型（linear sigma model，略して LSM）
4 次元では普通 ϕ^4 理論と言います．その作用は

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} (\phi)^4. \tag{1.5}$$

第 1 項は kinetic term，第 2 項は質量項です．第 3 項は自己相互作用の項で，λ は結合定数です．第 2 項と第 3 項を合わせて，

$$V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4 \tag{1.6}$$

と書いて，ポテンシャルと呼びます．

ミンコフスキー空間の計量は，時間が＋，空間が－という約束にします．例えば，上の (1.5) 式で，

$$(\partial_\mu \phi)^2 = \partial_0 \phi \partial_0 \phi - \partial_i \phi \partial_i \phi. \tag{1.7}$$

例 1.2.2　$O(n)$ linear シグマ模型
場 ϕ は成分が幾つかあることもあり，それらを $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ で表します．ϕ_i の値は－∞から＋∞の範囲ですから，ϕ は $\mathbf{R}^n$ に値をとります．すなわち，場 ϕ の target space は $\mathbf{R}^n$ です．このことを

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n \tag{1.8}$$

と書きます．

4次元では，作用は

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi} - \frac{1}{2} m^2 \vec{\phi}^2 - \frac{\lambda}{4} (\vec{\phi}^2)^2. \tag{1.9}$$

例 1.2.3　$O(3)$ 非線形シグマ模型（non-linear sigma mode，略して NLSM)
$\vec{\phi}$ は群 $O(3)$ に値をとります．ただし，$\vec{\phi}$ は長さが 1 という条件（constraint，拘束）を置きます．

$$\vec{\phi}^2 = 1. \tag{1.10}$$

そうすると，$\vec{\phi}$ は 2 次元球面 S^2 上に乗っていることになります．式で書くと，

$$\vec{\phi} \in S^2 \tag{1.11}$$

です．ですから，$\vec{\phi}$ は群 $O(3)$ に値を持っていますが，拘束条件 (1.10) を取り入れて，その部分群 $O(2)$ を差し引いて置く，すなわち $O(2)$ で割っておく必要があります．この事情を次のように書きます．

$$\left.\begin{array}{c} \vec{\phi} \in O(3) \\ \vec{\phi}^2 = 1 \quad \text{拘束} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \vec{\phi} \in S^2 = O(3)/O(2) \tag{1.12}$$

この模型の作用はこれ以上ないというほど簡単な形をしています．

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2} \, (\partial_\mu \vec{\phi})^2. \tag{1.13}$$

g は $O(3)$ NLSM の結合定数です．

g は 2 次元以外（$D > 2$）では質量の負の次元を持っていて（$[M]^{1-D/2}$），場の量子論としては，摂動論で繰り込み不可能です．今は古典論ですから繰りこみ可能性は問題にしません．

例 1.2.4　一般の NLSM
上で考えた模型は NLSM の 1 例です．もっと一般の NLSM を作ることができます．時空間を M，標的空間を $\mathcal{M}$ と書きます．場 ϕ^a は M から $\mathcal{M}$ への写像を与えます．

$$\phi^a \ : \ M \longrightarrow \mathcal{M}. \tag{1.14}$$

x^μ は M 上の座標，ϕ^a は $\mathcal{M}$ 上の座標を表します．時空間 M と標的空間 $\mathcal{M}$ の計量を各々 $g_{\mu\nu}(x), G_{ab}(\phi)$ と書きます．まとめると，

$$\begin{array}{ll} M \text{ 上で} & x^\mu,\ g_{\mu\nu}(x) \\ \mathcal{M} \text{ 上で} & \phi^a,\ G_{ab}(\phi) \end{array}$$

M が普通の平坦な空間の場合は

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, \cdots, -1). \tag{1.15}$$

これらの量を用いて作用が書けます．

$$S = \frac{1}{2g^2}\int_M d^D x \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^a \partial_\nu \phi^b G_{ab}(\phi) \tag{1.16}$$

が一般の NLSM を定義します．

これまでの所，話は易しいですか，それとも難しいですか？スピードは早いですか，それとも遅いですか？質問はありますか？

bf 質問コーナー

Q：線形シグマ模型と非線形シグマ模型の説明をもう一度して下さい．

A：linear シグマ模型というのは簡単に言えば，4 次元では場の理論の教科書で普通 ϕ^4 理論と書いてあるものと同じものです．場の値は各成分が実数で $-\infty$ から $+\infty$ まで値をとります．

nonlinear シグマ模型では，場 ϕ がとる値が限定されています．例えば，例 1.2.2 では，$\vec{\phi}$ は 3 次元空間（内部空間）の 2 次元球面上に値をとります．$|\vec{\phi}| = 1$ という拘束条件がついているため，$\vec{\phi}$ の値は $-\infty$ から $+\infty$ までは変わりません．それが大きな違いです．だから拘束条件を忘れないでラグランジアンを書くと，(1.13) 式と書けます．

それからもう 1 つの大きな違いは，LSM (1.9) ではポテンシャル項が相互作用を与えます．一方，NLSM の作用 (1.13) にはそういう項は入れられません．初めから $\vec{\phi}^2$ は値が 1 に固定されているからです．相互作用は (1.9) 式という形に書くことはできません．しかし，拘束条件がついていることによって，(1.13) のような単純な形ですが，相互作用が出てきます．見かけによらず非常に内容が豊富な理論です．

後で出てきますが，量子論では，NLSM の理論と LSM の理論で繰り込み可能性が大きく違います．

もうひとつ，(1.9) 式で $m^2 \to \infty$ とすると $\vec{\phi}^2$ は動くことができなくなり，ある値に固定されます．従って，$m^2 = \infty$ の極限で，linear シグマ模型は non-linear シグマ模型になります．

Q：$O(n)\phi^4$ 理論で，λ の前の係数が 1/4 で (1.5) と違いますが，それでよいですか？

A：このままで正しいです．但し，(1.13) 式で 1/4 の代わりに 1/4! と書き，その代わりに λ の定義を変えてもよいです．どちらの流儀でも答えは同じになります．内部空間 ϕ がベクトルの場合は 1/4 の方が普通で，計算上も便利です．

1.2.2　リー代数の簡単な例—$so(3)$

先へ進みます．今までの議論から分かるように，群や多様体などの数学が必ず必要になります．そこで簡単な例 $SO(3)$ を使って，リー群とリー代数を説明します．今の所，$SO(3)$ の S は気にしないで下さい．

大雑把に言うと，連続な群がリー群だと考えてよいです．リー群に伴ってリー代数が出てきます．前者を G と書いた時，後者を小文字で g と書きます．両者を区別するためです．

内部空間の $SO(3)$ 対称性と 3 次元空間の回転対称性の間のアナロジーから始めます．

	3 次元空間	内部空間
座標	$x^i = (x, y, z)$	ϕ^a
リー群 G	3 次元回転群	$SO(3)$
リー群の生成元	角運動量演算子 J^1, J^2, J^3	t^1, t^2, t^3
リー代数 g	角運動量の代数 $so(3)$	$so(3)$
	$[J^i, J^j] = i\epsilon^{ijk} J^k$	$[t^a, t^b] = i\epsilon^{abc} J^c$

左側は 3 次元空間の回転対称性，右側は NLSM（例 1.2.3）に出てきたような内部空間の $O(3)$ 対称性に関わるものです．どちらの場合も対称性が作るリー群は $G = SO(3)$，リー代数は $g = so(3)$ で，数学としては同じものです．

上の角運動量 J^i が満たす交換関係は，学部の 3 年または 2 年で習います．この交換関係が角運動量のリー代数 $so(3)$ を決めます．この時，3 次元回転群 $SO(3)$ の要素は

$$\mathrm{e}^{i\theta^i J^i}$$

と表せます．θ^i は回転角です．

内部空間の回転対称性 $O(3)$ に対しても全く同じことです．その生成元 t^a が従う交換関係は

$$[t^a, t^b] = i\epsilon^{abc} t^c. \tag{1.17}$$

ϵ^{123} は 3 階の反対称テンソルです．

$$\epsilon^{123} = -\epsilon^{213} = \quad \cdots \quad = +1 \tag{1.18}$$

この交換関係を満たす t^a は 2×2 の行列で表されます．

$$t^1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ t^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ t^3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1. \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

t^a はパウリ行列 σ^a に比例していて，比例係数 $\frac{1}{2}$ は次の条件から決まります．

$$\mathrm{tr}(t^a t^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}. \tag{1.20}$$

ところで，数理物理学は私の研究の守備範囲ですが，私の数学の知識は不正確です．専門用語の使い方が間違っているかも知れません．その時は指摘して下さい．

さて，リー代数には２つの面があります．

a) 交換関係　$\to$　リー代数の構造

b) リー代数の表現

a) はリー代数の構造（性質）は交換関係から決まることを述べています．それだけではなくて，この交換関係をどう表すか，すなわち表現を決めなくてはない，というのが b) です．

$so(3)$ を例にとると，交換関係 (1.17) が a) の内容です．b) については，$so(3)$ の基本的な表現は 3 次元表現です．多分，ベクトル表現とも言います．

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}. \tag{1.21}$$

先程のシグマ模型（例 1.2.2，例 1.2.3）ではこの表現を使いました．

3 成分ベクトル $\vec{\phi}$ は 2×2 行列で表すことも出来ます．先程の t^a を使って，

$$\phi = \sum_{a=1}^{3} \phi^a t^a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \phi^3 & \phi^1 - i\phi^2 \\ \phi^1 + i\phi^2 & -\phi^3 \end{pmatrix}. \tag{1.22}$$

2×2 行列 t^a はリー代数 $o(3)$ の元ですから，ϕ もそうです．すなわち，

$$\phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\phi^0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\phi^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\phi^- & -\frac{1}{2}\phi^0 \end{pmatrix} \in so(3). \tag{1.23}$$

ここで，

$$\phi^0 = \phi^3,\ \phi^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi^1 \mp i\phi^2) \tag{1.24}$$

と定義しました．”ϕ はリ―代数 $so(3)$ に値を持つ”，あるいは”ϕ is $so(3)$-valued”と言います．ですから，一般に場はリー代数に値を持ちます．

これが点粒子の場の理論の簡単な紹介です．これまでは古典的な話で，後で量子論の話が出てきます．

皆さんはリー群やリー 代数 を知っていますか？　質問がありますか？

1.2.3　弦模型

次に弦の話に移ります．弦とは 1 次元に拡がった物体のことです．同じ言葉の使い方で，点粒子は 0 次元の物体です．1 次元の物体なので，弦は 1 変数で記述され，この変数を σ と書きます．

弦は空間内を運動します．空間（時空間 $\mathcal{M}$）の次元が $D-1$（D）として，その座標を $X^\mu(\mu = 0, 1, \cdots, D-1)$ で表します．先程の点粒子と似たような状況です．

時間が経つと点粒子の運動は世界線を描きましたが，弦の運動は D 次元時空間内で 2 次元面を s weep します．この面を世界面（world surface，略して WS）と言います（図 1.3）．

