原子核三者若手夏の学校
2005年 8月 10-11日

くり込み群と有効理論

寺尾 治彦　(金沢大学)

1日目 Wilsonくり込み群の摂動的様相

2日目 Wilsonくり込み群の非摂動的様相

参考：夏の学校講義録
1.「Wilson流のくり込み群」大川正典
2.「非摂動論的くり込み群」青木健一(1996)

2日目 Wilsonくり込み群の非摂動的様相

1. $4-\epsilon$ 次元スカラー理論と臨界現象
2. 臨界指数とWilsonくり込み群
3. 3次元スカラー理論
4. 4-fermi相互作用とカイラル対称性の自発的破れ
5. ゲージ理論のカイラル相構造
6. Wilsonくり込み群とdynamical mass
7. 2日目のまとめ

今日の要点

$$\mathcal{L} \sim g_i \mathcal{O}_i \qquad \begin{cases} \text{dim}[g_i] > 0 & \cdots \quad \text{relevant} \\ \text{dim}[g_i] = 0 & \cdots \quad \text{marginal} \\ \text{dim}[g_i] < 0 & \cdots \quad \text{irrelevant} \end{cases}$$

$\cdots$ 摂動論 (weak coupling) での話

- 強結合 $\Rightarrow$ 大きな**異常次元**

$$\boxed{\text{dim}[g_i] = （\text{正準次元}） + （\text{異常次元}）}$$

$$\left.\begin{array}{lcl} \text{relevant} & \longrightarrow & \text{irrelevant} \\ \text{irrelevant} & \longrightarrow & \text{relevant} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} \text{固定点（fixed point）} \\ \text{臨界現象、臨界指数} \end{array}$$

- Wilson くり込み群 $\Rightarrow$ 非摂動的計算（特に臨界現象）

1. $4-\epsilon$ 次元スカラー理論と臨界現象

(A) RG flow の構造（臨界面、固定点）

スカラー場の理論空間（パラメータ空間）を次の3次元に制限 $(\rho=\phi^2/2)$

$$S_{\mathrm{eff}}[\phi]=\int d^dx\,\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2+a_1\rho+\frac{1}{2}a_2\rho^2+\frac{1}{3!}a_3\rho^3$$

$d=4-\epsilon$ のERG $(A_d=A_4=1/8\pi^2)$：

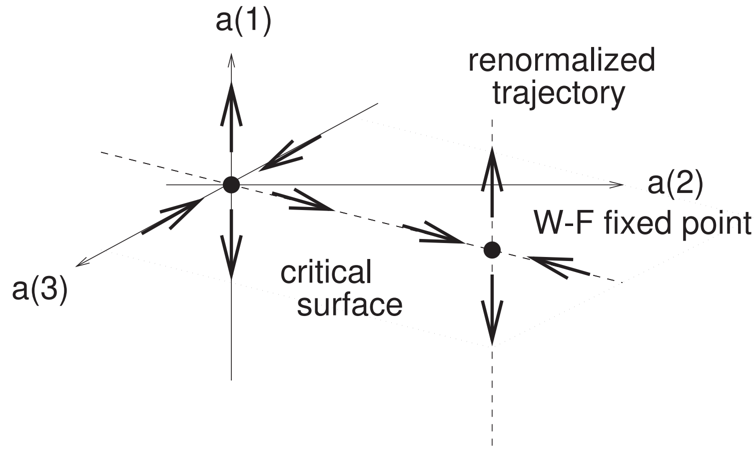
$$\begin{aligned}
\dot{a}_1 &= 2a_1 &+& \tfrac{A_4}{2}\tfrac{3a_2}{1+a_1}\\
\dot{a}_2 &= \epsilon a_2 &+& \tfrac{A_4}{2}\left[-\tfrac{9a_2^2}{(1+a_1)^2}+\tfrac{10a_3}{1+a_1}\right]\\
\dot{a}_3 &= -2a_3 &+& \tfrac{A_4}{2}\left[\tfrac{27a_2^3}{(1+a_1)^3}-\tfrac{45a_2a_3}{(1+a_1)^2}\right]
\end{aligned}$$

Fixed point:

$$\dot{a}_i=-\beta_i[a]=0 \quad\Rightarrow\quad \text{スケール不変}$$

$$\begin{aligned}
(a_1^*,a_2^*,a_3^*) &= (0,0,0) && \text{: trivial (gaussian) fixed point}\\
&= \left(-\frac{1}{6}\epsilon,\frac{8\pi^2}{9}\epsilon,O(\epsilon^3)\right) && \text{: Wilson-Fisher fixed point}
\end{aligned}$$

Fixed point の近傍での RG flow を見る $(a_i = a_i^* + \delta a_i)$



1. Trivial fixed point :

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta a_1} \\ \dot{\delta a_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3A_4/2 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta a_1 \\ \delta a_2 \end{pmatrix}$$

