非線形シグマ模型とその摂動論

Part I ～ 対称性の自発的破れの低エネルギー有効理論
Part II ～ 標準模型を超える素粒子模型の構築へ向けて

於、長野県木島平、原子核三者若手夏の学校

2004 年 8 月 5 日～6 日

棚橋 誠治 (東北大学大学院理学研究科)

Part I.

§.1. 対称性とその自発的破れ
(南部ゴールドストンボソン、ゴールドストン定理)

§.2. 非線形シグマ模型
(カイラルラグランジアン、CCWZ の処方箋)

§.3. 非線形シグマ模型の摂動展開
($SU(3)$ カイラルラグランジアンとカイラル摂動論)

Part II.

§.4. 電弱対称性の自発的破れ
(ゲージ化されたカイラルラグランジアン、等価定理、
輻射補正とオブリークパラメータ S, T, U)

§.5. 余剰次元理論 (5 次元ヒグスレス模型) のデコンストラクション

§.6. 擬南部ゴールドストン粒子

§.7. リトルヒグス模型

§.1. 対称性とその自発的破れ

$O(N)$ 線形シグマ模型

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - V(\phi_i \phi_i), \qquad i = 1, 2, \cdots N,$$

$\vec{\phi}$ を $\vec{\phi} \equiv [(\phi_1, \phi_2, \cdots \phi_N)]^T$ と定義すると

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi} - V(|\vec{\phi}|^2).$$

ここで、$|\vec{\phi}|^2 \equiv \phi_i \phi_i = \vec{\phi} \cdot \vec{\phi} = |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + \cdots + |\phi_N|^2.$

この模型のもつ対称性は

$$\phi_i \longrightarrow \phi_i' = U_{ij}\phi_j, \qquad U_{ij}U_{ik} = \delta_{jk},$$

$$\vec{\phi} \longrightarrow \vec{\phi}' = U\vec{\phi}, \qquad UU^T = U^T U = 1.$$

U は N 次元直交行列 ($O(N)$ の対称性)

ポテンシャル V として

$$V=\frac{\lambda}{4}\left(|\vec{\phi}|^2-v^2\right)^2=\frac{\lambda}{4}|\vec{\phi}|^4-\frac{\lambda v^2}{2}|\vec{\phi}|^2+\text{定数項},\qquad \lambda>0$$

の形を採用する。このとき $\vec{\phi}=0$ のまわりで ϕ の質量が

$$m_\phi^2=-\lambda v^2<0$$

(タキオン) となって $\vec{\phi}=0$ 近傍の真空が不安定になってしまう。

$$\Downarrow$$

本当の真空：$\langle 0|\vec{\phi}|0\rangle\neq 0.$

対称性の自発的破れ (本当の真空は $O(N)$ 変換で不変ではない)

本当の真空では、

$$\langle 0|\phi_i|0\rangle = 0, \qquad (i = 1, \cdots, N-1)$$
$$\langle 0|\phi_N|0\rangle = v,$$

となって、もとの対称性 $O(N)$ は自発的に $O(N-1)$ に壊れている。

本当の真空のまわりで場を展開する。

$$\phi_i = \begin{cases} \pi_i, & (i = 1, \cdots, N-1) \\ v + \sigma, & (i = N) \end{cases}$$

ポテンシャル

$$V = \frac{\lambda}{4}\left(2v\sigma + \sigma^2 + \vec{\pi}^2\right)^2 = \lambda v^2\sigma^2 + \lambda v\sigma|\vec{\pi}|^2 + \frac{\lambda}{4}|\vec{\pi}|^4 + \cdots.$$

σ と π の質量

$$M_\sigma^2 = 2\lambda v^2, \qquad M_\pi^2 = 0.$$

質量 0 の南部ゴールドストン (NG) ボソン π

もともとの対称性 $[G = O(N)]$ の自由度

$$\dim G = \frac{N(N-1)}{2}$$

破れずに残った対称性 $[H = O(N-1)]$ の自由度

$$\dim H = \frac{(N-1)(N-2)}{2}$$

自発的に破れた対称性の自由度

$$\dim(G/H) = \dim G - \dim H = N - 1$$

NG ボソンの数=$\dim(G/H)$。(**ゴールドストン定理**)

$$\pi_i, \qquad i = 1, \cdots, N-1.$$

この場合は、もともとのラグランジアンに入っていたポテンシャルを使ってゴールドストン定理を直感的に理解できる。

N_f フレーバー QCD のカイラル対称性

N_f 種類の質量 0 のフェルミオンを含む $SU(N_c)$ ゲージ理論

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N_f} \bar{\psi}_i i\gamma^\mu D_\mu \psi_i - \frac{1}{2g_c^2}\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}).$$

を考える。ここで g_c は $SU(N_c)$ ゲージ結合定数。共変微分と field strength は

$$D_\mu\psi = \partial_\mu\psi + iA_\mu\psi, \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu].$$

カイラリティーによる分解

$$\psi = \psi_L + \psi_R, \qquad \psi_L = \frac{1-\gamma_5}{2}\psi, \quad \psi_R = \frac{1+\gamma_5}{2}\psi.$$

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L + \bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R, \qquad \bar{\psi}\psi = \bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L.$$

ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N_f} \bar{\psi}_{Li} i\gamma^\mu D_\mu \psi_{Li} + \sum_{i=1}^{N_f} \bar{\psi}_{Ri} i\gamma^\mu D_\mu \psi_{Ri} - \frac{1}{2g_c^2}\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}).$$

となって L と R に分離する。

この模型のもつ対称性は

$$\psi_{Li} \to \psi'_{Li} = U_{(L)ij}\psi_{Lj}, \qquad U_{(L)ij}U^*_{(L)ik} = \delta_{jk},$$

$$\psi_{Ri} \to \psi'_{Ri} = U_{(R)ij}\psi_{Rj}, \qquad U_{(R)ij}U^*_{(R)ik} = \delta_{jk},$$

$U_{(L)}, U_{(R)}$ は N_f 次元ユニタリー行列

($SU(N_f) \times SU(N_f)$ のカイラル対称性)

$SU(N_c)$ ゲージ理論のくりこみ群 (漸近的自由性)

- 高エネルギーでは、$g_c^2 \ll (4\pi)^2$ (摂動論が使える)
- 低エネルギーでは、$g_c^2 \gg (4\pi)^2$ (非摂動的効果が重要)