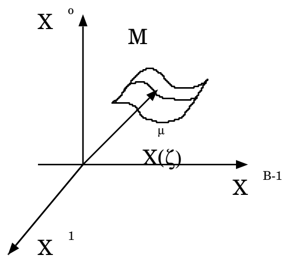

図 1.3: 弦が sweep する世界面

世界面 M 上の点は 2 次元座標で表されますが，その空間座標は σ で，時間座標を τ で表し，まとめて $\xi^a = (\sigma, \tau)$ と書きます．世界面は X^μ が ξ の関数として決まり，$X^\mu(\xi)$ と書きます．数学的には X^μ は世界面 M から D 次元空間への埋め込みです．標的空間が $\mathcal{M} = \mathbf{R}^{\mathcal{D}}$ で，X^μ はその座標です．ですから，空間には 2 つ，世界面 M と標的空間 $\mathcal{M}$ があります．

弦には 2 種類あり，端が無くてリング状の弦を閉弦（closed string），端がある弦を開弦（open string）と言います（図 1.4）．

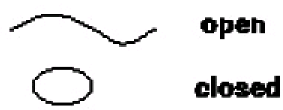

図 1.4: 開弦と閉弦

以上をまとめると，

弦　1 次元に拡がった物体
　弦は時空間 $\mathcal{M}$ 内を運動して，2 次元面を sweep する $\rightarrow$ 世界面 M

M　弦の世界面
　$\xi^a = (\sigma, \tau)$　M 上の座標
　$g_{ab}(\xi)$　M 上の計量

$X^\mu : M \rightarrow \mathbf{R}^D$　M から時空間 $\mathcal{M} = \mathbf{R}^D$ への埋め込み

弦の運動も最小作用の原理から決まります．弦の作用を初めて考えたのは 2 人の日本人物理学者で，10 年位前にシカゴ大学を退職された南部陽一郎さんと，大分以

前に病気で亡くなられた後藤鉄男さんです．後藤さんは弦の作用の他にも，後藤–今村–Schwinger 項と呼ばれる有名な仕事があります．

1.2.1 節で，粒子の作用は世界線の長さで与えられました（(1.3) 式）．弦の作用も簡単で，世界面 M の面積で与えられます．

$$S_{\rm NG} = -T\int_M d^2\xi\sqrt{-h}, \tag{1.25}$$

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'}. \tag{1.26}$$

比例係数 T は弦の張力を表します．h は世界面 M 上の計量で与えられます．

$$h = \det(h_{ab}), \tag{1.27}$$

$$h_{ab} = \partial_a X_\mu \partial_b X^\mu. \tag{1.28}$$

面 M は標的空間 $\mathcal{M}$ に埋め込まれた事により，埋め込みの座標 $X^\mu(\xi)$ に依存して計量が決まるので，M 上の誘導（induced）計量と呼びます．上の作用を Nambu-Goto と呼び，$S_{\rm NG}$ と書きました．

以上が点粒子とその広がった物体の簡単な紹介で，次に超弦理論から M 理論へ行きましょう．

弦の場の理論は省略します．最近，タキオン凝縮の問題で弦の場の理論が使われていることだけコメントしておきます．

1.3 超弦理論から M 理論へ

1.2 節では点粒子（0 次元）から弦（1 次元）への拡張を行いました．この考え方を進めると，より高次元への拡張ができないかという疑問が浮かびます．初めに私の昔の研究テーマを２つあげましたが，２番目の supermembrane の研究にはそういう動機がありました．吉川・山崎の仕事にも触発されました．

1983 年頃，お茶大の菅本さんが string を拡張して membrane の作用を書きました．1986 年に阪大の吉川さんと山崎さん (現在は日立の) が string を離れて，membrane の作用を書きました．藤川さんと久保さん（当時は Stony Brook）は membrane の量子化を研究しました．

membrane を研究するためには，弦の作用を Nambu-Goto 型でない別の形（Polyakov 型）で書いておくことが便利です．理由の１つは弦の量子化の観点からで，これは第一量子化です．もう１つは WS 上の場の理論という観点からで，この定式化では弦模型は２次元時空上の NLSM になります．そうすると，高次元への拡張が見えて来ます．私にとっては，これが supermembrane あるいは p-brane の研究の始まりでした．

1.3.1 Polyakov 作用

弦模型では力学変数 $X^\mu(\xi)$ は WS の座標 ξ^a の関数です．従って，弦模型は 2 次元の場の理論とみなすことができます．さらに，計量 $g_{ab}(\xi)$ も 2 次元空間上の場とみなすことができます．Nambu-Goto 作用では計量は独立な力学変数でなかったことを思い出して下さい．

天下りですが，弦の作用として，Nambu-Goto 作用の代わりに次の作用を採用します．

$$S_{\mathrm{P}}[X^\mu(\xi), g_{ab}(\xi)] = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int_M d^2\xi\sqrt{-g}g^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu. \tag{1.29}$$

Polyakov が初めて考えた訳ではないのですが，この作用を Polyakov 作用と呼び，添え字 P をつけます．作用は $X_\mu(\xi)$ と $g_{ab}(\xi)$ の両方の汎関数です．これは前に扱った NLSM の一種です（例 1.2.4）．Nambu-Goto 作用だとそれが見えにくいです．弦の作用を (1.29) 式のように書くと，分配関数は

$$Z = \int \mathcal{D}X^\mu(\xi)\mathcal{D}g_{ab}(\xi)\mathrm{e}^{iS_p}. \tag{1.30}$$

今度は変数 X^μ と g_{ab} の両方について経路積分します．

実は，Polyakov 作用 (1.29) は前に書いた Nambu-Goto 作用 (1.26) と等価であることが分かります．そのために，g_{ab} に対する運動方程式（equation of motion，略して EOM）を使って，WS 計量 $g_{ab}(\xi)$ を消去します．変分原理を使います．(1.29) 式を変分すると次のようになります．

$$\delta S_{\mathrm{P}} = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\xi\sqrt{-g}\delta g^{ab}(h_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}g^{cd}h_{cd}) = 0 \tag{1.31}$$

ここで，h_{ab} は

$$h_{ab} \equiv \partial_a X_\mu \partial_b X^\mu \tag{1.32}$$

と定義しました．解は

$$g_{ab} = h_{ab} = \partial_a X_\mu \partial_b X^\mu. \tag{1.33}$$

これは Nambu-Goto 作用に出て来た induced 計量です．(1.33) 式を (1.29) 式に代入して Nambu-Goto 作用が得られます．結局，Polyakov 作用から出発して，WS 計量 g_{ab} を消去して，Nambu-Goto 作用が導かれました．これは自分で確かめて下さい．簡単です．

質問コーナー

Q：ポリヤコフ作用にマイナス符号はつかないのですか？

A：多分，WS 計量がユークリッドかミンコフスキーかによります．時間が＋で空間が－という決まりの時の答えだと思います．ユークリッドで書くと上の作用の式にマイナスがつくと思います．私の講義の全般にわたり，符号に関しては自信がないです．済みません．

Q：すみません！その分配関数 Z の積分変数 X^μ と g_{ab} は拘束条件で変わらないですか？

A：上の式は運動方程式を使う前なので独立です．本当は経路積分の表式はゲージ不変性を考慮してきちんと書かなければなりません．

最後に，弦の作用の特徴をまとめて終わります．詳しい説明は一切省きます．

Polyakov 作用は WS 上の 2 次元の NLSM です．

弦理論は共形不変性（conformal invariance）という 2 次元空間に特有な対称性を持っています．これは大変重要なことです．共形変換は生成元がエネルギー・運動量テンソルです．$T(\xi)$ と $\bar{T}(\bar{\xi})$ の両方があります．共形不変性は無限次元の代数を作り，ビラソロ代数と言います．無限次元のビラソロ代数の存在は弦の量子論を作る上で決定的に重要な役割を果たします．

10 分ほど超過してしまいました．この辺で休憩を入れたいと思います．

1.3.2　共形不変性 (省く)

本当は，string の理論で何が一番重要かというと，共形不変性です．特に，弦の量子論では一番重要なファクターです．共形不変性の簡単な紹介を準備して来ましたが，残念ながら，時間の都合で省きます．

1.3.3　弦の量子論（結論）

それで B として弦の量子論．これはどうやって量子化をするかということではなくて，単に結論だけです．どうやって量子化をするのかということをやると，この夏の学校全体かかっちゃうだろうから．

弦の量子化ができるのは非常に特別の場合です．これを見つけたのは，G G R T という 4 人の人ですけども，まあ 70 年代です．ちなみに Goldstone という人は論文の非常に少ない人です．世の中には論文を 1 つか 2 つで助教授，教授になるひともいるんだから，最近のひとには論文をたくさん書く人もいるけれども，論文をたくさん書くことにこだわらなくていい．僕は確認していないけど，益川さんが名古屋を出て京都大に就職したときは論文は 0 だったと思います．むかしは論文 0 でも結構就職できたし，Goldstone というひとも論文は，ケンブリッジの助教授をやっていたときは，ほとんど論文はなかったひとだと思います．論文はあまりたくさん書くことを気にしないで．まだ M1 だけれども M2 から D 3 になっていってもそういうことをあまり気にしないでいいと思うのだけれど．ただそうするといまはなかなか学振とかそういうのをもらいにくいからちょっと難しいですけれど．実際いまでも論文の数が少ない人が時々いて，東大の教養を出た堀さんという 5 〜 6 年前に出た人は，ドクター終わった段階で論文 0 です．最初の論文でたのはドクター出て 1 年ぐらい経ってからですけれども．もちろん学振はもらえないし，なにももらえな

かったんじゃないかな．東大の本郷の江口さんのとこに転がり込んで，結局２年目も学振もらえなかったんじゃないかな？浪人して．ただアメリカの Barkley に行って小栗さんが助手としてとってくれて，もちろん非常に力のあるひとだったから論文を発表していなかったけど，その後いい仕事をして，いまでは数学界で堀さんがいるということは世界の数学家に知られるぐらいになったくらいだから．まあ，大学院のときに論文がなくても，それから職がなくてもあまり気にしないで．といってもなかなか生活ができないわけだからそこら辺が難しいですけれど．論文の数にこだわらないでやっていって大丈夫だと思います．

時空間のさっき Target space といいましたけれど，次元が D＝２６の場合だけ．これを弦の臨界次元といいます．で，どうしてかっていうと，D＝２６以外では，弦の対称性に anomaly がでてしまう．これを発見したのは，さきほどいった GG R T です．

弦の量子論ができるのは特別の場合，即ち時空間の次元が $D = 26$ の場合だけ．

→弦の臨界次元

$D = 26$ 以外では，対称性にアノマリーが出てしまう．
これは２つやり方がありますけれど，

i) light-cone ゲージでは，ローレンツ不変性にアノマリー．
$X^{\pm} = X^0 \pm X^{D-1}$, $X^+ = x^+ + p^+\tau$ ゲージ choice
GGRT
これは説明する暇がないけれど，ライトコーンゲージ．ライトコーンゲージではローレンツ不変性が破れてしまう．Anomaly というのは対称性が破れてしまうということです．ライトコーンゲージというのは時空間を，二つ組み合わせて，新しい座標をつくる．これがライトコーン座標です．ライトコーンゲージというのは X^+ を上のように置くことです．こういうのをゲージチョイス．

ii) 共形ゲージ理論では，共形不変性にアノマリー．
２次元の計量

$$g^{ab} \propto \eta_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.34}$$

