2002年夏の学校素粒子論パート講義

超弦理論と量子重力

講師：磯暁 (KEK)

8月6日、8月7日

講義録作成：最上武志、高野智暢、鈴木隆平、中村庸介、清水洋輔、酒井寿徳

目 次

第 1 章　Large N ゲージ理論 **7**

1.1　格子ゲージ理論の強結合展開 9

1.2　't Hooft の Large N 展開 15

第 2 章　弦理論入門 **21**

2.1　点粒子の第 1 量子化 21

2.2　String の第 1 量子化 — Nambu-Goto action 26

2.3　Polyakov action 29

2.4　Schild Action 37

2.5　String の歴史 40

第 3 章　行列模型 (old type) **49**

3.1　Feynman Diagram 50

3.2　Double Scaling Limit 55

3.3　$c = 1$ のバリア 57

第 4 章　行列模型 (新しいタイプ) **63**

4.1　Schild action の行列正則化 63

4.1.1　行列正則化の意味 65

4.2　IIB matrix model 70

4.2.1　SUSY 71

4.2.2　A^μ の background が時空 73

4.2.3 g : スケールを決める定数 73
4.2.4 D-brane 74
4.3 reduced model としての IIB matrix model 74
4.3.1 スカラー場の reduced model 75
4.3.2 ゲージ場の reduced model 79
4.4 IIB matrix model の進展 81

Introduction

おはようございます。高エネ研の磯です。

今回、タイトルは超弦理論と量子重力というタイトルで話をするんですが、このタイトルをどういう意味で付けたのかという話を始めにしたいと思います。

素粒子論というのはもちろん名前から解るように、素粒子を扱う学問、現在解っている素粒子論の標準模型というのはいわゆる Weinberg-Salam 理論と QCD 理論、$\mathrm{SU}(3) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)$ として定式化されている。

標準模型というのは、quark であるとか lepton であるとか、そういう粒子間の相互作用をいかにして記述するかという理論なのですが、今、現象論で一番大きな問題になっているのが、いかにしてこれらの標準模型を越えるかという話で、beyond standard model というのがキーワードになって現在の色々な現象論的なアプローチがなされている。例えば、GUT(Grand Unified Theory) であるとか、Supersymmetry。そのようなアイディアを使って、それで beyond standard model というのが今考えられているわけですが、現在問題になっている事はニュートリノ質量の問題であるとか、baryon asymmetry、あとは、naturalness の問題だとか宇宙項の問題。色々標準模型を越える現象論的なアプローチが考えられている。

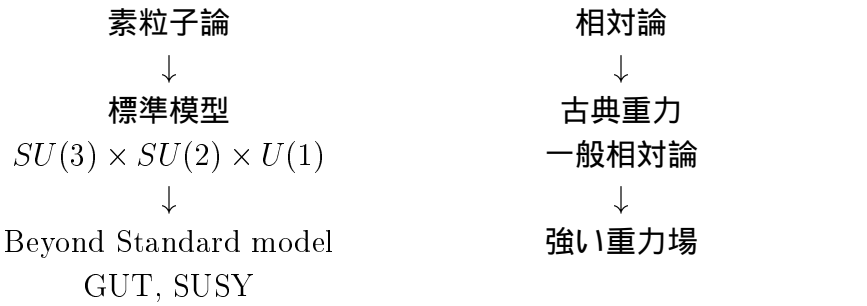
一方、量子重力は元々相対論の分野、相対論とか宇宙項というのは場の理論を扱うというよりは、むしろ古典的な重力を扱う。こちらの方の流派として大きな成功を納めたのは、やはりビッグバン理論であるとか、そういう一般相対論的なアプローチから宇宙の成立ちについてせまろうというのがこちらなわけです。当然こちらのベースになるのは一般相対論。

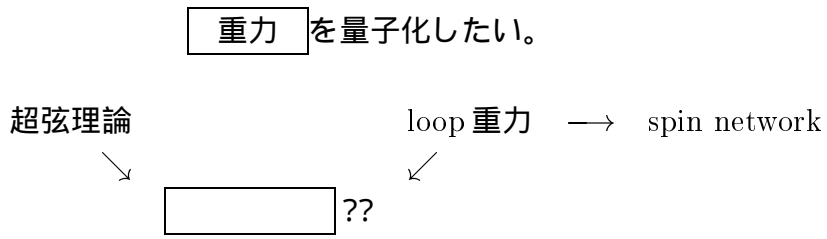
これはその後、ビッグバンの標準模型というものができた後、現在問題になっている事として例えば非常に重力が強い領域。強い重力場中での現象論が何とが起こるのか、例えばブラックホールであるとか、宇宙の特異点であるとか、もしかすると宇宙の初期がどうなっているのかというのが、こちらのアプローチで問題になる。

現在、特に観測宇宙論というのが非常に盛んなわけですが、例えば cosmic micro wave background から昔の宇宙、初期の頃のゆらぎがどのようなものであったか、というの

が非常によく解っている。

それらの両方共、現在の標準模型と呼ばれるものがあるわけですが、これらを越える、次に来るものとして、当然考えられるのが重力を量子化したもの。





重力を量子化する事が、素粒子のアプローチにしても重力のアプローチにしても次の非常に重要な課題になるわけですが、素粒子の方は皆さん御存知のように 70 年代 ~ 80 年代から、超重力理論であるとか、色々なアプローチが検討されてきまして、最終的に素粒子の流れの中で到達したのが超弦理論。

それで、この超弦理論というのはこれからお話するんですが、非常にいい性質を色々持っている量子論的に完全に整合的な理論である。anomaly であるとか、発散であるとか、そういうものは全て無い。そういう意味で非常にいい理論なんですが、ところが超弦理論には一つ大きな問題点がある。その問題点は何かというと、超弦理論というのは重力を記述しているんですが、あくまでもある特殊な、特に フラット な background の周りでの重力しか記述できない。ですから、本当に時空自体を量子化したいという考え方からすると非常に不満足な定式化にしかなっていない。

一方、こちらの相対論的なアプローチで重力を量子化したいというアプローチの到達点と考えられるのが loop 重力と言われている。この loop 重力というアプローチは素粒子論的なアプローチとは違って、ある フラット な background の周りのゆらぎを量子化するのではなくて、むしろ時空を幾何学として量子化しようという方法。それで、loop 重力の中で時空の捉え方として、いわゆるスピンネットワークと呼ばれるものが

ある。こちらの問題点というのは本当に量子論的に整合的な理論かどうかという事がまだあまりはっきりしていない。

そういう意味で超弦理論にしても loop 重力にしてもまだ両方共未完成な理論なんですが、この次に来るこれからの発展というのはこれらの考え方を恐らく融合したものになるのではないかといういう予想ですが、この先にくるものは何か、という事がこれからの問題になるわけです。

現在の所、この両方のアプローチというのは全く結びついていません。ですから、むしろその次に来る。超弦理論の恐らく第 3 革命というものが来ると思うんですが、そういう次の超弦理論を作っていく上で、非常に大事になるキー、鍵になる考え方があるんですが、今回お話したいのはその鍵となる考え方について。

その内の恐らく一つである事は間違いない $\frac{1}{N}$ 展開。$\frac{1}{N}$ 展開を軸とした string とゲージ理論の関係。string とゲージ理論の duality というものの話をしたと思います。

それで、話す内容ですが、始めにいわゆる 't Hooft の意味の large N ゲージ理論。次に、極簡単に弦理論の入門的な話をします。特にここで言いたいのは弦には臨界弦 (critical string) と呼ばれているものと非臨界弦 (non-critical string) と呼ばれているものがあるんですが、それがどういうものかという話をします。それで 3 つ目が行列模型。この行列模型というものにも実は色々なものがあるんですが、まず最初にお話したいのはいわゆる old type の行列模型。この old type の行列模型というのは今から 10 年程前に盛んに研究されていたものですが、弦理論の中で non-critical string と呼ばれているものを記述する模型です。

それで 4 つ目にお話したいのは新しいタイプの行列模型。この新しいタイプの行列模型というのはここ数年議論されているわけですが、非臨界弦ではなくて、臨界弦を記述していると思われている行列模型です。この 4 章でお話したいののは臨界弦を扱う行列模型というものの紹介と、あとそれの性質であるとか、それからいわゆる reduced model という話があるんですが、reduced model を通じてこの large N ゲージ理論と密接に関係していますので、それらの関係がどうなっているかをお話します。

それから文献ですけれど、最初の第 1 章の話は色々な文献があるのですが、非常にいい review として、Sumit Das という人が書いた

S. R. Das, "Some Aspects Of Large N Theories"[1]。

これが非常にいい review です。

それから弦理論入門は Polchinsky の本 [2][3] か Green-Schwarz-Witten の本 [4][5]。

それからこの古いタイプの臨界弦の行列模型では、これは結構長い review なんで

すが、

P. Di Francesco, P. Ginsparg and J. Zinn-Justin, "2-D Gravity and random matrices"[6]。

あと、Ginsparg が一人で書いた多少短かい review[7] があります。それから新しいタイプの行列模型に関しては、1997 年頃までの review であれば、

H. Aoki, S. Iso, H. Kawai, Y. Kitazawa, A. Tsuchiya and T. Tada, "IIB matrix model"[8]。

以降の発展も色々あるんですが、それについてはまだ review は出ていません。

第1章　Large N ゲージ理論

それでは内容に入って行きたいんですが、まず始めに large N ゲージ理論。't Hooft の large N ゲージ理論というのはどういうものかという話をしたと思います。

先程言った標準模型や、QCD というものがあるわけですが、QCD は皆さん御存知のように SU(3) のゲージ対称性を持ったゲージ理論です。それで、この 3 を、N にしましょうと。

$$\text{QCD:} \quad \mathrm{SU}(3) \quad \longrightarrow \quad \mathrm{SU}(N) \qquad N \to \infty$$

SU(3) のゲージ理論は非常に解析が難しいのですが、これを SU(N) にして、N を大きくするというのが、large N ゲージ理論なんですが、一応 action を書いておくと、ゲージ理論のお馴染みの action ですが、

$$S = -\frac{1}{4g_{\mathrm{YM}}^2} \int \mathrm{tr}(F_{\mu\nu})^2 d^4x. \tag{1.1}$$

こういう action になっている。それで、この理論は、これも場の理論の一番最初にやる話ですが、gauge coupling $g_{\mathrm{YM}}(\mu)$ というのは、くり込み点に依存する。running coupling constant という性質を持つ。running coupling constatnt がくり込み点と共にどのように変わるのか、という事を決めるのが β 関数と呼ばれる量。鍵はこの $g_{\mathrm{YM}}(\mu)$ (YM: Yang-Mills) というのはくり込み点 μ の関数なわけですが、β 関数というのはくり込み点 μ による running coupling constant が μ と共にどう変わるかという量なわけで、QCD の場合には、これが今の SU(N) のゲージ理論の場合ですが、

$$\beta(g) = \mu \frac{dg_{\mathrm{YM}}}{d\mu} = -\frac{11}{3} N \frac{g_{\mathrm{YM}}^3}{16\pi^2} + \mathcal{O}(g^5). \tag{1.2}$$

摂動展開の第 1 項目というのはこのように与えられます。もちろんこれには高次の 5 次以降の高が含まれるわけですけれども、重要なのは、QCD に関しては β 関数が負であるという事、この辺は場の理論の最初にやる話なので、皆さんよく知っていると思いますが、この β 関数で非常に大事な点が 2 点あります。一つが今お話したように β 関数が負である事、そうすると、このくり込み群の方程式を解いてやると、running

coupling constant が μ の関数としてどのような関数であるか、5 次以降を無視するとこれは簡単に解く事ができる。それを解いてやると、

$$g^2_{\rm YM}(\mu) = \frac{24\pi^2}{11N}\frac{1}{\ln(\mu/\Lambda)}, \tag{1.3}$$

で解けるという事がすぐに解る。今この Λ と書いているのは、この微分方程式を解く時の積分定数です。これをグラフで書くと (図 1.1) のようになります。

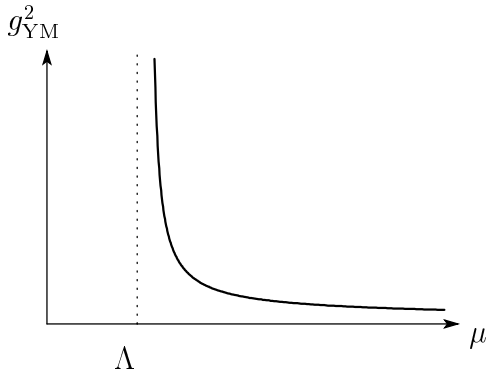


図 1.1: running coupling constant

横軸に μ を取って、縦軸に今の running coupling constant を取ってやるとそうするとこの Λ いわゆる QCD の scale を与えているわけですが、Λ という scale が非常に大きくなっていて、high energy に行く程、coupling constant は小さくなる。ですから、high energy に行く程、coupling が弱くなるという asymptotic free の性質を持っていて、逆に非常に low energy に行くと coupling が強くなる。ですから、coupling が強くなるという事は quark と quark との間に非常に強い力が働いて、恐らく閉じ込めが起こるであろう。ですから、この Λ というのが閉じ込めの scale。quark と anti-quark との間には閉じ込めが起こって、いわゆるクーロン力ではなくて、linear なポテンシャルが働くのではないか、というのがこれから予想される。

それからもう一つ。今書いた β 関数の式で重要な点がありまして、それは、まあ、解いた running coupling constant の形を見てもいいんですが、N を今は右辺に書いてありますけれど、これを ${g_{\rm YM}}^2 N$ とまとめて書く事ができる。

$$g^2_{\rm YM} N = \lambda \qquad \text{'t Hooft coupling}$$

そうすると、${g_{\rm YM}}^2 N$ イコール 右辺は N に依らない量。ですから、全て ${g_{\rm YM}}^2 N$ という形でまとめてやると、$g_{\rm YM}$ 依存性というのは必ずこのコンビネーションでしか出

てきません。今ここでは 1-loop しか書いていないんですが、実はもっと higher order まで行くとこれに $\frac{1}{N}$ 補正が加わるんですが、$g_{\rm YM}$ の依存性は必ず ${g_{\rm YM}}^2 N$ の形でしか入ってこない。それで、't Hooft が言ったのは、${g_{\rm YM}}^2 N$、これを λ と書いて 't Hooft coupling と呼びますが、この 't Hooft coupling を固定して、N を無限大に持って行きなさい。というのが、これからお話する 't Hooft 極限という話です。

それで、今摂動的にこういう性質を持ってるわけですけれども、実際このような摂動的性質から、どのようにして QCD から" ひも" という描像を導くのかという話をこれから 2 つ程紹介したいと思います。

1.1 格子ゲージ理論の強結合展開

1 つ目は、格子ゲージ理論の強結合展開という話をします。格子ゲージ理論の強結合展開という事をやってやると、実は QCD の中に何かひも的な構造があるというのが簡単に見る事ができます。

格子ゲージ理論というと、皆さん ハドロンの mass を求める為の何か便法だと思っている人が多いと思うんですが、実は格子ゲージ理論というのはもっと非常に場の理論の基礎になるような深い考え方を持っています。ですからもし皆さんこれから string 理論をやりたいと思われている方は、是非格子ゲージ理論の基礎はしっかり別の所で勉強していただきたいです。

格子ゲージ理論というのは名前の通り、時空を格子状に切ってやって、この各格子点の上に時空点がある。時空の上の場というのは格子点の上の場の値を持つものもあれば、これからお話するゲージ場というのは link 上、格子点を結ぶ線のことを link という、この link 上に場が住んでいる。

そうすると、元々ゲージ理論は $A_\mu(x)$ という場の自由度を持っていたのですが、格子ゲージ理論の場合には $A_\mu(x)$ というのが link 変数というもので記述されます。link 変数を U と書いて、$U_{n,\mu}$ と書いたものは n という点から μ という方向へ伸びている link 上に住んでいる変数。それで、これは連続の話をすると n という点から $n+\mu$ という点を繋ぐ Wilson line。n という点のゲージ場で μ 方向に向いていて、それで今格子間隔を a としますと、

$$U_{n,\mu} = e^{iA_\mu(n)a}. \tag{1.4}$$

このような Wilson line を $U_{n,\mu}$ と書いています。

それからもう一つ大事な量は、これから $F_{\mu\nu}$ を作りたいわけですが、$F_{\mu\nu}$ を 作る為

に大事な量として一番基本となる格子、一番小さい格子のことを plaquette (図 1.2) と呼びます。

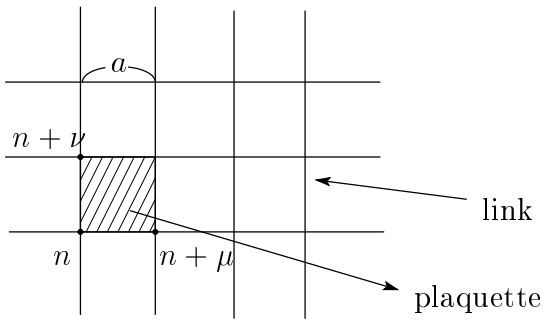


図 1.2: plaquette

$F_{\mu\nu}{}^2$ というのは各 plaquette 毎に定義されるんですが、今この n から $n+\mu$ へ行って、$n+\mu+\nu$ へ行ってそれでもう 1 回 $n+\nu$ に行って最後に n に戻るというこの plaquette の周りをぐるっと回った Wilson loop を記述します。先程この U というのは Wilson line だったわけですが、今度は閉じた、plaquette の周りをぐるっと回る Wilson loop を考えます。

連続では exponential の Wilson line をこの plaquette の周りに path order した量を考えるんですが、これを格子ゲージ理論では U_p と書いて、

$$\text{Wilson loop:} \qquad Pe^{i\oint A} = U_p = U_{n,\mu}\, U_{n+\mu,\nu}\, U^\dagger_{n+\nu,\mu}\, U^\dagger_{n,\nu}. \tag{1.5}$$

n という点からまず $n+\mu$ まで行って $(U_{n,\mu})$、次に $n+\mu$ の点から ν 方向に進んで $(U_{n+\mu,\nu})$、今度は $n+\mu+\nu$ という点から $n+\nu$ へ行くわけですが、それは結局 $n+\nu$ から $-\nu$ 方向へ行ったというのと同じ事ですので、ちょうど ダガー (†) になっているわけです $(U^\dagger_{n+\nu,\mu})$。で、最後が $U^\dagger_{n,\nu}$。これがこの plaquette の Wilson loop になっているわけです。そうすると、これを使ってゲージ場の action を作る事ができるんですが、今、ある plaquette の周りをぐるっと回った Wilson loop というのは、QED の場合を思い出してもらえば解るように、大体、

$$\mathrm{tr}\, U_p \sim e^{i\int F_{\mu\nu} d\omega^{\mu\nu}}, \tag{1.6}$$

という形で、これは ストークスの定理からこの周りをぐるっと回った Wilson loop というのはこの中を貫く flux $(F_{\mu\nu})$ を計る事になる。

それで、これを使って格子ゲージ理論の action というのは、complex conjugate したものを足し上げた形で、

$$S = \frac{-1}{2g^2} \sum_p \left(\mathrm{tr}\, U_p + \mathrm{tr}\, U_p^\dagger \right) \sim \int d^4x\, \mathrm{tr}(F_{\mu\nu})^2. \tag{1.7}$$

これが格子ゲージ理論の action になります。なぜこうなっているかといいますと、$\mathrm{tr}\, U_p$ と $\mathrm{tr}\, U_p^\dagger$ を足し上げますと、ちょうど 1 次の項は $iF_{\mu\nu}$ と $-iF_{\mu\nu}$ で、ちょうど $F_{\mu\nu}$ の 1 次の項は落ちる。それで、展開した 2 次の項が最終的に残って、結局両方から $(F_{\mu\nu})^2$ を足して、それが、連続極限を取ると、$\mathrm{tr}(F_{\mu\nu})^2$ の積分になっている。という事です。この $(F_{\mu\nu})^2$ についての積分というのは、全空間についての積分ですから、当然この plaquette の summation というのは格子を作っている全ての plaquette についての足し算を取らなければいけません。

ですから、plaquette action とその conjugate を足し上げたものというのが、連続極限を取るとゲージ理論の作用になる。それで、これが格子ゲージ理論で、あと、よく free factor $\frac{-1}{2g^2}$ のことを β と書く事が多いんですが、これは熱力学でも $\frac{1}{kT} = \beta$ と書くのと同じです。

$$\beta = \frac{-1}{2g^2}. \tag{1.8}$$

この action を使ってどのようにしたら string 的な描像が出るのかという話をしたいんですが、今、このような時間方向 T だけ進んで空間に L だけ離れているようなぐるっと回る大きな閉じた Wilson loop (図 1.3) を考える。

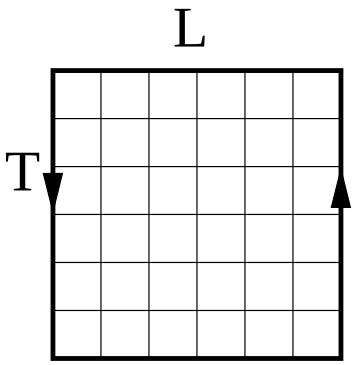


図 1.3: Wilson loop

この path C の周りを回る Wilson loop の値は、

$$W(C) = \mathrm{tr} \prod_{(n,\mu)\subset C} U_{n,\mu}. \tag{1.9}$$

このように定義されます。この各 link に link 変数が乗っているわけですから、非常に大きな Wilson loop のトレースというのは、各 link 変数をぐるっとこの周りに沿って掛けて、トレースをとる。というのが Wilson loop の値です。

これから計算したいのはこの Wilson loop の真空期待値です。この Wilson loop というのは何かといういいますと、先程見たように link 変数というのは $U_{n,\mu} = e^{iA_\mu(n)a}$。という事は、$T$ を非常に長く取ってやりますと、片側に何かある電荷を持った粒子が走っていて、反対側には逆の電荷を持った粒子が走っている。そのような粒子の間のポテンシャル、free energy(の exponential) を計算するというのが、この Wilson loop の期待値を計算する事になる。

それは、QED の場合でも、例えば QED で電子と陽電子との間の相互作用を計算しようと思ったら何をすればいいかというと、path integral で考えると電子とゲージ場との相互作用というのは、

$$\int A_\mu \; J^\mu \; d^4x, \tag{1.10}$$

という形をしていて、current $j^\mu(x)$ が古典粒子の場合は (電子がもし点粒子であるとすると)

$$J^\mu(x) = x^\mu(t) \; \delta^3 \left(x(t) - x \right), \tag{1.11}$$

という風にデルタ関数的に局在していて、ちょうど電子の軌跡の所だけに与えられたようなこういう current を持っている。ですから、これを電子と電磁場の相互作用 (1.10) に代入してやると、ここで得られた Wilson line そのものが出てくる。ですから、電子と陽電子の相互作用を計算するというのは、ちょうどこの (T 方向の)Wilson line 2 本の期待値を計算するのと同じ事になる。ですから、このような閉じた Wilson loop の期待値を計算するという事は、結局、今 T を非常に大きく取っていますから、上方向に走っている quark と逆向きに走っている anti-quark の間のポテンシャルを計算する事になる。

それで、これから計算したいんですが、まず定義式を書いておきますと、

$$\langle W(C) \rangle = \frac{\int \left(\prod dU \right) \; W(C) \; e^{-S}}{\int \prod dU \; e^{-S}}. \tag{1.12}$$