非摂動的効果によるカイラル対称性の自発的破れ

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}_{Li} \psi_{Rj} \rangle &\propto \delta_{ij} \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

自発的に破れずに残った対称性

$$\begin{aligned} &\psi_{Li} \to \psi'_{Li} = U_{(V)ij} \psi_{Lj}, \\ &\psi_{Ri} \to \psi'_{Ri} = U_{(V)ij} \psi_{Rj}, \qquad U_{(V)ij} U^*_{(V)ik} = \delta_{jk}, \end{aligned}$$

$SU(N_f)$ の (L と R を同時に変換する) 対称性

もともとの対称性 $[G = SU(N_f) \times SU(N_f)]$ の自由度

$$\dim G = 2(N_f^2 - 1)$$

破れずに残った対称性 $[H = SU(N_f)]$ の自由度

$$\dim H = N_f^2 - 1$$

自発的に破れた対称性の自由度

$$\dim(G/H) = \dim G - \dim H = N_f^2 - 1.$$

ゴールドストンの定理によれば、$N_f^2 - 1$ 個の質量 0 の NG ボソンが現れるはず。

$$\pi_i, \qquad i = 1, \cdots, N_f^2 - 1.$$

この場合の π の正体はなんだろうか?

注意: もともとのラグランジアンは、スピン 1/2 のフェルミオンとスピン 1 のゲージ場しか含まない。スピン 0 の NG ボソンの候補は含まれていない。

- π は複合粒子 (フェルミオンと反フェルミオンの複合状態) であり、非摂動的ダイナミクスによって生じる。

- ツリーレベルポテンシャルを使ってゴールドストン定理を直感的に理解することは困難。

カレント代数の方法を用いたゴールドストン定理の証明の利点

- NG ボソンが複合粒子の場合でも適用可能。対称性だけを使うので、非摂動的ダイナミクスの詳細によらない。

- ポテンシャルを使わないでゴールドストン定理を証明できる。

カレント代数の方法を用いたゴールドストン定理の証明

対称性の自発的破れ

$$\delta\Phi = i[Q, \Phi], \qquad Q = \int d^3\vec{x} j^0, \quad (j^\mu \text{ はネーターカレント})$$

- ウィグナー相 (真空が Q の変換で対称なとき)

$$\langle 0|\delta\Phi|0\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q|0\rangle = 0$$

- 南部ゴールドストン相 (真空が Q の対称性を自発的に破るとき)

$$\langle 0|\delta\Phi|0\rangle \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q|0\rangle \neq 0$$

$\langle\delta\Phi\rangle$ はオーダーパラメータ。

T 積グリーン関数を考える。

$$\langle 0|T[j_\mu(x)\Phi(0)]|0\rangle = \langle 0|j_\mu(x)\Phi(0)|0\rangle\theta(x^0) + \langle 0|\Phi(0)j_\mu(x)|0\rangle\theta(-x^0)$$

ネーターカレントの保存から

$$\begin{aligned} i\int d^4x\partial^\mu\langle 0|T[j_\mu(x)\Phi(0)]|0\rangle &= \int d^4x\langle 0|i[j_0(x),\Phi(0)]|0\rangle\delta(x^0) \\ &= \langle 0|i[Q,\Phi]|0\rangle. \end{aligned}$$

従って、

$$\langle 0|\delta\Phi|0\rangle = i\int d^4x\partial^\mu\langle 0|T[j_\mu(x)\Phi(0)]|0\rangle.$$

問題

- 南部ゴールドストン相では 左辺 $\neq 0$.
- 右辺は表面積分でかける。(たいていの場合は 0 になるはず。)
  どういう場合に、右辺 $\neq 0$ とできるか?

ネーターカレント j^μ と Φ の両方に結合している粒子 π を考える。

$$\langle 0|j^\mu|\pi(p)\rangle = -if_\pi p^\mu, \qquad \langle \pi(p)|\Phi|0\rangle = Z_\pi.$$

$\langle 0|T[j_\mu(x)\Phi(0)]|0\rangle$ への π の 1 粒子状態の寄与

$$\langle 0|T[j^\mu(x)\Phi(0)]|0\rangle\Big|_\pi = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot x} f_\pi p^\mu \frac{1}{p^2 - m_\pi^2} Z_\pi.$$

したがって、

$$\langle 0|\delta\Phi|0\rangle\Big|_\pi = i\int d^4x \partial_\mu \langle 0|T[j^\mu(x)\Phi(0)]|0\rangle\Big|_\pi = \frac{p^2 f_\pi Z_\pi}{p^2 - m_\pi^2}\Big|_{p=0}$$

質量 0 ($m_\pi^2 = 0$) の NG ボソンが存在して、j^μ と Φ の両方に結合している場合に限りこの式は $\neq 0$ になる。(ゴールドストン定理)

$$\langle 0|\delta\Phi|0\rangle = f_\pi Z_\pi \qquad (f_\pi : \text{NG ボソン } \pi \text{ の崩壊定数})$$

$O(N)$ 線形シグマ模型の f_π

ネーターカレント

$$j_i^\mu = \phi_N \partial^\mu \phi_i - \phi_i \partial^\mu \phi_N.$$

対称性の破れた真空での場の再定義

$$\phi_i = \begin{cases} \pi_i, & (i = 1, \cdots, N-1) \\ v + \sigma, & (i = N) \end{cases}$$

したがって、

$$j_i^\mu = v\partial^\mu \pi_i + \sigma \partial^\mu \pi_i - \pi_i \partial^\mu \sigma$$

となって、

$$\langle 0 | j_i^\mu | \pi_j(p) \rangle = -iv\delta_{ij} p^\mu.$$

この場合、崩壊定数 f_π は、場の真空期待値 v に一致する。$f_\pi = v.$

QCD の f_π

現実の QCD ($N_c = 3$)

$$m_\pi \simeq 140\text{MeV} \ll m_\rho \simeq 770\text{MeV}$$

$$\Uparrow$$

近似的なカイラル対称性 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ ($m_u, m_d \ll 1\text{GeV}$) と
その自発的破れ

自発的に破れた対称性のネーターカレント

$$j^\mu_{5a} = \bar{\psi}_R \gamma^\mu \frac{\tau^a}{2} \psi_R - \bar{\psi}_L \gamma^\mu \frac{\tau^a}{2} \psi_L = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} \psi.$$

