超弦理論の共変的定式化に向けて

相阪 有理
(Univ. of Tokyo, Komaba)

Aug. 22, 2003

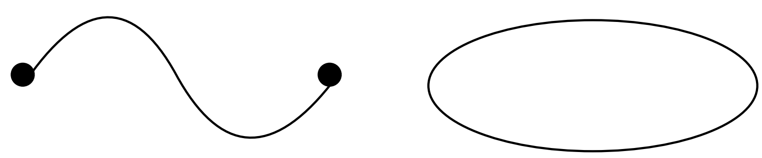
Based on following works with Y. Kazama

- "A New First Class Algebra, Homological Perturbation and Extension of Pure Spinor Formalism for Superstring,"
  — JHEP 0302 (2003) 017, [hep-th/0212316]
- "Operator Mapping between RNS and Extended Pure Spinor Formalisms for Superstring,"
  — [hep-th/0305221].

超弦理論のおおまか

❤ それは…

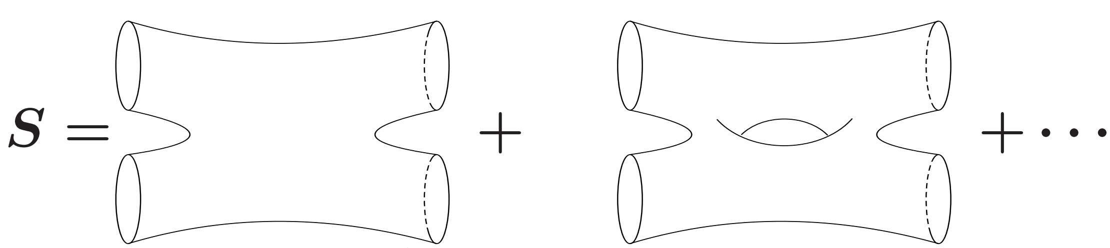
- 超: 超対称性 (Supersymmetry)
- ひも: 粒子 (0 次元) でなく 1 次元の物体の量子論



- 開弦～ photon (低エネルギーでゲージ理論)
  閉弦～ graviton (低エネルギーで重力理論)

❤ 何故に紐?

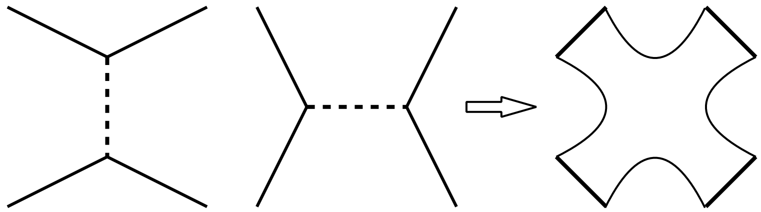
- 場の理論の成功と困難:
  - 電磁・弱・強 ➜ ゲージ理論 (大成功)
  - 重力 ➜ くりこみ不可能
- 紐の恩恵:
  - Graviton を中間状態に含む S 行列:
    ➜ 摂動論の各次数で有限…整合的な量子重力理論❢



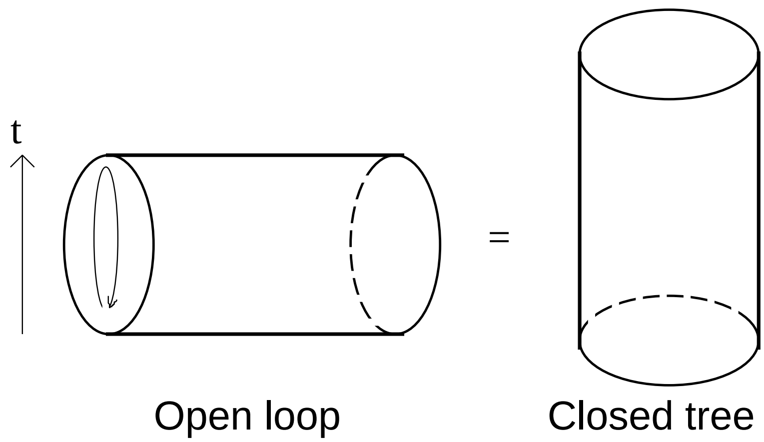
  - その他『物理モデル』として色々面白い.