この Wilson loop の期待値を (格子ゲージ理論で) 計算するというのはどういう事かと言うと、今、格子ゲージ理論ですから、積分する量は各 link に値を持つ link 変数全てについての積分。それが場の configuration についての足し上げに相当します。それで weight は先程与えた action (1.7) を使って e^{-S}。これを Z で normalize しておく。これがその Wilson loop の真空期待値の定義。

これを計算するのに一つの簡単な方法がタイトルで書いた強結合展開という話なんですが、強結合ですから、g が非常に大きいので、g が大きいという事は、ここ (1.8) で書いた β が非常に小さい。そうすると、e^{-S} というのは、係数に β を持っていますので、e^{-S} を S で展開してやればよろしい。

$$e^{-S} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-S)^n}{n!} = 1 + \beta \sum_{p} \square \quad + \beta^2 \sum_{p,p'} \begin{pmatrix} p & p' \\ \square & \square \end{pmatrix} + \cdots . \tag{1.13}$$

このように展開してやります。今、この S の n 乗の部分というのは何に相当しているかというと、例えばこの S^2 というのは、ある 2 つの plaquette を選んで落してきた。S^3 というのは plaquette を 3 個落した。という風に落してくる plaquette の枚数というのが n 乗というものを表している。

それで、今計算したい量は経路 C の周りをぐるっと回る Wilson loop の期待値を計算したいわけです。この (1.12) の dU 積分というものがありますので、フーリエ積分の場合に積分すると運動量が 0 の成分だけ残るのと同じですが、今この各 link 変数で積分すると、この link 変数というのは SU(N) の群多様体の上の値を持っていますので、積分すると残るのはその群の上の singlet の状態だけです。群多様体の上で singlet でない成分というのは積分した時に平均化されて落ちてしまう。という事は、今この Wilson loop の期待値を計算したいんですが、こういう所 (図 1.3 の太線部分) は全部 link 変数が 1 個ずつ付いているので、それを non-zero で残す為には結局 action から太線部分の link 変数をうまく打ち消して全部の link 上で singlet になるような configuration を作って初めてこの積分が non-zero になる。

例えばこの一番端っこ (図 1.4 の a) を見ると、link 変数が 1 つ入っている。それからここ (図 1.4 の b) にも、link 変数が 1 つ入っていますので、ここの所で singlet を作る為には少なくともこういう plaquette (図 1.4 の p1) を (action から) 落としてこないと singlet が作れない。

link 変数が 2 個あれば、その 2 個から singlet を作る事ができる。この (図 1.4 の a) と (図 1.4 の p1 に入っている a') を組み合わせる事によって、singlet を作れる。ところが今度はこういう所 (図 1.4 の p1 に入っている c や d) が singlet にならなくなってしまう。ですから、一番少ない枚数で全ての link 変数について積分が残る為には、各 link 変数について singlet でなければいけないわけですが、その為には結局、この Wilson loop に囲まれた内部の plaquette 全てについて plaquette action を落としてこなければいけない。という事になります。

という事は e^{-S} を落としてきた時に、Wilson loop の期待値で β の次数というのは落としてきた plaquette の数ですから、この Wilson loop で張られる面の中で最も少ない

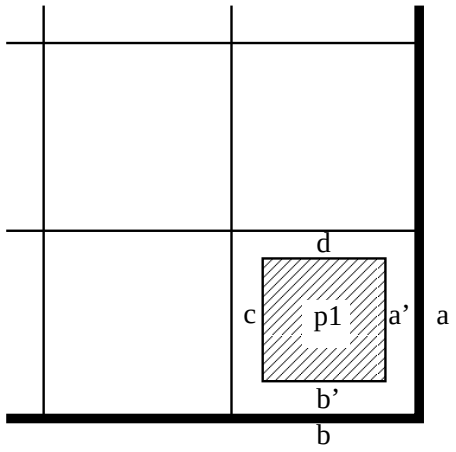


図 1.4: plaquette action を落とす

面の枚数になる。それは幾つかというと、$T \times L$。この面から少しでも膨らんでしまうと $T \times L$ より大きな面積になってしまう。ですから β の TL 乗という依存性を必ず持つ。これを exponential で書くと $e^{TL\ln\beta}$。ですから、距離 L だけ離れた quark と anti-quark との間のポテンシャルエネルギーを $V(L)$ としますと、今、時間方向に T だけ進んでいますので当然、ポテンシャルエネルギー $\times T$ という形になっているはずなんですが、ですから距離 L だけ離れたポテンシャルエネルギーというのは $V(L) = -L\ln\beta$。今は β は非常に小さいので、$-log\beta$ で正の量です。という事で、quark と anti-quark の間の力は linear なポテンシャルを持っているという事がこれによって解ります。

$$\langle W(C)\rangle \sim \beta^{TL} = e^{TL\ln\beta} = e^{-V(L)\cdot T} \tag{1.14}$$

$$V(L) \sim (-\ln\beta)\cdot L. \tag{1.15}$$

これが large N ゲージ理論から、string を見る 1 つ目の方法なんですが、ここまでに何か質問がありますか？

> 質問： $\sum_p$ の summation は正の方だけ取るんですか？マイナス無限大から無限大まで取るんですか？

この summation(1.7) ですか？この summation は今、格子ゲージ理論なので、格子点の数は有限だと思って、例えば周期的な境界条件を持つ格子だと思う。そうすると plaquette の数は有限ですから、ここで取られている p の和というのは有限個の各 plaquette についての和です。

1.2 't Hooft の Large N 展開

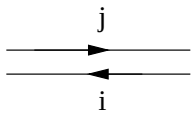
そしたら次に large N ゲージ理論から string 的描像を見る 2 つ目の話をしたいんですが、それが't Hooft の large N 展開という話です。

't Hooft の large N 展開 というのは、これからの行列模型等でも非常に重要な働きをするので、少し丁寧に見ていきたいのですが、't Hooft の large N 展開という考え方は、これからお話しますが、SU(N) のゲージ理論が作る Feynman diagram というのがあるわけですけれども、その Feynman diagram が実は string の world sheet になっているという話です。摂動展開をするので propagator であるとか、vertex がどういう形をしているか見ないといけないんですが、今度は格子ゲージ理論ではなくて普通の continual のゲージ理論です。

今ゲージ群を、SU(N) でもいいんですが、簡単の為に U(N) とします。そうすると、A_μ というのは $N \times N$ のエルミート行列で表現されます。A_μ というのはゲージ場の adjoint 表現ですので、$N \times N$ のエルミート行列で展開されるんですが、普通は A_μ というのはいわゆる Gell-Mann 行列 を使って、

$$A_\mu = A_\mu^a t^a,$$

と展開するのが普通だと思うんですが、これからやる large N 展開をやる時には Gell-Mann 行列を使うよりむしろ A_μ 自身の行列の成分 i, j 成分という形で書く。ですから、i, j というのは 1 から N まであるとする。そうすると、ゲージ理論の action (1.1) から、もちろん propagator であるとか、vertex を読み取る事ができる。それで propagator は今行列ですから i, j という 2 つの足を持っているというのが非常に重要な点で、2 本の足を持っていますので、全ての Feynman 図を二重線で書きます。

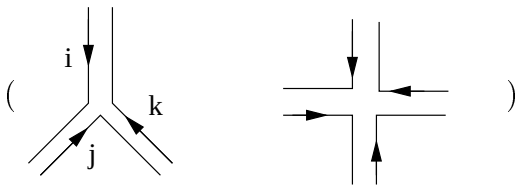


$$\langle A_\mu^{ij}(p)\, A_\nu^{kl}(-p) \rangle = \frac{g_{\rm YM}^2}{p^2} \eta_{\mu\nu} \delta^{il} \delta^{jk} \tag{1.16}$$

i という index と、j という index を持っている。この propagator はどういう意味かというと、運動量表示に行くと、i, j 成分を持つ場と k, l 成分を持つ場、この間の propagator というのは、まず運動量依存性は Feynman ゲージを取ると、$\frac{1}{p^2}$ になる。それから $g_{\rm YM}$ の依存性は、action 自体が $\frac{1}{g_{\rm YM}^2} \mathrm{tr}(F_{\mu\nu})^2$ でしたから、propagator 全体に $g_{\rm YM}^2$ が掛かります。それから μ, ν の足も Feynman ゲージなので、$\eta^{\mu\nu}$。

あと問題となるのは i, j, k, l の足の潰し方なんですが、U(N) の場合にはちょうど $\delta^{il}\delta^{jk}$。このようなデルタ関数になる。それから vertex は非可換ゲージ理論ですから、

3 点と 4 点の vertex がある。3 点と 4 点の vertex もやはり二重線で書いてやると index に関してはトレースになっていて、action の中で $\mathrm{tr}\, A^3$ とか、$\mathrm{tr}\, A^4$ という形をしていますので、index の line はこのように (1.17)、必ず線に沿って閉じて結ばれていなければいけないという風になっている。



$$\sim \quad \frac{1}{g_{\mathrm{YM}}^2} \qquad (1.17)$$

そして vertex の係数は action 全体が $\frac{1}{g_{\mathrm{YM}}^2}$ という係数を持っていましたから、これらの係数は $\frac{1}{g_{\mathrm{YM}}^2}$ に比例する。

このような Feynman ルールを使って Feynman フラフを作るわけですが、そうすると例えば vacuume、free energy を計算しようとすると例えば、このようなグラフ (図 1.5) が書けます。

planar　　non-planar

図 1.5: large N 展開の Feynman 図

これらは 3 点 vertex が 4 つ入っている Feynman 図。ところが、このグラフは普通に一本線で書くと両方クロスしないように描けるのに対して、二重線で書くと、元々はトポロジー的に同じタイプのグラフであってもクロスしてしまうグラフ (右側) というのがある。

このクロスするグラフとクロスしていないグラフというのは、これからお話する planar グラフ と non-planar グラフ という話なんですが、planar グラフ というのは Feynman グラフを書いた時に二重線が全く重ならずに書く事ができる。そういうグラフのことを planar グラフという。“plane”r ですから、平面の上に書けるという意味です。一方、non-planar グラフというのは二重線を平面に書こうとすると必ずどこかで

交差してしまうようなグラフというのを non-planar グラフという風に呼ぶ。

それで、問題となるのは、これらの planar グラフと non-planar グラフが、$\frac{1}{g^2_{\rm YM}}$ とか N の依存性が一体どうなっているのかというのが問題なんですが、そうしますと、Feynman ダイアグラムを書いてやると、そこには vertex の数、propagator の数、あとはこの閉じた index loop、そういうものでグラフというのは指定されます。今、vertex の数は例えばこれ (図 1.5 の左側) であれば、vertex の数は 4 点。それで、vertex の数を N_0 とします。それから propagator の数を N_1 とします。最後に index loop ですが、これが N_2 とします。

index loop の数と言っているのは例えばこれ (図 1.5 の左側) であれば、閉じた line の数ですから全部で 4 本になるわけです。こちらのグラフ (図 1.5 の右側) は閉じた loop の数を見てやると、これがずうっと内側は 1 本の線で繋っていますので、閉じた index loop の数はこれは 2 です。

そうしますと、vertex の数が N_0 個、propagator の数が N_1 個、index loop が N_2 本あるような weight はどう決まっているかと言いますと、まずこの vertex というのは interaction ですが、vertex からは $\frac{1}{g^2_{\rm YM}}$ というのが出てくる。それから propagator は $g^2_{\rm YM}$ が出てくる。最後に index loop なんですが、index loop は全部 N 通りありますので、オーダー N を出す。ですから、$g^2_{\rm YM}$ と N のオーダーを書いてやると、

$$\begin{aligned} \text{点 (vertex)} &\longrightarrow \frac{1}{g^2_{\rm YM}} && (1.18)\\ \text{線 (propagator)} &\longrightarrow g^2_{\rm YM} && (1.19)\\ \text{面 (index loop)} &\longrightarrow N && (1.20) \end{aligned}$$

そうすると、Feynman ダイアグラムのこれらの $g^2_{\rm YM}$ と N に対する依存性というのは weight がどうなるかといいますと、この weight は

$$\text{weight} \;=\; \left(g^2_{\rm YM}\right)^{N_1-N_0} N^{N_2}, \tag{1.21}$$

で与えられる。

それで、点と線と面が与えられると、それらから 2 次元のグラフができるわけですけれども、よく知られているように 2 次元の面というのは Euler 数、genus g で分類できる。Euler 数というのは、

$$\begin{aligned} \chi &= N_0 - N_1 + N_2 \\ &= 2 - 2g, \end{aligned} \tag{1.22}$$

で定義されている。という事は weight を書き直してやると、

$$\text{weight} \quad = \quad \left(g_{\rm YM}^2\right)^{N-\chi} N^{\chi}, \tag{1.23}$$

というのが Feynman ダイアグラムの weight になる。一番最初に摂動展開の β 関数の所でもお話したんですが、$g_{\rm YM}N$ というのを固定してやると、$g_{\rm YM}$ の依存性というのは必ず $g_{\rm YM}N$ でしか入って来ない。あとはそれ以外に $\frac{1}{N}$ の補正が付いてくるというわけです。ちょっと具体的に先程書いたこの 2 つのグラフ (図 1.5) の weight を見てやりますと、planar グラフの方は

$$\left.\begin{array}{l} N_0 = 4 \\ N_1 = 6 \\ N_2 = 4 \end{array}\right\} \Longrightarrow (g^2N)^2N^2, \tag{1.24}$$

ですから、$(g_{\rm YM}N)^2N^2$ になっている。

一方、non-planar グラフの方は

$$\left.\begin{array}{l} N_0 = 4 \\ N_1 = 6 \\ N_2 = 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow (g^2N)^2. \tag{1.25}$$

N_0, N_1 は一緒ですが、違うのは N_2 の所だけで、内側が全部繋がった一本の loop ですから内側と外側で 2 しかありませんので結局このグラフの依存性というのは $(g_{\rm YM}N)^2$ だけになっている。という事はこのグラフは planar グラフに対して $\frac{1}{N^2}$ だけ、N が大きい時には suppress されている。

それでこの Euler 数というのは... 、

2 次元面は良く御存知のように球とトーラス、あとは genus が 2 の面と、このようにトポロジカルに分類されます。球の Euler 数 χ は 2、トーラスの Euler 数は 0 です。genus が 2 の面の Euler 数は -2。オイラー数というのは genus が増えるごとに 2 づつ小さくなっていく。それで、この N の依存性は N^x という風に入っていますから、結局 genus が 1 上がるごとに $\frac{1}{N^2}$ だけ suppress される。

ですから't Hooft 極限の large N ゲージ理論 というのは何かというと、${g_{\rm YM}}^2$ の依存性は ${g_{\rm YM}}^2N$ を固定してやると完全に一緒。ところが違うのは高い genus を持った Feynman ダイアグラムというのは $\frac{1}{N^2}$ で suppress される。というのが、この $\frac{1}{N}$ 展開の重要な点です。ですから、例えば QCD で planar ダイアグラムだけを足し上げる事ができれば、それでその large N ゲージ理論というのは解けるんですが、実は planar ダ

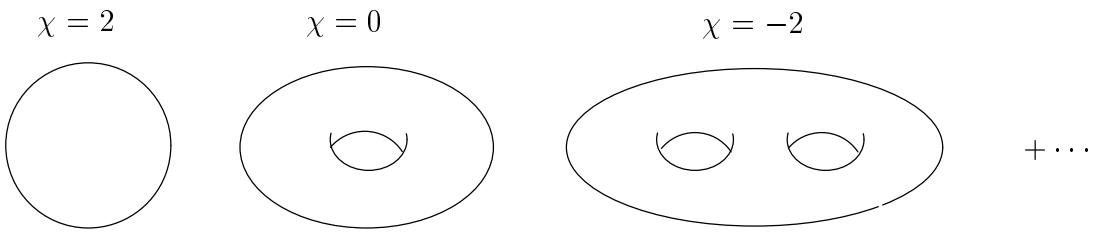


図 1.6: Euler 数による 2 次元面の分類

イアグラムに限定しても全ての Feynman ダイアグラムを足し上げるというのはそんなに簡単な事ではありません。

ここで見たように Feynman ダイアグラムで作る面というのはまさに string の world sheet と考えられる。その world sheet の relative な weight というのが $\frac{1}{N^2}$ で入ってきますので、ちょうどこの $\frac{1}{N}$ 展開というのが string coupling constant による展開に相当しています。ただ問題は、このようにして得られた QCD に現われる string 的な描像というものがあったわけですけれども、じゃあいったい QCD の string というのはどういう string なのか、という事は、まだ非常に難しい問題です。これから簡単に弦理論の話をするんですが、QCD っていうのはいわゆる普通の弦理論とはかなり違った world sheet の構造を持っています。ですから QCD 自身がどういう string 理論になっているかというのはまだ解っていない。

それからこの流れでもう 1 つ問題になるのは、じゃあその QCD が string をあらわすのであれば、逆に普通のいわゆる critical string というのは何か、あるゲージ理論の world sheet の dynamics を表わしているという風に見られないかと、それがゲージ理論と string 理論の duality と称するものです。まだその問題に関しては完全な解答はもちろん得られていません。

以上が第 1 章です。今のところで何か質問、何でもよろしいのでありますでしょうか？

質問： index loop が面に対応するというのは具体的にはどういう事ですか？

えーと、例えばこの絵 (図 1.5 の左側) を球面に描いたとする。これが球の上に乗っていると思ってください。この球をグラフの針金で作ったと考えます。そうすると、各面には必ず index loop が一本くっついています。よろしいですか？

質問：non-planar の時はどうなるのですか？

ああ、non-planar の時には絵を描くのが大変なんですが... 。この面 (図 1.5 の右側) というのはトーラスの上だと重なり無く乗せる事ができる。実際この交差している propagator を上と下にぎゅうっと持ち上げて離しますよね、そうするとトーラスの上に交差なく描けるという事が解ります。

トーラスというのは球にハンドルをつける事に対応している。ハンドルをつけるとちょうどブリッジがかかる為に、Feynman ダイアグラムの下の線がハンドルの下を通って上の線がハンドルの上を通る、という事をしてやると、このグラフはトーラスの上には交差なく描く事ができる。それがちょうど $\frac{1}{N^2}$ の補正がついている事と同じ事になる。

よろしいでしょうか。

第2章　弦理論入門

そしたら次は string に関してごく簡単に、critical string と non-critical string の違いは何かという話をしたい。これは後で必要になる最小限の話しかしませんが、string についてのごく入門的な話をします。

string というのは、もちろん点粒子の拡張になっている。これからお話したいのは string 理論のいわゆる第 1 量子化なんですが、点粒子の場合というのは、普通まず皆さんは場の理論を習うわけですが、場の理論というのは点粒子の第 2 量子化である。ですからむしろ点粒子の第 1 量子化っていうのは馴染みがないと思われますので、ごく簡単に点粒子の第 1 量子化という話をします。

2.1　点粒子の第 1 量子化

それで、この点粒子の場合は第 1 量子化というのは要するに粒子が 1 つだけあるような状態を記述します。それで、これを第 2 量子化したものがいわゆる場の理論。場の理論っていうのは結局、粒子の数が n 粒子系を扱う多体量子系の理論が場の理論なわけですが、この点で、第 1 量子化と第 2 量子化の関係というのは点粒子と弦理論では非常に大きく違う点があります。それは後で string を話す時に話しますが... 。

点粒子の第 1 量子化というのは何かというと、相対論的な点粒子ですので時空のある点、initial な点から final な点への amplitude というものを計算します。ある initial な点を x_i^μ、それから final 点の座標を x_f^μ という風に書きますと、この間を propagate する粒子をどう記述するかというと、これが Feynman の経路積分で与えられる。

x_i^μ と x_f^μ の間を結ぶ全ての path について足し上げて、path の weight というのは、この間の path の距離を weight にしなさい、

$$\mathscr{A}_i = \int_{i\to f} \mathscr{D}x\, e^{-m\int ds} \tag{2.1}$$

$$= \text{KG 場のプロパゲータ}. \tag{2.2}$$

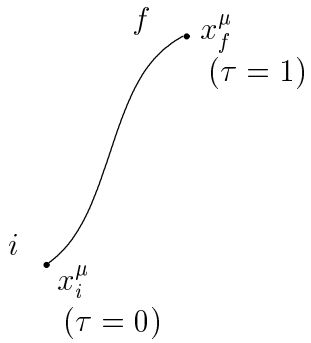


図 2.1: 点粒子の経路積分

それで、これは何を与えているかなんですが... 。これは initial から final に向かう相対論的な粒子... 相対論的な粒子は場の理論でいえば Klein-Gordon 場ですが、Klein-Gordon 場の propagator になる。実際にこれがなぜ Klein-Gordon 場の propagator になるかというのをごく簡単に紹介します。

この ds というのは initial の点から final の点へ、1 つ path を与えた時のその間の距離ですので、距離は... この間の path を τ というパラメータを使って、τ が 0 から 1 までの path を $x^\mu(\tau)$ という風に書いたとします。そうすると、この間の initial から final へ行く距離というのは、これはもちろん τ というパラメータを使って

$$\int ds = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right)^2}\, d\tau. \tag{2.3}$$

こう与えられます。このままだと、この path integral を実行するのは非常に困難です。x に関してルートで入っていますから、このままでは path integral を実行する事はできないんですが、これを補助場を使って書き換えてやります。ここで e という補助場を導入するんですが、

$$\mathscr{A}_{i\to f} = \int \frac{\mathscr{D}x\mathscr{D}e}{V_{\rm rep}}\, e^{-\int_0^1 \left(\frac{\dot{x}^2}{2e}+\frac{m^2}{2}e\right)d\tau}. \tag{2.4}$$

この e というのは 1 次元上の einbein に相当している補助場なんですが、この path 上に e という補助場を導入すると、先程書いたこの path integral(2.2) と、この path integral (2.4) は完全に等価である事が証明できる。これは量子論的にも点粒子の場合は完全に証明できるんですが、ここでは古典的に本当に等しいかどうかというのを見てやります。これ (2.4) を e で変分してやります。そうすると、e で変分して運動方程

式を求めると、

$$\frac{\dot{x}^2}{2e^2} = \frac{m^2}{2}, \tag{2.5}$$

ですから、これから e が解けて、e というのは、

$$e = \frac{\sqrt{\dot{x}^2}}{m}. \tag{2.6}$$

この形をこれ (2.2) に代入してやると、先程言ったこれ (2.4) になる事がすぐ解る。実際にこの点粒子の場合にはこの両者は完全に等価である事が証明できる。ちょうどこの対応はこちら (2.2) が Nambu-Goto タイプで、こちら (2.4) は Polyakov タイプに相当するんですが。

その次にやる事は、この action は、先程 e が einbein だと言いましたが、1 次元の意味での一般座標不変性... 1 次元の τ という座標をパラメトライズしなおすような一般座標不変性が存在します。この action の持っている不変性というのは、1 次元の意味での reparametrization 不変性です。それはどういう変換かというと、ちょうど τ を新しい $\tilde{\tau}$ という変数を導入して、その時に e と x を変換させるわけですが、x の方は 1 次元 reparametrization に対するスカラー場としての変換。それから e というのは einbein ですので、

$$\tau \longrightarrow \tilde{\tau} = f(\tau) \qquad \begin{cases} \tilde{x}(\tilde{\tau}) = x(\tau) \\ \tilde{e}(\tilde{\tau})\, d\tilde{\tau} = e(\tau)\, d\tau \end{cases} \tag{2.7}$$

そうすると、これ見てやれば解りますが、第 2 項目は $e(\tau)d\tau$ という形で入っているのでここの所は不変。それから第 1 項目は $\frac{1}{e}$ なんですが、ところがこの微分が 2 個ありますので、ちょうどそのせいで第 1 項目もこの変換に対して不変になる。それは自分でやってみて欲しいんですが。