π の崩壊定数

$$\langle 0 | j^\mu_{5a} | \pi_b(p) \rangle = -i f_\pi p^\mu \delta_{ab}, \qquad f_\pi = 92.4\text{MeV}.$$

低エネルギー定理

低エネルギーでの NG ボソンの相互作用は、対称性の破れのパターン G/H と 崩壊定数 f_π だけで決まる。

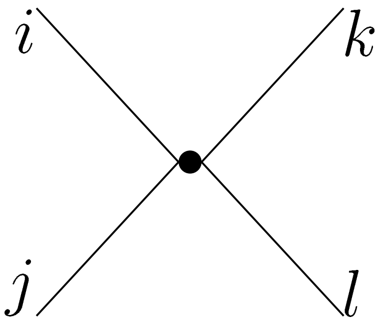
$O(N)$ 線形シグマ模型での π-π 散乱を例にとって考える。

ポテンシャル

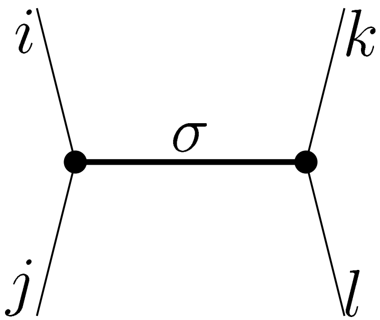
$$V = \frac{\lambda}{4}\left(|\vec{\phi}|^2 - v^2\right)^2 = \lambda v^2\sigma^2 + \lambda v\sigma|\vec{\pi}|^2 + \frac{\lambda}{4}|\vec{\pi}|^2|\vec{\pi}|^2 + \cdots .$$

π-π 散乱に効くダイアグラムは 2 種類

$i\mathcal{M}(ij \to kl) \quad =$



$+$



$+ \text{crossed.}$

$$= \quad \left[-2i\lambda + (-2i\lambda v)\frac{i}{s - M_\sigma^2}(-2i\lambda v)\right]\delta_{ij}\delta_{kl} + \text{crossed.}$$

$$\mathcal{M}(ij \to kl) = \left[-2\lambda + \frac{4\lambda^2 v^2}{M_\sigma^2 - s}\right] \delta_{ij}\delta_{kl} + \text{crossed}.$$

$M_\sigma^2 = 2\lambda v^2$ に注意すると

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(ij \to kl) &= \left[-2\lambda + \frac{4\lambda v^2}{2\lambda v^2 - s}\right] \delta_{ij}\delta_{kl} + \text{crossed} \\ &\simeq \frac{s}{v^2}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{t}{v^2}\delta_{ik}\delta_{jl} + \frac{u}{v^2}\delta_{il}\delta_{jk}, \qquad \text{for } s, t, u \ll M_\sigma^2. \end{aligned}$$

- 低エネルギーでの散乱振幅は、崩壊定数 $v(= f_\pi)$ のみで決定され、もともとの相互作用の大きさ λ には依存しない。
- ゼロエネルギー $s = t = u = 0$ では、ふたつのダイアグラムの寄与がキャンセルして NG 粒子の散乱振幅が 0 になる。(相互作用が小さくなる)

もうちょっとだけチェック

線形 $O(N)$ シグマ模型のポテンシャルを拡張して

$$V = \frac{\lambda}{4}\left(|\vec{\phi}|^2 - v^2\right)^2 + \frac{\lambda_6}{12}\left(|\vec{\phi}|^2 - v^2\right)^3 + \cdots$$

としてみても、

$$|\vec{\phi}|^2 - v^2 = 2v\sigma + \sigma^2 + |\vec{\pi}|^2$$

より、λ_6 以上の項は $\sigma\pi\pi$ や $\pi\pi\pi\pi$ バーテックスを出さず、ツリーレベルの $\pi\pi$ 散乱には寄与しない。

$$\Downarrow$$

任意のポテンシャルについて、低エネルギーの $\pi\pi$ 散乱振幅は崩壊定数 $v(= f_\pi)$ のみで決まる。

$$\mathcal{M}(ij \to kl) \simeq \frac{s}{v^2}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{t}{v^2}\delta_{ik}\delta_{jl} + \frac{u}{v^2}\delta_{il}\delta_{jk}.$$

§.2. 非線形シグマ模型

高エネルギーでの様々な理論

理論A　理論B　理論C　......

対称性の自発的破れ

G/H

低エネルギーでは

NG粒子の相互作用は同一(低エネルギー定理)

NG ボソンの低エネルギー有効ラグランジアン

非線形シグマ模型を作る上での要請

- もとの理論の対称性の破れの構造 G/H とコンシステント
- NG ボソンのみを含むミニマルなラグランジアン

カイラルラグランジアン

QCD におけるカイラル対称性の破れ ($N_f = 2$ の場合)

$$G/H = SU(2)_L \times SU(2)_R / SU(2)_V$$

の低エネルギー有効ラグランジアンを作りたい。

線形シグマ模型を経由したカイラルラグランジアンの導出

$SU(2)_L \times SU(2)_R$ 対称性をもつ線形シグマ模型

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}\mathrm{tr}\left((\partial_\mu \Phi)^\dagger (\partial^\mu \Phi)\right) - V(\mathrm{tr}(\Phi^\dagger \Phi)), \qquad \Phi = \phi_0 + i\sum_{a=1}^{3} \tau^a \phi_a.$$

τ^a はパウリのスピン行列

Φ (2 行 2 列の行列) の変換

$$\Phi \to \Phi' = g_L \Phi g_R^\dagger, \qquad g_L \in SU(2)_L, \quad g_R \in SU(2)_R.$$

ポテンシャル

$$V = \frac{\lambda}{4}\left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\Phi^\dagger\Phi) - v^2\right)^2$$

による Φ の真空期待値

$$\langle 0|\Phi|0\rangle = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$$

によって、対称性は $SU(2)_V$ に自発的に壊れる。

NG ボソン π:

$$\phi_a = \pi_a, \quad (a = 1, 2, 3), \qquad \phi_0 = v + \sigma.$$

QCD と同一の対称性の破れの構造: $G/H = SU(2)_L \times SU(2)_R / SU(2)_V$

低エネルギー定理

$\Downarrow$

この線形シグマ模型の NG ボソンの低エネルギーでの相互作用は、

QCD のパイオンの低エネルギーでの相互作用と同じになるハズ

QCD　　線形シグマ模型

↓ 対称性の自発的破れ

SU(2)xSU(2)/SU(2)