もうひとつは共形ゲージ．共形ゲージではさきほど言った共形不変性に anomaly がでてしまう．共形ゲージというのは２次元の計量 g^{ab} が，η_{ab} に比例して

とるのが共形ゲージです．D＝２６でないと anomaly がでてきてしまう．だからどうしようもなくてつくれない．もうひとつの要素があって，ここでは詳しく話しません．それは２日後に中野さんが詳しく話すのだと思います．

弦理論に超対称性を取り入れて，超弦理論が作れる．超対称性がなにかというのはここではやりません．

SUSYには2つある．さきほど言いましたように，二次元のWorld SurfaceとD次元の時空間との二つがありましたけれども，World Surface上のSUSYとD次元の時空間のSUSYと二つあります．必ずしもこれらの関係は簡単ではないです．ですけど，何らかの意味でこういうことができる．だから両方取ることができるわけなんです．

超弦の量子論の臨界次元は $D = 10$ である．

超弦理論

さきほど弦理論の量子論をつくりますとanomalyがないということからD＝２６というのがでてきましたけれど，今度は超弦の理論を考えます．これも量子論はつくれません．もちろんこういうことをやったのはCaltechにいたGreenとSchwartzの二人です．超弦の量子論の臨界次元を，計算すると．超弦理論がつくられたのは1981〜1984年ぐらいです．で，1981年ころ，僕はもちろんこういう論文を見たんですけれども，あまり意味がわからなくて，周りにいた先生にも見てもらって,「面白そうだけど，どういうものかなぁ」と聞いたら，読んだ人は「読んでみたけれど，ぜんぜん昔からある話の続きであまり面白くない」といわれて，まあ，そういうものかなと思って，しばらく忘れてたんですけれど，そしたら1984年にanomalyの議論から話題になりました．彼らは７０年代の後半から超弦理論をつくろうと思っていて，6〜7年やっていて，83年ぐらいまでほとんどかえりみられなくて自分たちでこつこつやっていました．だから他の人に省みられなくても自分で面白いと思ったものは長く続けていくという可能性ももちろんある．そして最終的にはそれがうまく花開くときもあるし，花開かなくて終わっちゃう場合ももちろん多いから，そこのところは難しいです．いい線を追っているかという判断はなかなか難しい．超弦理論の何がいいかって言うと，特徴は統一理論を含むということ．特に，masslessのゲージ場と重力場．実はこの重力場が弦理論に含まれるということを最初に指摘したのは，駒場におられる米谷さんが1973年ぐらいだとおもいますが．指摘したのはやはり日本人であると．73年というのは理論物理からいうと非常に収穫のあった年で，こういう弦理論のモダンな解釈ができた年で，それからGrand Unificationがでたのも1973年．それからSupersymmmetryができたのも1974年だし．Lattice Gauge理論というのも1974年ですから．そのころ研究していた人たちというのがその後いろいろ新しいことをやる機会があった．Supersymmetryというのは，空間に関係した変換の対称性です．例えば簡単に言えば，Lorentz変換のSquare rootが超対称性みたいなものです．いま弦理論には二次元という空間もあるし，それから埋め込まれた先のD次元という空間もあるから，そこに二つLorentz変換があるという同じ意味で，Super 変換が二つある．いつもLorentz変換の平方根だと思えば空間があれば，必ず超対称性が定義できます．それが普遍かどうかは別ですけれども．target spaceが群であればだからSuper Lie Groupというのが定義できます．ただしこの場合に，ちょっといいましたけれど，あまりはっきりしていないのがHiggs場です．これも入っているのだろうけど，どうやって出てくるのだろうかということがゲージ場ほどははっきりしない．ひとつは先ほど言った統一理論ということ．もうひとつの問題点はEinsteinの重力を量子化したのは量子重力ですけれども，そうすると

無限大 Ultra Violet な発散，これはたくさん出てきてしまって繰り込み不可能なんですけれども，それが弦理論では困難は解決しています．発散のない議論なのです．

・統一理論を含む

ゲージ場　　重力場
(ヒッグス場　物質場)

・量子重力における UV な無限大の困難がない

1.3.4　超対称性 (SUSY)

明後日に話に出るので本当に簡単にだけ．M 1 のひとで聞いていないというひともいるみたいですから．B' で超対称性．
SUSY 変換

ボソン場ϕ(複素) $\longleftrightarrow$ フェルミオン場 (マヨラナ)

SUSY 変換というのは boson 場 ϕ があって，複素場．リアルでしたら 2 成分ですけれど，それからこちらに fermion 場．これは fermion のなかに何種類かありますけれど，これはマヨラナ場．これを変換させるのは SUSY 変換．
作用のレベルでは非常に簡単な場合しか書かないですけれども，boson の作用というのは，さきほど書きましたようにこういうふうになります．

$$\mathcal{L}_B = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - {m_B}^2 \phi\phi^* - \frac{\lambda}{6}\phi^*\phi^2 \tag{1.35}$$

$$\longleftrightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\overline{\psi}(i\partial - m_F)\psi - \frac{1}{2}f\bar{\psi}(A + i\gamma_5 B)\psi \tag{1.36}$$

質量があるとします．それから相互作用も，この 1/6 というのは先ほどいったように，これをいくつにとってもいいのですが，ここでは，1/6 と．fermion の作用というのが超対称変換と結びついています．関係しているのですけれども，マヨラナというのはリアルですから 1/2 をつけておく．質量のあるマヨラナ fermion の free な場，それに相互作用があり，Yukawa　Coupling です．向こうとの関係で A と B があります．$\mathcal{L}_B$ 足すとこの理論は Supersymmetric です．

理論は SUSY　iff

ボソンの数＝フェルミオンの数

$$m_B = m_F$$

$$\tfrac{1}{2}\lambda = f^2 \ (\phi = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(A + iB))$$

普段は名詞ですけれども，ここでは形容詞です．boson の数＝ fermion の数．それから boson の質量は fermion の質量と同じ．係数が自信がないですけれど，ϕ 4 乗の coupling 相互作用の λ は Yukawa coupling の 2 乗．ただしこのような complex をとるとこのようになります．自由度の数，質量，結合定数，３つに条件がこのように満たされた時，この理論は supersymmetric になります．どうしてそうなるかという話はここではあまり話しません．

Q.「二次元の World Sheet 上の SUSY というのはどういうものなんでしょうか」
A.「World Sheet 上の SUSY というのは，例えばこれは 4 次元の理論ですけれども，弦というのは NLSM で書けるわけです．NLSM で書かれる時は，きちんと二次元の場を定義できるので，二次元の場の理論として，上のように成り立つというのが World Surface 上の supersymmetry です．二次元の場の理論に限り，String の場が X^μ とそのほかに fermion があって，実はこのときでは massless なので $m_B = m_F = 0$ ですけれど．今の質問，二次元の World Surface 上の SUSY ですけれども，X^μ が boson です．二次元の座標ですけれども，これに対応するのが，そのほかに $\psi^\mu(\xi)$ という量がある．

あたらしい fermion の弦がある．両方とも massless で相互作用の長さは今のところ 0 です．

WS 上の SUSY

$$X^\mu(\xi) \longleftrightarrow \psi^\mu(\zeta)$$
$$\uparrow$$

ボソン

いろいろいまのような質問はしていただくと非常にわかりやすくなりますけれども，どしどしそういう質問お願いします．

それから，これでなかったならば，これでない，というような必要十分のときの if は f を二つつける．これは数学の約束事です．
いろいろな場の理論の超対称化することができます．これは単にリストだけです．説明しません．いろいろな場の理論の超対称化

ϕ^4	Wess-Zumino 模型
Y-M	super symmetric Y-M
重力	超重力 (SUGRA)
弦理論	超弦理論

ϕ 4 乗というのは超対称化すると Wess-Zumino 模型になります．それから Yang-Mills，これはゲージ理論ですけれども，これは Supersymmetric な破れ．これは 1995 年以降，大変注目をあびました．それから重力は超重力．これも非常に重要．現象論の人は超重力って長くて言いにくいので SUGRA．日本語で書いたらもちろん超

重力になります．日本語で書いたら長くなくて超重力でいいんだけども．弦理論はこれは超弦理論．ここに membrane とありますが，吉川さんが作ったような理論の membrane を拡張すると super membrane になります．これは単に簡単なまとめで，正確なことは中野さんに聞いて，それでもわからなかったらまた質問に来てください．

それで目的は何かというと，Super Membrane．さきほどいった弦の作用の類推．これを使います．

1.3.5 Supermembrane

これは先程言った弦の作用との類推を使います．ですから，

２次元に拡がった物体
$\xi^i = (\tau, \sigma^1, \sigma^2)$ ＷＶの座標
$X^\mu(\xi), \mu = 0, 1, D-1$

WV(World Volume) の座標が ξ で，埋め込みが X^μ です．Nambu-Goto 型の作用は

$$S = -\kappa \int_n d^3\xi \sqrt{-g} \qquad \text{３次元の体積} \tag{1.37}$$

$$g_{ij}(\zeta) = \partial_i X^\mu \partial_j X_\mu \qquad \text{induced 計量} \tag{1.38}$$

こういうものです．上の式のマイナスはちょっと自信がありません．もしかしたらユークリディアンかもしれない．で，ここに書いた g というのは先ほど書いたものの３次元のもので，induced 計量です．先程弦の所でなぜ induced かという質問がありました．弦の場合，面があった時の面の上の計量は g_{ab} です．(1.37) 式の定義だと X^μ に依存して計量が変わります．X^μ に依存するという事は，面を target space$X(\mathbf{R^D})$ の中にどういう風に埋め込むかによって計量が変わってくるので，そういうのを induced 計量と言います．
最小体積の原理より，membrane の運動が決まる．上の作用は Polyakov 型にも書ける．

$$S_\rho = -\frac{\kappa}{2} \int d^3\xi \sqrt{-g}[g^{ij}\partial_i X^\mu \partial_j X^\nu G_{\mu\nu}(x) - 1] \tag{1.39}$$

g_{ij}:ＷＶ上の計量，$G_{\mu\nu}$:時空間 $\mathcal{M}$ の計量

これは NLSM．弦理論と違い，－１がつきます．$G_{\mu\nu}$ は時空間の計量です．この membrane に時空間の SUSY を取り入れて，super-membrane(ＳＭ) 理論が作られています．ただし理由は簡単に述べられないので説明しないが，次元Ｄに制限がつき

$$D = 3, 4, 6, 11$$

だけが許されます．この中でD＝11のsupermembraneが特別な位置を占めます．この数字がsuper gravityにとって，許される最大の次元になり理論が一意的に決まります．
超弦とＳＭを比較します．こういうことを80年後半にやってました．

	WV	時空間	対称性
超弦	２次元	D＝10	共形不変性
ＳＭ	３次元	D＝11	??

