

# 非線形シグマ模型とその摂動論

Part I ~ 対称性の自発的破れの低エネルギー有効理論  
Part II ~ 標準模型を超える素粒子模型の構築へ向けて

於、長野県木島平、原子核三者若手夏の学校

2004年8月5日~6日

棚橋 誠治 (東北大学大学院理学研究科)

## Part I.

### §.1. 対称性とその自発的破れ

(南部ゴールドストーンボソン、ゴールドストーン定理)

### §.2. 非線形シグマ模型

(カイラルラグランジアン、CCWZ の処方箋)

### §.3. 非線形シグマ模型の摂動展開

( $SU(3)$  カイラルラグランジアンとカイラル摂動論)

## Part II.

### §.4. 電弱対称性の自発的破れ

(ゲージ化されたカイラルラグランジアン、等価定理、  
輻射補正とオブリークパラメータ  $S, T, U$ )

### §.5. 余剰次元理論 (5次元ヒグスレス模型) のデコンストラクション

### §.6. 擬南部ゴールドストーン粒子

### §.7. リトルヒグス模型

## §.4. 電弱対称性の自発的破れ ゲージ対称性の自発的破れとヒグス機構

$U(1)$  グローバル対称性  $\phi \rightarrow e^{i\theta} \phi$

をもつ模型

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - V(\phi^\dagger \phi), \quad \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_R + i\phi_I).$$

ポテンシャル

$$V(\phi^\dagger \phi) = \frac{\lambda}{2} \left( \phi^\dagger \phi - \frac{v^2}{2} \right)^2,$$

による対称性の自発的破れ ( $v$  は NG ボソンの崩壊定数)

$$\langle 0 | \phi | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} v, \quad \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \sigma + i\pi).$$

$$M_\pi^2 = 0 \quad (\text{NG ボソン}), \quad M_\sigma^2 = \lambda v^2.$$

この  $U(1)$  対称性をゲージ化する

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi^\dagger \phi) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu},$$

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + ig A_\mu \phi, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

$U(1)$  対称性の自発的破れ

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \sigma + i\pi),$$

の後では

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi)^2 - \frac{1}{2} \lambda v^2 \sigma^2 \\ & - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^2 v^2 A^\mu A_\mu + gv A^\mu \partial_\mu \pi + \dots \end{aligned}$$

ゲージ場の質量 (ヒグス機構)

$$M_{\text{gauge}}^2 = g^2 v^2.$$

## ゲージ変換

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\theta(x)}\phi(x)$$

をうまく行なえば、 $\phi(x)$  を常に実数にとるゲージを選ぶことができる  
(**ユニタリーゲージ**)。ユニタリーゲージでのラグランジアン

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)^2 - \frac{1}{2}\lambda v^2\sigma^2 - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^2v^2 A^\mu A_\mu + \dots$$

(NG ボソン  $\pi$  が存在しないことに注意)

ユニタリーゲージ以外のゲージで現れる NG ボソンの自由度は、ゲージ場のスカラーコンポーネントと同様に、実は**非物理的**なもの。

## ヒグス機構

NG ボソンの自由度  $\Rightarrow$  ゲージ場の質量 (縦波成分)

## 標準模型のヒグスセクターと $\rho$ パラメータ

### ヒグスセクターのラグランジアン

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi^\dagger \phi), \quad \phi = \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_0 \end{pmatrix}.$$

$\phi$  の真空期待値と NG ボソン  $w^1, w^2, w^3$ :

$$\langle 0 | \phi | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} w^2 + iw^1 \\ v + H - iw^3 \end{pmatrix}$$

対称性の破れの構造  $G/H = SU(2)_W \times U(1)_Y / U(1)_{\text{em}}$

ネーターカレントと NG ボソンの崩壊定数

$$J_W^{a\mu} = \partial^\mu \phi^\dagger i \frac{\tau^a}{2} \phi - \phi^\dagger i \frac{\tau^a}{2} \partial^\mu \phi = \frac{1}{2} v \partial^\mu w^a + \dots, \quad f_{w^1} = f_{w^2} = f_{w^3} = \frac{1}{2} v.$$

荷電 (中性) NG ボソンの崩壊定数  $f_\pm = f_{w^1} = v/2, (f_0 = f_{w^3} = v/2).$

## ヒグス機構よるゲージボソンの質量

$$M_W^2 = g_W^2 f_{\pm}^2, \quad M_Z^2 = (g_W^2 + g_Y^2) f_0^2$$

## と低エネルギーでのフェルミ相互作用

$$G_{\text{CC}} = \frac{g_W^2}{M_W^2} = \frac{1}{f_{\pm}^2}, \quad G_{\text{NC}} = \frac{g_W^2 + g_Y^2}{M_Z^2} = \frac{1}{f_0^2}, \quad \rho \equiv \frac{G_{\text{NC}}}{G_{\text{CC}}} = \frac{f_{\pm}^2}{f_0^2}.$$

実験事実:

$$\rho \simeq 1, \quad (\text{許容されるずれは } 1\% \text{ 未満!})$$

## 標準模型のヒグスセクターの予言

$$f_{\pm} = f_0 = \frac{v}{2}, \quad \rho = 1.$$

$SU(2)$  doublet Higgs の特殊性。もし、ヒグスが  $SU(2)$  の他の表現に属していると  $\rho$  パラメータは 1 からずれる。

## カストディアル対称性

$\rho = 1$  ( $f_{\pm} = f_0$ ) を保証する対称性

標準模型のヒグスセクターの場合

$$\Phi = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \varphi_0^* & \varphi_+ \\ -\varphi_+^* & \varphi_0 \end{pmatrix}, \quad \phi = \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_0 \end{pmatrix},$$

と場を定義し直すと

$$\Phi = v + H + \sum_{a=1}^3 \tau^a w^a, \quad SU(2) \text{ の線形シグマ模型と同じ}$$

ヒグスポテンシャルの持つ対称性とその破れのパターン

$$G/H = [SU(2) \times SU(2)]/SU(2).$$

破れずに残った  $SU(2)$  のもとで、NG ボソン  $w^a$  は triplet. ( $f_{\pm} = f_0$  となる理由)。



## 電弱対称性の非線形シグマ模型

ヒグスボソンは未発見



$W, Z$  の質量の背後のヒグスセクターが何なのかはまだ未確定

### いろいろな可能性

- one double Higgs? (SM)
- two doublet Higgs? or more?
- composite Higgs? (technicolor? or little Higgs?)
- extra dimensions?

対称性の破れの構造  $G/H = [SU(2) \times U(1)]/U(1)$  と NG ボソンの崩壊定数だけで低エネルギーが決まってしまう。(⇐ 低エネルギー定理)

## 電弱対称性の非線形シグマ模型 (カストディアル対称性のある場合)

$$G/H = [SU(2) \times SU(2)]/SU(2)$$

$O(E^2)$  のラグランジアン

$$\mathcal{L}_2 = \frac{v^2}{4} \text{tr} \left( (D_\mu U)^\dagger (D^\mu U) \right), \quad U = \exp \left( \frac{i\tau^a w^a}{v} \right), \quad v = 246 \text{ GeV}.$$

共変微分

$$D_\mu U = \partial_\mu U + ig_W \frac{\tau^a}{2} W_\mu^a U - ig_Y U \frac{\tau^3}{2} B_\mu.$$

## 電弱対称性の非線形シグマ模型 (カストディアル対称性のない場合)

(see A.Longhitano, Phys.Rev.D22 (1980) 1166; Nucl.Phys.B188 (1981) 118)

$$G/H = [SU(2) \times U(1)]/U(1)$$

### $O(E^2)$ のラグランジアン

$$\mathcal{L}_2 = \frac{v^2}{4} \text{tr} \left( (D_\mu U)^\dagger (D^\mu U) \right) + \beta_1 \frac{v^2}{4} \text{tr} \left( U^\dagger D_\mu U \tau^3 \right) \text{tr} \left( U^\dagger D^\mu U \tau^3 \right).$$

### $\rho$ パラメータ

$$\rho = 1 + 2\beta_1.$$

## 等価定理と $W_L W_L$ 散乱振幅

質量をもつゲージ場  $W$  だと、縦波偏極  $W_L$  も物理的な自由度。

縦波  $W$  ( $W_L$ ) の偏極ベクトル

$$\epsilon_{(L)\mu} = \frac{E}{M_W} \begin{pmatrix} \frac{|\vec{p}|}{E} \\ \vec{p} \\ \frac{|\vec{p}|}{E} \end{pmatrix}, \quad E^2 = |\vec{p}|^2 + M_W^2, \quad \epsilon_{(L)\mu} \epsilon_{(L)}^\mu = -1$$

はエネルギー  $E$  の増大とともに大きくなる。

ナイーブに考えると、 $W_L W_L$  散乱の散乱振幅は

$$\mathcal{M}(W_L^a W_L^b \rightarrow W_L^c W_L^d) \propto |\epsilon_{(L)\mu}|^4 \sim \frac{E^4}{M_W^4}$$

となってしまう。これは本当?