低エネルギーでは

NG粒子の相互作用は同一(低エネルギー定理)

これからやること。

線形シグマ模型から、NG ボソン以外の自由度 (σ) を消去する。

非線形シグマ模型の構築

Φ の「極座標」分解

$$\Phi = (v+\sigma)U, \qquad U = \exp\left(\frac{i\tau^a\pi^a}{v}\right).$$

$SU(2)_L \times SU(2)_R$ の変換: $\Phi \to g_L \Phi g_R^\dagger$

$$U \to U' = g_L U g_R^\dagger, \qquad \sigma \to \sigma' = \sigma.$$

この表示では、σ は $G = SU(2) \times SU(2)$ の singlet であり、G のもとで変換しない。したがって、線形シグマ模型のラグランジアン

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}\mathrm{tr}\left((\partial_\mu(v+\sigma)U)^\dagger (\partial^\mu(v+\sigma)U)\right) - \frac{\lambda}{4}\left((v+\sigma)^2 - v^2\right)^2$$

から G のもとで変換しない自由度 σ を凍結 $(\sigma = 0)$ させても対称性は保たれる。

非線形シグマ模型: $\quad \mathcal{L} = \dfrac{v^2}{4}\mathrm{tr}\left((\partial_\mu U)^\dagger (\partial^\mu U)\right).$

$G/H = SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R/SU(N_f)_V$ の非線形シグマ模型 (カイラルラグランジアン) への拡張:

$$\mathcal{L} = \frac{f_\pi^2}{4} \mathrm{tr} \left((\partial_\mu U)^\dagger (\partial^\mu U) \right), \qquad U = \exp \left(\frac{2iT^a \pi_a}{f_\pi} \right).$$

U は $N_f \times N_f$ のユニタリー行列。T^a $(a = 1, 2, \cdots N_f^2 - 1)$ は $SU(N_f)$ 変換の生成子。

注意: π^a の $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ 変換

$$\exp \left(\frac{2iT^a \pi'_a}{f_\pi} \right) = g_L \exp \left(\frac{2iT^a \pi_a}{f_\pi} \right) g_R^\dagger,$$

を $\pi'_a = ...$ の形で表そうとすると、非線形な変換になっている。

CCWZ (Callan-Coleman-Wess-Zumino) の処方箋

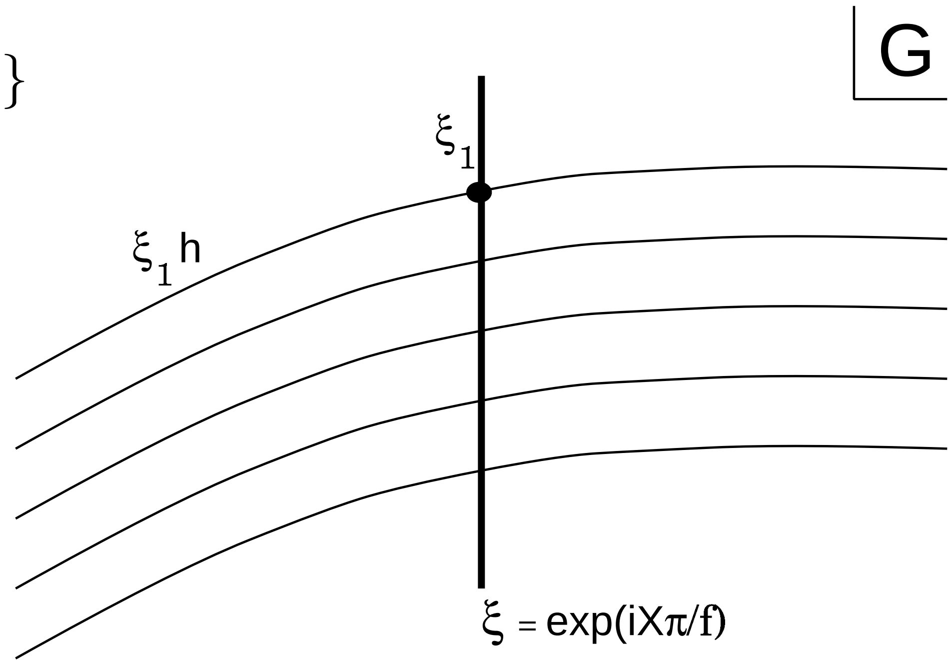
(一般の G/H 上の非線形シグマ模型を構成するために)

コセット空間 G/H に値をとる NG ボソンの場 ξ を考える。

$$\xi(\pi) = \exp\left(\frac{i}{f}\sum_a X^a \pi_a\right), \qquad G/H \text{ の代表元}$$

G の生成子：$\{T^A\} = \{S^\alpha, X^a\}$

H の生成子：$\{S^\alpha\}$



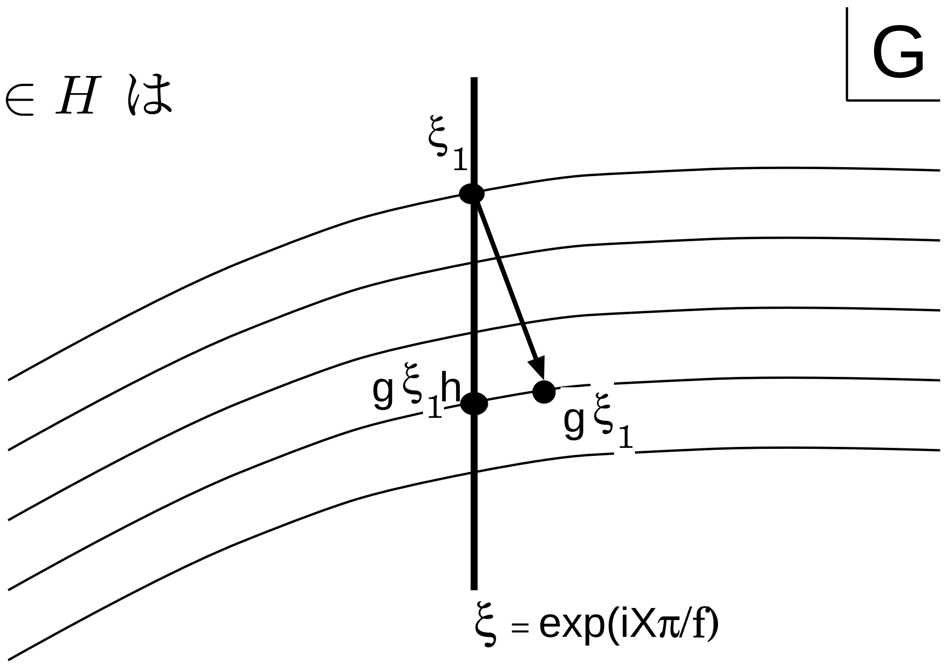
$\xi(\pi)$ を $g \in G$ で変換する。

$$g\xi(\pi) \quad : \ \exp\left(\frac{i}{f}\sum_a X^a \pi_a\right) \text{ の形にならない!!}$$