ＳＭの対称性は実はよくわかっていません．時空間を11次元から10次元にするのと，WVを3次元から2次元にするの両方をdouble conpactificationと言います．supermembraneから超弦理論が得られると言ったのは我々の仕事です．87年に書いたのですが，その時はSM(supermembrane)の対称性の数学がよく分かっていなかったので，いろいろと批判を受けました．最近ではこういう考え方が受け入れられるようになってきています．

1.3.6 超弦理論からM理論へ

超弦の量子論はD＝10でいくつかの超弦理論が可能で，D=11での量子論での臨界次元がわかっていません．幾つかの超弦理論は，

type ⊠ (open) ゲージ群がSO(32)
type ⊠-A(closed,non-chiral)
type ⊠-B(closed,chiral)

heterotic(混合) SO(32)
$E_8 \times E_8$
これはよく分からなくても構いません．こういうものがあるという事だけ知っておいて下さい．heteroticとは，ボソンとフェルミオンが混合しているという意味です．このように超弦は1つではなく，多数あることを考えると，超弦理論は実は基本的な理論ではないです．昔プロトンと中性子が見つかった時はこれが素粒子だと思われましたが，その後，他にハドロンがたくさん見つかってくるようになり，たくさんある物はハドロンではないと考えました．90年代後半から最近では弦理論その背後にもっと基本的な理論があると考えるのが自然となっています．これがM理論です．M理論というのは変な言葉ですが，最初はクォークとかだって変な言葉だと思われてました．東大の風間先生は，解説で，M理論という言葉はだんだん定着してくるだろうと書いています．図式的に描くと図1.5の用になります．
M理論は古典的には上の図と近いもの，N=1 supersymmetryというのはスタンダードモデル$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$C-Yモデルによるコンパクト化，これは'85の仕

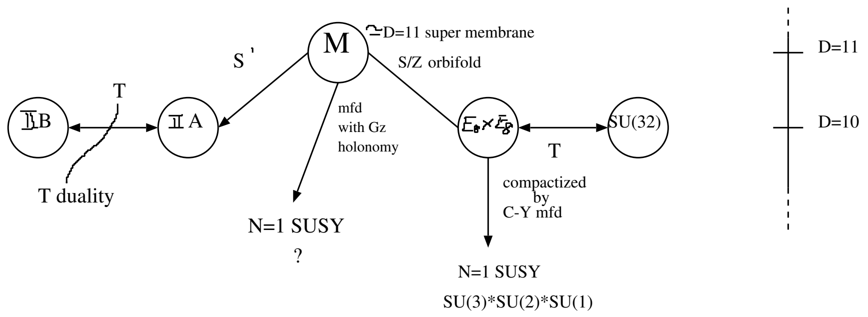

図 1.5: M 理論と弦理論

事，これからN＝1のSUSYが必要だとわかるが，N=1 SUSYのどんな理論ができるかわかっていない．G_2 holonomyのmfdからできる．T-dualityを最初に導入したのは日本人．ここのところは難しいですが，これからどういう事が話題になるかというのを紹介する為に書きました．

これからしばらくは場の理論の説明をします．

第2章　場の理論の初歩

場の理論には幾つかの側面があります．

1 摂動論とＵＶ発散性

2 対称性の自発的な破れ

3 古典解（インスタントン，ソリトン（キンク解，ランプ解））

教科書に一番早く出てくるのは摂動論で，摂動論の一番大きな特徴は Ultra Violet 発散です．古典解にはいろいろありますが，インスタントンとソリトン．ソリトンにもキンク解とランプ解があります．３次元がキンク解で４，２，１がランプ解になり，インスタントンはユークリディアンになります．高次元のゲージ理論の研究でも，これらの側面が問題となる．では，これから具体例に入っていきます．

2.1　摂動論とＵＶ発散

2.1.1　繰り込み

まずは繰り込みです．例として ϕ^4 理論をやります．休み時間に ϕ^4 理論をどうして LSM と呼ぶのかという質問がありましたが，$\vec{\phi}$ というベクトルがあった時に，これは $\vec{\phi} \to e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{t}}\vec{\phi}$ という SO(3) 変換をします．線形に変換するので LSM といいます．NLSM は変換が線形ではないのです．今の場合は内部対称性が無いので，このような問題は起こりません．

ϕ^4 理論 in d=4

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_0\partial^\mu\phi_0 - \frac{1}{2}m_0^2\phi_0^2 - \frac{\lambda_0}{4!}\phi_0^4 \tag{2.1}$$

0:bare quantity(繰り込みしていない)

分母の！は計算をやりやすくするためにつけました．higher order で量子補正を計算すると，補正項は次のような形になります．

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{1}{2}(z_3^{-1}-1)\partial_\mu\phi_0\partial^\mu\phi_0 - \frac{1}{2}\delta m_0^2\phi_1^2 - \frac{\lambda_0}{4!}(z_1^{-1}-1)\phi_0^4 + \text{有限な項}$$

少し具体例を計算してみると one -loop の項

$$\begin{aligned}&(a)i\lambda\textstyle\int_{-\infty}^{\infty}d^4k\frac{1}{k^2-m_j^2}\\&(b)i\lambda\textstyle\int_{-\infty}^{\infty}d^4k\frac{1}{[(k+p_1)^2-m_0^2][(k-p_0)^2-m_0^2]}\end{aligned} \tag{2.2}$$

(a) というのは λ があるので運動量積分がこういう形になります．これはプロパゲーターです．(b) は $\imath\lambda^2$ です．プロパゲーターが２コあります．

そして内線の運動量 k^μ についての 4 次元積分というのは紫外 (UV) 発散しています．なので何か処理をしなければなりません．k^μ 積分範囲を制限して (cut off) 処理します．

$$\int d^4k \longrightarrow \int_{|k|^\mu \leq \Lambda} d^4k \tag{2.3}$$

そうすると

$$\begin{array}{ll} i\int d^4k \frac{1}{k^2-m_0^2} \sim \lambda^2 & \text{二次発散} \\ i\int d^4k \frac{1}{(k^2-m_0^2)^2} \sim \ln(\lambda^2/m_0^2) & \text{対数発散} \end{array}$$

というように 2 種類の発散が出てきます．

昨日は，最初の章を少し長すぎるくらいやりました．M1 の人向けに場の理論を長くやりました．

M1 の人と少し話しましたけど，まだ繰り込みとかやっている最中なので，これをもうちょっとやってからヒエラルキーの問題をやっていきます．昨日のラグランジアンのところからやっていきます．これは，例だけを使って一般論をやっていきます．

Ex.1　ϕ^4 理論

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_0\partial^\mu\phi_0 - \frac{1}{2}{m_0}^2{\phi_0}^2 - \frac{1}{4!}\lambda_0{\phi_0}^4 \tag{2.4}$$

昨日書いたラグランジアンを書いて，ゼロがついたのは bare な量で．この理論に関して，色々なグラフがありますけれども，ワンループのこういった二つのグラフの計算を話します（図 2.1）．これの発散があるけれども，それを cut off を使って計

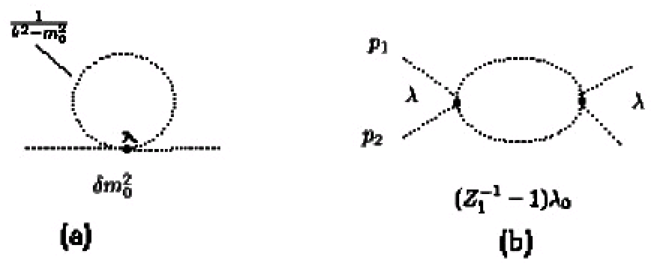

図 2.1: self-energy に対する one-loop グラフ

算します．結果だけ書きます．

a) の図から

$$\begin{aligned} {Z_3}^{-1} - 1 &= 0 && (2.5) \\ \delta {m_0}^2 &\sim \lambda \Lambda^2 && (2.6) \end{aligned}$$

２次発散→ゲージ階層性問題

そうすると，Z_3 に対する寄与は，０になります．それから，質量は cut off の２乗に比例してでてくる．まぁ，二次発散です．後々，これがゲージ階層性の原因になってきます．ゲージ階層性問題の一番根本にあるのは，この，二次発散です．それから，もうひとつは，このグラフから，Ｚ１という量が計算でき，係数は除きますけどこれは，対数発散です．

b) の図から

$$({Z_1}^{-1} - 1)\lambda_0 \sim \lambda^2 \ln(\frac{\Lambda^2}{m^2}) \tag{2.7}$$

それから，みなさん，これはもう習っているだろうけど，繰り込みというのは，しばらく，M1 の人中心の話をして，あとでもっと新しい話をします．

繰り込み
☒）全ての発散項は，元のラグランジアンに含まれている．
☒）全ての UV 発散は波動関数，結合定数の再定義に吸収される．
→有限な結果

すべての発散項は元のラグラジアンに含まれている．これに基づいて，全ての発散は，発散ってウルトラバイオレットですけれども，発散は波動関数，または，結合定数の再定義に吸収されてしまう．そのあとでは有限な結果になる．再定義というのは実験にかからないので，無限大とは実験にかからない．実験にかかるのは有限なところ．今の例ですと，これはまた先ほどの ϕ^4 理論ですけど，

例２　ϕ^4 理論どういう再定義かというと，今，波動関数の繰り込みというのは，

$$\phi_0 = {z_3}^{\frac{1}{2}} \phi \tag{2.8}$$

それから質量の繰り込みは，

$${m_0}^2 + 8{m_0}^2 = {z_3}^{-1} m^2 \tag{2.9}$$

ここに発散がありますけれども，これは，こういうのはみんな finite．それから，もうひとつ，λ_0 というのは

$$\lambda_0 = {z_3}^{-1} z_1 \lambda \tag{2.10}$$

この三つの量に繰り込まれてしまう．もうちょっと一般に n 点関数というのは，一般に Γ とかきますけども，n 点関数というのは，1 から入って n 個粒子が入っているものです．こういうのを場の理論で n 点関数と言います（図 2.2）．

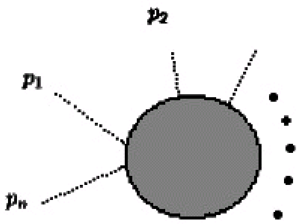

図 2.2: n 点関数

n 点関数の繰り込み

$$\Gamma_r(p_i, \lambda, m, \mu) = \lim_{\lambda \to 0} z_p \Gamma_0(p_i, \lambda, m, \Gamma)$$

これを繰り込まれた n 点関数で，これは p_1 という運動量で，これは p_n という運動量です．それから，coupling constant と質量，これに μ というのもあります．cut off を無限大にして考えます．そうするとここに n 点関数の繰り込みの factor があって，これは，bare な量．bare な量を，これは繰り込まれた，こちらはだから，有限な．n 点関数というのはたったひとつの Z factor 無限大，これはだから無限大を決める．一個だけ無限大を使えば，有限に出来るという．これは繰り込み．これは n 点関数の繰り込み．この時，結合定数，今の場合結合の定数というのは ϕ^4 だとか，λ，あるいは質量も場の理論から見れば結合定数と見てよい．

$$
\begin{aligned}
{p_i}^2 = -\mu^2 \quad \mu &\to \infty \quad UV && (2.11)\\
\mu &\to 小 \quad IR && (2.12)
\end{aligned}
$$

結合定数は，繰り込み点の値に依存してくる．繰り込み点というのは，ｎ点関数を定義する時に，運動量を使いますが，運動量の大きさを μ^2 と書いて，どういう大きさの運動量でｎ点関数と定義するかというのが繰り込み点．μ が大きいというのは，高周波数です．μ が小さいところは Infrared と呼ばれています．一つだけ例をやります．結合定数の繰り込みです．