❤ ひもに特徴的な物理:

- Tree振幅のs-t双対性が自然に出てくる:



- Loop振幅のopen/closed双対性

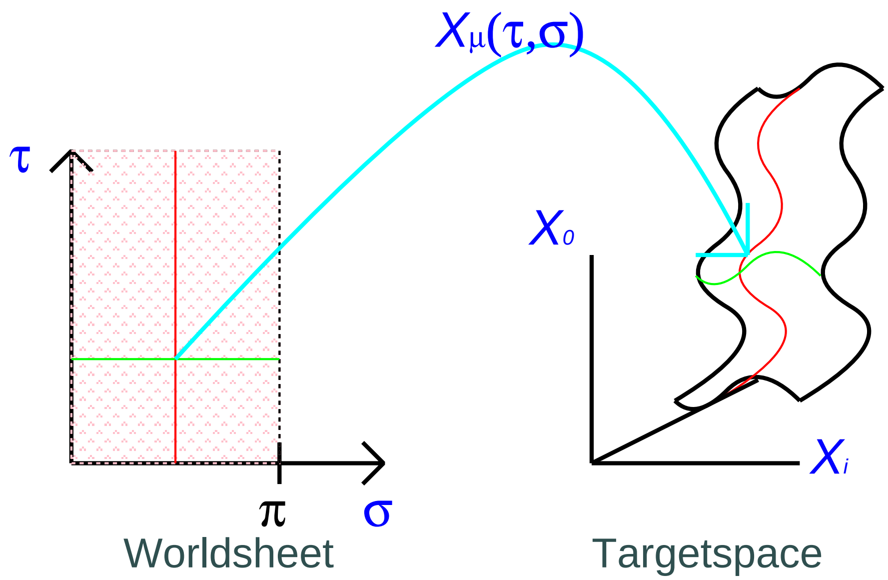


→ ゲージ理論と重力理論の間になんらかの等価性?

- コンパクト化とT-duality, D-brane, . . .

❤ 世界面と標的空間(時空):

- D次元時空中(X^μ $(\mu=0,1,\ldots,D-1)$)のひもの運動
  ➜ 世界面の位置$X^\mu(\tau,\sigma)$を指定すると決まる



- 普通，世界面(2次元)上の場の理論として定式化される．
- 世界面上の座標$\xi^i=(\tau,\sigma)$は非物理的
  ➜ 世界面上を一般相対論に (graviton h_{ij}を導入)

❤ Polyakov型作用:

$$S=\frac{-1}{2\pi\ell_s^2}\int d^2\xi\sqrt{-h}h^{ij}\partial_i X^\mu\partial_j X_\mu$$

- 経路積分で取り扱う場合，分配関数は:

$$Z=\frac{1}{V_{\mathrm{rep}}V_{\mathrm{scale}}}\int\mathcal{D}X\mathcal{D}h\,e^{iS[h,X]}$$

❤ 世界面上の対称性とそのゲージ固定:

✥ 一般座標変換 (reparam.):

$$h'_{ij} = h_{kl} \frac{\partial \xi^i}{\partial \xi'^k} \frac{\partial \xi^i}{\partial \xi'^l}$$

✥ 局所スケール変換: ← 量子論的には一般にアノマる (後述)

$$h_{ij} \to h'_{ij} = e^{\phi(\xi)} h_{ij}$$

ともかく, これらの対称性のおかげで,

$$h^{ij} \to e^{\phi(\xi)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とゲージ固定できる (conformalゲージ):

$$S_{\text{fixed}} = \frac{-1}{2\pi} \int d\tau d\sigma X^\mu (\partial_\tau^2 - \partial_\sigma^2) X_\mu$$

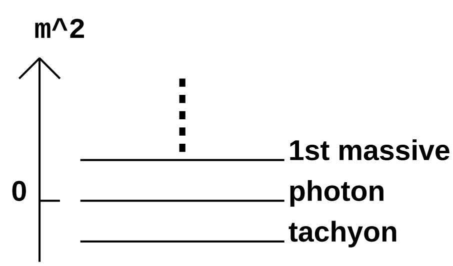
✥ これは世界面上の自由Klein-Gordon場
➜ 完全に解ける❢ (Fock空間 $\sim a^\dagger_{\mu_1} \cdots a^\dagger_{\mu_n} |0\rangle$)

❤ 拘束条件とスペクトル:

✥ でも h^{ij} の運動方程式 (拘束条件) を忘れてはいけない:

(世界面上の) エネルギー・運動量テンソル: $T_{ij} \equiv \dfrac{\delta S}{\delta h^{ij}} = 0$

✥ Fock空間の元で, この条件を満たすものが物理的状態
➜ String tower:



❤ 量子論的スケール不変性と臨界弦:

- 局所スケール不変性は量子論的にアノマる
  ➜ central charge c とよばれる量で測る
  臨界弦$\equiv c$が系全体で相殺．とっても扱いやすい．
- Bosonic stringの場合:
  - h^{ij}: cに-26寄与
  - X_μ: 1個あたりcに$+1$寄与

➜ μの足は$D=26$まで走って欲しい．
時空の次元が決まった!!…といって人々はたいへん喜ぶ

もう少しちゃんと言うと…

- V_{rep}をFaddeev-Popovゴースト(bc)の積分として書く:

$$Z=\frac{1}{V_{\text{scale}}}\int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}b\mathcal{D}c\mathcal{D}X^\mu e^{i(S_{\text{fixed}}+S_{bc})}$$

- 量子論的にはconformalモードϕの積分が単に
  V_{scale}を与えてdecoupleするとは限らない．
  (X^μ, (b,c)それぞれと微妙にcoupleしている)

➜ $D=26$では(X^μ,b,c)の全体から絶妙にdecouple:

$$Z=\int \mathcal{D}b\mathcal{D}c\mathcal{D}X^\mu e^{i(S_{\text{fixed}}+S_{bc})}$$

❤ 臨界弦のBRST量子化:

✦ Conformalゲージの作用にはしつこく対称性がある.

conformal対称性:

✧ $\tau \pm \sigma \equiv \xi^{\pm} \longrightarrow \xi'^{\pm} = f^{\pm}(\xi^{\pm})$ ($f^{\pm}$は任意)

✧ 対称性を表す(アフィン)代数→Virasoro代数

✦ Conformal Field Theory (CFT):

✧ T_{ij}が場の上にVirasoroの表現 ($\xi^{+} \longrightarrow z$と複素化):

$$T(z) = T_{++} \int dz \frac{L_m}{z^{m+2}}$$

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}\delta_{m,n}(m^3 - m)$$

✧ c: 実は先のcentral chargeに他ならない.

✦ Bosonic stringの場合:

✧ $(X^{\mu}, T^{(X)})$, $(b, c, T^{(bc)})$の2組のCFT

✧ $T^{\mathrm{tot}} = T^{(X)} + T^{(bc)}$のcentral chargeは0❢

➜ Virasoroは普通の代数:

BRST演算子$Q \sim \int cT$ ($Q^2 = 0$)がつくれる.

✦ Qのcohomは正しいstring towerを出す.

Superstring (Green-Schwarz)

Bosonic String

Spinning String
Ramond-Neveu-Schwarz (RNS)

Superstring
Green-Schwarz (GS)

- **GS: 時空 (標的空間) を super 化** $\cdots X^\mu \longrightarrow (X^\mu, \theta^\alpha)$
- **RNS: 世界面上を super 化** $\cdots X^\mu \longrightarrow (X^\mu, \psi^\mu)$
  (実はRNSも超弦になるが，時空の超対称性が見えにくい．)

❤ 超対称性についてひとこと:

- **"超" $= \sqrt{\text{並進}}$ を考えたい**
  ➜ X^μ **の fermionic パートナー** θ^α **が必要**
- **時空 (超空間) の超対称性:**
  $\delta\theta^\alpha = \epsilon^\alpha, \qquad \delta X^\mu = i\epsilon\gamma^\mu\theta$
  ➜ $\Pi_i^\mu = \partial_i X^\mu - i\theta^\alpha \gamma^\mu_{\alpha\beta}\partial_i\theta^\beta$ **は超対称不変**

❤ Bosonic string のナイーブな super 化:

- $\partial_i X^\mu$ **をちょこっと super 化するだけではダメ**

$$S = \frac{-1}{2\pi}\int d^2\xi \sqrt{-h}\, h^{ij}\Pi_i^\mu \Pi_{j\mu},$$

➜ **複雑すぎて量子化できない．**
全微分項を付け加えて，作用に κ **対称性を持たせる．**

❤ Wess-Zumino項とκ対称性.