それから、ここ (2.4) で積分を $V_{\rm rep}$ で割っている理由は、この action には reparametrization 不変性がありますので、ちょうどその分の自由度で割ってやらないといけないという事です。次に、この reparametrization 不変性をゲージ固定します。

この変換を使ってやると e という einbein の変数はほとんど落としてしまう事ができるんですが、落として $e(\tau)$ というものを constant まで持っていく事ができる。ところが、$e(\tau)$ を積分した量は、これはちょうど path の長さですから reparametrization に対しては動かせない量ですので、このゼロモードの所を t と書きますと、このゼロモードの所だけが e という変数の中でゲージ固定できない変数になっています。ですので以後、$e(\tau)$、この定数を t と書く事にします。

$$e(\tau) \longrightarrow \text{定数}\, t \qquad \int_0^1 e(\tau)\, d\tau = t. \tag{2.8}$$

この t は場の理論で出てくるいわゆる singular parameter に相当する変数なんですが、そうしますとこの path integral で $\frac{\mathscr{D}e}{V_{\rm rep}}$ という部分は結局 t だけの 1 変数の積分に落とす事ができる。

$$\int \frac{\mathscr{D}e}{V_{\rm rep}} = \int dt \qquad \text{(open path)}. \tag{2.9}$$

ここでちょっと注意が必要なんですが、実はこう置けるのは path が開いている時の場合だけ。これは open path の場合。実際これはやろうと思うと本当はきちんと measure を計算して他に t のどういう依存性が入ってくるかというのを見ないといけないんですが、open path の場合は確かにこれで正しい答えを与えるという事が解ります。

一方、閉じた path の場合、これは後でもう 1 回説明しますが、閉じた path の場合の場合には実は dt ではなくて $\frac{dt}{t}$ になります。

$$\int \frac{\mathscr{D}e}{V_{\rm rep}} = \int \frac{dt}{t} \qquad \text{(closed path)}. \tag{2.10}$$

今は propagator の際は open path なので上のケースを使うわけですが、そうすると、この action というのが結局、この e が t になりましたが、t の積分が 1 つ残って、

$$\cdots \;=\; \int \mathscr{D}x \int_0^\infty dt\, e^{-\int_0^1 \left(\frac{\dot{x}^2}{2t}+\frac{m^2}{2}t\right)d\tau}. \tag{2.11}$$

こうなります。それで、とりあえずここの t を消したいので、$t \times \tau$ を新たに τ と変数変換します。

$$t\tau \to \tau. \tag{2.12}$$

するとこの積分は、ちょうどこの $\frac{1}{t}$ と t が消えて、第 1 項目は τ の微分が入ってますから、ちょうど両方消えて、積分域が $0 \sim t$ まで、それで、

$$\cdots \;=\; \int \mathscr{D}x \int_0^\infty dt\, e^{-\int_0^t \left(\frac{\dot{x}^2}{2}+\frac{m^2}{2}\right)d\tau}. \tag{2.13}$$

このような path integral を実行すればいいという事になります。今、この $\mathbb{x}^\mu$ と書いたのは $\cdot$ というのは τ 微分 $\frac{dx^\mu}{d\tau} = \mathbb{x}^\mu$ です。

この形自体を見ると、これはお馴染みの非相対論的粒子の path integral と全く同じになっている。今は Euclidian ですが、 Euclidian で mass m を持つ非相対論的粒子の path integral。という事は、今そこで書いた経路積分というのは、非相対論的な path integral の analogy を使ってやると、この t 積分は後に残しておいて、この initial な

点から final の点への path integral を先に実行する。という事は結局、非相対論的な Hamiltonian になる。時間間隔が t で Hamiltonian が $\hat{p}^2 + m^2$

$$\cdots \quad = \quad \int_0^\infty dt \, \langle x_f^\mu | e^{-\frac{t}{2}(\hat{p}^2+m^2)} | x_i^\mu \rangle. \tag{2.14}$$

まあむしろここ (2.13) からここ (2.14) に行くには普通 path integral でやるように initial な所から final な所への、この t というのを、時刻 t を細かく分割してやって各分割した中にいわゆる 1 の分解を入れるわけです。path integral を求めるやり方というのは Hamiltonian... e^{-iHt} というのがあった時に、時刻 t を細かく分割して、細かく分割した中に完全系を使って 1 の分解をやる。それで、その 1 の分解を入れたものを評価すると path integral が得られるという path integral を導く時のやり方を思い出して欲しいんですが、そうするとちょうどこの operater (2.14) の path integral 表示というのがちょうどこれ (2.13) になる。

それで、後は (2.14) の t 積分というのは簡単に実行できて、initial な点から final な点への propagator というものが出てきます。

$$\int_0^\infty dt \, \langle x_f^\mu | e^{-\frac{t}{2}(\hat{p}^2+m^2)} | x_i^\mu \rangle \quad \sim \quad \langle x_f^\mu | \frac{1}{\hat{p}^2 + m^2} | x_i^\mu \rangle. \tag{2.15}$$

これはまさに Klein-Gordon 場の propagator になっている。initial な点から final な点への amplitude を計算しなさいというと、結局 Klein-Gordon の propagator で両方の action が結びついているという事を意味している。

それで、これが開いた path の場合で、閉じた path の場合には、ここ (2.15) の t 積分が $\frac{dt}{t}$ になる。ここが $\frac{dt}{t}$ になるとこの積分が作用の積分が propagator ではなくて $\frac{dt}{t} \times \exp(t \times \cdots)$ の積分ですので、ちょうど log になります。

$$\log(\hat{p}^2 + m^2) \tag{2.16}$$

それはまさに、Klein-Gordon 場の partition function を計算してる事になります。

ですから相対論的な点粒子の第 1 量子化というのは Klein-Gordon 場の 1 粒子状態を量子化している事に対応する。これが点粒子の第 1 量子化。これからやりたい話はこの考え方を弦に応用する事です。

ちょっと一つだけコメントしておくと、第 2 量子化するというのは、点粒子の場合は 1 粒子状態を多粒子状態にするわけですから、粒子がたくさん飛んでいるわけでその間に相互作用が入る。場の理論で非常に重要なのは相互作用を入れるという事。相互作用を入れると粒子が 2 つに分かれたり、2 つの粒子が散乱したり、そういう事が起こ

る。これらの interaction を systematic に扱う方法、それが場の理論です。それで、点粒子の場合には interaction というのは 3 点でも 4 点でも全く自由に、もちろんゲージ理論であれば ゲージ不変性という principle はありますが、それでも、interaction のやり方というのは色々有り得る。ところがこれからお話する弦理論の場合にはそこが点粒子と大きく違っている点なんですが、それは次に説明します。

2.2 Stringの第1量子化 — Nambu-Goto action

以上が点粒子の第 1 量子化だったわけですが、今度は string の第 1 量子化という話をします。

string の第 1 量子化というのは、点粒子を string に拡張すればいいわけですが、今度の場合は string があってそれが時空を propagate している。そういうものを計算すればいい。それで、これから問題になるのは例えばこの string の propagation がどういう propagator を与えるかとか、後は閉じた loop の場合には string の分配関数がどうなるか、といった事を議論していきます。

先程の点粒子の場合には相互作用を入れるにはどうしても第 2 量子化に行かざるを得ない。第 1 量子化だと、相互作用というのは非常に扱うのが難しかった。ところが、string の場合にはそこが非常に点粒子と大きく違う所で、string の相互作用というのは string が 2 つに分かれる、こういうもの (図 2.2) が string の相互作用になっている。

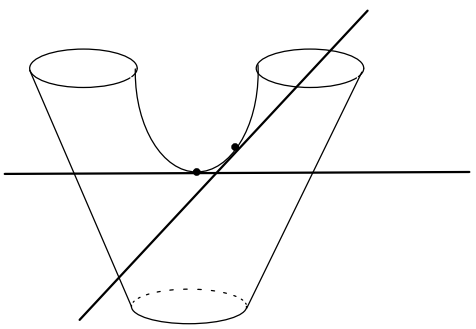


図 2.2: string の相互作用 – Lorentz 不変性

この 1 本の string が、2 本の string に分かれるような相互作用を扱いたい。それで、この両方を見て非常に大きく違うのは、点粒子の場合というのは相互作用の点というのは時空のある 1 点で相互作用が起こっている。ところがこの string の場合には一体

どこで相互作用が起こるか、一見、まあこの辺で相互作用が起こっているようにも見えるわけですが、ところが、今、Lorentz 不変性がありますから、例えば時間軸というのは、こういう切り方 (図 2.2) も出来ますし、逆にこのような (図 2.2、線の角度を変えて...)、弦が相互作用している所というのがこう有るわけですが、ある時間軸に沿うとするとちょうどここの所が弦の相互作用を記述している、ちょうどここの所で 1 本の string が 2 本に分かれている。ところが、時間軸の取り方を少し変えますと、今度は相互作用している点というのが変わるわけです。

ですから string にとって実は相互作用というのは string の propagation と非常に区別しにくいという性質があります。

string で知られているのは、点粒子の場合には点粒子の第 1 量子化を行なって、それからさらに場の理論へ持っていって相互作用を入れなきゃいけない、その相互作用の自由度というのは非常にたくさん有り得るわけです。ところが弦理論の場合には実は弦理論の第 1 量子化をしてしまうと、実はもう第 2 量子化をする段階において入れる自由度が全くない、完全に第 1 量子化を行なっただけで第 2 量子化の理論が決まってしまうという性質があります。点粒子の場合には相互作用定数と相互作用の種類というのがあったのですが、弦理論の場合には相互作用の定数だけで決まってしまう。

それで、実はさらに相互作用定数というものは弦理論の場合は弦理論に含まれている dilaton と呼ばれる粒子の真空期待値によって shift する事ができるという事が、知られていますので、実は弦理論の場合は相互作用定数すら本当は外から与えるパラメータではないという事になります。ここは点粒子と弦の非常に大きな違いで、その意味で点粒子の理論は場の理論が無ければそこからそこから先へ全く進めなかったわけですが、実は弦理論というのはむしろ場の理論というのはある意味おまけみたいなもの。必ずしも弦の場の理論が無く弦理論というの詳細な解析ができるわけです。

これから、その弦の第 1 量子化というのを調べていきたいんですが、先程点粒子の場合は initial な点から final な点への path の長さというもので、action が与えられるという事をお話したんですが、弦理論の場合もそれの非常に自然な拡張になっている。initial な string から final な string を繋ぐ面ができるわけですが、その面について全て足し上げなさいと、それで、その面積を weight にして足し上げましょうというのが、いわゆる Nambu-Goto action (南部-後藤 作用) $S_{\rm NG}$ と呼ばれているものです。

$$\mathscr{A}_{i\to f} \quad = \quad \int \mathscr{D}X \; e^{-S_{\rm NG}[X]}. \tag{2.17}$$

この 2 次元面 (図 2.1) 上の座標を、普通 (τ,σ) と書くんですが、まとめて、σ とも書きます。この面の上に (τ,σ) というパラメータがあって、$X^\mu(\tau,\sigma)$ という、(τ,σ) から時空の X^μ という点への mapping を与えると、それが 2 次元面をある時空に埋め込

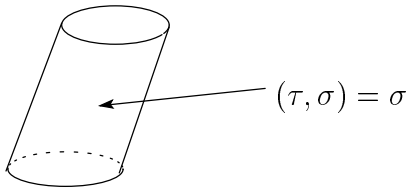


表 2.1: string

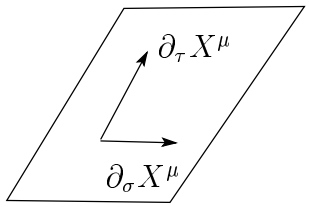


表 2.2: 面を張る 2 つのベクトル

むという事になります。ですから、world sheet の各点毎に X^μ という値が与えられている。

$$(\tau,\sigma)=\sigma \quad \xrightarrow{\mathbb{R}^n\text{へ埋め込み}} \quad X^\mu(\tau,\sigma). \tag{2.18}$$

それで、この X^μ という値が与えられた時にこの面の上で、τ 方向と σ 方向というのがあるわけですから、時空の中でこの面を張る 2 つのベクトル、X^μ の τ 方向の微分と、σ 方向の微分という 2 つのベクトル (図 2.2) があります。

この 2 つの独立なベクトルの張る面、X^μ というのは時空に埋め込まれていますから、この面に induce された metric h_{ab} というのが決まります。それは 2 つのベクトルを使って、

$$\begin{gathered} h_{ab}=\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu. \\ (a,b=\tau,\sigma) \end{gathered} \tag{2.19}$$

あるいは、とにかく今欲しいのは 2 つのベクトルの張る面積ですから、2 つのベクトルの外積を取ってやって、それが面積になります。それが結局何に相当しているかというと、この induce された metric の determinant を取ってルートを取ったもの、というのが面の面積になる。ちょうど、いわゆる volume factor というのは $\sqrt{g}$ で今は 2 次元ですから、それが induce された metric の $\sqrt{h}$ が、この面の面積 (=2 次元の volume factor) になります。

ですから、この Nambu-Goto action というのは、

$$S_{\rm NG} \;=\; \frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2\sigma\ \sqrt{\det(h_{ab})}, \tag{2.20}$$

というものが Nambu-Goto action。面積を与える事になります。この Nambu-Goto action は先程点粒子の場合に点粒子の path の長さで経路積分しなさいというものの一般化になっているわけですけれども、やはりこの場合も X^μ という変数のルートになっていますので、これをそのまま経路積分する事は非常に困難です。そこで、Nambu-Goto action ではなくて普通よく使われるのが、Polyakov action と呼ばれるものです。

これから、string の path integral を表す方法、何通りかあるんですが、それを 3 通り程紹介したいと思います。最初はこの Nambu-Goto action。で 2 つ目がこれからお話する Polyakov action という話なんですが、先程点粒子の場合には e という einbein、補助変数を導入して実際 path integral が実行できたわけですけれども、string の場合にもやはり補助変数を導入します。Nambu-Goto action というのは X^μ だけの関数で、これに 2 次元ですから 2 次元面の metric という補助変数を導入して、それから量子化を行います。それが、Polyakov の導入した Polyakov action と呼ばれるものです。

2.3 Polyakov action

Polyakov action は Nambu-Goto action と違って、変数として world sheet の上の X^μ という変数と、それからもう一つ world sheet の上の 2 次元の metric g_{ab} という変数を持つ理論です。それで、この action というのはこのように、

$$S_{\rm Pol}(X, g_{ab}) = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \, \sqrt{g} \, g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu, \tag{2.21}$$

ちょうど、2 次元の一般座標不変なスカラー理論に似てるわけです。

この Polyakov action と Nambu-Goto action の等価性というのは、先程の点粒子の場合には完全に量子論的に等価である事が証明できるんですが、今の string の場合に量子論的な等価性というのは証明できません。ただ、古典的に等価であるという事はすぐ示す事ができて、そうすると、g で変分を取ると、結局これは 2 次元のスカラー場の action ですから、g_{ab} の変分というのは 2 次元のスカラー場の energy-momentum tensor $= 0$ という式になるわけです。

2 次元の energy-momentum tensor は、$g^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu$ の変分から、$\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu$ という項が出てきて、それから、この $\sqrt{g}$ の変分を取ってやると g_{ab} に比例するような項が出ます。

$$T_{ab} \;=\; \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu - \frac{1}{2} g_{ab} \left(\partial_c X^\mu \partial_d X_\mu g^{cd} \right). \tag{2.22}$$

これが 2 次元の energy-momentum tensor で、traceless になるように後の係数が決まっています。

それで、$T_{ab}=0$ の式を解いてやると、g_{ab} というのは $\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu$ に比例していないといけない事がわかる。これを解くと結局、g_{ab} というのは何か、一般には local に σ に依存する比例係数があって、

$$g_{ab} \quad = \quad f(\boldsymbol{\sigma})\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu. \tag{2.23}$$

この g_{ab} を action に代入してやると、これからすぐに、Nambu-Goto action になるという事がわかります。

実は、この $f(\boldsymbol{\sigma})$ というのは実は決まらない定数です。というのはこの方程式自体がこれからお話するように、この action には local scale 不変性というのがあるんですが、その local scale 不変性という symmetry の為に、この $f(\boldsymbol{\sigma})$ というのは運動方程式からは決まらない量になっている。それで、この Polyakov action が持っている不変性なんですが、先程、点粒子の場合には補助場 e というのを導入した action は 1 次元の一般座標不変性を持っているという事をお話しました。今の場合もそれと同様に今度は 2 次元の一般座標不変性を持っています。ですから action の持っている不変性というのは、

- 2 次元一般座標不変性

- local scale 不変性　(Weyl 不変性)

まず第 1 に 2 次元の一般座標不変性で、これは、X^μ という場は 2 次元のスカラー場でしたから、X^μ がスカラー場として変換しなさい、それから g_{ab} は 2 階の tensor 場として変換しなさい、という変換性のもとで Polyakov action というのは不変になっています。

第 2 にもう一つ、Polyakov action には classical な symmetry がありまして、それが local scale 不変性と呼ばれているものです。もしくは Weyl 不変性と呼ばれているんですが、

$$g_{ab}(\boldsymbol{\sigma}) \longrightarrow e^{\phi(\boldsymbol{\sigma})} g_{ab}(\boldsymbol{\sigma}). \tag{2.24}$$

この変換はどういう変換かというと metric g_{ab} を 2 次元の上の local な量 $\phi(\sigma)$ という何かの量を使って任意に scale を変換してよろしいと、このような変換です。

先程、g_{ab} が $f(\sigma)$ の分だけ解けないと言ったのはまさにこの不変性の為なんですが、実際これで不変であることを見てみると、$\sqrt{g}$ というのは下付きの g_{ab} の determinant の

ルート。今は 2 次元ですから、ちょうどここの上付きの g^{ab} と下付きの g_{ab} の determinant のルートの所で入っている g の factor が上と下でキャンセルして、結局このような変換 (Weyl 変換) をしても $\phi(\sigma)$ の変化分というのは全く出ない事がわかる。ですからこの action というのは classical に local scale 不変性をもっている。

ところが、実はこの local scale 不変性というのは量子論に行くと一般には anomaly を出します。anomaly というのは何か古典的な不変性があっても、実は場の理論というのは action だけを与えて定義されるものではなくて、action を与えて、それにさらにいかに ultra violet の cut off を入れるかという両方を合わせて初めて場の理論というのは定義される。もしくはちょっと別の言い方をすると、action を与えて、さらに measure をどのように決めるかとういうセットでないと場の理論は定義できない。

それで、ultra violet の cut off を入れる一つの方法は格子ゲージ理論ですけれども、今は path integral で見ると measure をどう決めるか。2 次元の一般座標不変性というのは壊したくないので、measure 自身は一般座標不変であるように定義します。そうすると当然 measure の中に g_{ab} という metric が入ってきてしまうことになります。そうすると、metric が入ってくるのでどうしても local scale 不変性を保つことができなくなる。ですから、2 次元一般座標不変であるように量子化をすると、古典的な不変性であったもう片方の local scale 不変性というのが一般には壊れてしまいます。それがどれだけ壊れるかということをこれから見ていきます。

量子化すると Weyl 不変性に anomaly が出る事、それを Weyl anomaly と呼んでいますが、どれだけ Weyl anomaly が出るか、これは導いていると結構長くなるので、ここでは答えだけ書いてしまいたいんですが、先程の Polyakov action のうちで g_{ab} というのを積分しないで外場だと思って置いときます。X の積分だけしなさいと。Polyakov path integral というのは X^μ と g_{ab} と両方積分するんですが、今ちょっと Weyl anomaly を見る為に X^μ の積分だけを実行します。

$$Z[g] = \int \mathscr{D}X_g \; e^{-S_{\rm Pol}(X,g)}, \tag{2.25}$$

$$Z[g\,e^{\phi}] = Z[g] \exp\left(\frac{D}{48\pi}\, S_{\rm L}(\phi, g)\right) \tag{2.26}$$

Polyakov action をある background のもとで X^μ で積分しなさいと、そうすると X の measure の中に metric の依存性が入っていますので、それを現わにする為にここに $\mathscr{D}X_g$ と書いています。

で、問題となるのは $Z[g, e^{\phi}]$、これを local scale 変換したときに、はたしてこれが元の $Z[g]$ とどれだけ変わるか。classical には Polyakov action はこの変換に対して不変でしたから、もちろんこの action の部分は不変。問題となるのはこの measure のとこ

ろなんですが、measure のところは実は不変ではありません。不変でないお釣りの部分が、これからお話する Liouville action といわれているもので表現されるんですが、Liouville action というのは、今 ϕ という変換をしましたので ϕ とそれから metric g の関数です。

これが実際どういう関数であるか。この係数が D に比例しているのは、X の積分というのは D 個、D 次元の空間に埋め込まれた積分だとしていますので X の積分が D 個あるのでちょうど D 倍されているということです。ここで S_N と書いたものが Liouville action と呼ばれているものなんですが、その形は 2 つの項からなっていまして、

$$S_{\rm L}(\phi, g) = \int d^2\sigma \, \sqrt{g} \left(\frac{1}{2} g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi + R^{(2)} \phi \right), \tag{2.27}$$

第 1 項目は先程書いた Polyakov action、一般座標不変なスカラー場の action と全く一緒です。先程の X を ϕ に置き換えただけの一般座標不変なスカラー場の action です。ところがそれ以外に重要な項が 2 次元の曲率との coupling。この 2 次元の曲率との coupling を持っているというのが、この Liouville action の非常に大きな特徴です。この為に、単純なスカラー場とは違って、そう簡単には量子化できない。

結局この factor はどこから来たかというと、この measure $\mathscr{D}X_g$ という所が不変でなかったというわけですから、これは単に書き換えに過ぎませんが、この measure の所を、background を ge^{ϕ} と変更してやると、

$$\mathscr{D}X_{g\,e^{\phi}} = \mathscr{D}X_g \exp\left(\frac{D}{48\pi} S_{\rm L}(\phi, g) \right), \tag{2.28}$$

という事です。

それで、これを計算する。この公式を計算するのは色々な計算の仕方があるんですが、一番簡単なのはいわゆる藤川の方法というのを使ってこの measure、Jacobian の計算をしてやればいいんですが、ちょっと多少長くなるのでここでは結果だけを話していきたいんですが、もう 1 回 Polyakov の path integral に戻って考えます。

Polyakov の string というのは、X の積分とそれから g というのも dynamical 変数として積分される量です。

$$Z = \int \frac{\mathscr{D}X \, \mathscr{D}g}{V_{\rm gauge}} \, e^{-S_{\rm Pol}(X,g)}. \tag{2.29}$$

これが Polyakov 流の string の第 1 量子化だったわけですけれども、今まず、2 つの不変性があったので、metric を第 1 の不変性である 2 次元の一般座標不変性を使ってゲージ固定をします。