Ex.3 結合定数

結合定数というのは，こうやって定義します．これはこれ (図 2.3) を与えることを結合定数といいます．ただし，$p_i{}^2$ は $-\mu^2$ です．spacelike か timelike かは，こち

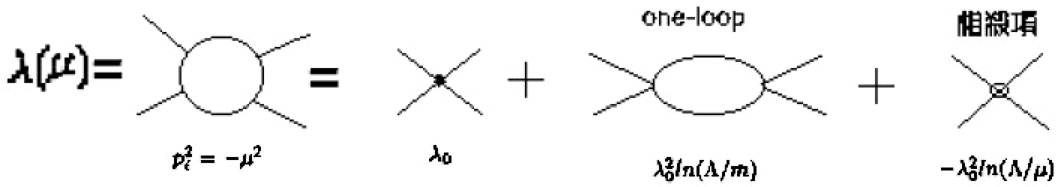

図 2.3: 結合定数の繰り込み

らに来てます．$p_i{}^2$ がマイナスのときです．この値のことを結合定数といいます．4点の結合定数です．

λ_0 プラス，これはワンループといいますけども，これは先ほどの計算でそうなっています．この場合，余分な項，これを counter term といいます．我々の言葉で言えば，相殺項と書きます．そうするとこれを打ち消すようになります．そうすると，この $\lambda(\mu)$ というのは繰り込み点が有限となります．そうすると答えは λ_0．これとこれはキャンセルする．ここに μ がはいっているので，結合定数が μ に依存するとは，こういう意味です．本当は λ_0 でなくて λ の方がいいのですが．例として，非常に簡単に繰り込み群を．これはＭ１の人が必ずやることなのですけど．

2.1.2 繰り込み群 (RG) と固定点

$$\text{繰り込み点を変える } \mu \to \mu'\ ,\ g(\mu) \to g(\mu') \tag{2.13}$$

繰り込み群と固定点というのがあって，繰込み点を変えて，μ を μ' に変える．とすると，$g(\mu)$ はもちろん，変わります．今の場合，λ というのは，μ に依存して変わります．運動量を変えると coupling constant の値が変わり，それがどういうふう

に変わるのか見たい．基本的にこういうものを定義する．$\beta(g)$ というのを，本当は色々定義，同じ物でも違ったように見える定義でありますけれども，μ を変えた時に g がどのくらい変わるかと言うのを g_0 と λ で固定します．これを β 関数と言います．

$$\beta(g) \equiv \frac{dg}{d\ln\mu|_{g_0,\lambda}} \ \beta\text{関数} \tag{2.14}$$

β 関数ってまだやっていませんか？何年生ですか？
Q：すみません，μってなんですか？A：えっと μ というのは，さっき言ったように coupling constant の定義をするときに，こういうものの値を決めて coupling constant を決めるわけですが，実験で測る時は必ず実験で入射する運動量を決めてこの coupling constant を測る訳です．だから，実験によりこの運動量を決めなくてはいけないわけですけれども，その運動量の値を μ と呼んでいます．それを測定するときの，運動量の値．あるいは，その光を当てて何かを測るのだったら，その光の振動数と考えればいいのですけど．外から持ちこんだスケールです．だけど，これは実際は別に coupling constant そのものを測る訳じゃないからもうちょっと理論的な定義があるのです．

で，これらのことは教科書に書いてあり，場の理論を習う上で一番特徴のあるところです．ある意味で，場の理論のかなりの部分を β 関数で構成されている．あと，いろいろありますけれども，固定点を考えます．ちょっと二種類あります（図 2.4）．

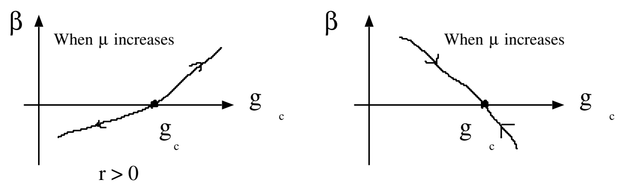

図 2.4: 固定点

$$\text{固定点} \quad g_c\ (\beta(g_c) = 0\ ,\ g\text{は一定}) \tag{2.15}$$

$$i)\ \beta(g) \simeq \gamma(g - g_c)\ g = g_c\text{の近くで} \tag{2.16}$$

$$\ln\mu = \int^g \frac{dg}{\beta(g)} \simeq \frac{1}{\gamma}\ln(g - g_c) + \text{定数} \tag{2.17}$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} = (g - g_c)^{\frac{1}{\gamma}} \to \begin{cases} 0 & (\gamma > 0) \quad \text{IR 固定点} \\ \infty & (\gamma < 0) \quad \text{UV 固定点} \end{cases} \tag{2.18}$$

g_c の c は固定点の固定ではなく，critical の意味です．β 関数がこういう形をしているとします．これは，$g = g_c$ の近く．この方程式を解くと，微分方程式ですから，簡単に解けて，こういうのは学部の 1 年でやる，これを解くと $\frac{1}{\gamma}\log(g-g_c)+$定数 となります．したがって，この値は $(g-g_c)^{\frac{1}{\gamma}}$．そうするとこれは， g が g $_c$ の近くで，$\gamma > 0$ ならば，g が g_c に行けば 0 になります．$\gamma < 0$ ならば，発散してしまう．これを，μ が 0 のときの固定点なので，IR 固定点と言い，こちらが UV 固定点と言います．

もう一つは $\beta(g)$ が γg^3．これは単に例です．そうすると，この時は答えは，途中式は書きませんがすぐ分かりますけれども，こうなります．

$$ii)\ \beta(g) = \gamma g^3 \tag{2.19}$$

$$\ln\mu = -\frac{1}{2\gamma}g^{-2} + \text{定数} \tag{2.20}$$

$$\frac{1}{g(\mu)^2} = \frac{1}{g(\mu_0)^2} - \gamma\ln\frac{\mu^2}{{\mu_i}^2} \tag{2.21}$$

$$\to \begin{cases} 0 \quad as \quad \mu\to 0 \quad (\gamma>0) \quad IR \\ 0 \quad as \quad \mu\to\infty \quad (\gamma<0) \quad UV \end{cases} \tag{2.22}$$

これは，γ が正ならば，ま，ふたつ場合が考えられて，こうなります．

0 as $\mu \to 0$ （$\gamma > 0$）こちらが IR
0 as $\mu \to \infty$（$\gamma < 0$）こちらが UV

固定点は g_c は 0 だというところ．固定点と言うのは β が 0 になるというところ．0 になるところでは，μ を動かしても g は動かない．g は一定．そういうところを固定点と言います．必ず勉強して欲しいと思って言っています．ですから，図で書くと， g の関数として β を見ます．この点が $\beta = 0$ になる．それから，こういうふうにふたつ考えられる．

これから見れば，$\gamma > 0$ と言うのは，上向きの方．この時に，μ を大きくすればこの点から離れて行く．それから，γ が負の場合，UV というのは μ が大きい時にこれに近づいていく．この二種類の固定点．こちらは，原点が g $= 0$ のところで，IR と UV.

Q：固定点というのはいい？固定点とかそういうの習いました？

それじゃ，具体的に，例として，β 関数の図ですけれども（図 2.5），coupling constant で，それから，こういうのが β 関数．Expoint が原点です．ここは Expoint が二箇所あります．結合定数 (coupling constant) はこの場合は，μ の関数としてみると，μ が大きくなる (図) と coupling constant が増える．これ (図) は，coupling constant が下がってきます．一番最初の例はたとえばどんな理論の場合，β 関数が出てきますか？

二番目はゲージ理論（QCD）
一番目は QED，ϕ^4 理論も同じ

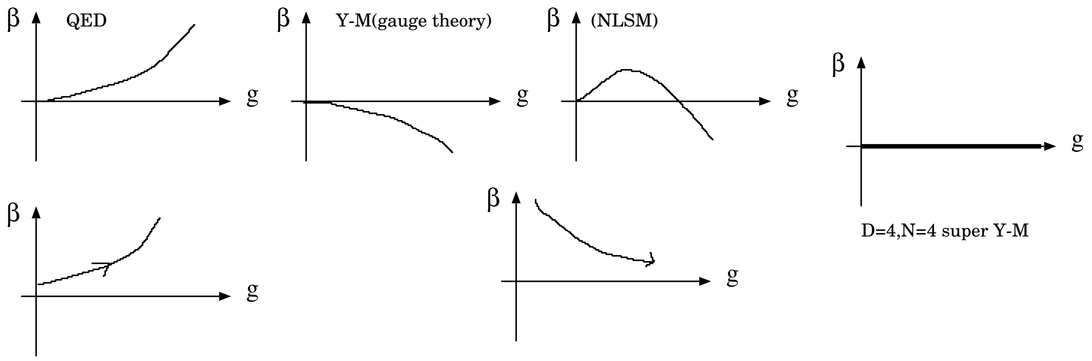

図 2.5: いろいろな理論の β 関数

三番目は非常に面白い，NLSM

固定点が 0 じゃないもので．これは，QED，それから，これが Y-M，これは $D = 2+\epsilon$ での NLSM．こういうのを調べると色んな特殊性が出ます．そのほかにもうひとつもっと特殊なのは，β 関数が完全に 0 になってしまう．したがって，coupling constant で言えば，定数となる．一番最後に上げるのは非常に特殊な例というか面白い例で，ある意味でこの理論をめぐって，現代の場の理論は動いていると言ってもいいのかも．こういう β 関数は，D= 4 の N=4 の super Y ー M．β 関数が全然依らない，発散が無い．それから，もうひとつ D=２，N=4 のこれは N= 4 の二次元での，super symmetric NLSM ですけれど，どういうわけか，4 次元の super Y-M と二次元の super symmetric NLSM は摂動的に非常に似たものである．実は非摂動的に調べても非常に似たところがある．もうひとつこれは良く分からないですけど，D=3 で N=4 の SUSY NLSM．実際これを σ と言って，ただし，計算は摂動計算ではなく $1/n$ 展開．２ループくらいまで計算してやるとやっぱり，β 関数は完全に 0．これはまだよくわかりません．したがって，その β 関数を調べる事によってその理論の特徴がわかる．

D=4 , N=4 , super Y-M
D=2 , N=4 super symmetric NLSM
(D=3 , N=4 SUSY NLSM 1/n 展開)
supersymmetry の数 N=1,2,4

ストリングをやっている人も沢山いるでしょうけど，ストリングの場合でも β 関数は問題になってきます．ここでは，そのお話はしません．

ちょっと先にいきますけれど，今までの摂動に関してのところで質問がある人いますか？

Q：N＝4 って？

A：N＝4というのは，明日から中野さんの詳しい説明があるでしょうけど，N＝4というのはだから，super symmetryの数をNとおきます．そういう意味ではsuper symmmetic Y－Mとかそういうのは N=1 の super symmetric で，4次元だとNが，super symmetryが1個の場合と2，とまぁ，3もあるけど，4とこれより高いものはなくて，super smmmetryが高くなるにしたがって，発散の性質が良くなっていきます．例えば，N＝2だと先ほどのβ関数を計算すると，1ループまではβ関数がありますけれど，2ループ以上はβ関数が0になるというようなことが知られています．4まで計算すると，super symmmetryがもっと大きくなると，完全に有限になります．

super symmmetryと発散という関係は非常にノントリビアルな関係．
これで摂動の話をやめにして，非摂動的な話で，2．2というのは飛ばして，対称性の自発的なやぶれ（SSB)

2.2 対称性の自発的な破れ(ＳＳＢ)

２．２は飛ばして対称性の自発的な破れＳＳＢとはどういうことかというと，

ラグランジアンは対称性をもつ

真空は対称性を破る

対称性が自発的に破れています．

例１．$O(3)$ 対称な triplet スカラー

$$t^a \epsilon su(3), [t^a, t^b] = i\epsilon^{abc} t^c$$

昨日言った様に t^a というのは O(3) リー群のジェネレーターです．
次のように定義します．

$$\overrightarrow{\phi} = \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \\ \phi^3 \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

$$\tag{2.24}$$

これから

$$\phi = t^a \phi^a = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\phi^1 & \frac{\phi^+}{\sqrt{2}} \\ \frac{\phi^-}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}\phi^0 \end{pmatrix}$$

となります．
群にはいろいろありますけれども，

A型 SU(2),SU(3)
B型 (O(3)?)
C型 (O(3)?)