カストディアル対称性のある電弱非線形シグマ模型での具体的な計算  
 簡単のため、 $g_Y = 0$  とする。

この散乱に効くダイアグラムは 2 種類

$$i\mathcal{M}(W_L^a W_L^b \rightarrow W_L^c W_L^d) =$$

+crossed.

4W バーテックスの寄与 ( $\delta^{ab}\delta^{cd}$  に比例する項)

$$g_W^2 \frac{E^4}{M_W^4} \left\{ -(1 + \cos \theta) \left[ 3 - \cos \theta - 2 \frac{M_W^2}{E^2} \right] - (1 - \cos \theta) \left[ 3 + \cos \theta - 2 \frac{M_W^2}{E^2} \right] \right\}$$

$t$ -channel  $W$  exchange ( $\delta^{ab}\delta^{cd}$  に比例する項)

$$g_W^2 \frac{E^4}{M_W^4} \left\{ (1 - \cos \theta) \left[ 3 + \cos \theta - 2 \frac{M_W^2}{E^2} \right] + \frac{1}{2} (1 + 11 \cos \theta) \frac{M_W^2}{E^2} \right\} + \dots$$

$u$ -channel  $W$  exchange ( $\delta^{ab}\delta^{cd}$  に比例する項)

$$g_W^2 \frac{E^4}{M_W^4} \left\{ (1 + \cos \theta) \left[ 3 - \cos \theta - 2 \frac{M_W^2}{E^2} \right] + \frac{1}{2} (1 - 11 \cos \theta) \frac{M_W^2}{E^2} \right\} + \dots$$

それぞれのグラフの寄与は、(予想どおり)  $E^4/M_W^4$  に比例している。  
すべてのグラフを足すと残るのは....

$$\mathcal{M}(W_L^a W_L^b \rightarrow W_L^c W_L^d) = \delta^{ab} \delta^{cd} g_W^2 \frac{E^4}{M_W^4} \frac{M_W^2}{E^2} + \dots = \delta^{ab} \delta^{cd} g_W^2 \frac{E^2}{M_W^2} + \dots$$

$E^2 = s/4$ ,  $M_W^2 = g_W^2 v^2/4$  を使うと、

$$\mathcal{M}(W_L^a W_L^b \rightarrow W_L^c W_L^d) = \frac{s}{v^2} \delta^{ab} \delta^{cd} + \frac{t}{v^2} \delta^{ac} \delta^{bd} + \frac{u}{v^2} \delta^{ad} \delta^{bc} + \dots$$

### NG ボソンの散乱振幅と同じ形 (等価定理)

B. W. Lee, C. Quigg and H. B. Thacker, Phys. Rev. Lett. **38**, 883 (1977);  
Phys. Rev. D **16**, 1519 (1977).

直感的には

NG ボソンの自由度  $\Rightarrow W_L$  の自由度  
(ヒグス機構)

なので明らか。

## ユニタリティー

もし、 $W_L W_L$  散乱の散乱振幅が等価定理 + 低エネルギー定理で期待される形どおりだったとすると、

$s = 8\pi v^2$  程度のエネルギーで、散乱確率が 1 を超えてしまう。



理論のユニタリティーが壊れる

ユニタリティーバウンド :  $\sqrt{8\pi}v \simeq 1.2\text{TeV}$

ふたつの可能性

- 摂動論的な場合  
ユニタリティーバウンドよりも軽い粒子の効果で、 $W_L W_L$  散乱振幅が低エネルギー定理の形からずれる。
- 非摂動論的な場合  
ユニタリティーバウンド以上では、 $W_L W_L$  散乱が非摂動論的になり、高次の効果でユニタリティーが回復している。



## 摂動論的な場合の例 (標準模型のヒグスセクター)

Higgs exchange の効果

$$\mathcal{M}(W_L^a W_L^b \rightarrow W_L^c W_L^d) = \frac{\lambda s}{\lambda v^2 - s} \delta^{ab} \delta^{cd} + \dots$$

- $s \ll M_H^2 = \lambda v^2$  では低エネルギー定理の結果に一致。
- $s \gg M_H^2 = \lambda v^2$  では定数  $\lambda$ 。  $\lambda$  が十分小さければ、摂動論的に取り扱うことができる。

c.f., 非摂動的な場合の例 (QCD のカイラルラグランジアン)

ユニタリティーバウンド  $\sqrt{8\pi} f_\pi \simeq 450\text{MeV}$  までにはっきりしたレゾナンスはない。

## 電弱非線形シグマ模型の摂動論とオブリークパラメータ

$\mathcal{O}(E^4)$  のラグランジアン (カストディアル対称性のある場合)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_4 = & L_1 \text{tr} \left( (D_\mu U)^\dagger (D^\mu U) \right) \text{tr} \left( (D_\nu U)^\dagger (D^\nu U) \right) \\ & + L_2 \text{tr} \left( (D_\mu U)^\dagger (D_\nu U) \right) \text{tr} \left( (D^\mu U)^\dagger (D^\nu U) \right) \\ & + iL_{9L} \text{tr} \left( g_W W_{\mu\nu} (D^\mu U) (D^\nu U)^\dagger \right) + iL_{9R} \text{tr} \left( g_Y B_{\mu\nu} (D^\mu U)^\dagger (D^\nu U) \right) \\ & + L_{10} \text{tr} \left( g_W W_{\mu\nu} U g_Y B^{\mu\nu} U^\dagger \right), \quad B_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} \frac{\tau^3}{2}.\end{aligned}$$