先程、点粒子の場合も 1 次元の一般座標不変性を使って、einbein e というものを t という変数まで持っていく事が出来たわけです。2 次元の場合も全く同様で、今度 2 次元の場合の metric の自由度は 3 自由度あります。1 次元の場合は完全に t というゼロモード以外は全部落とせたんですが、2 次元の場合は、元々2 次元の対称テンソルですから自由度が 3 個あって、その 3 個の内で、2 次元の一般座標不変性というのは自由度が 2 個ありますので、自由度が 1 個分だけは余分に残ります。ですから 2 次元の metric を一般座標不変性を使ってゲージ固定をするんですが、ゲージ固定をしてやると、ある有限個のパラメータを持った何かの固定された metric${g_{ab}}^{(0)}$ になります。まあその有限個の自由度の部分はあまり重要ではないんですが、genus を g とすると $3g-3$ 個の有限個のモジュライと呼ばれるパラメータ μ を持った何かの固定された metric。それ掛ける、conformal factor $e^{\varphi(\boldsymbol{\sigma})}$。

$$g_{ab} \longrightarrow g_{ab}^{(0)} \times e^{\varphi(\boldsymbol{\sigma})}. \tag{2.30}$$

先程 2 次元の場合には 1 自由度だけ余分に残ると言いましたが、それがちょうどこの conformal factor で、conformal factor というのは、この固定された metric に local な scale 不変性の自由度を残している。ですからこの分の自由度 (とモジュライ) だけが一般座標不変性でゲージ固定しきれない部分になっています。

それから、ゲージ固定するときに 1 次元の場合はゴーストを考えなくても良かったんですが、実は 2 次元の場合にはきちっとその Faddeev-Popov ゴースト (ゲージ固定する事に伴なって必要なゴースト) を入れないといけません。

ですから、$\frac{\mathscr{D}g}{V}$ はゲージ固定した後では、まず最初にあるのが $d\mu$ というモジュライの積分と、あとこの φ というのが 1 自由度残っておりますので、掛ける $\mathscr{D}\varphi$。それからあともう一つ、Faddeev-Popov determinant これももちろん g に依存している。

$$\frac{\mathscr{D}g}{V_{\text{rep.}}} = d\mu \mathscr{D}\varphi \; \Delta_{\text{FP}}[g], \tag{2.31}$$

という所まで 2 次元の $\frac{\mathscr{D}g}{V}$ というのは持っていく事が出来ます。そうすると、この Polyakov の path integral、この分配関数というのは、

$$\text{式 } (2.29) = \int d\mu \; \mathscr{D}\varphi \; \mathscr{D}X_g \; \Delta_{\text{FP}} \; e^{-S_{\text{Pol}}(X,g)}. \tag{2.32}$$

こういう形まで持っていく事ができる。今この中で metric g に依存しているのは、まず $\mathscr{D}X_g$ という measure の部分。それはちょうど Weyl 変換すると、

$$\mathscr{D}X_{g\,e^{\phi}} = \mathscr{D}X_g \exp\left(\frac{D}{48\pi}\, S_{\text{L}}(\phi, g)\right), \tag{2.33}$$

こういう変換性をしている。

もう一つ重要なのが Faddeev-Popov determinant で、これも metric g に依存しています。これが Weyl 変換したときに Faddeev-Popov determinant がどういう応答をするかという事を知らないといけません。答えだけ書かせていただくと、実はこの Faddeev-Popov determinant の所を local scale 変換してみますと、先程出てきた Liouville action を使ってやはり書く事ができるんですが、そこの係数の所が先程は D という係数が出てきたんですが、こんどはゴーストですので、ちょうどこの -26 という負の値を出します。

$$\Delta_{\mathrm{FP}}[g\, e^{\phi}] = \Delta_{\mathrm{FP}}[g] \exp\left(\frac{-26}{48\pi}\, S_{\mathrm{L}}\right). \tag{2.34}$$

ですから、これ (2.33) がちょうどボゾンの所から来る $\mathscr{D}X_g$ の local scale 変換に対する振舞いで、一方こちら (2.34) が Faddeev-Popov determinant が local scale 変換に対してどう振舞うか。

という事はこの 2 つを見てやると分かるように、bosonic string の measure からくる local scale 不変性の破れと、この Faddeev-Popov determinant からくる local scale 不変性の破れ (この Faddeev-Popov の方は g の量子化から来ていますのでどういう matter があるかというのとは全く無関係) というのはちょうど D が 26 のときには完全にキャンセルして Liouville action というのは落ちてしまいます。

という事はこれを見てやると分かるように結局 ϕ の依存性はどこに入ってくるかというと、このそれぞれの local 不変性の破れのところからしか ϕ の依存性の破れというのは入って来なかった。

先程 metric がこう (2.30) 分解できると言ったんですが、もし local scale 不変であれば、この φ というのは local scale 不変のゲージ変換を使って完全に落としてしまう事ができる。ところが今の場合 Weyl anomaly があるので一般には落とせないんですが、ところが 26 次元の時に限って bosonic string ではこの local scale 不変なこの conformal mode φ が完全に理論から decouple してしまいます。

ですから 26 次元の場合というのが非常に特殊で、bosonic string では D が 26 の時には conformal mode (φ) というのは理論から完全に decouple してしまう。このような string 理論のことを critical string (臨界弦) という風に呼んでいます。

それで、この conformal mode が decouple する必然性というのは実際に string のスペクトルを求めようとすると (今回はこの部分はやりませんが)、例えば、ゲージ理論の時は negative norm の状態というのが出てきてしまった。string のときにも同様で、string を量子化しようとすると negative norm の状態が出てきて、positive な Hilbert

空間、ユニタリーな理論が作れなくなってしまう。

ところが、D が 26 の時はうまい事が起こって完全に負のノルムを持つ状態が理論から decouple してしまう。それは no-ghost theorem と呼ばれているんですが、D が 26 の時にはその no-ghost theorem が証明できる。ですから理論として完全に整合的な理論が作れる。という事で、D が 26 というのが普通に量子化するには必要です。それで、D が 26 でない string のことは非臨界弦と呼びます。

先程言い忘れたんですが、この係数はちょうどその Virasoro 代数の central charge と呼ばれているものになっている。(Virasoro 代数というのは、Z を変分して出て来た energy momentum tensor $= 0$ という constraint がありましたけれども、その constraint が作る代数が Virasoro 代数。)

ですからスカラー場 1 つに対しては Virasoro の central charge は 1 を出していて、トータルで central charge D を出している。一方、この Faddeev-Popov ゴーストというのは g を量子化して出てきたゴーストなんですが、bosonic なこのゴーストの central charge は -26 です。それで、トータルの central charge が 0 になりなさいというのが臨界弦と呼ばれている物です。

ですから今は、matter の central charge が 26 なんですが、非臨界弦というのは matter の central charge が 26 よりも小さいような物。特にその、これから考えたいのは central charge が 0 の場合なんですが、central charge が 0 という事は matter が一切入っていないという事で、そういう理論が果して量子化できるのかと。それが議論されたのが今から 10 年位前なんですが、実はこの Liouville 理論というのは先程書いた 2 次元の曲率に couple しているという非常に複雑な理論なんですけれども実は matter の central charge が 1 よりも小さい場合、つまり D が 1 よりも小さい場合には実は正しく量子化できるという事が解ります。これは後で matrix model との関係の時に言いたいんですけれども、なぜ c が 1 のバリアがあるかという話も matrix model の時にお話します。

それで、これが string の path integral の二つ目の formulation で、その次に今度は最後の 3 つ目として、あまりこれは馴染みが無いと思うんですが、いわゆる Schild action という話をします。

質問：central charge とは何ですか？ どういう物か解らないのですが

それは説明してないんですが、string の量子化をしようとすると、普通やるのは conformal gauge というゲージにとって、Polyakov action の 2 次元の metric を固定して量子化をするんですが、conformal gauge というのは何かというと、g_{ab} という 2 次元の metric をフラットな metric 掛ける何か conformal factor というようにゲージ固定する

というのが conformal gauge というんですが、こういうゲージ固定をする事のまず第一の利点は先程の Polyakov action を見てみると、この $\exp\phi$ という部分は完全に $\sqrt{g}$ と g_{ab} で打ち消し合うので、この部分は落ちてしまいます。そうするとその Polyakov action にこの conformal metric を入れてやると 2 次元のスカラー場というのは完全に 2 次元の上のフリーなスカラー場になります。そこの所はいいでしょう。

ところが、その string 理論というのはもちろんフリーなスカラー場というだけではなくて、もう一つ非常に重要なのが、元々Polyakov action は g_{ab} という自由度を持っていて、それをこの conformal gauge に固定したわけですから、これプラス constraint があります。

ゲージ理論の量子化をちょっと思い出してもらいたいんですが、例えばゲージ理論で $A_0 = 0$ ゲージというのを取りますね、$A_0 = 0$ ゲージを取ると A_0 の部分は完全に理論から落ちちゃうわけですけれども、それ以外にその、Gauss law の constraint と呼ばれている A_0 を積分して出てくる constraint ($\div\mathbf{E} = \mathbf{j}$ というのが Gauss law constraint) を課して量子化しないといけない。それで、ゲージ理論の場合には Gauss law constraint が正しく first class の constraint として書く事ができれば負のノルムを持った状態は消えてしまうという事が証明されているわけです。QED の時にはそうだった。QED 自身は negative norm の状態を持っていたわけですけれども、Gauss law constraint があるせいで消えている。

この string の場合も同様で、conformal gauge を取ったと時に Gauss law constraint に相当するものが Virasoro constraint と呼ばれる。これは g_{ab}、結局 conformal gauge を不変にするような変換に対する不変性がまだあって、それに対する constraint を置かなきゃいけない。それがちょうど energy momentum tensor $= 0$ という constraint。その constraint が Viraoro constraint と呼ばれています。

それで、central charge とは何かというと、この energy momentum tensor T_{ab} というのは 2 次元の場なので σ に依存している。それで、σ でフーリエ展開したものが普通、L_n と書いてある量です。

$T_{ab} = 0$ というのは実はこれが traceless symmetric tensor なので、2 つの constraint になる。その 2 つの constraint をそれぞれフーリエ展開したものが L_n と $\tilde{L}_n$ というちょうど holomorphic と anti-holomorphic の Virasoro 代数の generator になっているんですが、それで、この L_n と $\tilde{L}_n$ の交換関係というのは、 classical に計算すると、

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m}. \tag{2.35}$$

これがその classical に計算された Virasoro 代数の交換関係。

ところが 先程言った Weyl anomaly があると実はこれにお釣りの項が付いてくる。

それで、そのお釣りの項が central charge と呼ばれているものなんですが、

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0}. \tag{2.36}$$

この c というのが先程言った係数。この項のことを Virasoro 代数の central charge といいます。それで、この central charge が matter とゴーストで完全に消えているというのが、正しい量子化ができる時の条件です。

2.4 Schild Action

そしたら次は string の 3 つ目の action である。 Schild action について。この Schild action というのは、後で新しいタイプの行列模型を導出する時に必要になるので。

Schild action というのはあまり教科書には書いてないはずなんですが、やはり、これも Nambu-Goto や Polyakov action と古典的には 等価だけれども量子論的には等価性は証明されていない action です。先程、induced metric h の determinant のルートが Numbu-Goto action に入ってくるという事を言ったわけですけれども、$\det h_{ab}$ というのをちょっと書き直して置きます。

$$\begin{aligned} h &= \det h_{ab} \\ &= h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}, \end{aligned} \tag{2.37}$$

これが determinant の定義。

h_{ab} というのは何だったかというと、induced metric というのは、

$$h_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu, \tag{2.38}$$

ですから、これを使って $\det h_{ab}$ というのを書き直すと、まず定義に従ってこれを代入すると、

$$\cdots = (\partial_1 X^\mu \partial_1 X_\mu)(\partial_2 X^\nu \partial_2 X_\nu) - (\partial_1 X^\mu \partial_2 X_\mu)^2. \tag{2.39}$$

それで、これをじっと睨んで書き直してやると実はこういう書き変えができる事がわかります。

$$\cdots = \frac{1}{2}(\partial_1 X^\mu \partial_2 X^\nu - \partial_2 X^\mu \partial_1 X^\nu)(\partial_1 X_\mu \partial_2 X_\nu - \partial_2 X_\mu \partial_1 X_\nu), \tag{2.40}$$

という形に。ちょっと見てやればこういう形に書き直せるという事がわかります。

それで、Schild action というのはどういうものかと言うと、先程、Nambu-Goto から Polyakov に行く時には 2 次元の g_{ab} という補助変数を導入して Polyakov action を導いたわけですが、この Schild action というのは 今度は補助変数として 2 次元上の scalar density λ を導入します。

ですから Schild action というのは変数は X とそれから λ を導入します。

$$S_{\text{Schild}}(X,\lambda) = \frac{1}{2}\int d^2\sigma \left(\frac{\alpha h}{\lambda} + \beta\lambda\right). \tag{2.41}$$

α と β というのは単なる係数なんですが、その係数は後で決めてやります。h というのは先程書いた $\det h_{ab}$。

それで、この λ というのがちょうど分母分子に入っているわけです。これが実際にその Nambu-Goto と等価である為には、α と β の係数との間にある関係が必要なんですけれども実際それを見るには λ で変分してみます。そうすると、

$$\frac{\alpha h}{\lambda^2} = \beta, \tag{2.42}$$

ですから、これから

$$\lambda = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\sqrt{h} \quad : \quad \text{スカラー密度.} \tag{2.43}$$

これを action に代入しますと結局、

$$\boxed{\sqrt{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi\alpha'}} \tag{2.44}$$

であれば、Nambu-Goto action に一致します。それで、この係数の時にちょうど Schild action はこの $lambda$ という補助変数を積分すると Nambu-Goto action と古典的には等価な action になります。これはもちろん量子論的な等価性は全く示せないんですが、少なくとも古典的にはこの場合には等価である。

ここで、この 2 次元上の一般座標不変な Poisson bracket というものを定義したいんですが、この $lambda$ というのは、scalar density でしたから、$\frac{1}{\lambda}$ という係数を付けておいて、

$$\{X^\mu X^\nu\} = \frac{1}{\lambda}\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu. \tag{2.45}$$

今この ϵ_{ab} 自体というのは一般座標不変ではないので、この $\frac{1}{\lambda}$ を付ける事によって、この Poisson bracket というのは 2 次元の上で一般座標不変な Poisson bracket を与えている事になります。

そうすると Schild action というのは、今の Poisson bracket を使ってやると、そこの h というのが、Poisson bracket で書けるので、この一般座標不変な Poisson bracket の自乗とそれから定数項というのが Schild action になります。

$$S_{\rm S} = \frac{1}{2}\int d^2\sigma\ \lambda\left(\frac{\alpha}{2}\left\{X^\mu X^\nu\right\}^2 + \beta\right). \tag{2.46}$$

この Schild action が持っている不変性は、先程の Polyakov action と同様に 2 次元の一般座標不変性というのを持っている。今の場合は metric が無いので local scale 不変性というのは 無いんですが、2 次元の一般座標不変性は持っている。

ですから、2 次元の一般座標不変性を使う事によって、補助場として導入した λ という場を制限します。2 次元の一般座標不変性というのは自由度 2 を持っているので、この λ を固定しただけではもちろん 2 次元の一般座標不変性を全て固定する事は出来ないんですが、その内の一部分を固定する。

そうすると、$\lambda(\sigma)$ というのが、今、先程の場合と同じで全体の作る面積というのは変える事が出来ませんので、それは一般座標不変ですから、この $\lambda(\sigma)$ というのをある変数 A と、これはこれ自身がゼロモードとして dynamical な変数なわけですけれども、A という σ に依らないゼロモードにまで一般座標不変性を使ってここまで持っていく事ができる。

$$\lambda(\sigma) = A. \qquad (\ \sigma \text{ に依らない }) \tag{2.47}$$

ですから、一般座標不変性の 2 つある自由度の内の一つ分を使ったわけですが、そうすると Schild action というのは、今、X^μ と A で書くと、

$$S(X, A) = \frac{A}{2}\int d^2\sigma\ \left(\frac{\alpha}{2}\left\{X^\mu X^\nu\right\}^2 + \beta\right). \tag{2.48}$$

このような action を量子化すればよろしいと。

一般座標不変性の 2 自由度の内の 1 自由度だけ使ったので、まだもう 1 自由度残っているわけですが、それの不変性というのは、この Poisson bracket だけで書けているという事から解るように、Pisson bracket の持っている不変性というのは 2 次元上で local area 不変にするいわゆる正準変換、Area Preserving Diffeomorphism。(それを普通 APD と書くんですが)

Area Preserving Diffeomorphism (= 面積保存変換)

に対する不変性を持っている。面積を保存する変換というのは正準変換そのものなんで、これは正準変換に対する不変性をまだ持っている。そういう action になっています。

実際に string を本当に量子化して、例えばスペクトルを求めようという時には、あまり、この Schild action というのは役に立たないんですが、これから string を行列模型を使って定式化しようという時に、この action を使います。

2.5 Stringの歴史

ちょっと最後に string な話の最後として、弦理論で何が解っていて何が解っていないのか、というのを極簡単に追ってみたいと思います。

弦理論というのはもちろん歴史的にはもっと遥かに古いんですが、いわゆる統一理論としての弦理論の第 1 次革命と呼ばれるものが起こったのが、1984 年ぐらいなんですが、その頃に弦の摂動論、これが解ったのが 1984 年から 1987 年位。この大体 3 ~ 4 年のうちに弦理論の摂動論と呼ばれるものは完全に全て解ってしまいました。

この時、議論されたのが 2.3 節で言った臨界弦、critical string というものですが、臨界弦というのは、ちょうど Weyl anomaly が消えている。ですから、bosonic の場合は D が 26 なわけですけれども、まあ、詳細はお話できないんですが、supersymmetry を入れてやると実は 10 次元、2.3 節の 26 次元の代わりに 10 次元の理論というのが critical string になる。それはどういう事かというのを簡単にお話します。

ここまでで bosonic string という話をしたわけですけれども、bosonic string の場合はなぜ D=26 という数字が出て来たのかと言いますと、metric の積分をゲージ固定して出て来た、Faddeev-Popov determinant というものがあったわけなんですが、その Faddeev-Popov determinant をいわゆる bc ゴースト と言われるもので書き換えます。ですから metric の自由度の所から出てきた bc ゴーストと呼ばれる場で、これの Virasoro 代数の central charge への寄与、つまり Weyl anomary を出すわけですけれども、そのときに Liouville action の前の係数というものが bosonic なゴーストの寄与が -26 を出していた。ですから、この matter の方が-26 を打ち消すように+26 個、matter が入っていれば全体の Weyl anomary が消えている。

それで、これを super 化すると、今度は 2 次元の metric 以外に、2 次元上で supersymmetry を要請しますので 2 次元の gravitino が出て来る。それで、そちらの方もやはりゲージ固定をしないといけないので、bc ゴースト以外にいわゆる $\beta\gamma$ ゴーストと言われる別の種類のゴーストが出て来るのですが、こちらの central charge というのが 11 という値を持つ事が知られています。ですから、これを両方足してやるとゴースト

の central charge というのは $c = -15$ になっている。

$$\begin{array}{ll} (b,c)\text{ghost} & +\ (\beta,\gamma) \\ c = -26 \quad & c = 11 \quad \Rightarrow c = -15 \end{array}$$

ですから、$c = -15$ という central charge を matter の方からの寄与で打ち消さなきゃいけないわけですけれども、matter の central charge というのは今の場合 matter 自身もやはり supersymmetric に組んでいますので、物質場の方は、今 D 次元、X^μ というのが D 個あるとするとこれが central charge D というのを出す。一方、これに world sheet で supersymmetric なフェルミオンというのはやはり μ という足を持っていまして、フェルミオンの次元というのは $\frac{1}{2}$ です。ですから、D 次元であれば $c = \frac{D}{2}$ というのが出ます。という事で D 次元の matter の寄与というのは central charge が $\frac{3}{2}D$ になる。

$$X^\mu : c = D, \quad \psi^N : c = \tfrac{D}{2} \quad \Rightarrow c = \frac{3}{2}D$$

それで、この 2 つの central charge が打ち消して全体が Weyl 不変で無ければいけないという要請がありますので、それから $D = 10$ であるとわかります。

superstring の critical string というのが、まあナチュラルだという事が、この 1984 年頃に解ったわけですが、現在知られている、10 次元でタキオンの無い superstring 理論、tachyon free な superstring は全部で 5 種類あるという事が知られています。まあ、この辺は皆さん御存知だと思うんですが、Type I、Type IIA、Type IIB、heterotic、heterotic string にはゲージ群の違いによって 2 種類あるのですが、SO(32) のゲージ群を持つものと、それから $\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8$ のゲージ群を持つもの。この合計 5 種類の tachyon free な 10 次元の superstring があるという事が知られています。

tachyon が無いという制限を外すと、10 次元でもまだ色々作れるんですが、それ以外にも 1984 年から第 1 次 string 革命と呼ばれる時に解った事は、string 理論を作るというのは結局、2 次元の共形場理論で matter の方がちょうどこの $c = -15$ というゴーストの central charge を打ち消すような conformal field theory を作ってやればよろしい。ですから、全てに時空の足を持たせて string を作れば、次元は 10 次元なわけですけれども、もちろん一部だけを時空の次元にして、残りを他の matter にしてしまう、そういう事も幾らでもできるわけです。ですから 10 次元ではこの 5 種類しか無いという事だったんですが、これ以外にも 10 次元よりも低い次元で、もう本当に無数の string が作られるという事がわかります。

ただ、完全には証明されてはいないんですが、基本的にはそうやって作られた 10 次元よりも低い次元の string 理論というのは恐らく、これらの string をコンパクト化し

て作られる物だと思われます。ですから、一番基本的な string となるのは 10 次元のこの 5 種類の string であろうという事が考えられます。

string 理論の優れている所というのは色々あるんですけれども、まず第一に、一番 string 理論が注目を浴びたのは、それまで超重力理論であるとか色々なアプローチで重力を量子化したいと思われていたんですが、ところが重力というのは御存知の様にくり込みができないわけですが、実は string 理論にして初めて重力というのが整合的に anomaly も無く発散も無い完全に量子論的に整合的な理論として定式化出来た。というのがまず string 理論の第一の、非常に驚きだった。

それから 2 つ目は、string 理論というのはもちろん統一理論なわけでして、重力と、それから重力だけではなくて物質場も非常に綺麗な形で統一している。それからそういう物質の統一理論というだけでなくてアイディアに関しても今まで長い間議論されて来た Kaluza-Klein ですとか、supersymmetry であるとか、まあその手のあらゆるアイディアというのがここで一つに集約している。そういうアイディアの統一理論という面もあったわけです。そういう意味でこの超弦理論というのは非常に脚光を浴びたわけです。ところが、1987 年位になって、皆がちょっとこれではいかんのではないかと思いだしたわけです。それは実は string の真空... 、まあその、10 次元から出発して 4 次元の理論を作るというわけですけれども、string の真空解というのが、実は無限に縮退している。しかも今これは superstring ですので、超対称性がある為に、これらの真空の縮退というのが摂動的には解けない。ほとんど解けない。という事も知られています。

例えば実際、一番現象論的に興味を持たれたのは heterotic string の $\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8$ という物なんですが、実際この $\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8$ のゲージ群を壊して、4 次元の我々の住む世界を記述するような string を記述しようという試みが非常に多くなされましたが。ところがその、確かに非常に望ましい理論を含んでいるんですが、本当にその理論が正しい真空解であるだろうかと、つまり予言能力というものがあるのかどうか。

無限に真空が縮退している為に、string 理論というものを本当に物理の理論だと思った時にやはりそれは何か新しい物理現象を予言したいわけですが、あるいは、新しい物理現象でなくても今まであるものでもいいわけですけれども、例えばなぜゲージ群が $\mathrm{SU}(3) \times \mathrm{SU}(2) \times U(1)$ なのか、それから、もう少し根源的な所で言えば、なぜ我々の時空が 4 次元なのか、という事すら、この string 理論を出発点にして予言する事が出来ない。というのが、1987 年位、少し熱狂が醒めた頃に皆反省しだしたわけです。