BとCはどっちがどっちか忘れましたけれども，$SU(2)$ だけを理解するのが大切．この $O(3)$ というのは先ほど 2×2 行列で書いた時にはこう表される．

$$\delta\phi = i[\delta\overrightarrow{\varpi}\Delta, \overrightarrow{\phi}]\ ,\ \delta\overrightarrow{\phi} = -\delta\overrightarrow{\varpi}\times\overrightarrow{\phi}$$

$O(3)$ 対称なら $\mathcal{L}$ というのは，

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\overrightarrow{\phi})^2 - V(\phi) \quad , \quad V(\overrightarrow{\phi}) = \frac{1}{2}M^2\overrightarrow{\phi}^2 + \lambda(\overrightarrow{\phi}^2)^2 \tag{2.25}$$

です．このポテンシャルは４次元に限ります．しばらくは４次元です．これは先ほどこちらに書いたもので，$\mu^2 < 0$ ならこういう形になります．

図が入る

左側が $\mu^2 > 0$ で，下に凸の放物線になります．右が $\mu^2 < 0$ で，ワインのボトルのように，底がへこんでいます．
真空というのは，これは tree level ですけど，

$$< \phi^a > \equiv \overset{\circ}{\phi}{}^a\ , \tag{2.26}$$
$$\delta V(\vec{\phi})/\delta\phi^a\ |_{\overset{\circ}{\phi}{}^a} = 0 \tag{2.27}$$

この真空期待値はポテンシャルを偏微分したもので，真空については μ^2 が正の場合，２つの層を持つものが現れます．$\mu^2 > 0$ の場合，ここが一番極小値ですから，

$$\mu^2 > 0 \quad \overset{\circ}{\phi}{}^a = 0 \quad disorder \tag{2.28}$$

それから $\mu^2 < 0$ の場合，こちらのここがエネルギーポテンシャルの極小値ですから，計算は省きますが，真空期待値といって，これは μ^2 の値によって決まります．

$$\mu^2 < 0 \quad (\overset{\circ}{\phi}{}^a)^2 = v^2 = -\tfrac{\mu^2}{4\lambda} \quad \text{秩序} \tag{2.29}$$

この２つの相を，$\mu^2 < 0$ を秩序，$\mu^2 > 0$ を無秩序と呼びます．
$O(3)$ 対称性があるので軸を好きなように選べます．

$$\phi^a = \overset{\circ}{\phi}{}^a + \tilde{\phi}^a\ ,\ < \phi^a > = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

a は 3 成分です．こういうのは素粒子ではなくもとは物性の方で発展した概念です．そうすると，ゆらぎの場は 3 つあって，

$$\hat{\phi}^3 = h \quad m_H = 8\lambda v^2 = -2\mu^2 \tag{2.31}$$

$$\tilde{\phi}^1, \tilde{\phi}^2 \tag{2.32}$$

上は massive，質量があります．そして $\mu > 0$ だからもちろん質量も正です．残りあと二つありますけど，これは massless のもので南部-Goldstone ボソンというもので，対称性が破れた時に出てきます．また破れて $O(2)$ の対称性が残ります．$O(2)$ に入っているジェネレーターの粒子は mass です．

$$\begin{array}{ccc} O(3) & \longrightarrow & O(2) \\ t^a & & t^3 \end{array} \; t^1, t^2 \in O(3)/O(2) \tag{2.33}$$

最初 $O(3)$ という対称性があって，実はこれが真空期待値を持ったために，$O(2)$ の対称性が残ります．この中に t^a という 3 つのジェネレーターがあり，$O(2)$ の中のジェネレーターは t^3 を 1 つだけとるので，あとの残りの t^1，t^2 というのは $O(3)$ から $O(2)$ を引いたところに入っています．ですから，対称性が $O(3)$ から $O(2)$ に破れると，$O(2)$ に入っているジェネレーターに対応する粒子というのは massive なのが残りますが，対称性の破れた t^1 と t^2 の方，つまり ϕ^3，ϕ^2 からは massless 粒子がでてきます．それが南部-Goldstone ボソンです．これが有名な Goldstone の定理で，一般の群Gの SSB へ拡張できます．G というものがHに破れるわけです．

$$G \longrightarrow H \tag{2.34}$$

そうすると，N－Gボソンが必ず現れ，G/H の生成に対応します．これは場の理論でやりましたが物性でも知られています．
例えば身の回りでは，massive な棒があって，力を加えれば，実際は歪んでしまいます．これは対称性の破れです．こうやって曲がった時に少しでも力を加えれば回転するわけです．この回転という自由度が南部-Goldstone モードに対応しています．
図が入る

それでは新しいところに行きたいので省略して，新しいところへ行くために準備します．もし，ノートに書くことがあればノートに入れますが，大統一理論，標準模型は省きます．ここはかなり大きく省いてしまったので理論は混乱すると思いますが．

2.3 大統一理論

素粒子の統一理論はどういうものかというと，いくつかのタイプがあり，

$GUT \quad SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \subset G$ ゲージ群の幾何学

$Kaluza - Klein$	$\mathbf{R}^4 \subset M^d$	空間の幾何学
弦模型	$S^0 \rightarrow S^1$	物質の幾何学?

では大統一理論に行きますが，素粒子に働く力は今までにちゃんと分かっていまして，

$$\text{強い相互作用} \qquad SU(3) \tag{2.35}$$

$$\text{弱・電磁相互作用} \quad SU(2)\times U(1)\ .\ g_2\ ,\ g_1 \tag{2.36}$$

この三つの力を統一したものがゲージ理論の統一です．ゲージ理論の統一というのは二種類ありまして，

$$\begin{array}{ll} 1) X = SU(3)\otimes W & SU(2)\times U(1)\subset W \quad W\subset U(6) \\ 2) SU(3)\times SU(2)\times U(1) = F\subset G & \text{埋め込み} \end{array} \tag{2.37}$$

$SU(3)$ という何か string です．それと何か別のもの (W) を考えて，$SU(2) \times U(1)$ はこの W に入る．こういうやり方とこれを大きな群に入れる，数学的には埋め込みという問題です．この時に何が問題になるかというと，1 つの結合定数です．つまり g_1, g_2, g_3 ではなく一つの結合定数 g でかけるというのがポイントになります．$W \subset U(6)$ であるというのはレプトンには 6 種類あることとつながってきますが，これは複雑だからやめておきます．説明途中で間違っちゃうだろうから．答えとして 1) はダメ，実は上手くいきません．これは長くなるのでやりませんけど，この意味は強相互作用と独立にもう 2 つの相互作用の統一はできないことを表しています．三つの力を統一するわけですけれども，なぜそうしなくてはならないか，これだけでは必然性はありません．これの示唆として電荷 Q について考えてみます．trQ，つまり電荷の和ですが，実はこれが 0 になっている．クォークとレプトン，それぞれについて計算すると，

$$\sum_{\text{クォーク}} Q_i = 1 \tag{2.38}$$

$$\sum_{\text{レプトン}} Q_i = -1 \tag{2.39}$$

よってアノマリーが 0 になります．そういうことから強・弱・電磁相互作用を統一する事が示唆されます．もう 10 時半に近いからまとめて終わりにしますが，2 は途中の計算でいろいろありますが，z についての答えは，最小の群の rank が 4 では $SU(5)$ がただ 1 つになります．これは可能性ですが．rank を 6 まで広げると $O(10)$ と $E(6)$ です．なぜこうなるかは省略しますが，普通 $SU(5)$ の GUT を考えます．これは先程書いた coupling constant．$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ のカップリングは全部 1 つで，これは g_5.

$$SU(5)\times\ ,\ GUT\ ,\ g_3 = g_2 = g_1 = g_5 \tag{2.40}$$

大事なことはクォークとレプトンが 1 つの表現に入ってくるということです．$SU(5)$ には $\overline{5}$ という表現がありますけど，これはカラーの 3 次元，$\overline{3}$ と $SU(2)$ の 1 と，そ

れから反クォークとレプトンです．

$$\overline{5} = (\overline{3}, 1)\oplus(1, 2) = ({d_r}^c, {d_g}^c, d_b^c, e, \nu_e)_L \tag{2.41}$$

d クォークの色々なカラーのチャージコンジュゲーション，それからエレクトロンとニュートリノ，これだけのものが，つまりクォークとレプトンが 1 つの表現に入ってしまうのが大統一理論です．大統一理論の実験的帰結としてバリオン数の比保存，

$$\overline{g}\rightarrow(l + \text{ゲージボソン}) \tag{2.42}$$

反クォークがレプトン＋ゲージボソンになることと一致します．こういう反応があるためにはバリオンがレプトンになってしまわなければなりません．これをレプトクォークといいます．レプトンクォーク・ボソンは巨大な質量を持たないと矛盾してしまう．レプロクォークは X^i，Y^i という字を使いますけども，この質量は，

$$X^i, Y^i \quad M_X, M_Y \simeq g_5 V \sim 10^{14\sim15} GeV \tag{2.43}$$

これに対して，ワインバーグ・サラムの粒子というのは

$$W^{\pm}, Z^0 \quad M_W, M_Z \simeq g_5 v \sim 10^R GeV \tag{2.44}$$

最後の方は大急ぎでやりましたが，後半はゲージ階層性についてやります．

第3章　ゲージ階層性問題

午前中急ぎましたけれどもあれで一応大統一理論を終わったことにして，ゲージ階層性をやります．今説明した大統一理論というのをもう一度図式的に書いてみると，GUTがあってこの中に$SU(3){\times}SU(2){\times}U(1)$というのがある．これが標準模型です．それと，$SU(2){\times}U(1)$の部分がまた$U(1)$に破れて，これが，QEDです．

$$\overset{\text{大統一理論}}{GUT} \longrightarrow SU(3){\times}\underbrace{SU(2){\times}U(1)}_{U(1)QED}\ \text{標準模型}$$