2. Wilson-Fisher fixed point :

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta a_1} \\ \dot{\delta a_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-(3A_4/2)a_2^* & 3A_4/2 \\ 0 & \epsilon - 9A_4 a_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta a_1 \\ \delta a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\epsilon/3 & 3A_4/2 \\ 0 & -\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta a_1 \\ \delta a_2 \end{pmatrix}$$

Fixed point での dim$[a_i]$:

固有ベクトル	Trivial F.P.		W-F F.P
$u_1 = (1,0,0)$	2 : relevant	$\longrightarrow$	$2-\epsilon/3$: relevant
$u_2 = (-3A_4/2,1,0)$	ϵ : **relevant**	$\longrightarrow$	$-\epsilon$: **irrelevant**
$u_3 = (0,0,1)$	-2 : irrelevant	$\longrightarrow$	-2 : irrelevant

(B) Non-trivial fixed point と 異常次元

- Fixed point の存在 ($\beta_i = 0$)：

  （canonical scaling）と （量子補正）のつり合いが起こるところ

- 異常次元 ($\gamma_2 = -2\epsilon$)：

  a_2 **: relevant** $\longrightarrow$ **irrelevant** **異常次元が正準次元に勝る**

- Renormalized trajectory (1次元)：

  相関関数は$a_1(t)$**のみで決定される（理論のパラメータの減少）**

- 臨界面 （massless 理論Note : $m^2 = a_1 \Lambda^2 \to 0$ as $\Lambda^2 \to 0$ ）：

  Z_2 **対称性の相境界 (**$a_1(t) \to \pm\infty$**)**

- 異常次元 ($\gamma_1 = -\epsilon/3$)：

  臨界指数（相関長） $\nu = \dfrac{1}{2+\gamma_1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\epsilon}{12} + O(\epsilon^2)$ （後述）

2. 臨界指数とWilsonくり込み群

(A) 臨界指数 (critical exponent)

スピン系の古典理論（Landau理論）

統計系での平均場近似はLandau理論の古典系に対応

$$\Gamma[M] = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2}(\partial M)^2 + \frac{1}{2}a(T)M^2 + \frac{1}{4!}b(T)M^4 \right\}$$

$M(x) = \sum_{\Omega} S_i$ ：平均化（粗視化）した spin variable,　T ：温度

$$a(T) = a_0\tau + a_1\tau^2 + \cdots$$

$$b(T) = b(T_c) + b_0\tau + \cdots, \quad \tau \equiv (T - T_c)/T_c$$

1. 自発磁化 (supontaneous magnetiztion)

$$\frac{dV(M)}{dM} = 0 \quad \Rightarrow \quad M = \sqrt{-\frac{6a(T)}{b(T)}} = \sqrt{-\frac{6a_0}{b(T_c)}}(-\tau)^{1/2} \quad (\tau < 0)$$

$$M \equiv M_0(-\tau)^\beta \ \Rightarrow \ \beta = 1/2$$

Note : スピン系（Ising 模型）との対応 $(K = \beta J = J/k_B T)$

$$\begin{aligned} Z(H) &= \sum_{\{S_i\}} e^{-\mathcal{H}} \qquad \mathcal{H} = -K \sum_{<i,j>} S_i S_j - H \sum_i S_i \\ &= \sum_{\{S_i\}} \int dM \ e^{K\sum_{<i,j>} S_i S_j + H\sum_i S_i - K\sum_{<i,j>}(S_i - M)(S_j - M)} \\ &= \int dM \ e^{-dKM^2} \sum_{\{S_i\}} e^{\sum_i S_i (H+2dKM)} \\ &= \int dM \ e^{-\sum_i dKM^2 + \ln\coth(H+2dKM)} \end{aligned}$$

平均場近似（mean field approximation）：

M の揺らぎを無視する $\Rightarrow$ 場 M の "古典論" $(M = \sum_i S_i)$

$$V(M) = dKM^2 - \ln\coth(2dKM) = \frac{1}{2}a(T)M^2 + \frac{1}{4!}b(T)M^4 + \cdots$$

係数は温度 T に依る。

2. 磁化率 (magnetic suseptibility)

$$\chi \equiv -\left.\frac{\partial M}{\partial H}\right|_{H=0} \;\Rightarrow\; \chi^{-1} = -\frac{\partial H}{\partial M}$$

$$= \frac{d^2V(M)}{dM^2} \qquad \left(\frac{dV(M)}{dM} = -H\right) \;:\; \text{運動方程式}$$

$$= a(T) + \frac{1}{2}\, b(T) M^2 = a_0(-\tau) + \cdots$$

$$\chi \equiv \chi_0(-\tau)^{-\gamma} \;\Rightarrow\; \gamma = 1$$

3. 相関長 (correlation length)

$$\xi = \frac{1}{(\text{mass})} \qquad \left((\text{mass})^2 = V''(M) = a(T) + \frac{1}{2}M^2\right)$$

$$= \begin{cases} a_0 \tau^{-1/2} & (\tau > 0) \\ \sqrt{2} a_0 (-\tau)^{-1/2} & (\tau < 0) \end{cases}$$

$$\xi \equiv \xi_0(\pm\tau)^{-\nu} \;\Rightarrow\; \nu = 1/2$$

4. 異常次元 (anomalous dimension)