2次元のエルミート行列  $A, B$  の性質

$$\text{tr}(A^2 B^2) = \frac{1}{2} \text{tr}(A^2) \text{tr}(B^2).$$

係数  $L_i$  を調べることで、非線形シグマ模型の背後にある理論の特徴がわかる。

## オブリークパラメータ $S$

ゲージボソンプロパゲータは  $L_{10}\text{tr}(W_{\mu\nu}UB^{\mu\nu}U^\dagger)$  の影響を受ける。

↓

$L_{10}$  の大きさを LEP/SLC の精密測定で決めることができる。

Peskin-Takeuchi の  $S$  パラメータとの関係

$$S \simeq -16\pi L_{10}.$$

精密測定の数値

$$S = -0.03 \pm 0.11, \quad (M_H = 115\text{GeV is assumed}).$$

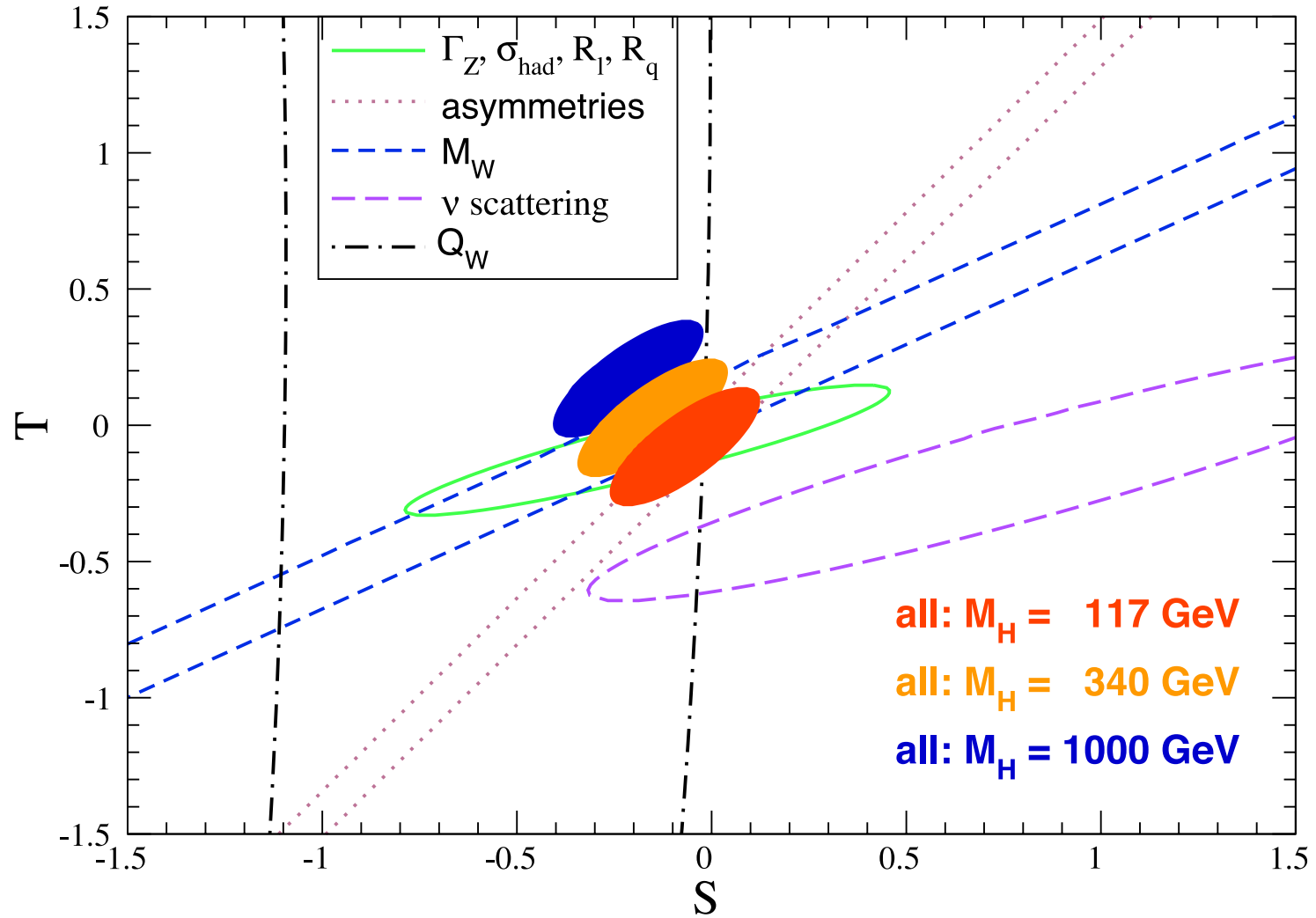
または

$$L_{10} = (-0.6 \pm 2.2) \cdot 10^{-3}.$$

c.f., QCD のカイラルラグランジアンでは、 $L_{10} \simeq -6.0 \times 10^{-3}$ 。電弱対称性の破れの起源は QCD 的ではない。

# Oblique Parameters

constraints on gauge boson self-energies



## $\mathcal{O}(E^4)$ のラグランジアン (カストディアル対称性のない場合)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_4 = & \alpha_1 g_W g_Y \text{tr}(W_{\mu\nu} U B^{\mu\nu} U^\dagger) \\
 & + i\alpha_2 g_Y \text{tr}(U^\dagger [V_\mu, V_\nu] U B^{\mu\nu}) + i\alpha_3 g_W \text{tr}([V_\mu, V_\nu] W^{\mu\nu}) \\
 & + \alpha_4 \text{tr}(V_\mu V_\nu) \text{tr}(V^\mu V^\nu) + \alpha_5 \text{tr}(V_\mu V^\mu) \text{tr}(V_\nu V^\nu) \\
 & + \alpha_6 \text{tr}(V_\mu V_\nu) \text{tr}(V^\mu T) \text{tr}(V^\nu T) + \alpha_7 \text{tr}(V_\mu V^\mu) \text{tr}(V_\nu T) \text{tr}(V^\nu T) \\
 & + \frac{1}{4} \alpha_8 g_W^2 \text{tr}(W_{\mu\nu} T) \text{tr}(W^{\mu\nu} T) + \frac{i}{2} \alpha_9 g_W \text{tr}(W_{\mu\nu} T) \text{tr}(T [V^\mu, V^\nu]) \\
 & + \frac{1}{2} \alpha_{10} \text{tr}(T V_\mu) \text{tr}(T V^\mu) \text{tr}(T V_\nu) \text{tr}(T V^\nu) + \alpha_{11} g_W \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} \text{tr}(T V_\mu) \text{tr}(V_\nu W_{\rho\lambda}).
 \end{aligned}$$

ただし、 $V_\mu \equiv D_\mu U U^\dagger$ ,  $T \equiv U \tau^3 U^\dagger$ .

$L_i$  との関係

$$L_1 = \alpha_5, \quad L_2 = \alpha_4, \quad L_{9L} = -2\alpha_3, \quad L_{9R} = -2\alpha_4, \quad L_{10} = \alpha_1.$$

Peskin-Takeuchi パラメータとの関係

$$S \simeq -16\pi\alpha_1, \quad \alpha T = 2\beta_1, \quad U \simeq -16\pi\alpha_8.$$

## §.4. 余剰次元理論 (5次元ヒグスレスモデル) のデコンストラクション

### デコンストラクション (deconstruction) [脱構築?]

- N. Arkani-Hamed, A. G. Cohen and H. Georgi, “(De)constructing dimensions,” Phys. Rev. Lett. **86**, 4757 (2001) [arXiv:hep-th/0104005].
- C. T. Hill, S. Pokorski and J. Wang, “Gauge invariant effective Lagrangian for Kaluza-Klein modes,” Phys. Rev. D **64**, 105005 (2001) [arXiv:hep-th/0104035].

### 5次元のゲージ理論

↓ (余剰次元の格子化)

### 4次元のゲージ理論 + 非線形シグマモデル

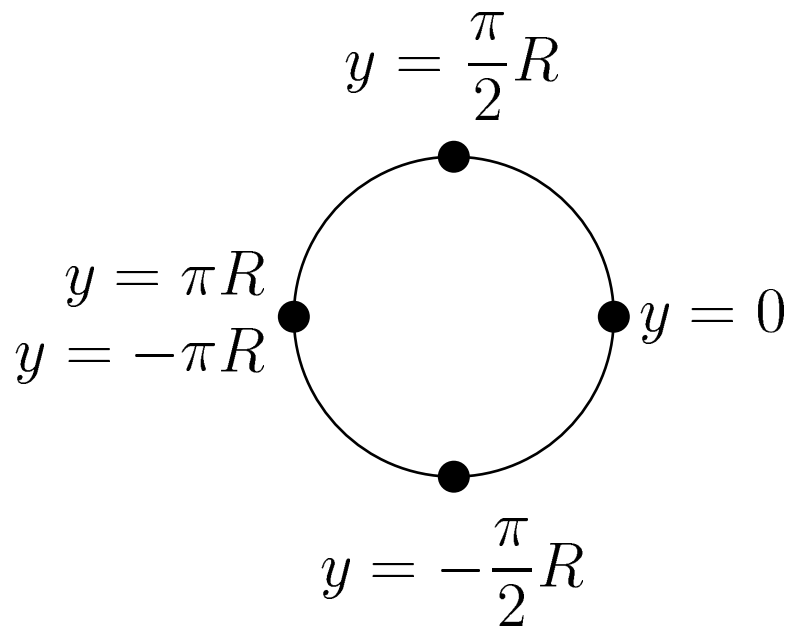
- 5次元理論のゲージ不変性を保つ正則化 (非線形シグマモデルの摂動)
- 魅力ある4次元のモデルを作る手がかりとして

## コンパクト化された余剰次元と Kaluza-Klein (KK) モード

5次元  $(x^0, x^1, x^2, x^3, y)$  のゲージ理論

$$S = \int_{-\pi R}^{\pi R} dy \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr} (F_{MN} F^{MN}) \right\}, \quad M, N = 0, 1, 2, 3, 5.$$

余剰次元  $y$  は半径  $R$  の円周上にコンパクト化



周期的境界条件

$$A_M(x, y) = A_M(x, y + 2\pi R)$$

ファインマンゲージでは

$$0 = \left( \square - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) A_M(x, y)$$

モード関数  $\phi_n(y)$

$$M_n^2 \phi_n(y) = -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi_n(y), \quad \phi_n(y) = \phi_n(y + 2\pi R),$$

を使った  $A_M$  の展開

$$A_M(x, y) = \sum_n A_M^{(n)}(x) \phi_n(y), \quad \int_{-\pi R}^{\pi R} dy \phi_n^*(y) \phi_m(y) = \delta_{nm}.$$

をファインマンゲージの波動方程式  $0 = \left( \square - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) A_M(x, y)$  に代入

$$0 = (\square + M_n^2) A_M^{(n)}(x). \quad \Rightarrow \quad M_n \text{ は } A_M^{(n)} \text{ の質量.}$$

- $M_n = 0$  のモード ( $n = 0$ ): ゼロモード, 質量 0 の粒子
- $M_n \neq 0$  モード ( $n \neq 0$ ): Kaluza-Klein (KK) モード



- ゼロモードのモード関数  $\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}$
- 最初の KK モード  $A_\mu^{(c1)}, A_\mu^{(s1)}, A_5^{(c1)}, A_5^{(s1)},$

$$\phi_{c1} = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \cos\left(\frac{y}{R}\right), \quad \phi_{s1} = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sin\left(\frac{y}{R}\right),$$

4次元のラグランジアン (簡単化のため  $U(1)$  ゲージの場合を考える)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{4 \text{次元}} &= -\frac{1}{4} \int_{-\pi R}^{\pi R} dy F_{MN} F^{MN} \\ &= -\frac{1}{4} \int_{-\pi R}^{\pi R} dy F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \int_{-\pi R}^{\pi R} dy \text{tr}(F_{\mu 5} F^{\mu 5}) \end{aligned}$$

から最初の KK モードに関連する項を抜き出すと...

$$\frac{1}{2} \int_{-\pi R}^{\pi R} dy F_{\mu 5} F^{\mu 5} =$$

$$\frac{1}{2} \partial_{\mu} A_5^{(c1)} \partial^{\mu} A_5^{(c1)} - R^{-1} \partial_{\mu} A_5^{(c1)} A^{(s1)\mu} + \frac{R^{-2}}{2} A_{\mu}^{(s1)} A^{(s1)\mu} + \dots$$