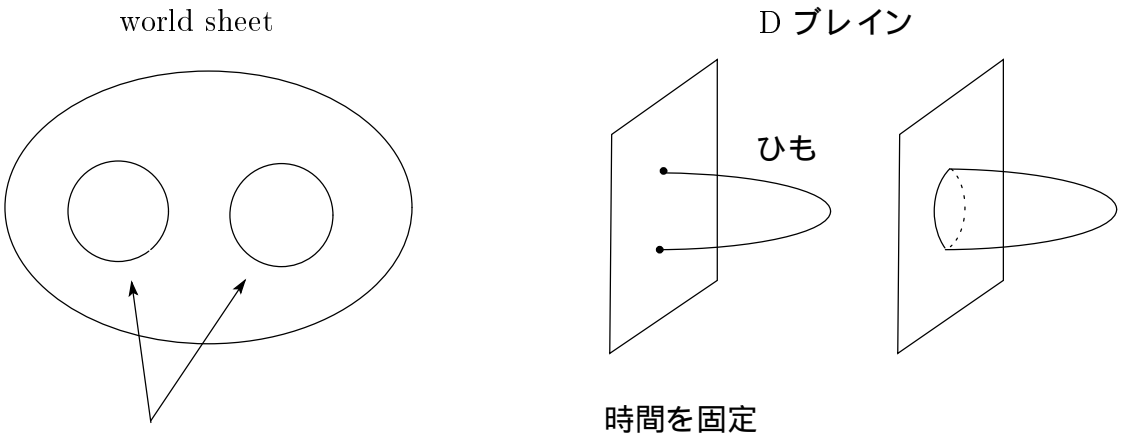
それで、やはり string 理論を本当に定式化しようとしたら何かもう少し、非摂動的な効果をうまく取り入れるような定式化が無いと、どうしようもない。

これが、第 1 次 string 革命と言われる、大体この位の時代に議論された事だったん

ですが、その後、第 2 次 string 革命と言われるものが起こったのが大体 1994 年 ~ 1997 年位の間ですが、この頃に解った事というのは非摂動的効果のある一つの側面。これは、ある非常に限られた側面に過ぎないんですが、一つの側面というのが大きく解り、理解が進みました。

キーワードとしては 2 つあるわけですが、一つは D-brane とよばれる string の soliton 解。string というのは、空間的には 1 次元的に広がっているわけですが、実は string 理論にはそれ以外にも membrane であるとか、もっと次元の広がった安定な古典解というもの存在する。というのがこの D-brane なんです。D-brane には 2 つの見かたがあるんですが、一つは string 理論の soliton 解という見方、それからもう一つ、非常に大事なのは string が D-brane に端を持つという事、D-brane があるとそこから string が端を持てる。

ですから、例えば string の world sheet の見方で言うと、D-brane のある中での string の propagation を記述しようと思ったら、今までは world sheet を全て足し上げればいいと言っていたわけですけれども、D-brane があると string が端を持って D-brane にくっつく事ができますので、この world sheet に穴が開いている。



このように string の world sheet に穴を開けても conformal 不変性を破らずに穴を開ける事が出来ます。というのが、この D-brane です。

この D-brane を使って議論されたのが duality と呼ばれる性質です。D-brane というのは、ちょっと今回は話せないんですが、いわゆる BPS という性質を持っていまして、量子論的に非常に安定な解です。ですから、量子論的に安定だという事を使って duality と呼ばれる、ある string 理論の強結合と別の string 理論の弱結合が等価であるという性質を証明する事が... 、証明というか状況証拠を色々挙げる事が出来ます。

これはまあ良く書かれる絵なんですが、5 つの string 理論が duality でどのように関係しているか、ちょっと絵だけ書いてみます。

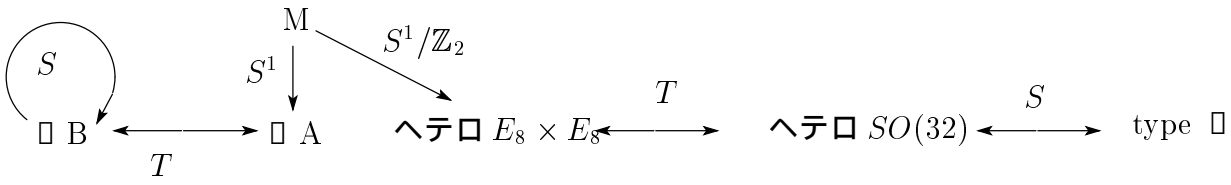


図 2.3: duality

M-理論とよく呼ばれるものがあるんですが、この M-理論というものはまだ、きちっと定式化されているものではないんですが、Type IIA の superstring 理論の強結合極限を取ると何か 11 次元的な理論が出てくるのでは無いかと思われている。それが M-理論とい呼ばれているものです。それで、M-理論を S_1 に (サークル状に) コンパクト化すると IIA の string になる。それから Type IIA と Type IIB の string 理論というのは、1 次元コンパクト化すると互いに T-duality。T-duality というのは 1 次元コンパクト化した時に、半径をちょうどひっくり返した、R を $\frac{1}{R}$ にする変換なんですが、その T-duality 変換で、IIA と IIB が等しいという事が、まあ昔から知られていました。

それから Type IIB 理論は実はこれ自身で、S-duality に関して self-dual。S-duality というのは強結合と弱結合が関係している。それは例えば Ising model で高温相と低温相が相転移点を境にして完全に dual の関係にあるのと同じ、IIB 理論というのは強結合と弱結合の string 理論が $\mathrm{SL}(2;\mathbf{Z})$ 変換と呼ばれる変換で結びついている。

それから M-理論を S_1 ではなくて、$\frac{S_1}{D_2}$ にコンパクト化 (ちょうど線分にコンパクト化) してやると $E_8 \times E_8$ のゲージ群を持った heterotic string になります。

それで、heterotic の $E_8 \times E_8$ というのは、これは昔から知られていたんですが、1 次元コンパクト化すると heterotic string の SO(32) と T-dual であるという事が知られています。

最後にこの Type I なんですが、Type I というのはこの heterotic string の SO(32) の理論と S-duality で結びついている。

このように、10 次元で tachyon free な 5 つの superstring 理論というのは、実は全て関係していた。ですから、この string 理論というのは 10 次元で 5 種類あったわけですけれども、今やこの duality という関係を通じて、この 5 種類の tachyon free な理論が

(あと tachyon があるような理論も実はそうなんですが)、全て関係してしまっている。

あと、M-理論というのは 1 次元、次元が高い理論ですが、まあ次元が高いという理由で、これらを総括する、より基本的な理論であると考える人もいるんですが、必ずしも別に次元が高いからといってより基本的であるというわけではないので、まあ恐らくそれらは、ある、より基本的な理論のある側面をそれぞれ見ているに過ぎない、という事がわかってきています。ですから、問題となるのはこの大元になるこれの背後にある基本的な理論はいったい何なのか、という事が問題になる。それで、だいたいこの 1994 年 ~ 1997 年位にこれらの事が非常に詳しく議論されたわけですけれども、ところが、これらの非摂動的な効果というのは非摂動的な効果の非常に限られた一面であって、やはりこうしたものを使ってもこの string 理論が無限に縮退していて、実際に我々の世界がなぜ 4 次元、であるのかという事に対して答える事は出来ないわけです。

というので、このように、第 2 次 string 革命が終って、やはり皆この string 理論というのは、基礎付けが無い。いったいこの背後に何があるのかというのがよく解らない。ですから、そういう意味で、今一番求められている事というのは結局摂動的な定式化に依らない string 理論の formulation を作る事です。

この摂動的な定式化に依らない定式化というものをこれから作っていかなければいけないわけですけれども、こういうのを称して例えば人によっては非摂動的な定式化と言いますし、場合によっては構成的な定式化と言うんですが、string 理論の構成的定式化を作らなければいけない。

この string 理論の構成的な定式化というのは、今までのゲージ理論を振り返ってみますと、例えば QCD というのは、一番最初にお話したように非常に low energy へ行くと、強く相互作用する理論ですから、QCD の場合に 't Hooft によって摂動的な、例えばくり込み可能性というものがまず証明された事を、ちょうど string 理論の摂動論が理解されたという事と対比させる事にすると、その後 QCD で何が議論されたかというと、例えばインスタントンであるとか、モノポールであるとか、そのような、非摂動的な効果のある側面で、D-brane に相当する、そういう風なトポロジカルな量。

それから、duality に相当するものがやはり、ちょうど同じ頃、1970 年代に盛んに議論された。

ところが、やはりこういうインスタントンみたいなものを作っても結局、例えばハドロンのスペクトルを求めなさいと言われると、全く求める事が出来ない。それで、最終的にハドロンのスペクトルを求めるには何が必要だったかというと、それが格子ゲージ理論。ですから QCD の場合というのは摂動論的な定式化に依らない構成的な定式化というのが、格子ゲージ理論。

それで、格子ゲージ理論の基礎になる非常に重要な原理は格子という事で、元々の

ローレンツ対称性を持っていた時空を格子に切ってしまう。それで、格子に切る事によって当然ローレンツ対称性は手で破ってしまう。その代わり格子ゲージ理論で一番重視した対称性というのがゲージ対称性。ですから、ローレンツ対称性は破ってもいいので、とにかくゲージ対称性を重視して理論を作りなさいと。

それで、壊れたローレンツ不変性というのが、じゃあどう回復するかというのは、いわゆる連続極限と呼ばれるものですが、うまく連続極限を取ってやると、1 回破ったローレンツ不変性というのは自然に回復する。それで、その背後にあるのはくり込み群であるとか、universality という考え方。

それで、この Wilson によるこういうくり込み群であるとか、universality という考え方が背後にあるからこそ、この格子ゲージ理論というのは非常に成功をおさめる事が出来た。じゃあ、string 理論の場合、構成的な定式化は一体何なのか、まあ、これに対して行列を使った模型であろうとか、色々な conjecture があるわけですが、現段階では完全にこれと断定できるものはありません。ただ、これからお話するんですが、行列を使った模型というものが一つの非常に有望な定式化である事は間違いないと思うんですが。しかし、じゃあその格子ゲージ理論の背後にあったくり込み群とか、universality という概念、それに相当するものは何なのか、それから格子ゲージ理論のときに一番大事であると思われたこのゲージ対称性ですが、それに対応する対称性は何なのかという所が、やはり現段階ではよくわかりません。

string 理論というのは重力の理論ですからもちろん対称性として例えば一般座標不変性であるとか、後はゲージ場を含めれば当然ゲージ不変性というものがある。それらを string 理論の場合はそういう時空の対称性を含んだ恐らくもっと非常に大きな対称性が背後にあると多くの人は考えているんですが、実際どういう対称性を respect したらいいか、そこら辺がまだよく解らない。この universality みたいな概念に関しては、QCD 格子ゲージ理論っていうのは時空が固定されていて、それを格子に切ってその固定された格子の上で理論を作るわけですが、今の場合には時空自体も dynamical な量ですから、格子自身も dynamical に作らないといけない。そうすると、universality みたいな概念がどう適用されるのかという事はよく解らない。

ですから、これらの背後にある対称性であるとか原理であるという事をこれから理解していかないといけない。さらにもう少し言うと、今言ったように string 理論は時空も dynamical に作らなければいけないわけですが、ところが今の formulation の string 理論というのは、ある固定された時空のまわりでの string の propagation というものを記述できるのみであって、時空自体は例えば string の condensation で時空を与えなさいというな事は全く、まだ出来ていない。ですから、恐らく string 理論が本当に構成的に定式化できたあかつきには、まず第 1 に時空という概念はそもそも最初からあるものであってはいけない。それで、何かその、あるものが condense して、時空という

ものを作って、それで、やはり同時に物質場も作る。そういう、もっと根源から考え直すような事をしないといけない。

それから、こういう D-brane であるとか、duality だとかの考え方から、時空という事を言ったので、ちょっと一言言いますと、この D-brane で得られた 1 つの見方、これは 1 つの例に過ぎないんですが、時空に対する 1 つの見方というものがある。それは、今 D-brane がこうあって、そこに先程言ったように string がこう端を持てる (図 2.4)。

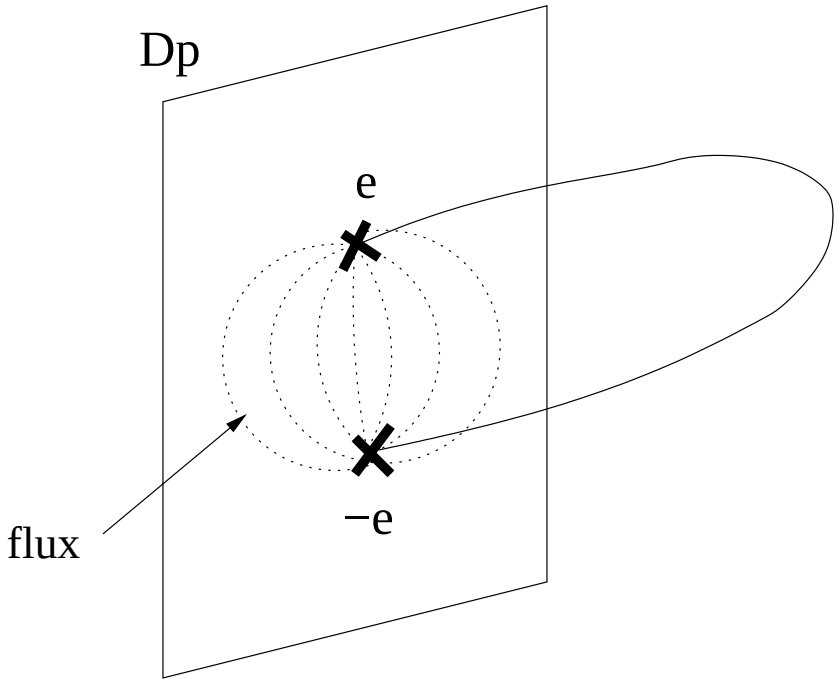


図 2.4: D-brane 上の flux

Dp と書いてあるのは D-brane の次元が $p+1$ 次元という意味で Dp-brane と言うのですが、D-brane があると string がそこに端を持てる。ところが、D-brane 上にはゲージ場が住んでいまして、string が端を持つとゲージ場の charge をこの string の端点が持つ事がわかります。U(1) じゃなくて、D-brane が何枚かあると non-Abelian になるんですが、ここにこう、charge を持つ。

そうすると、D-brane の上にゲージ場が住んでいて、この D-brane のゲージ場の dynamics は confine されていませんので、この charge の間にクーロン力が働くわけです。ですから、charge 間に何か非常に広がった、flux が飛んでいる。これを見ると、D-brane の上ではクーロン力ですから電束 (Electric flux) が、D-brane の上では deconfine されている。deconfine というのは confinment の逆で、閉じ込められていないという事です。

そうすると、それをそのままぐるっと一周回って見てみますと、D-brane の上で電束が deconfine されているんだけども、逆に今度は string の方につなげてやると、むしろ string というのは D-brane の上で decofine されていた Electric flux が confine されたものとして見る事はできないだろうか。それで、逆に D-brane と普通の空間という対比で見ますと、D-brane というのは結局 Electric flux に対する deconfinement phase にあるのである。なんかそういうような見方もできる。

まあ、ただこれに関しては完全に consistent にこういう見方が作れるわけではないんですが、D-brane が得る 1 つの見方として、何か D-brane と時空というものを特徴付ける性質というのがこう考えられる。まあこれは、すごく一例なんですが、やはり、string 理論の背後にある時空とはいったいどういうものなのか、恐らく string 理論を構成的に定式化すると、string というもの自体も、ある近似的な見方で出てくる 1 つのオブジェクトに過ぎなくて、他の brane なんかと対等な位置にあるようなものであるという事が考えられる。

だいたい、これが現在問題になっている string 理論の基礎というか、これから理解しなければいけない基礎。それで、これで大体 string の話を終えたいんですが、その次にお話したいのは行列模型。まあ、こういう string の構成的な定式化に向けて一体どういうアプローチがありうるかという事を考えていきたいわけですけれども、まず最初にお話したいのは少し古いタイプの行列模型です。

第3章　行列模型 (old type)

古いタイプという意味は、まあ、今本当に必要としているのは、我々の時空や重力を記述できる臨界弦、critical string に対する行列模型が欲しいわけですが、まず最初に簡単な例として非臨界弦、non-critical string の行列模型という話をします。

非臨界弦というのはどういうものであったかと言うと、2 次元の metric を量子化したときに、2 次元の metric というのは全部で 3 つの自由度を持っていたわけですけれども、その 3 つの自由度の内 2 つの自由度は一般座標不変性によって消す事ができるけれども、残り 1 つの conformal mode というのは残ったりします。ですから、conformal mode が decouple する、完全に Liouville action の係数が 0 になって decouple してしまうのが critical string だったわけですが、非臨界弦というのは、conformal mode が残っている。ですから Liouville 場の量子化をしないといけない。

今、特に考えたいのは matter が完全に無い場合。D が 0 の場合ですが、matter が無い場合というのは結局、dynamical な自由度は 2 次元重力のみ。それで、この 2 次元重力というのは 2 次元のランダム面全てについて足し上げなさいというもの。2 次元の metric 全部について調べるという事は、2 次元のランダム面を全て足し上げるという事になります。ところが、これからお話するように、2 次元ランダム面の足し上げというのは非常に簡単な行列模型を使って書き表す事ができる。

ちょっと最後にお話しますが、実は matter の所というのは次元が 1 よりも小さい部分ではこのような非臨界弦が作れるという事が解るんですが、それに関しては一番最後にお話して、なぜ D が 1 よりも上に行く事ができないかという話をします。

それで、これから考える matter が全くない 2 次元重力を表す行列模型というものは action が、

$$S = N\left(\frac{1}{2}\operatorname{tr}\phi^2 - \frac{\lambda}{3}\operatorname{tr}\phi^3\right). \tag{3.1}$$

今ちょっと N というのは action の前に、これは単に convention なんですが、出しておく事にします。ここで ϕ と書いているのは、$N \times N$ のエルミート行列で、それに対する action として、$\operatorname{tr}\phi^2$ と、それから $\operatorname{tr}\phi^3$ の部分がある。ですから、$\operatorname{tr}\phi^2$ の部分が

free な propagator を与えて、tr ϕ^3 の部分が、interaction を与える。そういう風になっている。それで、これの分配関数 $Z(\phi)$ というのは、$N \times N$ のエルミート行列全てについて足し上げる。

それで、2 次の項を free action だと思って、3 次の項を相互作用だと思って λ で摂動展開するという事をしますと、

$$\begin{aligned} Z &= \int d\phi\, e^{-S} \\ &= \int d\phi\, e^{-\frac{N}{2}\,\mathrm{tr}\,\phi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda N}{3}\,\mathrm{tr}\,\phi^3 \right)^n . \end{aligned} \tag{3.2}$$

それで、この行列の摂動展開がなんで、2 次元のランダム面の足し上げに対応してるのかという話をこれから簡単に見て行きます。

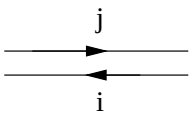
3.1 Feynman Diagram

これからやる摂動展開というのは 1.2 節で、't Hooft の large N ゲージ理論の話をしたのとほとんど一緒です。あの場合はもちろんゲージ理論だったんですが、今の場合は X という自由度を含んでいません。ですから、$\frac{1}{N}$ 展開という意味では全くパラレルに実行する事ができるんですが。

まず、propagator。この ϕ は、このエルミート行列をゲンマン行列で分解するのではなくて、$N \times N$ 行列を

$$\phi^{ij} \qquad (i, j = 1 \sim N)$$

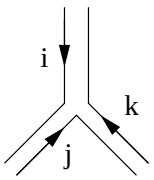
という風に書く。それで、エルミートですから、$(\phi_{ij})^* = \phi_{ji}$ という条件を持っているわけですが、そうすると、tr ϕ^2 から得られる propagator というのは、



$$\cdots \quad \langle \phi_{ij} \phi_{kl} \rangle = \frac{1}{N} \delta_{il} \delta_{jk}. \tag{3.3}$$

これは、今ここに N という因子を出していますので、ちょっと 1.2 節と多少、convention が違うんですが、前に N という因子を出していますので、propagator は $\frac{1}{N}$ です。ここの所は 1.2 節の繰り返しになるんですが、2 本線で書くと、このような propagator を持っている。

それから vertex の部分。vertex の部分は ϕ^3 ですから、$\frac{\lambda N}{3}$ という係数があって、$\mathrm{tr}\, phi^3$ ですから、トレースで summation があるので、index の足が、i、j、k と、それぞれ閉じた index の足が流れているという風になっています。



$$\cdots \quad \frac{\lambda N}{3}\,\mathrm{tr}\,\phi^3 \tag{3.4}$$

それで、これらの Feynman diagram を使って、摂動展開していくわけですが、もうここは 1.2 節の話と全く一緒なので簡単に行きたいんですが、これから Feynman diagram を書きます。例えば、

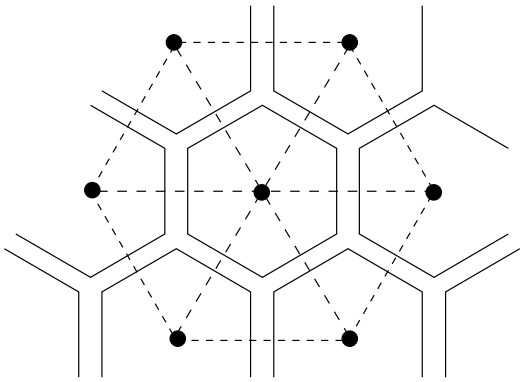


図 3.1: dual 図

Feynman diagram の一部で、このような部分があったとします。そうすると、これは vertex が 6 個付いていて、propagator がまあ、随所に付いている。これに対して dual グラフというものを作るんですが、dual グラフというのは、それぞれの面の中心の部分に点を置いて、各面の中心の間を線で結んでやる。

この点線の diagram のことを dual 図と呼んでいますが、そうすると dual 図は全て三角形だけで構成されています。それはなぜかと言うと、$\mathrm{tr}\, phi^3$ という相互作用しか入っていませんので、元々の diagram の vertex というのは必ず 3 つに分岐しているわけです。という事はその点を囲む dual 図の面というのは必ず三角形でなければいけない。ですから、元の図で頂点が N_0 個あって、辺が N_1 個あって、面が N_2 個あると、これは dual のグラフで見ると、元の頂点の数 N_0 は面に対応して $\tilde{N}_2$、辺の数 N_1 は辺に対応するので $\tilde{N}_1$。辺はそれを切る辺に対応する。それから、元の面の数 N_2 は、頂点

に対応する $\tilde{N}_0$。そうすると、この摂動展開をやって Feynman diagram を作ると、この dual な diagram で見れば、全ての可能な三角形分割の和になっている。ですからその意味で、行列模型というのは 2 次元ランダム面全てを足し上げているという事になります。

		dual 図	weight
頂点	N_0	$\tilde{N}_2$	λN
辺	N_1	$\tilde{N}_1$	$\frac{1}{N}$
面	N_2	$\tilde{N}_0$	N