$T = T_c$ において

$$G^{(2)}(p) \equiv \frac{1}{p^{2-\eta}} \qquad \left(G^{(2)}(x, y) \sim \frac{1}{|x-y|^{d-2+\eta}} \right)$$

$$\eta = 0 \qquad \text{(古典論)}$$

Ising 模型の臨界指数

exponents	mean field	d=3 Ising	d=2 Ising
β	1/2	0.32	1/8
γ	1	1.24	7/4
ν	1/2	0.63	1
η	0	0.03	1/4

Scaling relations

$$\gamma = \nu(2-\eta)$$

$$\beta = \frac{\nu}{2}(d-2+\eta)$$

Note:

- 古典理論（平均場近似）の臨界指数は次元に依らず、４次元では良い。
- 独立な臨界指数は2つ。（ν, η)

(B) くり込み群と臨界指数

$4-\epsilon$次元スカラー理論の臨界指数：

(1) 臨界指数ν ：臨界面近傍での相関長ξと理論のparameter $a(T)=a_1$との関係

$$\xi = \frac{1}{(\text{mass})} \equiv \xi_0\ (\delta a_1)^{-\nu} \qquad (a(\tau) \sim a_0 \tau)$$

Wilson-Fisher fixed pointの近傍を通るRG flow上において、$t=\ln \Lambda_1/\Lambda_2$だけ違う2点$A_1(t=0), A_2(t=t)$ に着目

$$\delta a_1(t) = e^{(2-\epsilon/3)t}\delta a_1(0)$$

Note：2点A_1, A_2の理論はスケールの違いΛ_1/Λ_2以外は同一

$$\begin{aligned} \xi(t) &= e^{-t}\xi(0) \qquad (\text{mass})(t) = e^{t}(\text{mass})(0) \\ &= \xi(0)\left(\frac{\delta a_1(t)}{\delta a_1(0)}\right)^{-\frac{1}{2-\epsilon/3}} \qquad \Rightarrow \qquad \nu = \frac{1}{2-\epsilon/3} \end{aligned}$$

(2) 臨界指数η ：固定点近傍での場の異常次元

$$\eta(t) = \frac{d\ln Z(t)}{dt}, \quad \eta = \eta(a_i^*) = O(\epsilon^2)$$

(C) スケーリング則とくり込み群

(1) 臨界指数 β ：場の期待値 $\langle\phi\rangle$ と理論の parameter $a(T) = a_1$ との関係

$$\langle\phi\rangle \propto (-\delta a_1)^{\beta} \quad (\tau < 0)$$

Wilson-Fisher fixed point の近傍を通る RG flow 上の 2 点 $A_1(t=0), A_2(t=t)$

$$\delta a_1(t) = e^{t/\nu}\delta a_1(0)$$

Note : dim$[\phi] = (d-2+\eta)/2$

$$\begin{aligned} \langle\phi\rangle(t) &= \langle\phi\rangle(0)e^{(d-2+\eta)t/2} \\ &\propto (\delta a_1(t))^{\nu(d-2+\eta)/2} \qquad \Rightarrow \qquad \beta = \frac{\nu}{2}(d-2+\eta) \end{aligned}$$

(2) 臨界指数 γ

$$\chi^{-1} = \langle d^2V(\phi)/d\phi^2\rangle \propto (\delta a_1)^{\gamma}$$

Note : dim$[\chi^{-1}] = 2-\eta$

$$\begin{aligned} \chi^{-1}(t) &= \chi^{-1}(0)e^{(2-\eta)t} \\ &\propto (\delta a_1(t))^{\nu(2-\eta)} \qquad \Rightarrow \qquad \gamma = \nu(2-\eta) \end{aligned}$$

(D) 臨界指数のスキーム非依存性

臨界指数は、一般にベータ関数を$\{\beta_i\}$、fixed point を$\{g_i^*\}$として、次の行列の固有値で与えられる。

$$\Omega_i^j = \frac{\partial \beta_i}{\partial g_j}(g^*)$$

ベータ関数はくり込みのスキームやparameterの定義などに依存。
しかし、臨界指数はこれらに依らない。

$\Rightarrow$ **次元と対称性のみで決まるuniversalな量**

今簡単のため、$g_1 = g_1(g_2)$とする。

$$\beta_1(g_1) = \Lambda \frac{dg_1}{d\Lambda} = \Lambda \frac{dg_2}{d\Lambda}\frac{dg_1}{dg_2} = \beta_2(g_2)\frac{dg_1}{dg_2}$$