ヒグス機構のときと同じ形

NG ボソンの運動項、NG ボソンとゲージ場の混合項、ゲージ場の質量項

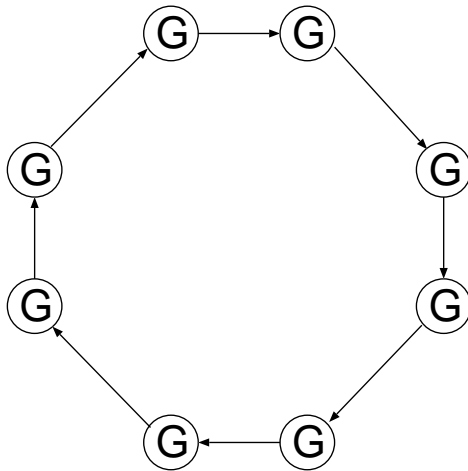
$$\Downarrow$$

ゲージ変換  $A_{\mu}^{(s1)} \rightarrow A_{\mu}^{(s1)} + R \partial_{\mu} A_5^{(c1)}$  で  
 $A_5^{(c1)}$  の自由度を消去できる (ユニタリーゲージ)

ゲージ場の KK モードの質量はヒグス機構によるものとみなせる  
 ( $A_5$  が NG ボソンの役割を果たす)

## 余剰次元の格子化とリンク変数

余剰次元を  $N$  個のサイトに格子化



- ゲージ対称性

5次元のゲージ対称性  $G$

↓ (格子化)

$N$  個の 4次元のゲージ対称性  $[G]^N$

- サイトのあいだをつなぐリンク変数  $U_j(x) = \exp(2iw_j(x)/f)$ ,

$$D_\mu U_j = \partial_\mu U_j + iA_\mu^{j-1} U_j - iU_j A_\mu^j$$

5次元のゲージ対称性 ( $N$  個の 4次元のゲージ対称性)のもとで不変な作用

$$S = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2g^2} \sum_{j=1}^N \text{tr}(F_{\mu\nu}^j F^{j\mu\nu}) + \frac{f^2}{4} \sum_{j=1}^N \text{tr}((D_\mu U_j)^\dagger (D^\mu U_j)) \right\}.$$

$$F_{\mu\nu}^j \equiv \partial_\mu A_\nu^j - \partial_\nu A_\mu^j + i[A_\mu^j, A_\nu^j]$$

連続極限  $N \rightarrow \infty$ ,  $a \equiv \frac{2\pi R}{N} \rightarrow 0$ ,  $\sum_{j=1}^N a \rightarrow \int dy$

第 1 項

$$-\frac{1}{2g^2} \sum_{j=1}^N \text{tr}(F_{\mu\nu}^j F^{j\mu\nu}) = -\frac{1}{2g_5^2} \int dy \text{tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}), \quad g_5^2 = ag^2.$$

$f$  が十分大きいとき

$$D_\mu U_j = \frac{2i}{f} \partial_\mu w_j - i(A_\mu^j - A_\mu^{j-1}) = ia(\partial_\mu A_5^j - \partial_5 A_\mu^j) = iaF_{\mu 5}^j$$

where

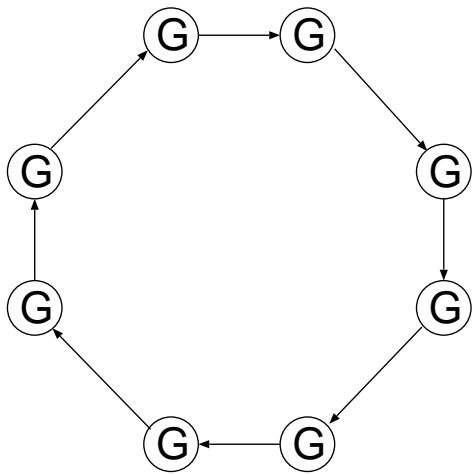
$$a\partial_5 A_\mu^j = A_\mu^j - A_\mu^{j-1}, \quad A_5^j = \frac{2}{af} w^j.$$

第 2 項

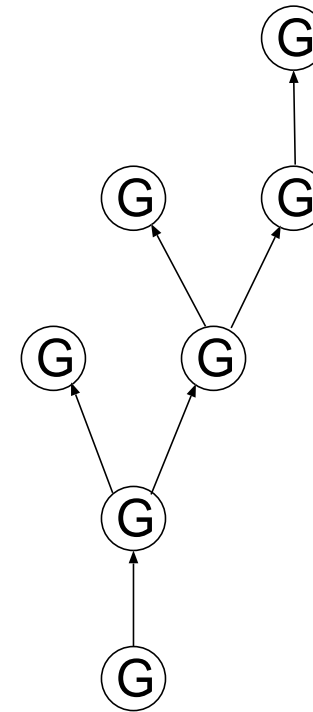
$$\frac{f^2}{4} \sum_{j=1}^N \text{tr}((D_\mu U_j)^\dagger (D^\mu U_j)) = \frac{af^2}{4} \sum_{j=1}^N a \text{tr}(F_{\mu 5}^j F^{j\mu 5}) = \frac{1}{g_5^2} \int dy F_{\mu 5} F^{\mu 5}, \quad g_5^2 = \frac{4}{af^2}.$$

$$g^2, f^2 \rightarrow \infty \text{ with fixed } g^2/f^2.$$

## Moose diagram

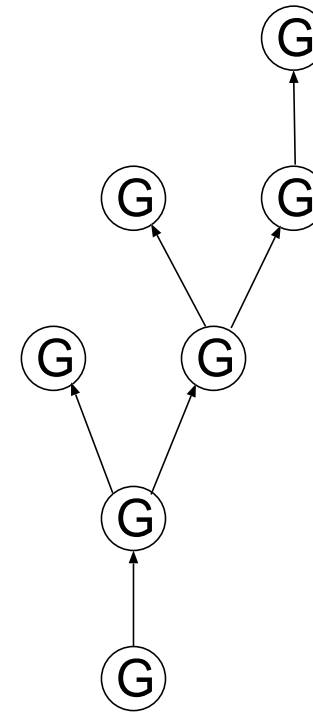
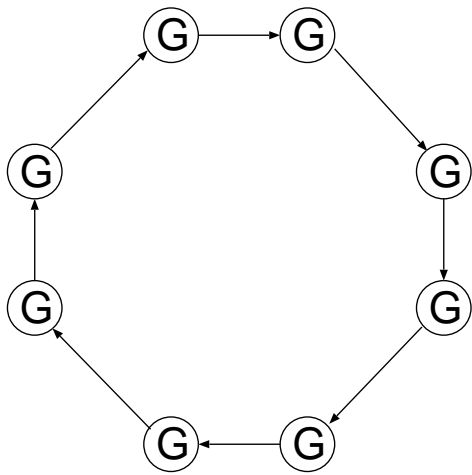


Moose, p. 1404.



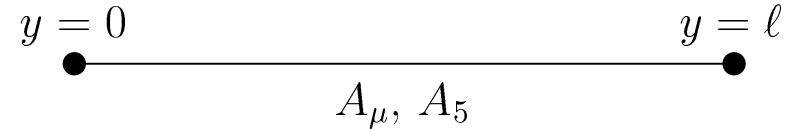
ゲージ群とそれをつなぐカイラルラグランジアンを図示するための道具

## Quiver diagram



ゲージ群とそれをつなぐカイラルラグランジアンを図示するための道具

## 線分 (interval) へのコンパクト化



端点 ( $y = 0, y = \ell$ ) での境界条件: Dirichlet or Neumann BC?