それで、このグラフの weight に関しては 1.2 節の QCD の時とやっぱり全く同様。頂点があると、頂点というのは vertex から来てますから、λN という weight を出します。それから propagator、辺があると propagator ですが、それは $\frac{1}{N}$ を出す。それから面があると、各面に付随して閉じたループがありますので、そこから N を出します。これらを全て足し上げて、Feynman diagram の weight を計算しますと、N_0 個の頂点が λN で、N_1 個の propagator かあら $\frac{1}{N}$ が出て、最後に N_2 個の面から N という因子を出す。これを書き直してやると、$\lambda^{N_0} N^{N_0 - N_1 + N_2}$ という、ちょうど Euler 数になっている。今この N_0 というのはちょうど、dual な diagram で見ると、$\tilde{N}_2$ で、$\tilde{N}_2$ というのは三角形の枚数。それで三角形の枚数というのは三角形で 2 次元の面を作った時の面積に対応していると考えられる。ですから、A と、これを書くんですが、λ の A 乗に、N の Euler 数乗という意味になっている。

$$\begin{aligned} (\lambda N)^{N_0} \left(\frac{1}{N}\right)^{N_1} N^{N_2} &= \lambda^{N_0} N^{N_0 - N_1 + N_2} \\ &= \lambda^A N^\chi. \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} \lambda &\quad \cdots \quad \text{'t Hooft coupling} \\ A = \tilde{N}_2 &\quad \cdots \quad \text{三角形の枚数} \\ \chi = N_0 - N_1 + N_2 & \\ = 2 - 2g &\quad \cdots \quad \text{オイラー数} \end{aligned}$$

genus で言うと Euler 数というのは $2 - 2g$。これが各 Feynmandiagram の weight を与えているんですが、そしたら次に、先程の分配関数を計算してみます。

分配関数を、e^W と書くと、W というのは connected なグラフの寄与という事にな

ります。

$$\log Z = \quad W \quad = \sum_{\chi} N^{\chi}\, W_{\chi}. \tag{3.6}$$

$$\tag{3.7}$$

それで、この W というのは今見たように各グラフのトポロジー (Euler 数) で展開されるので、その各 Euler 数のグラフの寄与を W_χ という風に書く。それで、さらに λ の次数 (=摂動展開の次数) というのはちょうど面積に等しいので、この W_χ というものは三角形の総面積 A でさらに展開する事ができる。

$$W_\chi = \sum_{A} \lambda^A\, n_\chi(A). \tag{3.8}$$

その係数を $n_\chi(A)$ と書きます。この $n_\chi(A)$ というのは何を表しているかというと、今、Euler 数 χ の面を A 枚の三角形を貼り合わせて作ってありますので、

オイラー数 χ の面を A 枚の 3 角形で作る張り合わせの数

というのがここで書いてある $n_\chi(A)$ と呼ばれるもの。

違う面積毎の weight が λ の A 乗というもので展開されて、さらにこの Euler 数毎に違うグラフの weight というのが今度は N の χ 乗、つまり genus g が増える毎に、$\frac{1}{N^2}$ だけ落ちてるわけです。

ここで重要なのは、QCD の場合もそうだったんですけれども、このような面の展開というのは、$\frac{1}{N^2}$ とそれから、 't Hooft coupling λ の double expansion になっているわけです。string で言うと、ちょうど genus が増える毎に $\frac{1}{N^2}$ 減るというので、$\frac{1}{N^2}$ というのが、string の coupling constant に関係している。

それで、この $n_\chi(A)$ と書いた Euler 数 χ の面を A 枚の三角形で作る貼り合わせの数、というのは実は完全に combinatrics の問題ですから色々な手法で計算できるんですが、まあここではテクニックの詳細は省略させてもらって、答えを書きますと、

$$n_\chi(A) \sim \left(\frac{1}{\lambda_c}\right)^A\, A^{-\frac{b}{2}\chi-1} \tag{3.9}$$

$n_\chi(A)$ というものは、ある λ_c と呼ばれる、これはどのように lattice を切るかという詳細に依存する定数なんですが、$\frac{1}{\lambda_c}$ の A 乗の因子を持つ、これは A 枚の三角形を使って貼り合わせるので、A が大きくなればなるほど exponential で増えるわけです。この

exponential で増える factor がまあ第一。それ以外にベキの項があるんですが、今 b という係数を使って書きますと、こちらの後ろのベキの項が universal な項。

前の exponential の項というのは、これは non-universal な項で、non-universal という意味は、どのように lattice を切るかというような詳細、グラフの作り型の詳細に依るような量。ところが、後の因子はグラフの作り方の詳細に依らない universal な量です。この b という係数は少し一般的に書いておきたいんですが、

$$b = \frac{25 - c + \sqrt{(1-c)(25-c)}}{12} \tag{3.10}$$

matter の central charge を c としますと、このような形で与えられるという事が知られている。特に matter が無い場合、matter が無い場合というのは c が 0 の場合ですが、この b の値は $\frac{5}{2}$ になる。

matter の central charge が 0 でない場合の作り方として、ここでは一番簡単な行列 1 つを使って 2 次元のランダム面を作っていったわけですけれども、例えば、行列 2 個を持って来て、2 次元のランダム面を作りましょう。格子自身は行列から作られるわけですけれども、2 個行列がある為に vertex、つまり dual 図の面の作り方として、ある面がどちら側の行列で作られているかという 2 通りの可能性がある。ですから、面があって、その面が赤白に色分けされている。まあ、そういうようなランダム面が、行列 2 個の場合は作れる。それはちょうど 2 次元面の上に、Ising spin が乗っているような面に対応しているので、2 つの行列を使うモデル (これを two matrix model というのですが) は c が $\frac{1}{2}$ になる。

あと同様にもっと行列の数を増やしていくと、実は Varasoro 代数の表現で、unitary series というものがあるんですが、central charge が 1 より小さい minimal model に関しては、行列模型を組み合わせる事によって構成する事ができるという事が知られている。

この minimal model というのは c が $0, \frac{1}{2}, \cdots$ と始まって、最終的に c が 1 へどんどん近づいていく列があるんですが、c が 1 に行った極限の時には b の値というのを見てみると、ちょうど b は 2 になっている。

これが minimal series と呼ばれている series なんですが、b の値は $\frac{5}{2}$ から、2 へ向かって徐々に減少しています。あと、c が 1 の時に b が 2 になるというのが、実はここが非臨界弦の 1 つのバリアになっていて、c が 1 よりも大きい所をこのようなやり方で作る事はできません。その理由に関してはさらに後でお話します。

そうすると、先程書いた connected グラフ W の展開ですが、こういう風になります。

$$W_\chi = \sum_A \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^A A^{-\frac{b}{2}\chi-1}. \tag{3.11}$$

今欲しいのは連続的なランダム面なのですが、有限個の三角形を使って面を作ってもそれはあくまでも連続的な面には見えないわけですが、三角形の枚数が非常に大きいような極限、それがちょうど連続極限に対応するわけです。三角形の枚数が大きくなると面のギザギザが見えなくなって、2 次元の連続的なランダム面が作れるであろうと。

それで、この A を無限大の極限を取るという事は、今これは A について足されていますから、A の期待値が非常に大きくなるのはどこかというと、この λ が大きければいい。当然 λ というのは λ_c よりも小さい所しか摂動展開が収束していませんので、λ はもちろん λ_c より小さくなければいけないんですが、λ が λ_c よりはるかに小さければ、この $\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^A$ という factor があるので、面積の大きい面というのが非常に大きく suppress されてしまいます。ですから平均の三角形の枚数が非常に大きくなる極限というのは、't Hooft coupling λ を λ_c へ下から近づけるような極限に対応している。

$$A \longrightarrow \infty \Longleftrightarrow \lambda \longrightarrow \lambda_c. \tag{3.12}$$

ですから、これが連続極限なんですが、ちょうど格子ゲージ理論で言うところの、lattice 感覚を 0 に持っていく極限に対応しています。

3.2 Double Scaling Limit

それで、今 λ を λ_c に近づけますので、ちょっとこの $\frac{\lambda-\lambda_c}{\lambda_c}$ を ϵ と置きます。

$$\frac{\lambda_c - \lambda}{\lambda_c} = \epsilon. \tag{3.13}$$

そうしますと、この $\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^A$ というのは分子を $\lambda_c - \lambda + \lambda_c$ と書いてやるとここの所が $(1-\epsilon)$ の A 乗になりますから、今 ϵ というのは非常に小さいので、これは exponential で近似できます。

$$\begin{aligned}\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^A &= \left(\frac{\lambda_c + \lambda - \lambda_c}{\lambda_c}\right)^A \\ &= (1-\epsilon)^A \\ &\sim e^{-\epsilon A}.\end{aligned} \tag{3.14}$$

ですので、W_χ というものは、この連続極限でどのような値を取るかというと、

$$\begin{aligned} W_\chi &= \sum_A e^{-\epsilon A} A^{-\frac{b}{2}\chi-1} \\ &\sim \int dA\, e^{-\epsilon A} A^{-\frac{b}{2}\chi-1} \\ &= \epsilon^{\frac{b\chi}{2}} \int_0^\infty dx\, e^{-x} \cdot x^{-\frac{b}{2}\chi-1}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

A のこの summation は ϵA を x と置き換えて積分で近似してやりますと、結局 ϵ の $\frac{bx}{2}$ 乗に、あとはこの x 積分ですけれども、この x 積分は単なる定数ですので、これを今、C_χ という風に書く。

ここで書いた connected diagram の summation というのを全部まとめてやると、W という量は、ϵ をもう 1 回さっきの定義で $\frac{\lambda-\lambda_c}{\lambda_c}$ にしてやって、

$$W = \sum_\chi N^\chi\, c_\chi \left(\frac{\lambda_c-\lambda}{\lambda_c}\right)^{\frac{b\chi}{2}}. \tag{3.16}$$

というようになっている。これはもちろん N と無関係に λ を λ_c に持っていくという連続極限を取ってやると、当然ここに $\frac{1}{N^2}$ の suppression factor がありますので、genus の高い面ほど $\frac{1}{N^2}$ で suppress されている。これだと、普通の 't Hooft 展開になるわけですけれども、実はここで非常に重要な極限の取り方ができる。ここで λ を λ_c に近づけると同時に、うまく correlate させて、N を無限大へ持っていきなさい。これをまとめて、ちょうど両方共 Euler 数のベキが付いていますので、こういう形に書き直してやるわけです。

$$W = \sum_\chi c_\chi \left(\frac{\lambda_c-\lambda}{\lambda_c} N^{\frac{2}{b}}\right)^{\frac{b\chi}{2}}, \tag{3.17}$$

$$t = \frac{\lambda_c-\lambda}{\lambda_c} N^{\frac{2}{b}} = \text{fix}. \tag{3.18}$$

それで、そうしますと、この λ を λ_c に近づけるんだけどもここに書いた括弧の中を t と置いたときに、t を一定に保つように、fix して、λ を λ_c に近づけながら、N を無限大に持っていく。このような limit を取ってやると... 、

先程はこういう fine tuning をしなければ、普通の展開というのは $\frac{1}{N^2}$ 展開でしたから、連続極限を取ると、sphere のグラフが一番 dominate して、その次に torus のグラ

フ、genus が高くなる程、suppression が非常に大きくなったわけですけれども、このような t を不変にする limit を取ってやると、この t は Euler 数の違う面の weight なわけで、その Euler 数の違う面の weight というのを一定に取りなさいというわけですから、sphere, torus, ... 、というあらゆる genus のリーマン面が完全に同じ weight で、t をもし 1 のオーダーにすれば、同じ weight で効いてくる。そのような極限のことを double scaling limit という。

普通 $\frac{1}{N}$ 展開っていうのが、string の coupling constant が非常に小さい極限になってしまうんだけれども、ところがこういう double scaling limit を取る事によって、string の coupling constant を 1 のオーダーに抑える事ができる。というのが double scaling limit です。

これに関しては、非常に多くのテクニックが開発されていて、例えば、分配関数というか free energy の見たす方程式であるとか、それらの性質というのはかなり詳細に議論されている。例えば可解系との関係であるとか、まあ非常にリッチな構造があるんですが、それについては Introduction で挙げた Ginsparg の P. Di Francesco, P. Ginsparg and J. Zinn-Justin, という reference があるので、それを見ていただくとかなり詳細に書いてありますから、それを見てください。

3.3 $c = 1$ のバリア

次に、今度は先程言ったこの c が、まず 0 はよかった。それで、two matrix model を作ると c が $\frac{1}{2}$ は作れる。さらに、この c が 1 の極限というのは matrix chain になるんですが、そのような matrix chain の極限というのは、ちょうど b が 2 になる。実はこの non-critical string というのは、有名なこの c が 1 のバリアというものがあって、実は c が 1 よりも大きな central charge へ持っていく事ができません。それで、その理由がなぜかというのは、これからすぐに解るんですが、c が 1 への極限を取ると、2 次元面が不安定化してしまう。という事がわかります。

その 2 次元面が不安定化する原因というのが、そこで書いた b という係数が 2 まで減少してしまうという事に対応するんですが、これはどういう事かといいますと、今、特に Euler 数が 2、つまり球の場合を考えます。そうしますと、この Euler 数が 2 の connected diagram の数というのは、

$$W_2(A) \sim \lambda^A A^{-b-1} \tag{3.19}$$

$n_\chi(A)$ というのが、ベキが $A^{-\frac{b}{2}\chi-1}$ で与えられていたわけですから、$\chi = 2$ を代入すると、$-b-1$ になります。今ここで $\frac{1}{\lambda_c}$ があるんですが、それは適当に定義しなおして、

λ_c は 1 であるとします。

そうすると、今何を考えたいかというと、面があったときに球を一箇所でギュッとつまむような事をします。これももちろん (トポロジー的に) 球なわけです。この A 枚の三角形を使って貼り合わせた球があるわけですが、その球を真ん中でギュウッっとつまんでやる (図 3.1)。それで、つまむ時に左側の球の面積が三角形の枚数が A' で、そうすると全体が A ですから右側は $A - A'$。これから、このような真ん中をつまんだ球をこの A 枚の面で作る作り方が、元々の A 枚全てを使って普通の球を作る作り方に比べて、どの位の weight を占めているかという事を調べてみる。

そうすると、この面の作り方というのは左側 A'、右側 $A - A'$ で真ん中をつまむわけですから、

つまんだ時の combinatrics の数というのは、まず左側の A' の三角形を使って球を作る作り方は $W_2(A')$。それで、さらに A' がかかっているのは A' の三角形の内のどこをつまんでいるか、という場合の数です。それで、右側も同様で、$A - A'$ の三角形の作り方が $W_2(A - A')$ で、そこのどこをつまむかで $A - A'$。これを簡単に評価してやりますと、これは積分形に直して評価するだけなので、$\lambda^A A^{1-2b}$ に、あと適当な係数 C がかかるんですが、このような依存性を持っている。

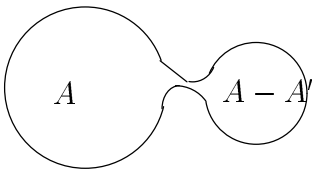


表 3.1:

$$\begin{aligned} &= \int_0^A dA' \ (A' W_2(A'))\,((A - A')\,W_2(A - A')) \\ &\sim \lambda^A A^{1-2b} \cdot \int_0^1 dx \ (x(1-x)) \end{aligned} \tag{3.20}$$

係数というのはこの積分から出てくる係数なので単なる定数ですが、そうすると、$W_2(A)$ と、それからこの作り方を比較してみると、

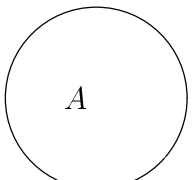


表 3.2:

$$= W_2(A) \tag{3.21}$$

この A のベキの所は、$W_2(A)$ の方は A の $-b-1$ で、真ん中でつまんだ方は A の $1-2b$。という事は、もしこの $-b-1$ と、$1-2b$ で、この $1-2b$ の方が大きい場合。この場合には面がくびれた方可能性の方が高いという事になる。これはその b で言うと、b が 2 よりも小さいという事になります。

$$-b-1 < 1-2b \iff b < 2 \tag{3.22}$$

この時には真ん中でくびれた方の場合の数が多いといってるわけですから、面はどんどんくびれていってしまう。一箇所でくびれるだけじゃなくて、次々にあらゆる所をつまんでいったようなグラフが全体の中で非常に大きな weight を占めてしまう。ですから面っていうのは、この場合には 2 次元面は普通のスムースな面ではなくて、むしろこう、もこもこと、なんかこう団子が沢山付いているような、図 3.2 のような、2 次元面とはとても言えないような。この 1 個 1 個もどんどんつまんでいく方が weight が大きくなるわけですから、結局なんかその、ほとんどもう面というよりは線みたいになってしまう。

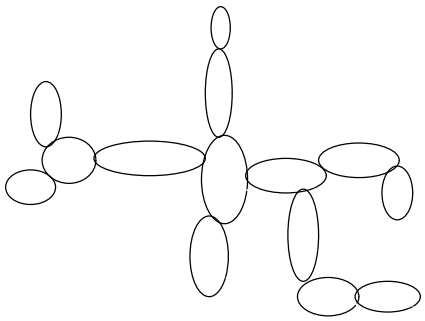


図 3.2: branched polymer

こういうのを branched polymer と呼んでいるんですが、branched polymer phase になってしまう。ですから、central charge が 1 を越えると面がどんどんどんどん分岐してしまって、2 次元面というのはスムースな面ではなくて、こういう branched polymer phase になってしまう。この不安定性が non-critical string が c が 1 よりも越えて作る事ができない大きな理由。

それで、この行列模型で言うとそういう事なんですが、これに対応する non-critical string に対する Liouville 理論というのも量子化されるんですが、やはりそちらの方でも c が 1 のバリアーというのが知られている。

この辺の話は今から 10 年位前に盛んに研究されたんですが、結局、本当に欲しい critical string、D が例えば superstring であれば 10 ですし、bosonic だったら 26 、そ

のような critical string に行きたいと多くの人は考えたんですが、このやり方ではどうもうまくいかない。そこで長い間、この行列模型という考え方は停滞していたんですが、ここ 3 ~ 4 年位ですが、実はもう少し別の考え方で critical string というものが作れるのではないかと言うのを考えられているんですが、少し休憩を入れてその後、お話したいと思います。

(質問) Euler 数で形が決まるというのはどういう意味ですか？
Euler 数が同じでも形が違うグラフは？

2 次元面は完全に分類する事ができて、少なくともトポロジーに関しては、Euler 数だけで分類できる。それで、あと違いは例えば球であれば、球を潰したり、引っ張ったりと、そういうのはもちろんあるわけですけれども、トポロジー、2 次元面に関していうと、トポロジーは Euler 数だけで決まります。

(質問) 2 つに分けるときに、A' が 3 枚だけポコと飛び出しただけの　　様な物等、数え過ぎていませんか？

A' が 3 枚？ えーと、いや確かにこの数え方はちょっと、色々 over counting している所はあるんですが、この辺の詳細は... 、こんな事をやって、こっちの方は (つまんだ方) は当然、この中 (全てを含む、$W_2(A)$ の方) に含まれるわけです。だからこっちの方が多くなるわけではないんで、この評価は正確には間違っているんだけれども、ここで言っているのはこういうグラフが非常に大きな weight を持つというのを極簡単に見る為に非常に粗い計算をしてみたんですが、実際にやろうとしたらもちろん、きちっと combinatrics を計算して、積分ではなくて和について実行する。そうすると当然、この場合の数は絶対これを越えるはずはないわけです。これは全てを含んでいるわけです。ただその、こういう評価から言えるのは、真ん中を pinch するという事をやってやると、そういう weight が非常に大きくなる。という事はこういうラフな評価で見る事ができる。

(質問) 行列模型と弦理論の関係がよく解らないんですが。

行列模型と弦理論の関係？えーと、ここでやった行列模型というのは 2.3 節でお話した非臨界弦という弦です。非臨界弦とは何かというと、一番簡単な例は matter が全く無くて、2 次元の metric について足し上げだけを実行したというのが非臨界弦の一番簡単な例です。それで、2 次元の metric について全て足し上げるという事は、結局 2 次元の可能な面全てについて足し上げるという事、2 次元の可能な面全てについて足し上

げるというのは、2 次元面を discretize、離散化してやると、2 次元のランダム面、三角形を貼り合わせてありとあらゆる可能な面を作りなさいと、で、その面を全て足したものが、2 次元重力に対応しているでしょうと、という考え方です。

(質問) matter が無い $c = 0$ から、c を動かすというのはどういう事ですか？

ここで言っている行列模型は、c が 0 の例を出したんですが、それは c を 0 ではなくていわゆる Virasoro の minimal series と呼ばれる c が $0, \frac{1}{2}, \cdots$ といって、1 に収束する series の、そういう matter が乗っているような 2 次元面を行列模型で作る事ができて、その行列模型は今お話した行列模型を拡張したもの。どう拡張するかと言うと、c が $\frac{1}{2}$ の場合には、行列を 2 個持ってくる。さらに拡張しようと思ったら行列を 3 個持ってきたり 4 個持ってきたり、それで、c が 1 の極限っていうのは行列を chain に並べたような模型です。そういう行列模型も似たような手法を使って解く事ができるんですが、その結果がこれ。

(質問) そうすると c が 0 でない所が string に対応するのですか？

ええ。c が 0 でないときには、例えば c が $\frac{1}{2}$ の時の場合には、2 次元面の上に先程言った Ising spin が乗っているような string 理論。いわゆる普通の string 理論というのは 2 次元面の上に X^μ という matter が乗っている。X^μ というのはもちろん central charge が $1, 2, 3, 4, \cdots$ と整数しか取らない。ところがそれ以外にも、今日最初にお話したように、弦の摂動論というのは全て 2 次元面上の conformal field theory で記述できる。そうすると X^μ という、いわゆる時空に値を持つような弦じゃなくて、もう少し抽象的に考える。X^μ という時空であるからこそ時空を propagate している string という描像があるんですけど、そこでちょっとジャンプしてやって、もうとにかく string 理論というのを 2 次元重力で、2 次元面上に何か central charge が乗っている物と思いましょうと。だからそれはどこかを propagate する string という描像はもはや無いんですが、CFT という意味では string 理論の一部になっている。

それで、1984 年位から後に、非常に多く議論されたのは、とにかく弦の摂動論というのは最初の Polyakov string とかそういうものから離れてしまって、とにかく world sheet の上に superstring であれば、 central charge 10 を作りなさいと、本当にそれだけの理論。そうすると確かに時空を propagate している string という描像からはかけ離れちゃうんですが、数学的な立場から言うとそれで string を作るという意味では十分。

それで、c が $\frac{1}{2}$ というのは、じゃあどういう幾何学的な意味の string かというと、それは良く解らないんですが、ここで言っているのはもう時空を propagate する string

という所から、2 次元の共形場理論という所まで一回一般化しておいて、その一般化した中での一番簡単な例として、c が 0 とか $\frac{1}{2}$、まあそういう minimal series が 2 次元面に乗っている、そういう理論を考えましょうという事です。

第4章　行列模型 (新しいタイプ)

3 章で、non-critical string を表す行列模型の話をしたんですが、後半は今度は critical string を表す、と考えられている行列模型の話をしたいと思います。

non-critical string のアプローチでは結局 c が 1 のバリアというのがどうしても越える事ができなかった。だから少し違った考え方で行列模型を作っていかざるを得ないんですが、ただ、これからお話する模型が本当に critical string の行列模型かという事に関してはまだ完全な証拠が得られているわけではありません。ただ、色々な状況証拠があって、こんな感じでいいんだろうという事ではあるんですが、理論としてはまだ完成しているものではないので、むしろこれから色々まだやる事があるという話なんですが。

2 章で string の定式化として、3 種類、Nambu-Goto type と、 Polyakov type と、Schild type と、お話したわけですが、この Schild action を行列正則化するというやり方によって、critical string を表す行列模型を作っていきます。