臨界指数：

$$\frac{d\beta_1(g_1)}{dg_1} = \frac{d\beta_2(g_2)}{dg_2}\frac{dg_2}{dg_1}\frac{dg_1}{dg_2} + \beta_2(g_2)\frac{d}{dg_1}\left(\frac{dg_1}{dg_2}\right)$$

$$\left.\frac{d\beta_1(g_1)}{dg_1}\right|_{g_1^*} = \left.\frac{d\beta_2(g_2)}{dg_2}\right|_{g_2^*} \qquad \Rightarrow \qquad \nu_1 = \nu_2$$

(E) 摂動展開の破綻

(mass)^2 への1-loop 補正

$$\begin{aligned} m^2 &= m_0^2 + \lambda \int^\Lambda \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2+m^2} - \delta m^2 && \text{2次発散の相殺} \\ &= \Delta m_0^2 - \lambda m^2 \int^\Lambda \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2(k^2+m^2)} && (\Delta m_0^2 \equiv m_0^2 - m_{\text{cr}}^2) \\ &= \Delta m_0^2 \left\{ 1 - 3\lambda \int^\Lambda \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2(k^2+\Delta m_0^2)} + O(\lambda^2) \right\} && (m^2 = \Delta m_0^2 + O(\lambda)) \\ &= \Delta m_0^2 \left\{ 1 + \lambda A_4 \ln \frac{\Lambda^2}{\Delta m_0^2} + O(\lambda^2) \right\} && \Rightarrow \quad \text{(tree)} \ll \text{(one-loop)!} \end{aligned}$$

臨界点の近くでは、大きな対数補正によって摂動展開は破綻する

くり込み群による評価：$(\Delta m_0^2 = \delta a_1(0)\Lambda^2)$

$$m^2 \sim \Delta m_0^2 \left(\frac{\Lambda^2}{\Delta m_0^2} \right)^{A_4\lambda} = \Delta m_0^2 \left(1 + \lambda A_4 \ln \frac{\Lambda^2}{\Delta m_0^2} + \cdots \right)$$

3. 3次元スカラー理論

(A) ERG方程式

Non-trivial fixed point は強結合

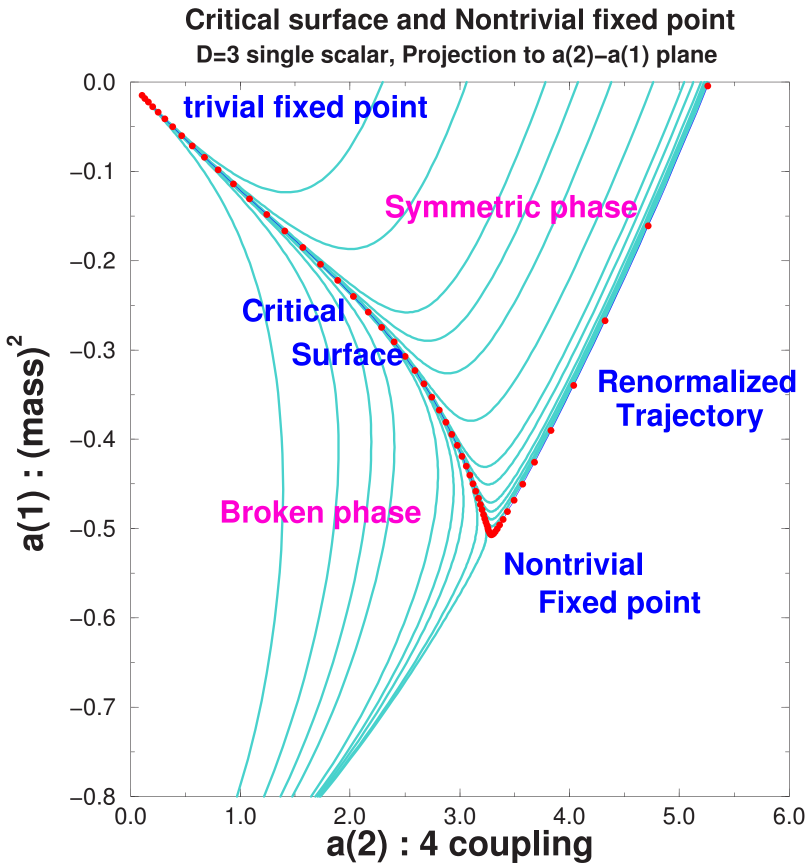
$\Rightarrow$ 非摂動的解析が必要

局所ポテンシャル近似:

$$S_{\text{eff}} = \int d^d x \, \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + V_{\text{eff}}(\phi)$$

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dt} = dV_{\text{eff}} - \frac{d-2}{2}\phi V'_{\text{eff}}(\phi) + \frac{A_d}{2}\ln\left(+V''_{\text{eff}}(\phi)\right)$$