- Wess-Zumino項と呼ばれるものをSに加え，S_{total}がfermionicな局所対称性(κ対称性)を持つようにできる:

$$S_{\text{WZ}} = \frac{-i}{\pi}\int d^2\xi \epsilon^{ij}\partial_i X^\mu \theta\gamma_\mu \partial_j \theta$$

(実は世界面上の微分形式としてexact)

- κ対称性:

$$\delta\theta^\alpha = 2i\gamma_\mu^{\alpha\beta}\Pi_i^\mu \kappa_\beta, \qquad \delta X^\mu = i\theta\gamma^\mu\delta\theta$$

$\kappa_\beta(\xi)$: fermioncな局所パラメタ

- κ対称性を使ってS_{total}を簡単化できる:
➜ 自由KG場 ＋ 自由実spinor場の理論
(光円錐ゲージ: $SO(9,1) \to SO(8)$)

- つまり，量子化のためにはκ対称性が不可欠
でもκ対称性のローレンツ共変的取り扱いは極めて困難
➜ 15年間死屍累々.

❤ なぜに共変性が欲しい?

- 超対称性もローレンツ対称性も重要 ➜ バチは当たらん
(少なくとも計算がめちゃくちゃ楽になるハズ)
- 光円錐ゲージが取れないような重要な背景場中の弦理論.
- などなど…

Pure spinor形式

Berkovits (2000): でけた〜❢

❖ 最初から自由場CFTで$c_{\text{tot}=0}$のものとして定式化.
作用は2次(自由場)で，超対称性が明白な形にも書ける:

$$S_{\text{PS}} = \frac{-1}{\pi}\int d^2z\Big(\frac{1}{2}\partial X^\mu\bar{\partial}X_\mu + p_\alpha\partial\theta^\alpha + \omega_\alpha\partial\lambda^\alpha\Big)$$
$$= \frac{-1}{\pi}\int d^2z\Big(\frac{1}{2}\Pi^\mu\bar{\Pi}_\mu + d_\alpha\partial\theta^\alpha + \omega_\alpha\partial\lambda^\alpha\Big)$$

✧ ここにλ^αはpure spinor (Super不変):
(1) bosonic spinorで,
(2) PS条件: $\lambda\gamma^\mu\lambda = 0$をみたすもの.

✧ d_α: 場の上に超対称共変微分として作用

❖ BRST演算子の作りかたは本来，不明.
Berkovitsのお告げ:

$$Q = \lambda^\alpha d_\alpha$$

これは実はPS条件のため冪零.
➜ そのcohomを時空のスペクトルと思いなさい.

❖ なんとなんと，正しい超弦のスペクトルが出る❢
他にも，ツリー振幅を計算するルールも発見❢
➜ 超弦理論の超ポアンカレ共変的定式化❢

Extended PS形式

YA ＋ Y.Kazama (2002–)

- 弦理論なんだから，世界面上の座標変換不変性が超重要❢
  - そこからスペクトル条件や経路積分測度が決まる

- しかし，PS形式ではそれが全然見えない．
  - ツリー振幅の計算規則のでどころ不明
    (正しそうだけど，怪しさ120%.)
  - ループ振幅の計算規則は誰も知らない．

- そもそもPS条件の量子論的取り扱い方がよー分からん❢
  ➜ とりあえず，PS拘束条件を除去してみた: EPS

EPS形式:

(1) PS条件を直接解くのではなく，λ^α の拘束を除き，
その余分な自由度を打ち消すゴースト場を導入．

(2) Cohom. はPS形式と明白に等価．
(Homological Perturbation 法)

成果:

(1) 世界面上のbゴースト: $T = \{Q, b\}$ 発見❢ (複合場)

(2) RNS形式との相似変換構成❢
(s.t. $Q_{\text{EPS}} \sim Q_{\text{RNS}}$)

まとめと展望

- BerkovitsのPS形式:
  - 超弦理論の共変的定式化に新しい展望
  - でも，ゴチャゴチャしててよー分からん.
- EPS形式:
  - PSと等価だがPS条件はない.
    (各種操作が量子論的に完全にwell-defined.)
  - bゴースト / RNS形式との関係が明らかに.

しかし，道はまだまだ遠い….

問題点:

- 古典作用をあきらめてκ対称性の問題を回避した.
  一歩前進だが，まさにreparamがないため，
  理論が ad hocで怪しさ100点満点となっている.

→ PS形式の背後に古典作用はあるのか?

疑問点:

- 世界面上のreparam. → $\frac{\delta S}{\delta h^{ij}} \equiv T_{ij} = 0$ (拘束)
  PS形式では，このTが拘束条件となっていない.
  (世界面上の場の理論はちゃんとtopological)