ゲージ変換  $A_M \rightarrow A_M + \partial_M \chi$  とコンシステントにする必要。

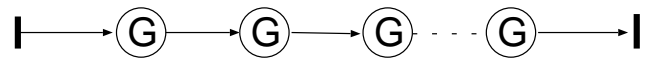
可能な境界条件

1.  $A_\mu(x, y)|_{y=0} = 0$  (D),  $\partial_5 A_5(x, y)|_{y=0} = 0$  (N),  
 $A_\mu(x, y)|_{y=\ell} = 0$  (D),  $\partial_5 A_5(x, y)|_{y=\ell} = 0$  (N). [DD]
2.  $\partial_5 A_\mu(x, y)|_{y=0} = 0$  (N),  $A_5(x, y)|_{y=0} = 0$  (D),  
 $\partial_5 A_\mu(x, y)|_{y=\ell} = 0$  (N),  $A_5(x, y)|_{y=\ell} = 0$  (D). [NN]
3.  $A_\mu(x, y)|_{y=0} = 0$  (D),  $\partial_5 A_5(x, y)|_{y=0} = 0$  (N),  
 $\partial_5 A_\mu(x, y)|_{y=\ell} = 0$  (N),  $A_5(x, y)|_{y=\ell} = 0$  (D). [DN]
4.  $\partial_5 A_\mu(x, y)|_{y=0} = 0$  (N),  $A_5(x, y)|_{y=0} = 0$  (D),  
 $A_\mu(x, y)|_{y=\ell} = 0$  (D),  $\partial_5 A_5(x, y)|_{y=\ell} = 0$  (N). [ND]

- [DD] の場合  
 $A_5$  にゼロモードのモード関数が存在する。質量 0、スピン 0 の粒子。
- [NN] の場合  
 $A_\mu$  にゼロモードのモード関数が存在する。質量 0、スピン 1 の粒子。
- [DN] または [ND] の場合  
 $A_5$  にも  $A_\mu$  にもゼロモードのモード関数は存在しない。

## デコンストラクション

### [DD] の場合



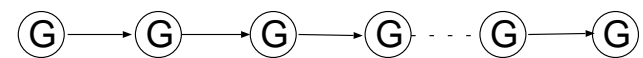
非線形シグマ模型の数の方が、  
ゲージ群よりもひとつ多い

### [DN] の場合



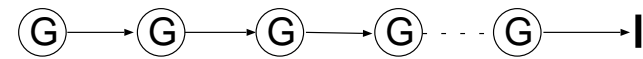
非線形シグマ模型の数と  
ゲージ群の数と同じ

### [NN] の場合



非線形シグマ模型の数の方が、  
ゲージ群よりもひとつ少ない

### [ND] の場合



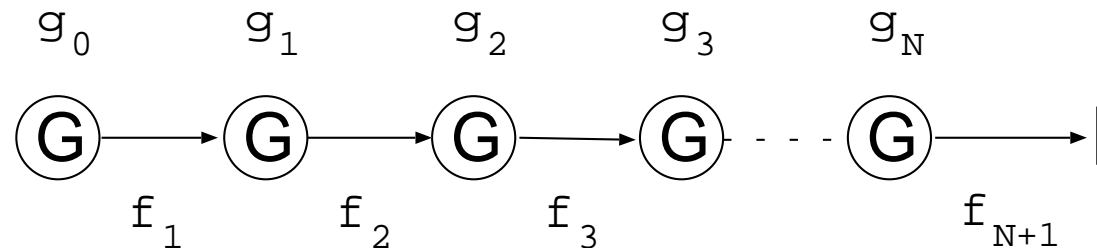
非線形シグマ模型の数と  
ゲージ群の数と同じ



## 縦波 KK ゲージボソン散乱のユニタリティー

- R. Sekhar Chivukula, D. A. Dicus and H. J. He, “Unitarity of compactified five dimensional Yang-Mills theory,” Phys. Lett. B **525**, 175 (2002) [arXiv:hep-ph/0111016].
- C. Csaki, C. Grojean, H. Murayama, L. Pilo and J. Terning, “Gauge theories on an interval: Unitarity without a Higgs,” Phys. Rev. D **69**, 055006 (2004) [arXiv:hep-ph/0305237].

[ND] 型線分コンパクト化された余剰次元ゲージ理論のユニタリティーをデコンストラクションを使って考える。



すべてのゲージボソンは質量を持つ。

$$\text{質量行列} \left( \begin{array}{cccccc} g_0^2 f_1^2 & -g_0 g_1 f_1^2 & & & & \\ -g_0 g_1 f_1^2 & g_1^2 (f_1^2 + f_2^2) & -g_1 g_2 f_2^2 & & & \\ & -g_1 g_2 f_2^2 & \ddots & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & -g_{N-1} g_N f_N^2 & \\ & & & & -g_{N-1} g_N f_N^2 & g_N^2 (f_N^2 + f_{N+1}^2) \end{array} \right)$$

$$M^2 = \frac{1}{4}$$

逆行列の (0,0) 成分  $(M^{-2})_{0,0} = \frac{4}{g_0^2} \sum_{j=1}^{N+1} \frac{1}{f_j^2}$ .

一番左のゲージ群にフェルミオンを結合させて、弱い相互作用のモデルを作る。

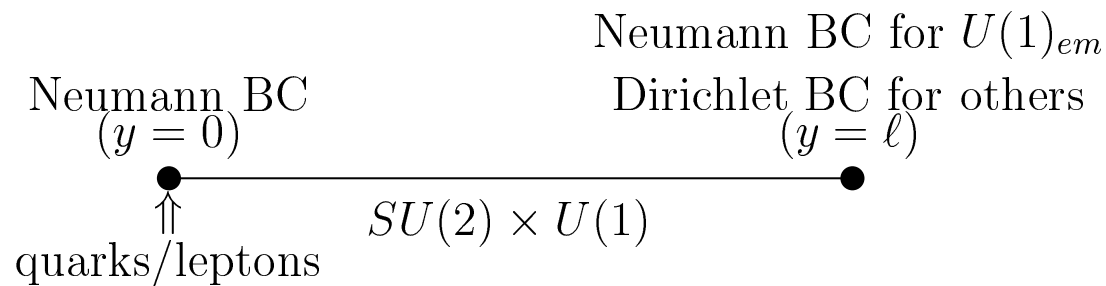
フェルミ定数  $4\sqrt{2}G_F = g_0^2 (M^{-2})_{0,0}, \quad \frac{1}{v^2} = \sqrt{2}G_F = \sum_{j=1}^{N+1} \frac{1}{f_j^2}$ .

単純な電弱非線形シグマモデルとこのモデルとのユニタリティーバウンドの差

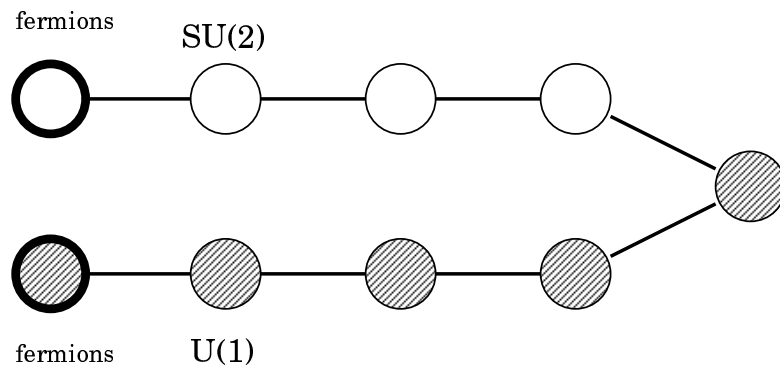
$$\sqrt{8\pi}v \ll \sqrt{8\pi}f_j, \quad \text{for large } N \text{ (連続極限)}.$$

## 5次元ヒグスレスモデル (A toy model)

ヒグス粒子を導入することなく、 $W_L W_L$  散乱をユニタライズする模型を構築できるかも。(標準模型でのヒグス交換グラフの代わりにスピン1のKKモードの交換が理論のユニタライズをする。)



## そのデコンストラクション

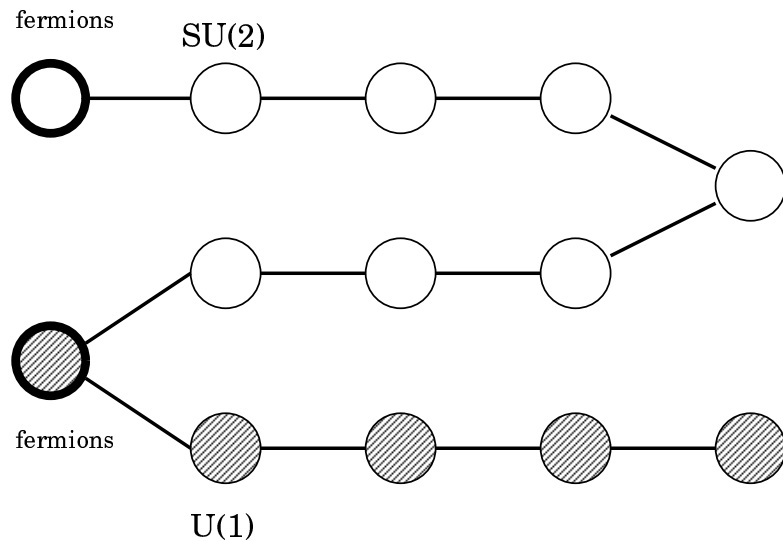


$\rho$  パラメータが1から大きく外れてしまう。⇒ 現象論×

## 5次元ヒグスレス模型 (More realistic model)

カストディアル対称性を導入する

$$\begin{array}{ccc}
 SU(2)_R \times U(1)_{B-L} \rightarrow U(1)_Y & & SU(2)_L \times SU(2)_R \rightarrow SU(2)_V \\
 (y=0) & & (y=\ell) \\
 \uparrow & \text{---} & \bullet \\
 \text{quarks/leptons} & & SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}
 \end{array}$$



$\rho$  パラメータは OK。  $S$  が大きくなってしまう。さらなる拡張が必要 (warped extra dimension, brane kinetic term...)