$\Rightarrow$ fixed point, critical exponent ν



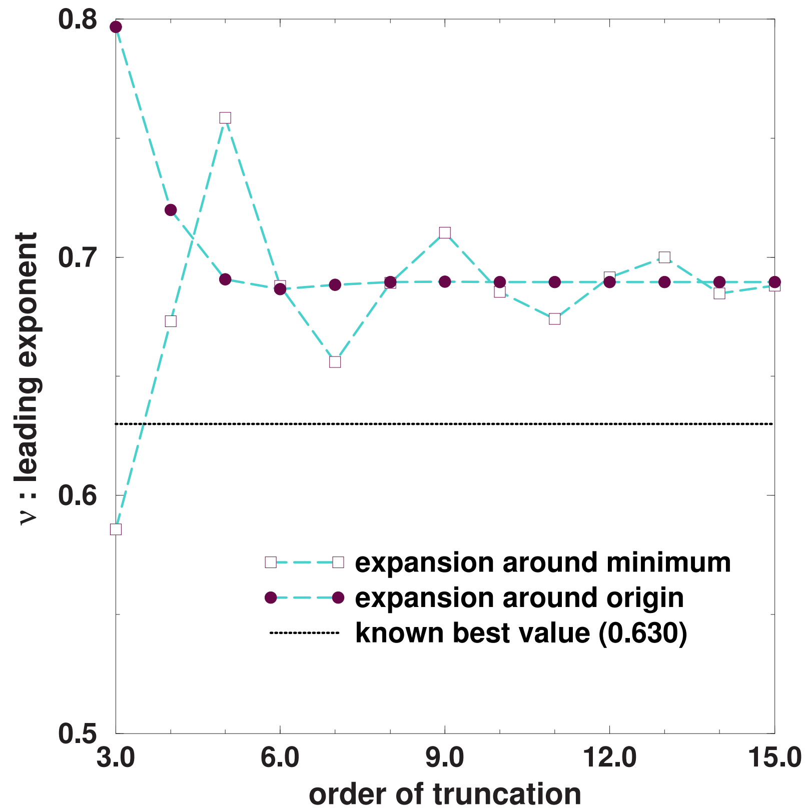
(B) 臨界指数の評価：

知られている結果：

指数	LPA1	LPA2	NLPA	best
ν	0.69	0.66	0.62	0.630
η	0	0	0.054	0.035

LPA1 : sharp cutoff
LPA2 : smooth cutoff
NLPA : up to $O(\partial^2)$
best : ϵ 展開，摂動展開，格子シミュレーション

Operator 展開の結果も理論空間の拡大とともに収束（右図）



– Wilson くり込み群は、臨界現象の定性的な理解を与えるだけではなく、定量的に比較的良い非摂動的な解析方法としても期待される。

(C) 3次元非線形シグマ模型

次元が１少ないRenormalized trajectoryの与える理論は？

N スカラー理論：$\phi = (\phi^1, \phi^2, \cdots, \phi^N)$

$$S = \int d^dx \, \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \phi^i\right)^2 + \frac{a_1}{2} \left(\phi^i\right)^2 + \frac{a_2}{8} \left((\phi^i)^2\right)^2$$

$\Rightarrow$ 同様のRG flow： $a_2 \longrightarrow a_2^*$

Wilson 有効作用 (broken phase):

$$S_{\text{eff}} \sim \int d^dx \, \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \phi^i\right)^2 + \lambda^* \left((\phi^i)^2 - f^2\right)^2 \qquad (\lambda^* \equiv a_2^*/8, \; f^2 \equiv -2a_1/a_2^*)$$

$$= \int d^dx \, \frac{f^2}{2} \left(\partial_\mu u^i\right)^2 + \boxed{\lambda^* f^4 \left((u^i)^2 - 1\right)^2} \Rightarrow \; \delta\left((u^i)^2 - 1\right) \text{ for large } f$$

$$\rightarrow \int d^dx \, \frac{f^2}{2} \left(\partial_\mu u^a\right)^2 + \frac{f^2}{2} \left(u^a \partial_\mu u^a\right)^2 + \cdots$$

非線形シグマ模型：
摂動的にくり込み不可能

- Renormalized trajectoryは非線形シグマ模型(universality class)
- 3次元非線形シグマ模型は**非摂動的にくり込み可能**（連続極限が取れる）
  UV fixed pointの存在によるくり込み可能性（asymptotic safety）の例

4. 4-fermi相互作用とカイラル対称性の自発的破れ

(A) 4-fermi couplingのくり込み群

簡単のために、次の有効作用の4-fermi coupling Gのくり込み群を考える。

$$S_{\text{eff}} = \int d^4x\ \bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi + m\Lambda(\bar{\psi}\psi) - \frac{G}{2\Lambda^2}(\bar{\psi}\psi)^2$$