変換後にもとの $\exp(iX..)$ の形に戻すには

$$\xi(\pi) \to \xi(\pi') = g\xi(\pi)h^\dagger$$

とせねばならない。ただし、$h \in H$ は g と π で決まる H の元



ここまでで NG ボソンの場 $\xi(\pi)$ とその変換性

$$\xi(\pi) = \exp\left(\frac{i}{f} X^a \pi_a\right), \qquad \xi(\pi) \to \xi(\pi') = g\xi(\pi)h^\dagger$$

が決まったので、あとはこの変換のもとで不変なラグランジアンを作れば良い。

H で変換する量

$$\xi^\dagger \xi = 1. \qquad \text{(ラグランジアンの構築には使えない)}$$
$$\alpha_\mu \equiv \frac{1}{i}\partial_\mu \xi^\dagger \xi. \quad \text{(Maurer-Cartan 1-form)}$$

$g \in G$ のもとでの α_μ の変換

$$\alpha_\mu \to h\alpha_\mu h^\dagger + \frac{1}{i}\partial_\mu h h^\dagger, \qquad h = h(g, \pi).$$

方針: 破れずに残った対称性 H で分類する。

α_μ は G の生成子の値を持つ。これを H での既約分解する。

$\alpha_\mu = \alpha_{\parallel\mu} + \alpha^{(1)}_{\perp\mu} + \alpha^{(2)}_{\perp\mu} + \cdots$.　　$\alpha_\parallel$: H の生成子、$\alpha_\perp$: G/H の生成子

α_μ の変換性 $\alpha_\mu \to h\alpha_\mu h^\dagger + \frac{1}{i}\partial_\mu h h^\dagger$ から、

$$\alpha_{\parallel\mu} \to h\alpha_{\parallel\mu}h^\dagger + \frac{1}{i}\partial_\mu h h^\dagger, \quad \alpha^{(1)}_{\perp\mu} \to h\alpha^{(1)}_{\perp\mu}h^\dagger, \quad \cdots.$$

非線形シグマ模型のラグランジアン

$$\mathcal{L} = f^2_{(1)}\mathrm{tr}\left(\alpha^{(1)}_{\perp\mu}\alpha^{(1)\mu}_{\perp}\right) + \cdots.$$

具体例

$G/H = SU(N)\times SU(N)/SU(N)$ のカイラル対称性

コセット G/H [T^a は $SU(N)$ の生成子]

$$\xi = \exp\left(\frac{iX^a\pi^a}{f}\right), \qquad S^a = \begin{pmatrix} T^a & \\ & T^a \end{pmatrix}, \quad X^a = \begin{pmatrix} T^a & \\ & -T^a \end{pmatrix},$$

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_L & \\ & \xi_R \end{pmatrix}, \qquad \xi_L = \exp\left(i\frac{T^a\pi^a}{f}\right), \quad \xi_R = \exp\left(-i\frac{T^a\pi^a}{f}\right).$$

1-form の既約分解

$$\alpha_\mu = \frac{1}{i}\partial_\mu\xi^\dagger\xi = \begin{pmatrix} \alpha_{L\mu} & \\ & \alpha_{R\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{\parallel\mu} & \\ & \alpha_{\parallel\mu} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{\perp\mu} & \\ & -\alpha_{\perp\mu} \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{L\mu} = \frac{1}{i}\partial_\mu\xi_L^\dagger\xi_L, \quad \alpha_{R\mu} = \frac{1}{i}\partial_\mu\xi_R^\dagger\xi_R, \quad \alpha_{\parallel\mu} = \frac{1}{2}(\alpha_{L\mu}+\alpha_{R\mu}), \quad \alpha_{\perp\mu} = \frac{1}{2}(\alpha_{L\mu}-\alpha_{R\mu}).$$

$\partial_\mu \xi_L^\dagger \xi_L = \partial_\mu (\xi_L^\dagger \xi_L) - \xi_L^\dagger \partial_\mu \xi_L = -\xi_L^\dagger \partial_\mu \xi_L$ を使うと

$$
\begin{aligned}
\alpha_{\perp\mu} &= \frac{1}{2i}\left(\partial_\mu \xi_L^\dagger \xi_L - \partial_\mu \xi_R^\dagger \xi_R\right) = \frac{i}{2}\left(\xi_L^\dagger \partial_\mu \xi_L + \partial_\mu \xi_R^\dagger \xi_R\right) \\
&= \frac{i}{2}\xi_L^\dagger \partial_\mu (\xi_L \xi_R^\dagger)\xi_R = \frac{i}{2}\xi_L^\dagger \partial_\mu U \xi_R, \qquad U \equiv \xi_L \xi_R^\dagger, \quad U \to U' = g_L U g_R^\dagger.
\end{aligned}
$$

CCWZ の処方箋によるラグランジアン

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= f^2 \mathrm{tr}\,(\alpha_{\perp\mu}\alpha_\perp^\mu) = -\frac{f^2}{4}\mathrm{tr}\left(U^\dagger \partial_\mu U U^\dagger \partial^\mu U\right) \\
&= \frac{f^2}{4}\mathrm{tr}\left(\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U\right)
\end{aligned}
$$

となって、前に作ったラグランジアンに一致。

具体例

$G/H = SU(N)/SO(N)$: (the littlest Higgs)