4.1　Schild action の行列正則化

Schild action というのはどういうものであったかというと、

$$S_{\text{Schild}} = \frac{A}{2}\int d^2\sigma \ \left(\frac{\alpha}{2}\{X^\mu X^\nu\}^2 + \beta\right). \tag{4.1}$$

この α と β という係数は、$\sqrt{\alpha\beta}$ が tension $T = \frac{1}{2\pi\alpha'}$ になるような定数です。このような action から出発すると、少なくとも古典的には Nambu-Goto や Polyakov と等価な理論が作れるというわけです。

これを行列正則化しましょうという事なんですが、2 次元の場だった X^μ を $N \times N$ 行列に置き代えて、量子力学の時の 2 次元の位相空間のアナロジーから、これは後でもう少し詳しくお話しますが、Poisson bracket を交換関係で置き代えます。それから、この 2 次元面上の積分というのは行列のトレースに、これは実はちょうど、2 次元の

world sheet を非可換な world sheet にしている事に対応するんですが、このような行列正則化を行なってやるわけです。

$$\{X^\mu X^\nu\} \longrightarrow i[X^\mu X^\nu] \tag{4.2}$$

$$A\int d^2\sigma \longrightarrow \mathrm{Tr} \tag{4.3}$$

そうすると、この Schild action というのはどうなるかというと、この X^μ という $N \times N$ 行列が dynamical な変数になって、commutator の自乗の項と、それから第 2 項はトレースですから、$\mathrm{Tr}\,1$ というのは N ですから、

$$S = -\frac{\alpha}{4}\,\mathrm{Tr}[X^\mu X^\nu]^2 + \frac{\beta N}{2}. \tag{4.4}$$

というようになります。

Schild action というのは面積自身もまだ dynamical な変数として残っていましたので、元々面積についての足し上げをしていたんですが、それに対応して N について足し上げをする。面積というのが行列のサイズ N になるわけですが、面積についての足し上げをするという事は結局、行列のサイズ N について足し上げなさいという事。それで、分配関数は、今の action を使って X^μ についての積分と N についての summation で与えられる。

$$Z = \sum_{N=0}^{\infty}\int dX\; e^{-S}. \tag{4.5}$$

それで、今 action の第 2 項を見てみると、この β という部分は N に対する chemical potential のような働きをしている。ですから、そのまま Schild action を行列正則化すると X^μ という変数について path integral して、さらに N について足し上げなさいというんですが、これから実は N に対しては固定した理論を考えます。それは、統計力学で、カノニカルとグランドカノニカル の関係のように、N について足し上げて chemical potential を入れるというのと、N を固定しておくけれど非常に大きな値を取るというものは、等価になるわけです。

ですから N は止めておいて、その止めた N の中で考えます。ただ、N というのは非常に大きな値を取らないと連続極限は取れないので、N は非常な大きな値を取るとします。まあ、将来的には N について足した方がいい事も出てくるかも知れないんですが、まあ、しばらくは N については足さないという理論を考えます。

4.1.1 行列正則化の意味

ここで行列正則化という事を言ったんですが、これがどういう事を意味しているかという事をもう少し見てみたいんですが、$N \times N$ 行列を 2 次元の world sheet 上の場と考える事の意味なんですけれども。

$N \times N$ 行列の base の取り方は、いろんな取り方があるんですが、一番簡単な base の取り方、それは 't Hooft 行列と呼ばれている行列を作って表現するんですが、

$$U = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \omega & & \\ & & \omega^2 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \quad , \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

ここで ω と言っているものは 1 の N 乗根です。この U と V の満たす関係式は、$UV = \omega^{-1}VU$。それから、これは $N \times N$ 行列ですので、U^N、V^N というものはちょうど、1 になります。

$$\omega = e^{2\pi i/N}$$

$$UV = \omega^{-1}VU \quad , \quad U^N = V^N = 1$$

今、$N \times N$ のエルミート行列 A という何かがあった時に、U と V の積をとって、$N \times N$ 行列の完全系を作る事ができますので、

$$A = \sum_{n_x, n_y}^{N} \tilde{a}(\boldsymbol{n}) e^{i\pi n_x n_y/N} U^{n_x} V^{n_y}. \tag{4.7}$$

このような展開を行ってやる。今ちょっとこの phase factor は後の便宜上入れておきます。それからもちろん A がエルミート行列ですから、この $\tilde{a}_n$ というのは制限が付いてきます。

これはどういう事を意味しているかというと、ちょうど 2 次元の平面波の展開に対応している。その平面波だという事をもうちょっとわかりやすく見る為に、U と V を、

$$U = e^{ik_0\hat{x}} \quad , \quad V = e^{ik_0\hat{y}} \tag{4.8}$$

という形で、仮に書けたと考えます。実はこれは有限行列では、今から書く $\hat{x}$ と $\hat{y}$ というのは存在しないんですが、まあ、ちょっと意味を捉えるという事だけなので。

それで、このような形で書いた時に、$UV = \omega^{-1}VU$ という関係式を満たす為には、この $\hat{x}$ と $\hat{y}$ にどういう関係式があれば良いのかといいますと、Hausdorff の公式で、$e^A e^B$ というのは A と B の commutator が c-数であれば、

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]}$$

という関係式がありますので、UV をかけると、もし $\hat{x}$ と $\hat{y}$ が非可換であれば、あそこに書いた ω^{-1} という位相 factor を出す事ができるという事が解る。それはちょうど、

$$[\hat{x}, \hat{y}] = -i\frac{2\pi}{N(k_0)^2} = -i\theta \tag{4.9}$$

右辺のこれを θ と書きますが、このような交換関係を $\hat{x}$ と $\hat{y}$ が満たしていると、ちょうど、UV をかけたときに、肩と肩の交換関係の部分だけ位相が入りますから、$UV = \omega^{-1}VU$ という関係式が得られます。

そうすると、展開式は、

$$A = \sum \tilde{a}(\boldsymbol{n}) e^{ik_0(n_x\hat{x} + n_y\hat{y})} \tag{4.10}$$

それで、これはまさに $\hat{x}$ と $\hat{y}$ というものが非可換な 2 次元面を表していて、その上の平面波になっている。もちろん $\hat{x}$ と $\hat{y}$ のこの交換関係というのは、有限行列では決して表せないものですから、こう書いたのはあくまでも、元々の U と V というものをちょっと直感的に理解するという意味で書いているだけです。

それで、この A の展開で、ここに phase factor を入れた理由というのは、$\hat{x}$ と $\hat{y}$ で書いてやった時にちょうど、phase factor がちょうどキャンセルして、ここでまとめた方が後の計算が綺麗になるので、入れたものです。

一般に $N \times N$ 行列がこのように非可換な平面波で展開されるわけですが、その A という行列に対応して、2 次元上の場 $a(\boldsymbol{x})$ を次のように定義します。$A \longrightarrow a(\boldsymbol{x})$

$$a(\boldsymbol{x}) = \sum \tilde{a}(\boldsymbol{n})\, e^{ik_0(n_x x + n_y y)} \tag{4.11}$$

このフーリエ変換の展開係数に非可換の平面波の展開係数 $\tilde{a}(\boldsymbol{n})$ をそのまま使ってやって普通の c-数の平面波に置き換えてやります。ですから、この x、y と言っているのはもう完全に c-数で。これで $N \times N$ 行列から 2 次元の場が作られている。これをもって、行列から場へのマッピングとします。

そうすると、行列の積はどうなるのか。このように行列から場へマップすると、当然行列の積は非可換ですから、対応する場の積というのも非可換にならなければおかしいわけです。実際それは非可換な Moyal 積と呼ばれるものになります。

AB という行列の積があった時に、それに対応する場を、今非可換だという事を現わに書く為に、$*$ (スター) というものを書いておいて、

$$(\text{積}) \qquad AB \longrightarrow (a*b)(\boldsymbol{x}) \tag{4.12}$$

というマッピングがあったとします。まず、これをフーリエ変換したものを求める方が簡単なので、後からもう一回フーリエ逆変換し直す事にして、$(a*b)(\boldsymbol{k})$ を求めます。

まず、A と B をそれぞれ平面波で展開したものの積は、

$$\boldsymbol{k} = k_0\boldsymbol{n} \quad , \quad \boldsymbol{l} = k_0\boldsymbol{m}$$

$$AB \;\; = \;\; \sum \tilde{a}(\boldsymbol{n})\tilde{b}(\boldsymbol{m})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}}e^{i\boldsymbol{l}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}}. \tag{4.13}$$

これは、$\hat{x}$ と $\hat{y}$ をまとめて、$\hat{\boldsymbol{x}}$ と書く事にして、$\boldsymbol{k}$ というのは先程の k_0 を使って、$\boldsymbol{k} = k_0\boldsymbol{n}$。それから $\boldsymbol{l}$ というものはやはり $\boldsymbol{l} = k_0\hat{\boldsymbol{m}}$。次に A の方から来る非可換な平面波と、B の方から来る非可換な平面波が積になっているわけですけれども、これをまとめた形に持っていきます。そうすると一つの exponential にまとめる時の phase が出ます。

さっき書かなかったんですが、$\hat{x}$ と $\hat{y}$ の両方をまとめて、$\hat{x}^\mu$ を $\hat{x}^1 = \hat{x}$、$\hat{y}^2 = \hat{y}$。と定義して、$\hat{x}$ と $\hat{y}$ の交換関係を

$$\hat{x}^\mu(\mu = 1, 2) \tag{4.14}$$

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = -i\theta^{\mu\nu} = -i\epsilon^{\mu\nu}\theta \tag{4.15}$$

と書きますと、一つの exponential にまとめた時に出てくる phase factor が $e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}k_\mu l_\nu}$ と書けて、それに、両方まとめた $\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}$ の非可換な平面波がある。

$$AB \;\; = \;\; \sum \tilde{a}(\boldsymbol{n})\tilde{b}(\boldsymbol{m})e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}}k_\mu l_\nu e^{i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l})\cdot\hat{\boldsymbol{x}}}. \tag{4.16}$$

ですから、ちょうどここの所が *積のフーリエ変換になっているわけです。ですから $(a*b)(\boldsymbol{k})$ というものは結局、

$$(a*b)(\boldsymbol{k}) = \sum \tilde{a}(\boldsymbol{l})\tilde{b}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{l})e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}l_\mu(k-l)_\nu}. \tag{4.17}$$

こういう形になります。この位相 factor が出ているという所が非常に重要で、これをもう 1 回フーリエ変換し直すと、$\boldsymbol{l}$ というのが運動量で、$\boldsymbol{k}-\boldsymbol{l}$ というのが 2 つ目の運動量ですから、ちょうど微分演算子に置き換わる。

$$\begin{aligned}(a*b)(\boldsymbol{x}) &= e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu^{(a)}\partial_\nu^{(b)}}a(\boldsymbol{x})b(\boldsymbol{x}) \\ &= a(\boldsymbol{x})b(\boldsymbol{x}) - \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu a\cdot\partial_\nu b(\boldsymbol{x}) + \cdots .\end{aligned} \tag{4.18}$$

このような、普通の A かける b という積だけではなくて、その積に、exponential の上に a に対する微分と、B に対する微分というものがかかったような、そういう積になる。これを展開してみますと、第 1 項目は単なる積ですが、第 2 項目の所から、微分演算子を作用させた項が残って、後は高次の項も含まれている。

ですから、実際この a と b が非可換であって、つまり a と b の *積に対する、交換関係は、これが A と B の行列の commutator に対応してるわけですが、これは leading の項はこんなものになりまして、

$$\begin{aligned}[a,b]_* &= -\theta^{\mu\nu}\partial_\mu a\,\partial_\nu b + \cdots \\ &\sim -i\theta\{a,b\}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

この $\theta^{\mu\nu}$ というのは $\epsilon^{\mu\nu}\theta$ でしたから、ちょうど、Poisson bracket になります。ですから、これが Poisson bracket を交換関係に置き換えるという事の意味です。

トレースについても、やはりトレースが積分に対応するというのは非常に明らかで、トレースというのは結局、非可換な平面波の内で運動量が 0 の部分だけを取り出すというのがトレースという作業で、一方、2 次元で積分するという事はやはり、平面波で運動量が 0 の部分だけを取り出すという事ですから、トレースが 2 次元の積分に対応しているというのはすぐ解る。後は係数さえ決めてやればよろしい。

ここで一つ重要な点は、今、$N\times N$ 行列ですから、これは N^2 個の自由度で、元々、このようにして平面を作ると、場の自由度としては本来 N しか無かったはずなんですが、この $N\times N$ 行列というのは、そこの上で N^2 個の自由度を持っている。ですから N を大きくすると普通の場の理論の自由度に比べて、自由度が非常に大きくなってしまう。ですから、そういう大きい自由度の為に非可換上の場の理論というのは、色々普通の場の理論に無い特殊な性質を持つ。例えばその一つが場の理論自身が非常に non-local になってしまう事、後は、 ultra violet と infrared が密接に関係しているとか、色々な普通の場の理論にはない、不思議な性質があります。

後もう一つコメントしておきたいんですけれども、この行列から場へのマッピングというものは今、非可換の平面波で展開したので、ちょうどこれは行列の空間というのは 2 次元のトーラスにマップされる。ところが、$N\times N$ 行列の空間というのは、2 次元のトーラスではなくて、2 次元の sphere の場にマップする事もできる。それを簡潔にお話したいんですが、$N\times N$ 行列の完全系として、そこで書いたような U と V という行列ではなくて、他の取り方をする事もできる。この U と V の代わりに、SU(2) の表現で N 次元の表現行列を持ってくる。その $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ とありますが、これの N 次元の表現行列を使って展開する。

仮に N 次元既約表現の角運動量固有値を L とするとこの N というのは $N = 2L+1$。それから $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ というのは $\mathrm{SU}(2)$ のカシミアですので、これは $\hat{\boldsymbol{L}}^2 = L(L+1)$ で、N で言うとちょうど、$\frac{N^2-1}{4}$。

通常、球面上の関数を作ろうと思ったら、どういう事をやるかというと $x^2+y^2+z^2 = 1$ という球面に拘束された場を持って来て、それを使って対称多項式を書けばいい。x、y、z から対称多項式を持ってくるという事は球面調和関数を作るという事で、結局 2 次元の関数全体を持ってくる事に対応する。非可換の場合は角運動量 $\hat{\boldsymbol{L}}$ を先程の L でちょっと scale させて、非可換な $\hat{\boldsymbol{x}}$ という演算子を導入します。

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \frac{\hat{\boldsymbol{L}}}{\sqrt{L(L+1)}} \quad \longrightarrow \quad \hat{\boldsymbol{x}}^2 = 1 \qquad (\text{球面})$$

$\hat{\boldsymbol{L}}$ をカシミアのルートで割ってやる事でちょうどこれは半径 1、$^2 = 1$ の球面になるわけです。

実際に $N \times N$ 行列をこの $\hat{\boldsymbol{x}}$ で作ると、

$$A = \sum a_n \hat{x}^{n_x} \hat{y}^{n_y} \hat{z}^{n_z}. \tag{4.20}$$

もちろんこれは $N \times N$ 行列ですから有限個の自由度しかなかったはずなので、n_x、n_y、n_z を対称に取って、3 つを足したものの上限を $N-1$ とすれば、このような constraint を置いた対称多項式全体というので、ちょうどこれで N^2 個の自由度になる。これは角運動量 l が 0 から $N-1$ まで、各角運動量毎に縮退度が $2l+1$ ですから、これを全部足し上げてやると N^2 という全体の自由度に等しくなって、

$$\sum_{l=0}^{N-1} (2l+1) = N^2. \tag{4.21}$$

こうすると、$N \times N$ 行列の完全系を $\mathrm{SU}(2)$ の表現行列で構成する事ができるという事がわかります。

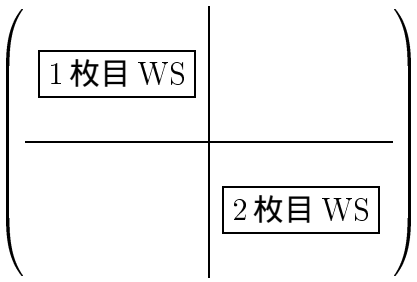
先程は トーラスの world sheet を作ったわけですけれども、実は同じ $N \times N$ 行列から出発して、球面のトポロジーを持つような world sheet を作る事ができるという事です。

元々、sphere でも torus でも、あらゆるトポロジーのリーマン面を足し上げなさいというのが string の展開だったのですが、今の場合、Schild action の行列正則化をしてやると、非常に大事な点はそのような違ったトポロジーというのが、ある意味で自動的に全て入っている。つまり Schild action の行列正則化した事によって、トポロジーの足し上げというのが、もしかしたら自動的に含まれているかも知れない。

じゃあ、 double counting 無しにどうやってこういう違う world sheet のトポロジーを区別するかというのは非常に難しい問題で、まだよく解らないんですが、まあ、今言ったような事から、どうもその genus の足し上げというのが含まれているのではないかと考えられています。

あと、違う genus の weight はどうなっているのか、もしこれが本当であれば、genus の weight というのは string の coupling constant ですが、それがどのように与えられているのか、ですから string の coupling constant というのはいったい何なのか、そういう事がわかれば非常に面白いんですが、まだそこの所に関してはよくわかっていません。

それからもう一つ、行列にした事の利点について。Schild action というのはあくまでも 1 つの string の world sheet だった。ところが、行列っていうのは、先程は $N \times N$ 行列全てを使って torus だとか sphere を作ったわけですけれども、$N \times N$ 行列を例えば 2 つに分けてやって、



(4.22)

ここ (左上) の部分で 1 枚目の world sheet を作って、こちら (右下) を使って 2 枚目の world sheet を作りましょう。もちろんこの非対角の成分も自由度として残るので、積分しなければいけないので、このような見方をすると、1 枚目の world sheet と 2 枚目の world sheet があって、この非対角の部分で、何か 2 つの world sheet の間の interaction が記述されているのではないかと、いう事が考えたくなる。multi string まで含めて行列正則化をしたという事で記述されているのではないかという期待も持てます。ここら辺の所をもう少しきちっと formulate できれば面白いんですが、これについても本当にこういう見方が正しいのかどうかという事についてはよくわかっていません。

4.2 IIB matrix model

今まではまだ bosonic な action だけを書いたんですが、今度は今のを super 化してやります。先程の bosonic な action を super 化して 10 次元の critical string を記述すると考えられる行列模型を作ります。

それは IIB matrix model もしくは、IKKT matrix model と呼ばれています。superstring には Ramond-Noveu-Schwarz 形式と、Green-Schwarz 形式というのがあるんですが、この Green-Schwarz 形式から出発します。

それで、Green-Schwarz 形式をやはり、Schild 型に書いてやって、それを行列正則化するという作業をして、Type IIB superstring を表していると考えられる行列模型を作ります。ちょっとここではそのプロセスは省略して、action を先に書きますと、IIB matrix model の action というのは、

$$S_{\rm B} = \frac{1}{g^2}\,{\rm tr}\left(-\frac{1}{4}[A^\mu A^\nu]^2 - \frac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma^\mu[A_\mu\psi]\right). \tag{4.23}$$

この bosonic part は先程と全く一緒。さっき X^μ と書いていましたが、ここではゲージ場との類推を話したいので、X^μ じゃなくて A^μ と書きますが、同じ事です。10 次元の Type IIB superstring から出発していますので、この μ は 1 から 10 までで、A^μ は 10 次元の場です。それから、この ψ というものは 10 次元の Majorana-Weyl fermion 。ですから 16 成分の grassmann 変数。これらは両方とも $N\times N$ のエルミート行列です。$N\times N$ エルミート行列

$$\begin{cases} A^\mu & ,\mu = 1\cdots 10 \\ \psi & 10\text{ 次元} \qquad MW\text{ フェルミオン} \qquad (16\text{ 成分}) \end{cases} \tag{4.24}$$

これが Type IIB または IKKT matrix model と呼ばれている action なんですが、これの性質について幾つかお話します。その後で、この模型とそれから reduced model と呼ばれているものの関係について、話したいんですが、というのは、この模型で重要な点というのは、ここで見て解るように時空というものが無いという事です。ただ SO(10) の不変性はあるので、いかにも何か 10 次元のフラットな時空の行列模型のように見えるんですが、もちろん時空そのものはどこにも無い。ですからこういう物からどうやって時空という物が現われて来るのかというのが非常に重要な事になります。

4.2.1 SUSY

それでまず、この模型の性質ですが、まず第一に重要な点はこの模型は 10 次元の $\mathcal{N}=1$ の super Yang-Mills 理論の時空を 1 点にしたような理論になっている事。それを reduced model と言うんですが、10 次元の $\mathcal{N}=1$ を reduce しているので、当然 10 次元の $\mathcal{N}=1$ が持っていた超対称性というのはある。その超対称性 $\delta^{(1)}$ はどう書けるかと言うと、これはそのまま 10 次元の超対称性を reduce しているだけですので、全

く同じ形をします。

$$\left\{\begin{array}{rcl}\delta^{(1)}A^{\mu} &=& i\bar{\epsilon}\Gamma^{\mu}\psi \\ \delta^{(1)}\psi &=& \frac{i}{2}[A^{\mu}A^{\nu}]\Gamma_{\mu\nu}\epsilon\end{array}\right. , \left\{\begin{array}{rcl}\delta^{(2)}A^{\mu} &=& 0 \\ \delta^{(2)}\psi &=& \xi\end{array}\right. \tag{4.25}$$

この変換 $\delta^{(1)}$ に対して、この行列模型は全く不変。それから、これ以外にもう一つ超対称変換 $\delta^{(2)}$ がありまして、これは非常に trivial な変換なんですが、ボゾンの方は 0 で、フェルミオンを単に constant shift するような変換、このような 2 つの変換に対して action は不変です。

それで、この 1 つ目の変換 $(\delta^{(1)})$ が 10 次元の $\mathcal{N}=1$ の超対称変換だと言ったんですが、そうすると超対称変換の commutator というのは 10 次元の translation になる。ところが、今の場合は 10 次元時空というのは完全に 1 点に落としていあすので、これの交換関係というのは、upto ゲージ変換で 0 になっている。ですから、もはやこれ自身をもって、時空の超対称変換と言う事はできなくなる。それから 2 つ目の変換 $(\delta^{(2)})$ も、同じくそれだけでは時空の超対称変換と呼ぶ事はできない。

ところが、非常に面白い事に実はこれらを組み合わせてやると、ある意味で、これからお話する時空の解釈に依るわけですが、時空の超対称変換と呼ばれるようなものを構成できる。2 つの変換を足し算と引き算で組み合わせてやるんですが、

$$\left\{\begin{array}{rcl}\tilde{\delta}^{(1)} &=& \delta^{(1)}+\delta^{(2)} \\ \tilde{\delta}^{(2)} &=& i(\delta^{(1)}-\delta^{(2)})\end{array}\right. \tag{4.26}$$

$\tilde{\delta}^{(1)}$ として両方を足したもの。もう一つの $\tilde{\delta}^{(2)}$ は引いたもの。このように定義してやると、この変換の commutator を計算すると、

$$\left[\tilde{\delta}^{(i)}_{\epsilon},\tilde{\delta}^{(j)}_{\xi}\right]\psi = 0 \tag{4.27}$$

$$\left[\tilde{\delta}^{(i)}_{\epsilon},\tilde{\delta}^{(j)}_{\xi}\right]A^{\mu} = \delta^{ij}2i\bar{\epsilon}\Gamma^{\mu}\xi. \tag{4.28}$$

(ここで $i,j=1,2$。)