カイラル対称性（massless理論）

$$\psi \to \gamma_5\psi \quad \Rightarrow \quad \bar{\psi}\psi \to -\bar{\psi}\psi$$

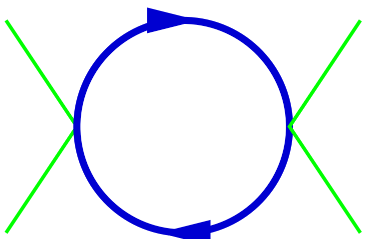
カイラル対称性 がmassless $m=0$を保つ

4-fermi couplingのベータ関数 ($m=0$):

Shell mode 積分:

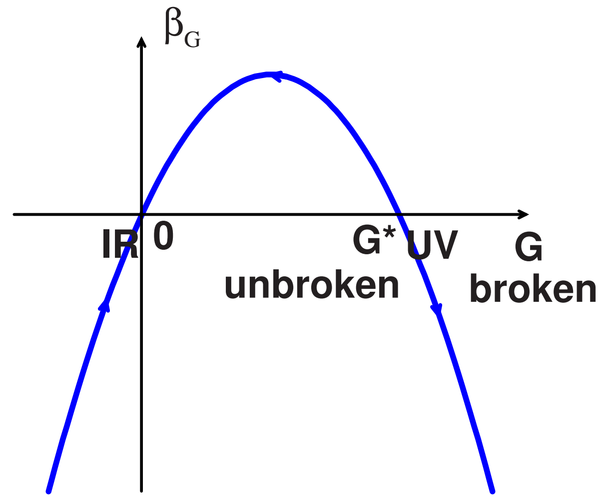
$$S_{\text{shell}} = \int_p' \bar{\psi}_s(-p)(i p\!\!\!/)\psi_s(p) - \frac{G}{\Lambda^2}(\bar{\psi}_<\psi_<)(\bar{\psi}_s(-p)\psi_s(p)) + \cdots$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dG}{dt} = -\beta_G = -2G + \frac{1}{2\pi^2}G^2$$



固定点と異常次元

$$\beta_G = 0 \;\Rightarrow\; G^* = \begin{cases} 0 & \text{IR attractive} \\ 4\pi^2 = G_{\text{cr}} & \text{IR repulsive} \end{cases}$$



4-fermi couplingの異常次元：

$$\frac{d}{dt}\delta G = \left(-2 + \frac{G^*}{\pi^2}\right)\delta G = 2\delta G$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \text{dim}[G] = -2 & : \gamma_G = 0 \quad \text{at} \quad G = 0 \\ \text{dim}[G] = 2 & : \gamma_G = 4 \quad \text{at} \quad G = G_{\text{cr}} \end{cases}$$

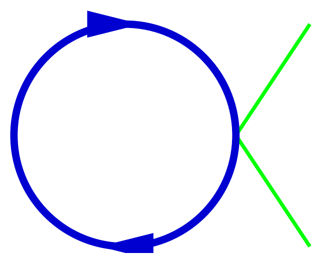
Irrelevant at $G = 0$ $\;\rightarrow\;$ Relevant at $G = G_{\text{cr}}$

mass parameter m の異常次元：

$$\frac{d}{dt}m = m - \frac{m}{2\pi^2}G$$

$$\text{dim}[m] = 3 : \gamma_m = 2 \quad \text{at} \quad G = G_{\text{cr}}$$

$$\text{dim}[\bar{\psi}\psi] = 1$$



(B) Large N Gross-Neveu 模型のERG

$$S_{\text{eff}} = \int d^4x \quad \bar{\psi}_i \partial\!\!\!/ \psi^i - \frac{G_4}{2N\Lambda^2}(\bar{\psi}_i\psi^i)^2 + \frac{G_8}{8N^3\Lambda^8}(\bar{\psi}_i\psi^i)^4 + \cdots \qquad (i = 1, \cdots, N)$$

Wegner-Houghton 方程式：

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dt} = 4V_{\text{eff}}(\sigma) - 3\sigma V'_{\text{eff}}(\sigma) - \frac{1}{4\pi^2}\ln(1 + V'_{\text{eff}}(\sigma)^2), \qquad N\sigma \equiv \bar{\psi}_i\psi^i$$

Operator 展開：

$$\begin{cases} \dot{G}_4 &= & -2G_4 + \frac{1}{2\pi^2}G_4^2 & \Rightarrow & G_4^* = G_{\text{cr}} = 4\pi^2 \\ \dot{G}_8 &= & -8G_8 + \frac{2}{\pi^2}G_4G_8 + \frac{3}{\pi^2}G_4^2 & \Rightarrow & G_8^* \text{は存在しない} \\ \vdots & & & & \end{cases}$$

Note:

- **Large N 極限で正確。**
- 高次の coupling は低次の coupling の RG flow に効かない。（massless の場合）
- **Non-trivial fixed point は存在しない。** $G = G_{\text{cr}}$ **は相境界**
- 4次元理論はくり込み不可能（3次元では非摂動的にくり込み可能）。
  ((G_4, G_8) の空間での renormalized trajectory を具体的に見てください。)