- C. Csaki, C. Grojean, L. Pilo, and J. Terning, hep-ph/0308038.
- Y. Nomura, hep-ph/0309189.
- R. Barbieri, A. Pomarol, and R. Rattazzi, hep-ph/0310285.
- H. Davoudiasl, J.L. Hewett, B. Lillie, and T.G. Rizzo, hep-ph/0312193.
- G. Burdman and Y. Nomura, hep-ph/0312247.
- H. Davoudiasl, J.L. Hewett, B. Lillie, and T.G. Rizzo, hep-ph/0403300.
- R. Barbieri, A. Pomarol, R. Rattazzi, and A. Strumia,  
hep-ph/0405040.
- ⋮
- R. Foadi, S. Gopalakrishna, and C. Schmidt, hep-ph/0312324.
- J. Hirn and J. Stern, hep-ph/0401032.
- R.S. Chivukula, M. Kurachi, and M. Tanabashi, hep-ph/0403112.
- R.S. Chivukula, E. Simmons, H.-J. He, M. Kurachi, and  
M. Tanabashi, hep-ph/0406077.
- ⋮

## §.6. 擬南部ゴールドストーン粒子

Exact な対称性の自発的破れ

近似的な対称性の自発的破れ

↓ ゴールドストーン定理

↓

質量 0 の NG ボソン

擬南部ゴールドストーンボソン

擬南部ゴールドストーンボソン (Pseudo Nambu-Goldstone Boson) の質量

$$M_{\text{PNGB}}^2 \propto \text{Explicit Breaking の大きさ.}$$

例: QCD の  $\pi$

$$M_{\pi}^2 \propto m_{\text{quark}}, \quad M_{\pi^{\pm}}^2 - M_{\pi^0}^2 \propto \alpha_{\text{QED}}.$$

Little Higgs 模型 (階層性の問題を一部解決する模型) への応用

## $[SU(2)_L \times SU(2)_R]/SU(2)_V$ 非線形シグマ模型 + QED

$$\mathcal{L} = \frac{f^2}{4} \text{tr} [(D_\mu U)^\dagger (D^\mu U)], \quad D_\mu U = \partial_\mu U + ie \frac{\tau^3}{2} B_\mu U - ie U \frac{\tau^3}{2} B_\mu$$

$$U = \exp \left( \frac{i}{f} \tau^a \pi^a \right), \quad B_\mu : \text{photon 場.}$$

$\tau^3$  方向のベクトル対称性をゲージ化 (QED を switch on)

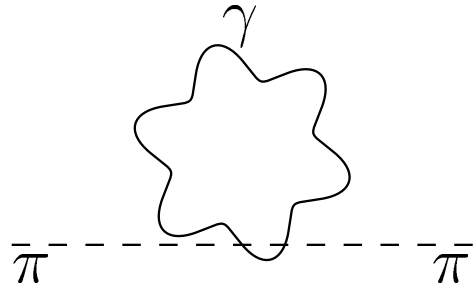
$$\Downarrow e^2 \text{tr}(\tau^3 U^\dagger \tau^3 U) B^\mu B_\mu \text{ 項}$$

$\tau^1$  や  $\tau^2$  方向の対称性を explicit に破る

$\pi^0$  は厳密な NG ボソンだとして残るが、 $\pi^\pm$  は擬 NG ボソンとなって  $\alpha_{\text{QED}}$  に比例する質量を獲得する。

## カイラル摂動論の考え方をを用いた $\pi^\pm$ - $\pi^0$ 質量差の評価

- ループからの  $\pi^\pm$ - $\pi^0$  質量差への寄与 (Landau gauge)



2次発散をすることに注意。

- 2次発散をくりこむのに必要なカウンタータームとその「くりこみ」

$$\frac{c}{2}e^2 f^2 \text{tr}\left(\frac{\tau^3}{2}U^\dagger \frac{\tau^3}{2}U\right), \quad c_R = c + \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{g^{\mu\nu}}{-p^2} \left[ g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right].$$

- $\Delta M_\pi^2 \equiv M_{\pi^\pm}^2 - M_{\pi^0}^2 = e^2 c_R.$
- 現実の QCD での  $\Delta M_\pi^2$  の測定値

$$\Delta M_\pi^2 = 1.26 \times 10^3 \text{MeV}^2, \quad (c_R = 1.37 \times 10^4 \text{MeV}^2).$$



- ナイーブな次元解析 (naive dimensional analysis, NDA) による  $c_R$  の評価

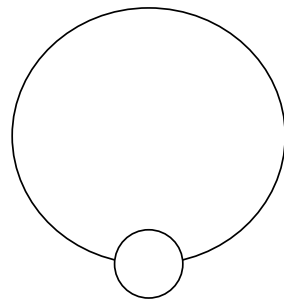
$$c_R = c_\Lambda + \int^\Lambda \frac{d^4 p}{(2\pi)^4 i} \frac{g^{\mu\nu}}{-p^2} \left[ g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] = c_\Lambda + \frac{3\Lambda^2}{(4\pi)^2}.$$

初期値  $c_\Lambda \simeq 0$  とカットオフ  $\Lambda \simeq M_\rho = 770\text{MeV}$  を仮定すると

$$c_R \simeq 1.13 \times 10^4 \text{MeV}^2.$$

オーダーの評価としては、NDA はおおよそ正しい結果を与えるものの、結果は**カットオフの取り方に非常に強く依存する**  $\Leftarrow$  2次発散

- この模型を moose diagram で描くと



このタイプの模型のばあい、PNGB の質量の計算はいつも2次発散を含む。

## リトルヒグス機構

Arkani-Hamed, Cohen and Georgi, [PL B513 \(2001\) 232](#)

- 1 ループでの PNGB の質量の計算に 2 次発散をださないようにする模型のセットアップ。

$$M_{\text{PNGB}}^2 \sim \frac{f^2}{(4\pi)^2} \ln(\Lambda^2/f^2) \sim \frac{f^2}{(4\pi)^2}.$$

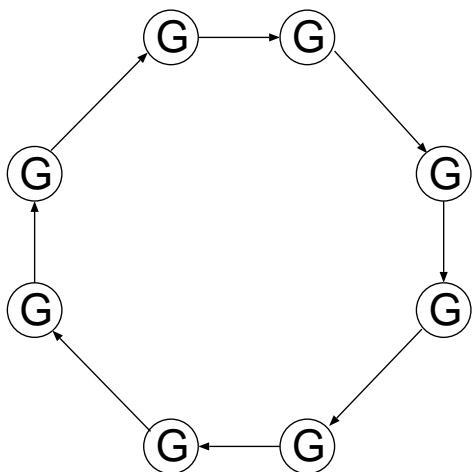
- 仮に 2 ループで 2 次発散があったとしても、NDA の範囲内で

$$M_{\text{PNGB}}^2|_{2\text{-loop}} \sim \frac{\Lambda^2}{(4\pi)^4} \sim \frac{f^2}{(4\pi)^2}, \quad \text{for } \Lambda = 4\pi f.$$

となり、1 ループでのオーダー評価を変えない。

## アイデア

円周上にコンパクト化された余剰次元ゲージ理論を  $N$  個のサイトにデコンストラクションする



余剰次元ゲージ理論起源の PNGB。  
 余剰次元のゲージ対称性はその質量を protect  
 するはず。

### 自由度

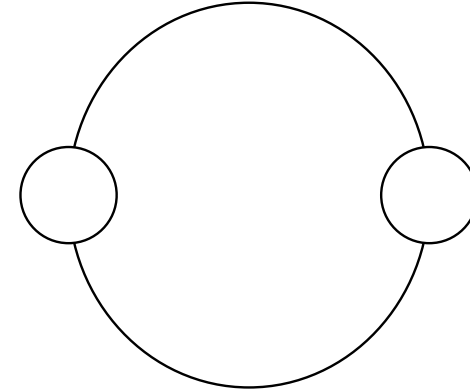
#(massless gauge)	#(massive gauge)	#(exact NGB)	#(PNGB)
1	$N - 1$	0	1

- $N = 1$  の場合、ダメ。c.f.,  $\pi^\pm - \pi^0$  質量差の計算
- $N \geq 2$  の場合はどうか?