$GUT \to SU(3){\times}SU(2){\times}U(1)$に対称性の破れがあって，真空期待値が$V$，$SU(2){\times}U(1) \to U(1)$の真空期待値がｖです．それで，先ほど述べた二つの質量，M_W, M_Xは，ヒグス場の真空期待値から生じます．それで，これはよくわかってますけれども，この二つの質量スケールの間に，非常に大きな階層性があります．

$$M_W{\ll}M_X{\sim}\lambda$$

それは，M_Wこれは大体，カットオフのスケールと考えてますが，片方が10^2で片方が10^{15}位, これを図式で書いてみるとこのようになります．さっきのM_Xは大体GUTだと思ってください．

図

こちらに，ワインバーグサラム理論のウィークボソンの質量スケール，M_{GUT}あたりにエネルギースケールに基本的な理論があります．これは大統一理論だけれども$SU(5)$かどうかは分からない．エネルギーを下げてくると，基本的な理論というのは別な形に見えて，それをEffective Field Theory(有効場の理論)と言います．基本的な理論というのはGUTに対して，超弦理論，またM理論となります．Effective Field Theoryは標準模型です．これでわれわれの欲しい理論の大体の形が見えてきてる訳ですけども，何が問題かというと，この大きな階層性(hierarchy)をどうやって実現できるか？というのが階層性問題です．

この問題には古典論と量子論二つの面があります．一応分けて考えた方がいいでしょう．

例として，$SU(5)$GUTにとって説明します．他のをとっても似たようなものです．そうすると，$SU(5)$GUTでは，ヒッグスと関係しているところ，場の理論ではヒグ

ス secor というけれども，ここには２つのヒグス場が必要になります．それは，$SU(5)$ の 24 次元表現 (ϕ と書く) と 5 次元表現 (H)．24 次元表現は先ほど述べた $SU(5)$ を $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ へやる．$SU(2)\times U(1)$ を $U(1)$ へ破るのが 5 次元ヒッグス．で，実はスーパーシン計量な理論では 5 次元だけでは不十分で，5 が二ついりますけれども，今それを考えます．で，これはもちろん $SU(5)$ が $U(1)$ に破れるとかいろいろありますけれども今これを仮定します．

２つの面：古典論と量子論
例として $SU(5)$GUT
ヒグス secor：２つのヒグス場

$$\begin{array}{llll} 24 & \phi & SU(5)\rightarrow SU(3)\times & \underbrace{SU(2)\times U(1)} \\ & & & \downarrow \\ 5 & H & & U(1) \end{array} \tag{3.1}$$

3.1 古典論

これは先ほど言った 2 つのうち古典論のレベルですけどもこういう風にヒグスに対して次のようなポテンシャルを考えます．

$$V(H,\Phi) = -\mu^2 H^\dagger H + \lambda(H^\dagger H)^2 \tag{3.2}$$
$$-\frac{1}{2}m^2 Tr\Phi^2 + \frac{1}{4}a(Tr\Phi^2)^2 + \frac{1}{2}bTr\Phi^4 \tag{3.3}$$
$$+\alpha(H\ \dagger H)Tr\Phi^2 + \beta H^\dagger\Phi^2 H \qquad \Phi - H\ \text{結合} \tag{3.4}$$

これはどんなタームがあるかと言うともちろん繰り込み可能性を仮定するので 4 次までですけれどもこういう質量項と 5 次元のヒグスの正負カップリングですね．それから 24 次元のヒッグスの質量項と，やはり正負カップリング，これも 4 次です．それから $\frac{1}{2}bTr\Phi^4$ と言うターム．タームはこれだけです．ただし今度 24 次元と 5 次元がカップルするタームがあるので$+\alpha$で，前言いました様にラグランジアン自身はいつもシン計量ですから，書こうとするタームに限られてしまってこれだけのタームとなります．これは最後の 2 項は ϕ と H の結合するタームで，あとは各々のタームです．

次の形の真空期待値を仮定します．SU(5) が (3.1) 式のように破れるためには次のような形をしていなければならないということで真空期待値はこういう形に仮定します．

$$< \Phi >= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \frac{V}{\sqrt{30}} H = \begin{pmatrix} H_c \\ \cdots \\ \phi \end{pmatrix} \begin{matrix} colortriplet \\ \text{見えない}\ SU(2)_L doublet \end{matrix}$$

全部これは $SU(5)$ ですから，トレースは足して 0 にならなくてはならないからこういう形になります．V というのは真空期待値，$1/\sqrt{30}$ は単にノーマリゼーションで特に意味はないです．5 次元の方は 3 成分と 2 成分に分けて H_c が triplet，ϕ は $SU(2)_L$ の doublet です．ϕ はワインバーグサラムで出てくる．残りの部分はローエナジーで見えないような color になっています．

そして，ヒッグスの質量を計算すると，

$$H_c \quad m_{Hc}^2 \sim V^2 \sim M_{GUT}^2 \tag{3.5}$$

さっきも言った 3 次元のヒッグスの質量というのは，これが大体この真空期待値の大きさで，これが GUT の質量と同じ，10^{15} くらいの質量です．ところが ϕ の質量を計算すると真空期待値を計算して (3.4) 式に入れれば，H の質量項というのは $-\mu^2 H^\dagger H$ と $\alpha(H^\dagger H)Tr\Phi^2$ と $\beta H^\dagger \Phi^2 H$ に出てきてるからこれで計算すればいいんですけども，

$$\phi \quad m_\phi^2 = -\mu^2 - (\tfrac{15}{2}a + \tfrac{a}{4}\beta)V^2 \simeq M_W^2 \tag{3.6}$$

これが大体 W ボソンの質量に近いものにならなければならなりません．ところが V^2 というのは非常に大きな数です．従って，V^2 と言うのは 10^{15} 位，M_W^2 は 10^2 位出したいわけですから，次のことを実現したい．m_ϕ^2 が 10^4，m_{Hc}^2 が 10^{30} くらい．こういうことを実現したい．こういうのをゲージ hierarchy とも言うし，最近では triplet-doublet splitting とも言います．

$$\underbrace{m_\phi^2}_{\sim 10^4} \ll \underbrace{m_{Hc}^2}_{\sim 10^{30}} \text{ (triplet-doublet splitting)}$$

同じ 5 次元のヒグスの triplet と doublet が大きくスプリットしなければならなりません．このためには，理論のパラメーター，今の場合，α と β を $\frac{15}{2}a + \frac{a}{4}\beta$ という比で足して，ほとんどゼロにしないといけません．そのために微調整 fine tuning が必要になります．このことを gage hierarchy problem と言います．α とか β というのを大体 10^{-26} のオーダーに選びます．

$$\alpha, \beta \sim O(10^{-26})$$

a とか b は普通の数でいいんですけども，このような微調整をしなくてはいけない．これが gage hierarchy の問題です．

3.2 量子論

先程のは古典論ですが，量子論ではヒグスの質量は量子補正を受けます．これは午前中に朝一番最初に計算した問題です．質量を具体的に計算してみると，次のようになります．

$$\delta m_\phi^2 = xxxx \sim \lambda\Lambda^2$$
$$m_\phi^2 = m_0^2(\Lambda) + \delta m^2 \longrightarrow O(M_W^2)$$

Λ が 2 次発散しています．したがって m_ϕ^2 は，繰り込みが必要ですけども bare な質量と δm^2 を足したものが M_W^2 で，こちらも非常に大きくてうまくキャンセルをしないといけない．だから量子論で m_0^2 の微調整が必要になります．

ですから古典論でうまく微調整，あるいは微調整なしでもしこういうことができたとしても，量子効果を計算するともう一回微調整しないといけません．こんな風に量子論でこういう微調整をしなくてはいけないことを，理論が UV incomplete と言います．高エネルギーで理論がうまく定義できていないと言うことです．あるいは理論が unnatural であるとも言います．こういうのがゲージ階層性の問題です．これはもちろん 70 年代から良く知られていることです．ここまでで質問があれば⋯．

Q. ヒグスのポテンシャルはどうしてそう書くのですか？
A. これは $SU(5)$ の対称性を仮定してヒッグスが 24 次元と 5 次元だと仮定すると，それは対称性があるから全部決まってしまいます．それ以外のタームを書くと $SU(5)$ 対称性が破れてしまう．だから $SU(5)$ 対称性を破らない一番一般的な形です，あのポテンシャルは．

第 4 章　ゲージ階層性問題への解

ゲージ階層性の問題は明日の中野さんのタイトルにありますからそちらできちんとした定義が出てくると思います．今やってｉいるところの，階層性の問題はいくつかの解が見つかります．
どれも extra”something”beyond SM，つまり SM を越える何か余分なものを持ち込むというそういう立場です．何を持ち込むかによって解が異なります．これのリストを多分途中で終わってしまうから詳しい説明じゃなくて一応どういう解があるかを挙げていきます．

a) extra な内部空間 (extra ゲージ群)
technicolor
...
まず，extra な内部空間を考える．内部空間をワインバーグサラムより大きくするということです．あるいは，これ，内部空間を大きくすると言うことはゲージ群を大きくすると考えてもいいです．
　これの例としては technicolor 等があります．

b) extra な場 (フェルミオン場)$\longrightarrow$SUSY
それから 2 番目に extra な場．実際にこれで面白いのは extra な場としてフェルミオン場を導入するもので，これは大体は SUSY へ．ここの詳しい話は中野さんへ．ここでは触れません．
　c) extra な次元
extra な次元 $\longrightarrow$ ヒグス場
orbifold の固定点上のヒグス場 $\longleftarrow$ 固定点は後で説明
...
それからもう 1 つとして extra な時空間の次元．これは extra な次元からヒグス場を出す．ここで高次元なゲージ場というのはこういう意味ですけども．それから，これはちょっとここでは説明しないけども orbifold 上の固定点．この固定点は先ほどの β 関数の固定点とは違いますけども，orbifold 上の固定点上のヒグス場．この orbifold と言うのは extra な次元です．
a) は base manufold の次元を置くもので，b) は場を置いて，c) は target space を置くものです．

Q. あ，すみません，orbifold 上の固定点って言うのはどういうものなんですか?
A.orbifold という空間の中には固定点というものが存在して，その上にだけ場が存在すると言うことです.
Q.orbifold 上の固定点というのは例えば三角錐の頂点みたいなものですか?
A. そうですね，本当は三角錐そのものじゃなくて三角錐だったらいろんな面のところにも場が存在していいわけですね．そうではなくてその固定点だけに存在するという意味です.
Q. 固定点の意味がよくわからない.
A. それは後で orbifold がきた時に説明します．ここでは時間の都合上リストを作ってしまうという感じで.

y) 点粒子 $\longrightarrow$extended objects

今度これは点粒子を弦だとか extended objects でいろんなチョイスがありますけれどもそのうちどれがいいかを決めるのはなかなか難しい．SUSYっていうのはきれいで色々な人がやっていますが，特に M 理論というのはこういう感じですね．M 理論だけでも先程の例のようなものを入れないともちろんうまくいかない．こういうのを順番にやっていきますが，時間がきたら，そこでストップします.