(C) 南部・Jona-Lasinio (NJL) 模型

1 flavorの場合：

$$S_{\mathrm{NJL}} = \int d^4x \ \ \bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi + \frac{G_S}{2\Lambda_0^2}\left[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2\right]$$

カイラル対称性

$$\delta\psi = i\theta\gamma_5\psi \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \delta(\bar{\psi}\psi) & = & 2\theta(\bar{\psi}i\gamma_5\psi) \\ \delta(\bar{\psi}i\gamma_5\psi) & = & -2\theta(\bar{\psi}\psi) \\ \delta(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi) & = & \delta(\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi) = 0 \end{array} \right.$$

Chiral and parity invariant 4-fermi operators :

$$\mathcal{O}_1 = (\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2 = -\frac{1}{2}\left\{(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi)^2\right\} \quad \text{(Fiertz変換)}$$

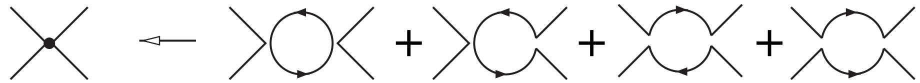
$$\mathcal{O}_2 = (\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^2 + (\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi)^2$$

Wilsonian 有効作用

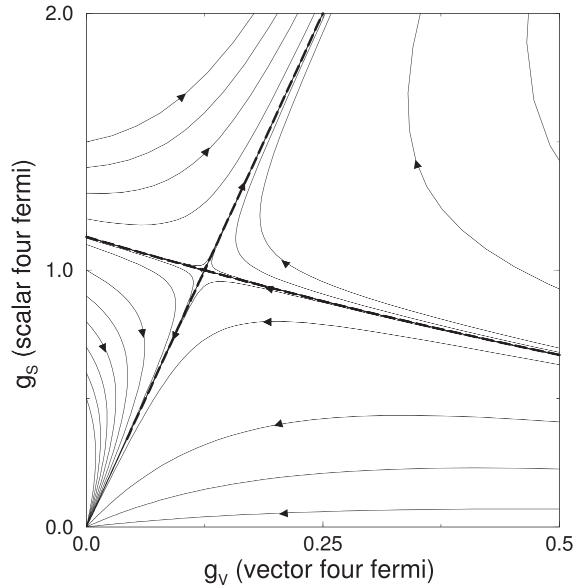
$$S_{\mathrm{eff}} = \int d^4x \ \ \bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi + \frac{G_S}{2\Lambda^2}\mathcal{O}_1 + \frac{G_V}{2\Lambda^2}\mathcal{O}_2 + \cdots$$

4-fermi couplingのくり込み群方程式 ：$(g_S = G_S/4\pi^2,\ g_V = G_V/4\pi^2)$

$$\dot{g_S} = -2g_S + \frac{3}{2}g_S^2 + 4g_S g_V$$



$$\dot{g_V} = -2g_V + \frac{1}{4}g_S^2$$



g_S, g_V 空間での相構造：

- カイラル対称性の臨界面
  $$(g_S^*, g_V^*) = (1, 1/8)$$
- Scalar 4 fermi operator $\mathcal{O}_1$ の生成
  $\Rightarrow$ カイラル対称性の破れ

臨界面上の異常次元：(固定点で線形化)

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \delta g_S \\ \delta g_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3g_S^*+4g_V^* & 4g_S^* \\ g_S^*/2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta g_S \\ \delta g_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 4 \\ 1/2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta g_S \\ \delta g_V \end{pmatrix}$$

relevant operator : $\mathcal{O}_{\mathrm{rel}} = \mathcal{O}_1 - \frac{1}{8}\mathcal{O}_2$ dim[$\mathcal{O}_{\mathrm{rel}}$]=2

(D) カイラル対称性の自発的破れ

Large N Gross-Neveu 模型：

$$S_{\mathsf{GN}} = \int d^4x \ \ \bar{\psi}_i \partial\!\!\!/ \psi^i - \frac{G}{2N}(\bar{\psi}_i\psi^i)^2$$

補助場の方法：複合場の operator $N\sigma = \bar{\psi}_i\psi^i$ を導入

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\sigma \exp\left\{-\int d^4x \ \bar{\psi}(\partial\!\!\!/ - G\sigma)\psi + \frac{GN}{2}\sigma^2\right\} \\ &= \int \mathcal{D}\sigma \left(\mathsf{Det}(\partial\!\!\!/ - G\sigma)\right)^N e^{-N\int d^4x \ \ \frac{G}{2}\sigma^2} \\ &= \int \mathcal{D}\sigma e^{-N\int d^4x \ \ \frac{G}{2}\sigma^2 - \mathsf{Tr}\ln(\partial\!\!\!/ - G\sigma)} \end{aligned}$$