## 2 サイトへのデコンストラクション

$$D_\mu U_1 = \partial_\mu U_1 - ig_1 V_{1\mu} U_1 + ig_2 U_1 V_{2\mu},$$

$$D_\mu U_2 = \partial_\mu U_2 - ig_2 V_{2\mu} U_2 + ig_1 U_2 V_{1\mu}.$$



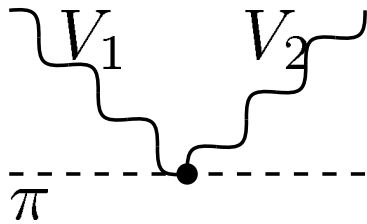
## ラグランジアン

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1,2} \frac{f^2}{4} \text{tr} [(D_\mu U_i)^\dagger (D^\mu U_i)], \quad U_i = \exp \left[ \frac{2i}{f} T^a \pi_i^a \right], \quad (i = 1, 2).$$

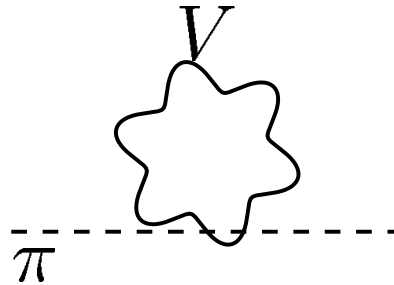
## 自由度

#(massless gauge)	#(massive gauge)	#(exact NGB)	#(PNGB)
1	1	0	1

$VV\pi\pi$  vertex

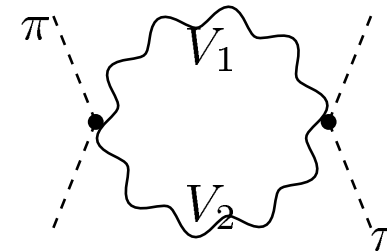


2次発散を出すグラフ



は存在しない。

log 発散のグラフ



のみが存在。

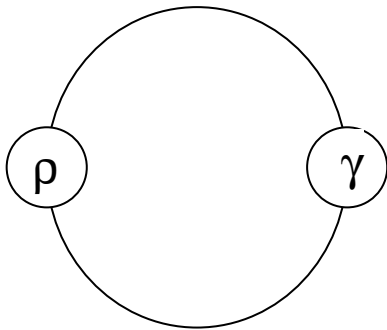
log 発散をくりこむためのカウンターターム

$$\frac{c}{2} g_1^2 g_2^2 f^4 \text{tr}(T^a U_1^\dagger T^b U_1) \text{tr}(T^b U_2^\dagger T^a U_2).$$

コメント:  $N \geq 3$  のときには、log 発散も現れない。

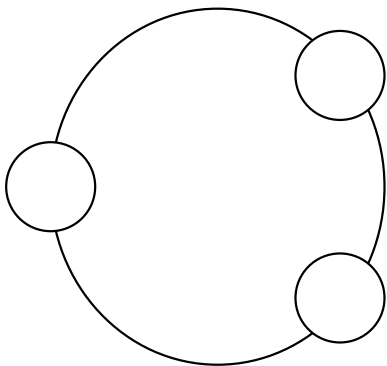
## 余談: The $\pi^\pm$ - $\pi^0$ mass difference revisited

- Chiral Lagrangian including  $\pi$  and  $\rho$   
+ Georgi's vector limit (PRL 63 (1989) 1917)



$M_{\pi^\pm}^2 - M_{\pi^0}^2$  が reliable に計算できる。  
(M. Harada, M. Tanabashi and K. Yamawaki, PL B568 (2003) 103.)

- Chiral Lagrangian including  $\pi$ ,  $\rho$  and  $a_1$  + Weinberg sum rules



## §.7. リトルヒグス模型

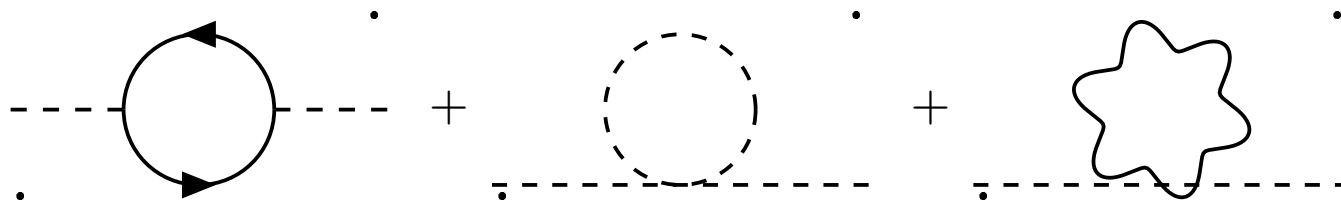
### fine tuning 問題

標準模型のヒグスポテンシャル

$$V = \frac{\lambda}{2} \left( h^\dagger h - \frac{v^2}{2} \right)^2 = \mu_h^2 h^\dagger h + \frac{\lambda}{2} (h^\dagger h)^2 + \text{const.}, \quad \mu_h^2 = -\frac{\lambda}{2} v^2 < 0.$$

$$v \simeq 250\text{GeV} \Rightarrow (\lambda \text{ の大きさが摂動的であれば}) \quad |\mu_h^2| \simeq (100\text{GeV})^2.$$

標準模型も UV カットオフ  $\Lambda_{\text{SM}}$  以下の有効理論のはず。ヒグスの質量項  $\mu_h^2$  への輻射補正:  $(\mu_h^2)_{\text{bare}} + c \frac{g^2}{(4\pi)^2} \Lambda_{\text{SM}}^2 = (\mu_h^2)_{\text{renorm.}}$



もし、 $\Lambda_{\text{SM}} \gg 1\text{TeV} \simeq 4\pi \sqrt{|\mu_h^2|}$  であれば、 $(\mu_h^2)_{\text{bare}}$  を fine tuning する必要。

fine tuning 問題を解決するためには、TeV スケールになんらかの new physics を導入する必要

- Technicolor (Strong Dynamics at TeV)  
No elementary Higgs field.  
Severely constrained by precision tests ( $S, T, U$ )
- SUSY (Weakly interacting) ( $\Rightarrow$  Nojiri-san's lecture)  
A lot of new particles
- Little Higgs ( $\Leftarrow$  new comer)
  - Weakly interacting at a TeV. Strongly interacting at 10TeV.
  - New dynamics appears at  $\sim 10\text{TeV}$ .
  - The SM Higgs is considered as a pseudo Nambu-Goldstone boson (PNGB) of the strong dynamics at  $\sim 10\text{TeV}$ .



## Higgs as a PNCB

An earlier attempt:

Kaplan-Georgi model, [PL 136B \(1984\) 183](#)

*Assignment of  $SU(2)_W$  doublet Higgs in the NG boson field of an adjoint repr. of  $H$*

$$G/H = SU(3)_L \times SU(3)_R / SU(3)_V, \quad G_{\text{gauge}} = SU(2) \times U(1) \in H.$$

NL $\sigma$ M

$$\mathcal{L} = \frac{f^2}{4} \text{tr} [(D_\mu U)^\dagger (D^\mu U)], \quad U = \exp \left( 2 \frac{i}{f} \sum_{a=1}^8 T^a \pi^a \right),$$

where

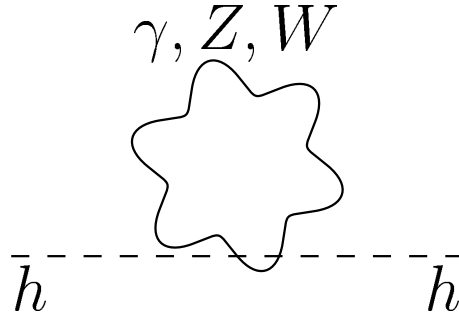
$$D_\mu U = \partial_\mu U - ig_W \sum_{a=1}^3 [W_\mu^a T^a, U] - i \frac{g_Y}{\sqrt{3}} [B_\mu T^8, U].$$

NG boson field,

$$\sum_{a=1}^8 T^a \pi^a = \left( \begin{array}{c|c} \sum_{a=1}^3 \frac{\tau^a}{2} \phi^a & \frac{1}{\sqrt{2}} h \\ \hline \frac{1}{\sqrt{2}} h^\dagger & 0 \end{array} \right) + T^8 \eta$$

$\phi$  :  $SU(2)_W$  triplet,  $h$  :  $SU(2)_W$  doublet (Higgs),  $\eta$  :  $SU(2)_W$  singlet.

Divergence in gauge boson loop,



Counter terms,

$$\frac{1}{2} g_W^2 c_W f^2 \sum_{a=1}^3 \text{tr} [T^a U T^a U^\dagger] + \frac{1}{6} g_Y^2 c_Y f^2 \text{tr} [T^8 U T^8 U^\dagger].$$

Masses of PNCBs,

$$M_\phi^2 = 2g_W^2 c_W^R, \quad M_h^2 = \frac{3}{4}g_W^2 c_W^R + \frac{1}{4}g_Y^2 c_Y^R, \quad M_\eta^2 = 0.$$

Estimate of  $c_W$  and  $c_Y$  in naive dimensional analysis,

$$c_W^R = c_Y^R \sim \frac{\Lambda^2}{(4\pi)^2} \sim f^2, \quad \text{with } \Lambda \simeq 4\pi f.$$

Note: loop suppression factor  $1/(4\pi)^2$  cancels in  $c_W^R$ ,  $c_Y^R$  and

$$c_W^R = c_Y^R \sim f^2 > 0.$$

In order to obtain vacuum with electroweak symmetry breaking, we need

$$M_\phi^2 > 0, \quad M_h^2 < 0, \quad M_\eta^2 > 0.$$

We need source of PNCB mass other than the gauge interaction of  $SU(2)_W \times U(1)_Y$ .