4.1 extra なゲージ群

extra なゲージ群にもいくつかあって，technicolor(TC) 模型，これは 70 年から 80 年の初めにかけて流行って，今では実験と合わないという意味ではほとんど考えられなくなっていますけれども，このアイディア自身はもしかしたら面白いんじゃないかと．今，群としてゲージ群 $G{\times}G'$，で，G は普通のゲージ群です．G' というのは technicolor のゲージ理論．例えば例として，G' というのは一番簡単なのは SU(2). だから，このスタンダードなゲージ理論の他に別のゲージ群があるということ．G' の方は強結合で，G は弱結合です．弱結合というのは摂動で計算していいということです.

$$\text{technicolor(TC) 模型ゲージ群 } G{\times}G'$$
$$G = SU(3){\times}SU(2){\times}U(1) \text{ 弱結合}$$
$$G' \text{ TCゲージ理論 e.g. } G' = SU(2) \text{ 強結合}$$

で，ここには，テクニフェルミオンというフェルミオンがいます.

$$\text{テクニ・フェルミオン } T^{\alpha i}$$

添え字が二つあって，α が G' の，i は群 G の表現です．これを，color とか SU(2)doublet とする.

一般に強結合のゲージ理論ではこういうことが知られています．強結合ゲージ理論ではフェルミオンが凝縮する．凝縮するとは真空期待値を持つということです．そうすると，

$$\varphi_i{}^j \sim \langle \overline{T}_{\alpha i} T^{\alpha j} \rangle \tag{4.1}$$

が真空期待値を持って，$\overline{T}$ と T がフェルミオンとアンタイフェルミオンですから，スカラーです．ですからこれは composite なヒグス場になる．これは，G では，non-singlet．したがってこれをワインバーグサラムのヒグス場とみなします．ただし，これは composite ですから elementary なヒグス場として存在しないから，ヒグス場の質量がいくつかとかそんなことは考えなくていい訳で，従って，こういうことを，強結合のゲージ場を導入しておくと，technicolor ですけどもヒグス場自身が elementary に存在しないので，ゲージ階層性の問題はある意味解消していると．

同じような考え方は，実験ではもうだめになっています．実験と矛盾しているという意味で，この理論をそのまま使うことはできません．ただし，QCD というのは基本的にこういう考え方です．

強結合ゲージ理論ではフェルミオンが凝縮
Higgs 場は elementary な場ではない．
実験と矛盾．
ただし，
Q C D,top condensation,tumbling ゲージ理論

それから，これは昔名古屋の山脇さんがやっていたんですけども，top condensation というのは，これと同じような考え方．それから，tumbling ゲージ理論，これはちょっと説明しませんけども，昨年くらいから復活してきて非常にいろんなところに顔を出している考え方です．で，最近の，lattice の上に SUSY を乗せるというというのは，こういうことを使っています．もしかしたらこれは technicolor ではないけども，似たようなものを使って大きく発展する可能性がある面白い考え方だと思います．

technicolor そのもの自身は生き残らないだろうけれども，このアイディアはもしかしたら大きく発展するかもしれません．一応これで technicolor の説明を終わりにします．

2) 強結合ゲージ dynamics（北野，岡田，井沢，柳田）

もうひとつ，題だけは書いときますけど，同じ extra なゲージ群の中に，名前はなんと呼んでいいかわからないけども，やっぱり強結合ゲージ理論ですね．これは，昨年，読んだときはぼくは感心したんですけども北野，岡田という二人の人が書いた短い論文ですけども，この話を実は本郷でしたら柳田さんは実はこれは北野，岡田じゃなくて自分がやったんだと言っていて，これはそういう意味では井沢，柳田も入れておきましょう．

北野，岡田の仮定というのはこれは，やはり二つのゲージ群です．少し違うのは，G と G' が結構アンバランスなことです．ここでは，$SU(5)_H \times SU(5)_{GUT}$ です．$SU(5)_{GUT}$ が，弱結合．弱結合と言うのは摂動論で計算していいという意味です．$SU(5)_H$ が強結合．同じゲージ群を，普通の大統一理論というとゲージ群はもちろん $SU(5)$ だけですけれども，どういうわけか二つゲージ群を持ってる．これがみそです．それから，もうひとつ大事なのは，SUSY です．SUSY がないとこれは議論できない．

これは面白いんだけれどもちょっと時間がないので内容は省きます．これは，Physical Review に載ってます．2001 年の．それから柳田さんたちはもっと早く 1996，7 年くらい．で，これは，結構 SUSY の使い方が面白いんですけれどももしかしたら中野さんの話に出てくるかもしれません．
ＫＯの仮定：

- ２つのゲージ群 $SU(5)_H \times SU(5)_{GUT}$
- ＳＵＳＹ

内容は省く (PR(2001))

3) (De) construction of dimensions(arkani-Hamed,Cohen,Georgi)

もう少し他のことも紹介したいんでこれを省いて三番目．まだこれは extra ゲージ群のところですけれども英語で書くと，(De) construction of dimensions.
アルカニはイランの人です．ジョージアというのは非常に保守的な人で，前に技術センターのエディターをやってました．今はもうやめています．$SU(5)$ のグラティフィケーションを出したという意味では非常に革新的な人でしたけれど，ここ 20 年くらいは結構保守的で，例えば次元は 4 次元で，それ以外の 3 次元や 5 次元，6 次元というのはずっと考えないで来ていました．彼が初めて書いた 4 次元を超える論文がこれです．このモデルは 4 次元から出発して 5 次元を作ったり，あるいは 4 次元から 3 次元に落ちるような，そういう，次元を変えるような模型です．これは次のように見ることも出来ます．

これは今言った，extra な gauge 群と extra な次元，時空間が，実は関係しているとみなすことができます．gauge 群をどんどん持ち込むことによって空間を作ることができるわけです．
ゲージ群の対を考えます．
extra ゲージ群 $\longrightarrow$extra のゲージ次元

ゲージ群の対 $G \times G_s$
それらの積 $G^N \times G_s^N = (G_1 \times G_{s1}) \times \cdots \times (G_N \times G_{sN})$ 1 組のゲージ群からさらにたくさんゲージ群を作る．ただし，カップリングコンスタントは皆同じにとって，　$g_1 = g_2 = \cdots = g_N = g \longleftrightarrow$ 質量スケール Λ
$g_{s1} = \cdots = g_{sN} = g_s \longleftrightarrow$ 質量スケール Λ_s
coupling constant は mass scale で繰り込み点によるわけですから，coupling constant を指定するということは質量スケールを決めるということになります．
あまりに抽象的なことなので，例として，$G_i = SU_i(m)$，$G_{si} = SU_i(n)$ とします．その他に cyclic 対象性を課します．
これは彼らの論文の絵です．これらは本当は非可換です．

図
　多辺形の辺上に 2 種類のカイラルフェルミオン χ，ψ があります．$\chi_{i,i}$ は i と i をつなぎます．$\psi_{i,i+1}$ は i と $i+1$ をつなぎます．
ゲージ群の表現は G_i，G_{si}，$\cdots$．この表現を書くと，G_i というのは $SU(2)$ ですから，m 次元表現．それから G_{si} というのも $SU(n)$ ですが，これは図に入っていくものなので，$\bar{n}$ です．G_{i+1} は，もちろん触ってないので，これは singlet です．同様に考えて下のようになります．

$$\begin{array}{lccccc} & G_i & G_{si} & G_{i+1} & G_{s,i+1} & G_{i+2} \\ \chi_{i,i} & (m & \bar{n} & 1) & & \\ \psi_{i,i+1} & (1 & n & \bar{m}) & & \\ \chi_{i+1,i+1} & & & (m & \bar{n} & 1) \end{array} \tag{4.2}$$

それで，Λ_s のスケールが，G_{si} の効果よりも G_i よりも大きいとします．エネルギーが Λ_s よりも大きいということです．エネルギーが大きいと，coupling constant が皆小さいですから，弱結合です．従って理論は 4 次元の弱結合です．これは M1 の人はわからなくてもいいです．
　弱結合で，ゲージ理論の N コピー．これは弱結合のゲージ理論ですから，たくさんあるので，N コピー．コピーが N 個ある．
　☒)$E \gg \Lambda_s \gg \Lambda$ では，理論は 4 次元の弱結合ゲージ理論 (の N コピー)

☒)$\Lambda \gg E \gg \Lambda$ では，　G　弱結合 $\longrightarrow GUT$
G_s 強結合 TC 的
ついでにエネルギーを下げてきて，低いエネルギーにします．低エネルギー，Λ_s のスケールよりもちょっと小さいスケールで，スケールよりもエネルギーが高いと，G は弱結合です．
ところが，下はエネルギーの方が mass scale よりも小さいので，これは強結合．で，この弱結合というのは，普通の grand unification と考える．で，G_s は technicolor 的と．そして，強結合だと，先程 technicolor と書きましたが，fermion が condense する．このジョージアたちの論文はそれほど難しくないです．fermion を condense するというのは，bilinear で入ってくるということです．technicolor の時にも言いましたけれど，fermion が２つあると，真空期待値を持つ．これはだから，Higgs みたいなもの．
　　フェルミオンが凝縮

$$\begin{aligned} < \chi_{i,i}\psi_{i,i+1} > \sim 4\pi {f_s}^3 U_{i,i+1} \\ U_{i,i+1}\ m \times m \text{ ユニタリー行列} \\ `pion'(NLSM \text{ の場}) U_{i,i+1} \to {g_i}^{-1}(x) U_{i,i+1} g_{i+1}(x) \end{aligned} \tag{4.3}$$

$Ui,i+1$ というのは $m \times m$ のユニタリー行列．左からは $SU(m)$，右からも $SU(m)$ がかかるような．だからこれは行列と．

fermion が真空期待値をもって，こう書ける時，行列というのは，実は pion を持つ．pion という意味は，NLSM の場ということです．こういうことをきちんと定式化できます．
ということは，$U_{i,i+1} \to {g_i}^{-1}(x)U_{i,i+1}g_{i+1}(x)$ というようにに変換するということです．時間がないので結論だけ言いますと，実際これは 4 次元の理論から出発しましたが，実はこれは 5 次元の $SU(m)$ ゲージ理論＋ NLSM の lattice 版が得られるということです．

僕自身がやってきた高次元のゲージ理論というのを説明する時間がなかったのですが，orbifold 上では川村さんという，信州大学の人が 1 人で非常にいい仕事をしていて，世界的に影響力のあるような結果を出しています．色々な人がそれを使って orbifold を用いた対称性の破れというものをやっています．
もっと最近，ここに来る前に読んだのは，moose diagram というものだす．これは数学の方でよく使われているもので，発展して string の考えなどでよく使われていますが，実は現象論で最近こういうことが考えられるようになった．
少し強調したいのは，1990 年代までゲージ理論やストリングをやっている人には現象論は手を出しにくかったのですが，ここ 1，2 年から，現象論で使われる道具というのはストリングや場の理論で使われるモデルで使われるようになってきたので，現象論をあまり知らない人でも興味を持って現象論をできるようになってきたので，ここ数年で大きな発展となっています．

２日間，忍耐強く講義を聴いて頂き，有り難うございました．夏の学校の世話人の方，特に素粒子パートの北大の方，講義の世話をして下さったお茶大の方には本当にお世話になりました．有り難うございました．