コセット空間

$$\xi = \exp\left(\frac{i}{f} X^a \pi^a\right), \qquad (X^a)^T = X^a, \quad (S^\alpha)^T = -S^\alpha.$$

$$\alpha_\mu = \frac{1}{i}\partial_\mu \xi^\dagger \xi, \qquad \alpha_{\perp\mu} = \frac{1}{2}\left[\alpha_\mu + (\alpha_\mu)^T\right], \qquad \alpha_{\parallel\mu} = \frac{1}{2}\left[\alpha_\mu - (\alpha_\mu)^T\right].$$

$$\begin{aligned} \alpha_{\perp\mu} &= \frac{1}{2i}\left(\partial_\mu \xi^\dagger \xi + \xi^T \partial_\mu \xi^*\right) = \frac{1}{2i}\xi^T \partial_\mu (\xi^* \xi^\dagger)\xi \\ &= \frac{1}{2i}\xi^T \partial_\mu U^\dagger \xi, \qquad\qquad U \equiv \xi\xi^T, \quad U \to gUg^T. \end{aligned}$$

CCWZ の処方箋によるラグランジアン

$$\mathcal{L} = f^2 \mathrm{tr}(\alpha_{\perp\mu}\alpha_\perp^\mu) = -\frac{f^2}{4}\mathrm{tr}(U\partial_\mu U^\dagger U \partial^\mu U^\dagger) = \frac{f^2}{4}\mathrm{tr}(\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U).$$

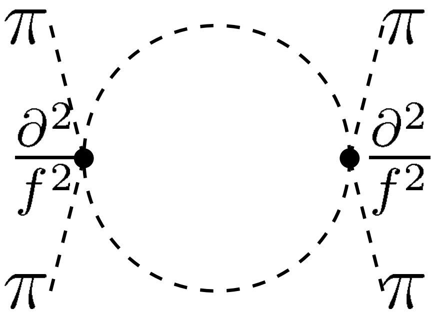
§.3. 非線形シグマ模型の摂動展開

ふつうの意味では「くりこみ」はできないが.....

NG ボソンの散乱振幅 (ツリーレベル)

$$\mathcal{M}(\pi\pi \to \pi\pi) \sim \frac{1}{f^2}E^2, \qquad E\text{: エネルギー} \qquad \text{(低エネルギー定理)}$$

1 ループの輻射補正



- 4 次発散 $\dfrac{\Lambda^4}{f^4}$: 低エネルギー定理と矛盾するので、regularization が対称性を保てば現れない
- 2 次発散 $\dfrac{\Lambda^2}{f^4}E^2$: 崩壊定数 f のくりこみで吸収
- log 発散 $\dfrac{1}{f^4}E^4\log(\Lambda^2/E^2)$

log 発散を「くりこむ」には、微分を 4 つ含むカウンタータームを導入すればよい。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 &= y_1 \mathrm{tr}(\alpha_{\perp\mu}\alpha_\perp^\mu \alpha_{\perp\nu}\alpha_\perp^\nu) + y_2 \mathrm{tr}(\alpha_{\perp\mu}\alpha_{\perp\nu}\alpha_\perp^\mu \alpha_\perp^\nu) \\ & \quad + y_{10}\mathrm{tr}(\alpha_{\perp\mu}\alpha_\perp^\mu)\mathrm{tr}(\alpha_{\perp\nu}\alpha_\perp^\nu) + y_{11}\mathrm{tr}(\alpha_{\perp\mu}\alpha_{\perp\nu})\mathrm{tr}(\alpha_\perp^\mu \alpha_\perp^\nu). \end{aligned}$$

「くりこみ」後の散乱振幅 (schematic form)

$$\mathcal{M} \sim \frac{E^2}{f^2} + \frac{E^4}{f^4}\left[y_i^r(\mu) + \frac{\Gamma_{yi}}{2(4\pi)^2}\log\frac{\mu^2}{E^2} \right], \qquad \mu : \text{くりこみスケール}.$$

- ループ展開は、エネルギー E によるシステマッティクな展開。
- 散乱振幅に $E^4 \log E^2$ の項 (カイラルログ) が現れる。
- カイラルログは崩壊定数 f のみで決定される。(Γ_{yi} は計算で求められる量)
- 背後にある模型の特徴が係数 y_i^r に現れる。

散乱振幅 $\mathcal{M}$ はくりこみスケールによらないはず

$\Downarrow$

y_i^r のくりこみ群方程式 "Renormalization Group Equation" (RGE)

$$\mu \frac{d}{d\mu} y_i^r(\mu) = -\frac{\Gamma_{yi}}{(4\pi)^2}.$$

$SU(N_f)$ のカイラルラグランジアンで具体的に計算すると、

$$\Gamma_{y1} = \frac{2}{3} N_f, \quad \Gamma_{y2} = \frac{1}{3} N_f, \quad \Gamma_{y10} = 1, \quad \Gamma_{y11} = 2.$$

QCD でのカイラル対称性の破れとカイラル摂動論

$m_u = m_d = m_s = 0$ のとき厳密な $SU(3) \times SU(3)$ カイラル対称性

NG ボソン: π, K, η

3 次元エルミート行列 A, B のみたす恒等式

$$\mathrm{tr}(ABAB) = -2\mathrm{tr}(A^2B^2) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A^2)\mathrm{tr}(B^2) + \left(\mathrm{tr}(AB)\right)^2 .$$

カウンターターム

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_4 \quad &= \quad (y_1 - 2y_2)\mathrm{tr}(\alpha_{\perp\mu}\alpha_\perp^\mu \alpha_{\perp\nu}\alpha_\perp^\nu) + (y_{10} + \frac{1}{2}y_2)\mathrm{tr}(\alpha_{\perp\mu}\alpha_\perp^\mu)\mathrm{tr}(\alpha_{\perp\nu}\alpha_\perp^\nu) \\
&\quad +(y_{11} + y_2)\mathrm{tr}(\alpha_{\perp\mu}\alpha_{\perp\nu})\mathrm{tr}(\alpha_\perp^\mu\alpha_\perp^\nu) \\
&= \quad L_1 \left(\mathrm{tr}(\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U)\right)^2 + L_2\mathrm{tr}(\partial_\mu U^\dagger \partial_\nu U)\mathrm{tr}(\partial^\mu U^\dagger \partial^\nu U) \\
&\quad +L_3\mathrm{tr}(\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U \partial_\nu U^\dagger \partial^\nu U).
\end{aligned}$$

Gasser-Leutwyler のパラメータ

$$L_1 = \frac{1}{16}(\frac{1}{2}y_2 + y_{10}), \quad L_2 = \frac{1}{16}(y_2 + y_{11}), \quad L_3 = \frac{1}{16}(y_1 - 2y_2).$$