ψ に作用すると 0 で、ボゾン場に作用させてやると、ちょうどこれがボゾン場の translation になっているという事がわかります。という事は、もしこのボゾン場自身を時空の座標だと仮に考える事ができれば、この超対称変換はまさに $(\mathcal{N}=2$ の$)$ 時空の超対称変換と解釈する事がきる。ですから、この事が A^{μ} 自身を時空の座標だと考える根拠になる。これが一つ目の大事な性質。

4.2.2 A^μ の background が時空

それから、この action は見て解るように、A^μ に関しての 4 次の項から始まっている。2 次の項が無いという事は普通の摂動展開ができないわけです。という事は色々な解析もできないわけですし、色々な解釈も、どう解釈していいのか解らない。そこで、今、A^μ を時空の座標だと思って、A^μ というボゾン場が、何か classical な場があってその周りにゆらいでいるとして、

$$A^\mu = A^\mu_{\rm cl} + \tilde{A}^\mu. \tag{4.29}$$

このように第 1 項目が古典的な場で、第 2 項目がその周りのゆらぎという風に展開したとすると、この考え方は今言った 2 つの事から非常に望ましい。1 つ目はこれが古典的な時空であるとすればこの super 変換というのがまさに時空の super 変換になる。それからもう 1 つは、このように古典的な background を入れてやりますと、展開した時に、2 次の項が出てくる。ですから、その周りのゆらぎに関しては、2 次の項から始まる普通に propagator を持つような場の理論になります。

それで、この古典解がどのように広がっているかという事が、IIB matrix model の時空を表しているのではないかという事が、今一番ありうる、恐らく一番自然な解釈なんですがただ本当にそれが正しいかという事はまだ完全にはよくわかりません。

4.2.3 g : スケールを決める定数

それからもう一つの性質として、先程の action には g というパラメータが入っていた。この g というのは本当にパラメータかどうかという事なんですが、実は g というのは理論に含まれているパラメータではありません。そうではなくてむしろこの理論の scale を決める単なる定数。それはどういう事かといいますと、この理論の場を、

$$\begin{cases} A & \longrightarrow & g^{1/2}A \\ \psi & \longrightarrow & g^{3/4}\psi \end{cases} \tag{4.30}$$

というように再定義してやると、すぐ解るように、先程の action の前の係数 g というのは完全に 1 に置く事ができる。ですから、単なるこの理論を決めている scale であって、決して理論の dynamics を決めるパラメータではないわけです。ただ、ここで古典的な解の周りに展開しなさいという事を言ったんですが、一度古典的な時空を固定してしまうと、この g というのはこの古典的な時空、例えば密度とかそういうのがあるわけですけれども、それとの間の比というのはパラメータになりうる。ですから、

古典的な時空を決めるという事がちょうど何か理論に dimensionless なパラメータを導入するという事に対応します。

4.2.4 D-brane

それから、string には D-brane が存在するという事が知られているわけですけれども、実はこの模型にも BPS な解として D-brane が存在するという事がわかります。時間が無いので具体的には書きませんが、D-brane の解が存在して、しかも、D-brane の間の interaction を計算する事ができる。

そうすると例えば知られている事は、D-brane とそれに並行な別の D-brane を持ってくると、その組は BPS ですから、その間には力が働かない。ところが D-brane と、ひねった、少し傾けた D-brane の configuration というのは BPS ではありませんので、その場合には当然 10 次元の supergravity の massless 場による interaction が生じるはずである。

実際この模型で D-brane を作ってやって、D-brane と anti-D-brane とか、まあ傾いた D-brane との間の相互作用を計算すると、まさに 10 次元の supergravity で予想されるような、graviton であるとか、反対称テンソル場であるとか、こういった massless 場による exchange から来る interaction を完全に再現する事ができる。ですから、その意味でも、この模型というのは何か 10 次元の元の string を表しているのではなかろうかという事が考えられる。

4.3 reduced model としての IIB matrix model

それで、残りの時間で reduced model としての matrix model の性質をお話したいんですが、この reduced model というのはどういうものかというと、これはもう非常に古い話なんですが、ちょっと何年頃か忘れてしまいましたが、昔、large N ゲージ理論というのが非常に盛んに議論された頃に、その N を非常に大きくした普通のゲージ理論というのは、実はその時空を 1 点につぶしてしまっても、planar な性質は完全に再現できる。という事を示したのが江口さんと川合さんなんですが、それは large N reduction という風に呼ばれています。

それで、この large N reduction というのは、まあ昔議論されたのは QCD の場合なんですが、今ここでは出発点としては 10 次元の SU(N) super Yang-Mills 理論。そうすると action は先程書いた Type IIB matrix model と全く同じ形をしているわけで

すが、

$$\int d^{10}x \,\mathrm{tr}\left(-\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma^\mu iD_\mu\psi\right). \tag{4.31}$$
$$A_\mu(x), \psi(x) \longrightarrow A_\mu, \psi$$

このような action を持っているわけです。この A^μ とか、それから ψ という場はもちろん 10 次元上の場ですから、10 次元の x に依存した値を持っているわけですけれども、large N reduction というのは、それらの x に依存した $A^\mu(x)$ であるとか $\psi(x)$ というものを完全に 1 点にする。それで、planar な極限を取ってやると (実は large N というのは planar な極限を取る事になるのですが)、完全に時空の点を 1 点にした理論と元の理論が等価である。

それがどういう事かというのを少しお話したいんですが、まず最初に簡単の為に ϕ^4 のスカラー場の場合。今これはゲージ場だったんですが、ゲージ場の場合はちょっとスカラー場には無い色々面白い性質があるんですが、その前に簡単なスカラー場で見てみたい。

4.3.1 スカラー場の reduced model

ϕ^4 の相互作用を持った D 次元スカラー場の場合は、reduce した後の action というのは、

$$S = N \,\mathrm{tr}\left(\frac{1}{2}[P_\mu, \phi]^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4\right). \tag{4.32}$$

このような action。

それで、この ϕ というのは $N \times N$ 行列。それからここで P_μ という行列入っているんですが、この行列は対角的な値を持つ $N \times N$ 行列で、その対角的な値が D 次元の空間に一様に分布している。

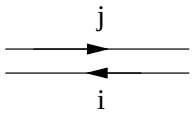
$$\phi \;:\; N \times N \text{ 行列} \tag{4.33}$$
$$P_\mu \;:\; (N \times N) \tag{4.34}$$
$$P_\mu = \begin{pmatrix} P_\mu^1 & & \\ & \ddots & \\ & & P_\mu^N \end{pmatrix} \tag{4.35}$$

この P_μ^i という i 番目の固有値が D 次元中に一様に分布している。そういうような P_μ という固定された行列を今、手で導入した。後でゲージ理論の場合にはこのような行列を人為的に導入する必要は無いという事が解るんですが、スカラー場の場合には手で導入します。そうすると、action は成分で書いてやりますと、今トレースですから、i, j についての summation なわけで、それから P_μ と ϕ の commutator というのは P_μ が対角行列ですので、commutator の i, j 成分は $(P_\mu^i - P_m^j u)\phi_{ij}$ となります。それから、ϕ_{ji} というのは ϕ_{ij} の complex conjugate ですので、$|\phi_{ij}|^2$ という風に絶対値で書く。そうすると、

$$S = N \sum_{ij} \left(\frac{1}{2}(P_\mu^i - P_\mu^j)^2 |\phi_{ij}|^2 + \frac{m^2}{2}|\phi_{ij}|^2 \right) + \frac{N\lambda}{4} \sum \phi_{ij}\phi_{jk}\phi_{kl}\phi_{li}. \tag{4.36}$$

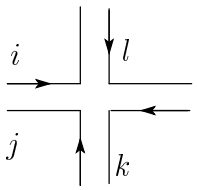
これが i, j という成分で書いた action 。

見ればすぐ解るように、まず ϕ_{ij} の propagator $\langle \phi_{ij}\phi_{kl} \rangle$ は、i と l、j と k が等しい。



$$\langle \phi_{ij}\ \phi_{kl} \rangle = \frac{\delta_{il}\delta_{jk}}{(P^i - P^j) + m^2}\frac{1}{N} \tag{4.37}$$

vertex に関しては、i, j, k, l という index のループが流れていて、その weight は $N\lambda$。



$N\lambda$

図 4.1: vertex

これを見ると、いわゆる場の理論の propagator がほぼ再現できている事が解ると思うんですが、これから例えば propagator に対する 1 ループ補正を計算しようと思ったら例えばこのようなグラフを計算すればよい。

こういう 1 ループ補正があるわけですけれども、ϕ^4 の vertex を 1 個ここに落として、ここで 1 つ internal loop の summation がある。この k についての summation という

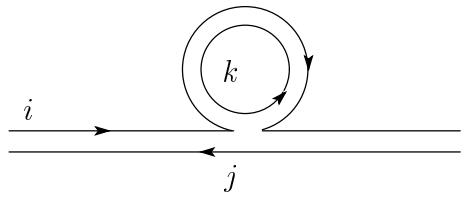


図 4.2: 1 loop

のが結局、ここの p^k_μ というのが、D 次元に一様分布していますから、という事はこれについての index loop の summation が、まさに内線の運動量の積分に相当する。もう少しここの所を具体的に、相関関数がどう再現されるのかという所を少し具体的に見てみます。

この Feynman ルールから、場所に依存した相関関数を一体どう再現できるのか、今この行列模型というのはどこにも時空という概念が無かった。時空という概念が無かったのに、この index の p^i_μ という index についての summation というのが、運動量積分になっていて、この propagator の運動量が $P^i - P^j$ になっている。ここから x に依存する相関関数みたいなものを再現できるか。それで、その方法が、Parisi の処方箋と呼ばれるものなんですが、元々何もなかった x に依存する行列というものを定義します。どう定義するかというと、ϕ に対して $e^{ix\cdot P}$ というものを両側からかけてやります。

$$\hat{\phi} \quad \longrightarrow \quad \hat{\phi}(x) = e^{ix\cdot\hat{P}}\hat{\phi}e^{-ix\cdot\hat{P}}. \tag{4.38}$$

これが Parisi の処方箋と呼ばれている。こういうものを定義してやりますと、例えばこれの i,j 成分というのは、左側から P^i があって、右側から $-P^j$ が来て

$$\left(\hat{\phi}(x)\right)_{ij} = e^{ix(P^i-P^j)}\phi_{ij} \tag{4.39}$$

というものになる。そして、行列模型でこのような Parisi のオペレーターの相関関数 (のトレース) を計算してみますと、これは $\phi(x)$ の i,j 成分と、$\phi(y)$ の j,i 成分を取り出して、i,j についての summation を取ればいいわけですからこうなって、

$$\mathrm{Tr}\langle\hat{\phi}(x)\ \hat{\phi}(y)\rangle = \sum_{ij} e^{i(x-y)(P^i-P^j)}\langle\hat{\phi}_{ij}\ \hat{\phi}_{ji}\rangle \tag{4.40}$$

後は $\phi_{ij}\phi_{ji}$ の期待値を計算すれば良い。この期待値を計算する時に、まず第 1 項目は単に propagator でつないだだけで、$\frac{1}{(P^i-P^j)^2+m^2}$ というものが入ってくるので、普通

の tree の場の理論の propagator と完全に一致している。それから 1 ループの補正はまさにこういうグラフ (4.2) を計算すれば良く、

$$\left(\frac{1}{N}\right)^2 (N\lambda) \sum_{ijk} e^{i(x-y)(P^i-P^j)} \left(\frac{1}{(P^i-P^j)^2+m^2}\right)^2 \frac{1}{(P^i-P^k)^2+m^2} \tag{4.41}$$

この k の summation はもし P^k の分布が D 次元に一様分布していれば、内線の運動量積分と等価になる。ですから、これで完全に場の理論が再現できたんですが、じゃあ、なぜ、large N が必要だったんだろうかと言うと、この propagator で i, j の propagator の運動量は、今 $P^i - P^j$ で置き換えなさいと言った。実はそこにポイントがあります。

今、Feynman diagram を二重線 (実線) で書きます。4 点 vertex がこう並んでいる、例えばこういうような Feynman diagram があったとします。

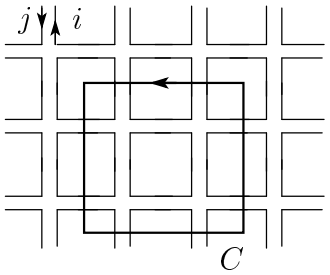


図 4.3: planar diagram 上の dual グラフ

今、これはわざと平面に書ける planar diagram を書いたんですが、このような planar diagram の場合、今点線でこういう dual diagram (dual というのは、propagator を横切るような線を書く。) の閉じた線を考える。それで、ここの閉じた線を横切る運動量の総和は幾つになっているかを考える。そうすると、全ての運動量は $P^i - P^j$ とか、二重線のそれぞれの線に乗っている index の差で書かれる。ですから、例えば i という index の線が入ったとすると、ぐるっと回った時に必ず dual なグラフを通りますから、P^i が一度横切ったら、隣の propagator で $-P^i$ が横切る。dual なグラフは閉じたループですから index は必ず 2 回、逆方向に横切る。ですから 運動量が $P^i - P^j$ という書き方だと、このような閉じたループを横切る運動量の総和は必ず 0 になる。

実際、この planar なグラフの場合には、planar というのは球 (の上に描けるグラフ) なので、その上をぐるっと回る dual グラフの closed loop を横切る (場の理論の) 運動量の総和は 0 になるので、問題は起こらないんですが、

non-planar のグラフというのは、non-trivial なループがあるわけです。トーラスを例にすると、トーラスの断面を横切るような運動量というのは必ずしも 0 ではなくていい。

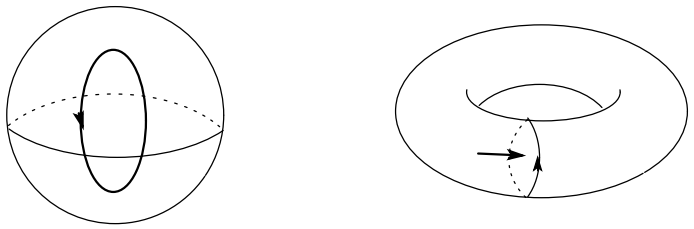


図 4.4: planar と non-planar の違い

ところが、運動量を全て index の差で表すというやり方をしてしまうと、明らかにそれとは矛盾するわけです。トーラスの上の Feynman diagram というのは、closed loop を横切る運動量は non-zero であってもいいはずなのに、今の書き方をすると 0 しか無い。なぜこの理論が planar diagram にしか適用できないかというのが、こういう理由で、non-planar の時には運動量を $P^i - P^j$ という差で書くと、完全に独立な運動量を表現できない。そういう意味で場の理論の摂動展開を再現できない。

4.3.2 ゲージ場の reduced model

ここまでスカラー場の場合だったんですが、今度はゲージ理論の場合、ゲージ理論の場合には reduced model の action と言うのは、完全に時空を 1 点に落としてしまいますと、このようなものになります。

$$S = \frac{N}{g^2} \mathrm{Tr} \left(-\frac{1}{4} [A_\mu,\ A_\nu]^2 \right). \tag{4.42}$$

今の場合にはもはや P_μ という行列を手で入れる必要は無いんですが、その理由はなぜかというと、A_μ 自身があるので、何か dynamical にもし P_μ という classical な background が発生すれば、

$$A_\mu \longrightarrow P_\mu + A_\mu. \tag{4.43}$$

と shift してやれば、先程と全く一緒で、P_μ が入って、

$$S = \frac{N}{g^2}\,\mathrm{Tr}\left(-\frac{1}{4}[P_\mu + A_\mu,\ P_\nu + A_\nu]^2\right) \tag{4.44}$$

このような covariant derivative の形になります。後はやる事は先程のスカラー場の場合と全く同じで、これが運動量項を表し、propagator も正しく再現できる。あとゲージ理論で幾つか面白い性質があるんですが、例えば、元々これは時空が無かったので、このようにしてゲージ理論を再現した時に、local なゲージ不変性はどうなるのか。それもちょうどこの P_μ という background があるので P_μ とゲージ変換のパラメータとの commutator というのが入って来て、ちょうど先程の Parisi の処方箋の意味で x という座標を入れると、元々持っていた $\mathrm{U}(N)$ のユニタリー不変性というのが local なゲージ不変性になるという事がわかります。

それからもう一つ問題なのが、今言ったように P_μ というのが、D 次元空間に一様に分布するのであれば、dynamical に planar のゲージ場の理論を再現できるわけでんですけれども、ところが問題なのは P_μ の dynamics 。この P_μ というものが、一様に D 次元空間に分布できるかという事。

bosonic なゲージ理論の場合には、実は P_μ の非対角の項の積分をする事で対角成分の dynamics を計算してやると、P_μ の固有値の間に log 的な引力が、(次元が 2 よりも大きい場合ですが) 働いてしまう。ですから、この固有値というのは完全に 1 点に潰れてしまうわけです。そうなるともはや、場の理論の Feynman diagram を再現する事はできない。ですから、固有値をそういう 1 点に潰れないようにする為に色々な工夫があるわけですが、例えば、もう固有値分布というのは quench してしまう。quench するという意味は、手で無理矢理固有値を一様に広げておくという事をやる。それからもう一つの方法は twist するという方法があるんですが、うまく twist する事によって、固有値を広げようとする。そういうように幾つか方法がある。それで、それは bosonic の場合だったんですけれども、ところが、supersymmetric にした場合、supersymmetric にした場合っていうのはちょうど Type IIB matrix model もそうなんですが、supersymmetric にすると実はボゾンとフェルミオンから log の引力の係数が完全にキャンセルして、この固有値間には log 的な引力が働かないという事が解る。ですから、supersymmetric の場合はもう少し dynamical に固有値が分布するという可能性が出ています。

それで、あと、先程言った Type IIB matrix model の時には background というのは時空として解釈するのが一番重要であると言ったんですが、今のこの、reduced model としての解釈では、この P_μ というのは運動量。ですから、reduced model としての解釈と時空としての解釈というのは違うんですが、それがその本当にどちらの解釈を取るべきなのかという所も、実はよく解らない。もしかしたら、T-duality みたいなものが

あるのかも知れないんですけれども、ここの所はよく解らない。ただ、supersymmetry からすると、やはりこれは時空と解釈するのが非常に自然なんですが、そしたらもちろん reduced model の解釈ではなくなる。

4.4 IIB matrix model の進展

それから、その後の IIB matrix model の進展なんですが、A^μ の background を時空として考える。そうすると、もし本当にこれが string の構成的定式化であったら、4 次元というのが出せるのか、出せないのか。そうすると、この $\P_\mu$ の固有値分布の dynamics がどうなっているかを調べてみれば良いであろうと。それで、まず最初にやった解析というのは、この対角とその周りのゆらぎに展開してやって、そのゆらぎについて積分するんですが、そうすると非常に面白い事に、時空の描像として次のような描像が得られた。

対角成分というのはボゾンとフェルミオンと両方あるので、まず、ボゾンとフェルミオンの対角成分を残して、非対角を積分する。その次にフェルミオンの対角成分を積分して、ボゾンの固有値の統計力学を求めようというやり方に従うんですが、そうすると、まず時空というのが N 個の点の集合で、N 個の点というはボゾンの対角成分の数ですから、全部で N 個ある。それで、フェルミオンの対角成分というのはちょうどそのボゾンの N 個の時空点を繋ぐような働きをする。という事がわかります。しかも、フェルミオンの path integral が消えないという条件から、N 個の時空はバラバラになる事はなくて、必ずひとまとまりになっていなければいけない。という事も解るんですが、ここで結ばれた力というのは非常に弱い力ですので、かなり遠くまで広がる事ができる。

それで、この固有値分布の dynamics は実はある近似をすると、いわゆる branched polymer と呼ばれる特性系と等価であるという事が解る。それで、branched polymer というのは、もちろんフラクタルなんですが、branched polymer の Hausdorff 次元は 4 である事が知られている。もちろんフラクタルな 4 次元時空なんですが、何かこれにもう少し、近似をした時に無視した項を入れてやるとフラット な 4 次元が出て来ないか、というのを昔やった時に期待して色々やっていたんですが、残念ながらその時には本当に 4 次元的なものを出す事はできなかった。

あと、最近この流れで、1 つ面白いのは、西村君と杉野君が、ちょっとかなり粗い近似で、どこまでいいか解らないんですが、もともと IIB matrix model というのには 2 次の項がなかったのを、無理矢理 2 次の項を付けておいて、その後で artificial に付けた 2 次の項に理論が依らないという要請から固有値分布の広がりを解析するという計

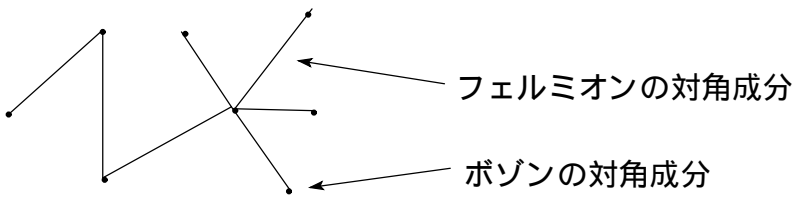


図 4.5: 時空点の集合

算をやったんですが、彼らの計算はその後、川合さんなんかが、もう 1 次高次まで計算して、2 つのグループの結論というのは何か 4 次元的な広がりが見えているのではないか、という事を言っている。ですから、それが本当だったら非常に面白いんですが、まあまだ、それは良く解っていない。

それから、もう一つの進展は、最近はちょっと下火になってしまったんですが、この行列模型の background として、こういう普通の可換な時空ではなくて、非可換な時空というのが非常に自然に埋め込められるという事が解る。いわゆる非可換幾何という話なんですが、そうすると何か非可換幾何の中に string 的なものが含まれているのではなかろうかというので、それも 2 ~ 3 年大分精力的に調べられたんですが、まあそちらの方も結局、string との関係という事については、ちょっと良く解らないまま、現在はちょっと下火になっています。

それから、まだ色々な、例えば Schwinger-Dyson の問題とか、色々大きな問題が残っているんですが、大体 Type IIB matrix model の進展というのはこんな感じ。

もう時間になってしまったのでこれで終りますが、結局伝えたい事というのは string 理論というのは、今日最初に言ったように、まだ全く解けていないものです。今まで解っているのは摂動展開であるとか、摂動効果の極一部については解っているんですが、本当に string とは何なのか、それから時空とは、string の condensation でどう時空を表すのかという事についてはまだまだ解らない事があるので、是非これから皆さんも参加して頑張っていただきたい。

参考文献

[1] S. R. Das, "Some Aspects Of Large N Theories," Rev. Mod. Phys. **59**, 235 (1987).

[2] J. Polchinski, "String Theory. Vol. 1: An Introduction To The Bosonic String."

[3] J. Polchinski, "String Theory. Vol. 2: Superstring Theory And Beyond."

[4] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, "Superstring Theory. Vol. 1: Introduction."

[5] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, "Superstring Theory. Vol. 2: Loop Amplitudes, Anomalies And Phenomenology."

[6] P. Di Francesco, P. Ginsparg and J. Zinn-Justin, "2-D Gravity and random matrices," Phys. Rept. **254**, 1 (1995) [arXiv:hep-th/9306153].

[7] P. Ginsparg, "Matrix models of 2-d gravity," arXiv:hep-th/9112013.

[8] H. Aoki, S. Iso, H. Kawai, Y. Kitazawa, A. Tsuchiya and T. Tada, "IIB matrix model," Prog. Theor. Phys. Suppl. **134**, 47 (1999) [arXiv:hep-th/9908038].