Moreover, we need

$$\sqrt{|M_h^2|} \simeq 100\text{GeV},$$

with

$$M_h^2 = M_h^2(\text{gauge}) + M_h^2(\text{other}) < 0,$$

and

$$M_h^2(\text{gauge}) \sim f^2.$$

We thus need a **fine-tuning** in order to obtain a hierarchy

$$f \gg 100\text{GeV}$$

in the Kaplan-Georgi model.

## A toy model of little Higgs

Kaplan-Georgi model + little Higgs mechanism

Gauged NL $\sigma$ M of  $[SU(3) \times SU(3)/SU(3)]^2$ :

$$G/H = [SU(3) \times SU(3)/SU(3)]^2$$

$$G_{\text{gauge}} = G_1 \times G_2, \quad G_1 = SU(3), \quad G_2 = SU(2) \times U(1).$$

- Gauged NL $\sigma$ M

$$\mathcal{L}_G = \sum_{j=1}^2 \frac{f^2}{4} \text{tr} [(D_\mu U_j)^\dagger (D^\mu U_j)], \quad U_j = \exp \left( \frac{2i}{f} T^a \pi_j^a \right).$$

$$D_\mu U_j = \partial_\mu U_j - ig_3 \sum_{a=1}^8 V_{3\mu}^a T^a U_j + ig_2 \sum_{a=1}^3 U_j V_{2\mu}^a T^a + ig_1 U_j V_{1\mu} T^8.$$

- Massless gauge field

$$G_{\text{gauge}} \cap H = SU(2) \times U(1), \quad (\text{standard model gauge field}).$$

- Other gauge bosons acquires their mass of order  $f$ .
- The model satisfies the “little Higgs” condition. Counter term

$$\sum_{j,k} \text{tr}(T^a U_j T^b U_j^\dagger) \text{tr}(T^a U_k T^b U_k^\dagger)$$

for the  $\ln \Lambda$  divergence.

- Top Yukawa

$$\mathcal{L}_t = \lambda f(0, 0, \bar{t}_R) U_1^\dagger U_2 Q_L + \lambda' f \bar{T}_R T_L + \text{h.c.}, \quad Q_L \equiv \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \\ T_L \end{pmatrix}.$$

- No  $\Lambda^2$  divergence from top Yukawa

$$\propto |\lambda|^2 \text{tr} \left[ P U_1^\dagger U_2 U_2^\dagger U_1 \right] = \text{const.}, \quad P \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- $T_L$  is introduced so as to cancel the  $\Lambda^2$  divergence.

If  $T_L$  were absent, the above diagram would lead to an operator

$$\text{tr} \left[ P U_1^\dagger U_2 (1 - P) U_2^\dagger U_1 \right]$$

with  $\Lambda^2$  divergent coefficient.

- The global symmetry

$$U_2 \rightarrow U_2 g_{2R}^\dagger, \quad Q_L \rightarrow g_{2R} Q_L$$

protect the  $\Lambda^2$  divergence.

- In  $\Lambda$  divergence from Top Yukawa,

$$\propto |\lambda|^2 |\lambda'|^2 \text{tr} \left[ P U_1^\dagger U_2 P U_2^\dagger U_1 \right]$$

- **Remaining problem: Self-interaction of Higgs**

## Minimal moose

N.Arkani-Hamed, A.G.Cohen, E.Katz, A.E.Nelson, T.Gregoire, and J.G.Wacker, JHEP 08 (2002) 021.

$$G/H = [SU(3) \times SU(3)/SU(3)]^4$$

$$G_{\text{gauge}} = G_1 \times G_2, \quad G_1 = SU(3), \quad G_2 = SU(2) \times U(1)$$

We consider two operators

$$\mathcal{L}_Q = f^4 \text{tr}(AU_1^\dagger U_2 U_3^\dagger U_4) + f^4 \text{tr}(A'U_1^\dagger U_4 U_3^\dagger U_2), \quad A = \kappa \mathbf{1} + \epsilon T^8, \quad A' = \kappa' \mathbf{1} + \epsilon' T^8.$$

We first assume  $\kappa = \kappa'$ ,  $\epsilon = \epsilon' = 0$  for simplicity.

- $\pi_{\text{massive}} \sim \pi_1 - \pi_2 + \pi_3 - \pi_4$  acquires its mass  $\sim f$ .
- $\pi_{\text{eaten}} \sim \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4$  is eaten by  $G_{\text{gauge}}$ .
- Light fields:  $\pi_1 - \pi_3$ , and  $\pi_2 - \pi_4$ .



$$U \equiv U_1^\dagger = U_3 = \exp \left[ \frac{2i}{f} (\phi_1 + \phi_2) \right], \quad V \equiv U_4^\dagger = U_2 = \exp \left[ \frac{2i}{f} (\phi_1 - \phi_2) \right]$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Q &= \kappa f^4 \text{tr}[UVU^\dagger V^\dagger] + \kappa f^4 \text{tr}[UV^\dagger U^\dagger V] \\ &= \kappa f^4 (\text{tr}[[U, V][U^\dagger, V^\dagger]] + \text{const.}) \\ &= -\kappa f^4 \text{tr}[[U, V][U, V]^\dagger] + \text{const.} \end{aligned}$$

Expanding  $U$  and  $V$  in terms of  $\phi_1$  and  $\phi_2$ , we find  $\mathcal{L}_Q$  contains [Higgs self-interactions](#),

$$\mathcal{L}_Q \sim -\kappa^2 \text{tr}[[\phi_1, \phi_2]^2].$$

## Electroweak symmetry breaking

Little Higgs field

$$\phi_i \sim \left( \begin{array}{c|c} \sum_{a=1}^3 \frac{\tau^a}{2} \varphi_i^a & \frac{1}{\sqrt{2}} h_i \\ \hline \frac{1}{\sqrt{2}} h_i^\dagger & 0 \end{array} \right) + T^8 \eta_i.$$

Top Yukawa

$$\mathcal{L}_t = \lambda f(0, 0, \bar{t}_R) UV Q_L + \lambda' f \bar{T}_R T_L, \quad UV = 1 + \frac{4i}{f} \phi_1 + \dots$$

Then

$$\mathcal{L}_t \sim \lambda \bar{t}_R h_1^\dagger q_L + \lambda f \bar{t}_R T_L + \lambda' f \bar{T}_R T_L, \quad q_L = \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}.$$

Integrating out heavy fermions of order  $f$ ,

$$T_L, \quad T'_R = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + (\lambda')^2}} (\lambda t_R + \lambda' T_R)$$

we find

$$\mathcal{L}_t \sim \frac{\lambda\lambda'}{\sqrt{\lambda^2 + (\lambda')^2}} \bar{t}'_R h_1^\dagger q_L, \quad t'_R = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + (\lambda')^2}} (\lambda' t_R - \lambda T_R).$$

The top quark loop gives negative contribution to  $M_h^2$ .

⇓

**EWSB can be realized!!**

## Further readings

- The littlest Higgs model  $SU(5)/SO(5)$   
N. Arkani-Hamed, A.G. Cohen, E. Katz and A.E. Nelson, “The littlest Higgs”, JHEP **0207** 034 (2002) [arXiv:hep-ph/0206021].
- $SU(6)/Sp(6)$   
I. Low, W. Skiba and D. Smith, “Little Higgses from an antisymmetric condensate”, Phys. Rev. D **66**, 072001 (2002) [arXiv:hep-ph/0207243].
- $[SU(4)/SU(3)]^4$   
D.E. Kaplan and M. Schmaltz, “The little Higgs from a simple group”, hep-ph/0302049.
- S. Chang and J.G. Wacker, “Little Higgs and custodial  $SU(2)$ ”, hep-ph/0303001.
- S. Chang, “A ‘littlest Higgs’ model with custodial  $SU(2)$  symmetry”, hep-ph/0306034.
- W. Skiba and J. Terning, “A simple model of two little Higgses”, hep-ph/0305302.

- J.L. Hewett, F.J. Petriello and T.G. Rizzo, “Constraining the littlest Higgs”, hep-ph/0211218.
- C. Csaki, J. Hubisz, G.D. Kribs, P. Meade and J. Terning, “Big corrections from a little Higgs”, Phys. Rev. D **67**, 115002 (2003) [arXiv:hep-ph/0211124].
- C. Csaki, J. Hubisz, G.D. Kribs, P. Meade and J. Terning, “Variation of little Higgs models and their electroweak constraints”, Phys. Rev. D **68**, 035009 (2003) [arXiv:hep-ph/0303236].
- T. Gregoire, D.R. Smith and J.G. Wacker, “What precision electroweak physics says about the  $SU(6)/Sp(6)$  little Higgs”, hep-ph/0305275.
- C.Kilic and R.Mahbubani, “Precision electroweak observables in the minimal moose little Higgs model”, arXiv:hep-ph/0312053.
- M.C. Chen and S. Dawson, “One-loop radiative corrections to the rho parameter in the littlest Higgs model”, arXiv:hep-ph/0311032.