L_1, L_2, L_3 の RGE

$$\mu\frac{d}{d\mu}L_i^r(\mu) = -\frac{\Gamma_i}{(4\pi)^2},$$

$$\Gamma_1 = \frac{1}{16}(\frac{1}{2}\Gamma_{y2}+\Gamma_{y10}), \quad \Gamma_2 = \frac{1}{16}(\Gamma_{y2}+\Gamma_{y11}), \quad \Gamma_3 = \frac{1}{16}(\Gamma_{y1}-2\Gamma_{y2}),$$

RGE の係数

$$\Gamma_1 = \frac{3}{32}, \qquad \Gamma_2 = \frac{3}{16}, \qquad \Gamma_3 = 0.$$

Gasser-Leutwyler による $\pi\pi$ 散乱のフィット ($\mu = 550\mathrm{MeV}$),

$$L_1^r = (0.9 \pm 0.3)\cdot 10^3, \quad L_2^r = (1.7 \pm 0.7)\cdot 10^3, \quad L_3^r = (-4.4 \pm 2.5)\cdot 10^3.$$

c.f., 1 ループ輻射補正のオーダー評価

$$\frac{\Gamma_i}{(4\pi)^2} \simeq \begin{cases} 0.6 \times 10^3, & (i=1) \\ 1.2 \times 10^3, & (i=2) \\ 0 & (i=3) \end{cases}$$

クォークの質量の効果を取り入れたより現実的な取り扱い

クォークの質量

$$\mathcal{L}_{\rm mass} = (\bar{u}_L, \bar{d}_L, \bar{s}_L) M_q \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} + h.c., \qquad M_q = \begin{pmatrix} m_u & & \\ & m_d & \\ & & m_s \end{pmatrix}.$$

spurion の考え方が便利。形式的な $SU(3)$ のカイラル変換

$$q_L \to g_L q_L, \quad q_R \to g_R q_R, \quad M_q \to g_L M_q g_R^\dagger, \qquad q_L \equiv \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix},$$

のもとでは、クォークの質量項は不変。クォークの質量の効果まで取り入れたカイラルラグランジアンはこの対称性を持つはず。

$$\mathcal{L} = \frac{f^2}{4} \mathrm{tr}(\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U) + \frac{f^2}{4} \mathrm{tr}(\chi^\dagger U + U^\dagger \chi), \qquad U \to g_L U g_R^\dagger, \quad \chi \equiv 2BM_q.$$

$$U = \exp\left[i\frac{\sqrt{2}}{f} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta \end{pmatrix} \right]$$

NG ボソンの質量

$$M_\pi^2 = (m_u + m_d)B, \quad M_{K^\pm}^2 = (m_u + m_s)B,$$

$$M_{K^0}^2 = (m_d + m_s)B, \quad M_\eta^2 = \frac{1}{3}(m_u + m_d + 4m_s)B.$$

c.f., $M_\pi \simeq 140$MeV, $M_K \simeq 500$MeV.

オーダーカウンティング

π などの質量を E^2 に勘定するためには

$$\chi \equiv 2BM_q \sim \mathcal{O}(E^2)$$

1 ループのくりこみに必要なカウンターターム

$$
\begin{aligned}
& L_4 \mathrm{tr}(\partial^\mu U^\dagger \partial_\mu U)\mathrm{tr}(\chi^\dagger U + U^\dagger \chi) + L_5 \mathrm{tr}(\partial^\mu U^\dagger \partial_\mu U(\chi^\dagger U + U^\dagger \chi)) \\
& + L_6 \left(\mathrm{tr}(\chi^\dagger U + U^\dagger \chi)\right)^2 + L_7 \left(\mathrm{tr}(\chi^\dagger U - U^\dagger \chi)\right)^2 \\
& + L_8 \mathrm{tr}(\chi^\dagger U \chi^\dagger U + U^\dagger \chi U^\dagger \chi)
\end{aligned}
$$

RGE の係数

$$
\Gamma_4 = \frac{1}{8}, \quad \Gamma_5 = \frac{3}{8}, \quad \Gamma_6 = \frac{11}{144}, \quad \Gamma_7 = 0, \quad \Gamma_8 = \frac{5}{48}.
$$

Gasser-Leutwyler によるフィット ($\mu = 550\mathrm{MeV}$),

$$
\begin{aligned}
& L_4^r = (0 \pm 0.5) \cdot 10^3, \quad L_5^r = (2.2 \pm 0.5) \cdot 10^3, \quad L_6^r = (0 \pm 0.3) \cdot 10^3, \\
& L_7^r = (-0.4 \pm 0.15) \cdot 10^3, \quad L_8^r = (1.1 \pm 0.3) \cdot 10^3.
\end{aligned}
$$

たいていの係数の大きさは $\Gamma_i/(4\pi)^2$ 程度。

フォトンや W,Z との結合

クォークとの結合

$$\mathcal{L}_{\rm QCD} - \bar{q}_L \gamma^\mu L_\mu q_L - \bar{q}_R \gamma^\mu R_\mu q_R, \qquad\qquad q_L \equiv \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix},$$

L_μ, R_μ は 3×3 エルミート行列の外場。QED のフォトンを表す場合は

$$L_\mu = R_\mu = eQA_\mu, \qquad Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

「ゲージ」化されたカイラル対称性

$$q_L \to g_L(x) q_L, \qquad L_\mu \to g_L(x) L_\mu g_L^\dagger(x) + i\partial_\mu g_L(x) g_L^\dagger(x),$$
$$q_R \to g_R(x) q_R, \qquad R_\mu \to g_R(x) R_\mu g_R^\dagger(x) + i\partial_\mu g_R(x) g_R^\dagger(x).$$

外場 L_μ, R_μ との結合を含めたカイラルラグランジアンはこのゲージ対称性を持つはず。微分を「共変微分」

$$D_\mu U = \partial_\mu U + iL_\mu U - iUR_\mu$$

に置き換える。

オーダーカウンティング

$$L_\mu, R_\mu \sim \mathcal{O}(E).$$

1 ループのくりこみに必要なカウンターターム $\mathcal{O}(E^4)$

$$iL_9 \mathrm{tr}(L_{\mu\nu} D^\mu U D^\nu U^\dagger + R_{\mu\nu} D^\mu U^\dagger D^\nu U) + L_{10} \mathrm{tr}(L_{\mu\nu} U R^{\mu\nu} U^\dagger),$$

$$L_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu L_\nu - \partial_\nu L_\mu + i[L_\mu, L_\nu], \qquad R_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu R_\nu - \partial_\nu R_\mu + i[R_\mu, R_\nu].$$

RGE の係数

$$\Gamma_9 = \frac{1}{4}, \qquad \Gamma_{10} = -\frac{1}{4}.$$

Gasser-Leutwyler によるフィット ($\mu = 550\text{MeV}$),

$$L_9^r = (7.4 \pm 0.7) \cdot 10^3, \qquad L_{10}^r = (-6.0 \pm 0.7) \cdot 10^3.$$

1 ループ輻射補正のオーダー評価

$$\frac{\Gamma_i}{(4\pi)^2} \simeq \begin{cases} 1.6 \times 10^3, & (i = 9) \\ -1.6 \times 10^3, & (i = 10) \end{cases}$$

よりもかなり大きい。

QCD でのカイラル対称性の破れの特徴

$\Uparrow$

比較的軽い ρ メソン ($J^{PC} = 1^{--}$) の存在 ($M_\rho \simeq 770\text{MeV}$)

脱線

ρ メソンの L_9, L_{10} への寄与

$$L_9\big|_\rho = -\,L_{10}\big|_\rho = \frac{1}{4}\frac{f_\rho^2}{M_\rho^2}, \qquad f_\rho^2 \simeq 2f_\pi^2,$$

$f_\pi = 92.4\mathrm{MeV}$, $M_\rho = 770\mathrm{MeV}$ を用いると

$$L_9 = 7.2\times10^{-3}, \qquad L_{10} = -7.2\times10^{-3}.$$

Gasser-Leutwyler のフィットの値と非常に良い一致。

ρ メソンまで含めたカイラル摂動論の構築

- M. Tanabashi, "Chiral perturbation to one loop including the rho meson," Phys. Lett. B **316**, 534 (1993) [arXiv:hep-ph/9306237].
- M. Harada and K. Yamawaki, "Hidden local symmetry at loop: A new perspective of composite gauge boson and chiral phase transition," Phys. Rept. **381**, 1 (2003) [arXiv:hep-ph/0302103].

「QCD でのカイラル対称性の破れとカイラル摂動論」のまとめ

$\mathcal{O}(E^2)$ のラグランジアン

$$\mathcal{L}_2 = \frac{f^2}{4}\mathrm{tr}(D_\mu U^\dagger D^\mu U) + \frac{f^2}{4}\mathrm{tr}(\chi^\dagger U + U^\dagger \chi), \qquad U \to g_L U g_R^\dagger, \quad \chi \equiv 2BM_q.$$

$\mathcal{O}(E^4)$ のラグランジアン

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_4 \quad = \quad & L_1 \left(\mathrm{tr}(D_\mu U^\dagger D^\mu U)\right)^2 + L_2 \mathrm{tr}(D_\mu U^\dagger D_\nu U)\mathrm{tr}(D^\mu U^\dagger D^\nu U) \\
& + L_3 \mathrm{tr}(D_\mu U^\dagger D^\mu U D_\nu U^\dagger D^\nu U) \\
& + L_4 \mathrm{tr}(D^\mu U^\dagger D_\mu U)\mathrm{tr}(\chi^\dagger U + U^\dagger \chi) + L_5 \mathrm{tr}(D^\mu U^\dagger D_\mu U(\chi^\dagger U + U^\dagger \chi)) \\
& + L_6 \left(\mathrm{tr}(\chi^\dagger U + U^\dagger \chi)\right)^2 + L_7 \left(\mathrm{tr}(\chi^\dagger U - U^\dagger \chi)\right)^2 \\
& + L_8 \mathrm{tr}(\chi^\dagger U \chi^\dagger U + U^\dagger \chi U^\dagger \chi) \\
& + i L_9 \mathrm{tr}(L_{\mu\nu} D^\mu U D^\nu U^\dagger + R_{\mu\nu} D^\mu U^\dagger D^\nu U) + L_{10} \mathrm{tr}(L_{\mu\nu} U R^{\mu\nu} U^\dagger).
\end{aligned}$$

RGE :

$$\mu \frac{d}{d\mu} L_i^r(\mu) = -\frac{\Gamma_i}{(4\pi)^2},$$

Gasser-Leutwyler によるフィット ($\mu = 550\mathrm{MeV}$)

	値	Γ_i
L_1^r	$(0.9 \pm 0.3) \cdot 10^{-3}$	$\frac{3}{32}$
L_2^r	$(1.7 \pm 0.7) \cdot 10^{-3}$	$\frac{3}{16}$
L_3^r	$(-4.4 \pm 2.5) \cdot 10^{-3}$	0
L_4^r	$(0 \pm 0.5) \cdot 10^{-3}$	$\frac{1}{8}$
L_5^r	$(2.2 \pm 0.5) \cdot 10^{-3}$	$\frac{3}{8}$

	値	Γ_i
L_6^r	$(0 \pm 0.3) \cdot 10^{-3}$	$\frac{11}{144}$
L_7^r	$(-0.4 \pm 0.15) \cdot 10^{-3}$	0
L_8^r	$(1.1 \pm 0.3) \cdot 10^{-3}$	$\frac{5}{48}$
L_9^r	$(7.4 \pm 0.7) \cdot 10^{-3}$	$\frac{1}{4}$
L_{10}^r	$(-6.0 \pm 0.7) \cdot 10^{-3}$	$-\frac{1}{4}$

文献

- J. Gasser and H. Leutwyler, "Chiral Perturbation Theory To One Loop," Annals Phys. **158**, 142 (1984).
- J. Gasser and H. Leutwyler, "Chiral Perturbation Theory: Expansions In The Mass Of The Strange Quark," Nucl. Phys. B **250**, 465 (1985).
- J. F. Donoghue, E. Golowich and B. R. Holstein, "Dynamics Of The Standard Model," Cambridge Monogr. Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmol. **2**, 1 (1992).
- M. Bando, T. Kugo and K. Yamawaki, "Nonlinear Realization And Hidden Local Symmetries," Phys. Rept. **164**, 217 (1988).
- M. Harada and K. Yamawaki, "Hidden local symmetry at loop: A new perspective of composite gauge boson and chiral phase transition," Phys. Rept. **381**, 1 (2003) [arXiv:hep-ph/0302103].