Large N 極限：σ の loop 補正は $O(1/N)$ $\Rightarrow$ 古典論

$$V(\sigma) = \frac{G}{2}\sigma^2 - \mathsf{Tr}\ln(\partial\!\!\!/ - G\sigma) = \frac{G}{2}\sigma^2 - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\mathsf{tr}\ln(-ip\!\!\!/ - G\sigma)$$

$$dV(\sigma)/d\sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad N\langle\sigma\rangle = \langle\bar{\psi}_i\psi^i\rangle \ \ \text{が決まる}$$

Note： 古典的 Landau 理論に対応 ($M \leftrightarrow \sigma$)

カイラル対称性の自発的破れ：(カイラル対称性：$\bar{\psi}_i\psi^i \longrightarrow -\bar{\psi}_i\psi^i$)

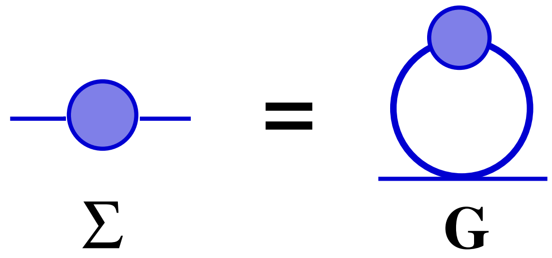
- $N\langle\sigma\rangle = \langle\bar{\psi}_i\psi^i\rangle \neq 0$ **($\langle\sigma\rangle \neq 0$： 自発磁化と同じ)**

  $\Rightarrow$ 真空はカイラル対称性を破った状態
- $G\langle\sigma\rangle$ ： dynamical mass の生成

Gap 方程式：$(g = (G/4\pi^2)\Lambda^2)$

$$\Sigma \equiv -G\langle\sigma\rangle = m_0 + G\int^{\Lambda}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\ \mathrm{tr}\left(\frac{1}{-i\not{p}+\Sigma}\right)$$

$$= m_0 + g\Sigma\left(1 - \frac{\Sigma^2}{\Lambda^2}\ \ln\frac{\Lambda^2}{\Sigma^2}\right)$$



逐次的にΣを解くと、無限次のloop diagram の和として表される。

Critical coupling ： $g_{\mathrm{cr}} = 1\ (G_{\mathrm{cr}}\Lambda^2 = 4\pi^2)$

$$g - g_{\mathrm{cr}} = \frac{\Sigma^2}{\Lambda^2}\ \ln\frac{\Lambda^2}{\Sigma^2}$$

臨界指数：

臨界点近傍において	$\Sigma \propto (g - g_{\mathrm{cr}})^{1/2}$	$\Rightarrow$	$\nu = 1/2$
臨界点$(g = g_{\mathrm{cr}})$において	$\Sigma \propto m_0^{1/3}$	$\Rightarrow$	$\delta = 3$

(E) Gap方程式とWilsonくり込み群

Large N Gross-Neveu 模型での対応：

Wilson RG と同様に、$\psi = \psi_c + \psi_>$ と分離し $\psi_>$ による量子補正を取り入れる。

Gap 方程式： $(N\sigma_c = \bar{\psi}_{ci}\psi_c^i)$

$$\Sigma = -G\sigma_c + G\int_{\Lambda}^{\Lambda_0} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\ \mathrm{tr}\left(\frac{1}{-i\not{p}+\Sigma}\right) \quad \Rightarrow \quad \Sigma = \Sigma(\sigma_c, \Lambda)$$

$\Sigma(\sigma_c, \Lambda)$ のスケール依存性をみると

$$\begin{aligned} \Lambda\frac{\partial\Sigma}{\partial\Lambda} &= -G\int_{|p|=\Lambda} dp\ \mathrm{tr}\left(\frac{1}{-i\not{p}+\Sigma}\right) - G\int_{\Lambda}^{\Lambda_0} dp\ \mathrm{tr}\frac{1}{(-i\not{p}+\Sigma)^2}\Lambda\frac{\partial\Sigma}{\partial\Lambda} \\ &= -\int_{|p|=\Lambda} dp\ \mathrm{tr}\left(\frac{1}{-i\not{p}+\Sigma}\right)\frac{\partial\Sigma}{\partial\sigma_c} \end{aligned}$$

$V_{\mathrm{eff}}(\sigma_c;\Lambda)$ の Wegner-Houghton 方程式：

$$\Lambda\frac{\partial V_{\mathrm{eff}}}{\partial\Lambda} = -\int_{|p|=\Lambda} dp\ \mathrm{tr}\ln(-i\not{p}+V'_{\mathrm{eff}}(\sigma_c)) \ \Rightarrow$$

対応: $\Sigma(\sigma_c) = V'_{\mathrm{eff}}(\sigma_c)$
$=$ “effective mass”

5. ゲージ理論のカイラル相構造

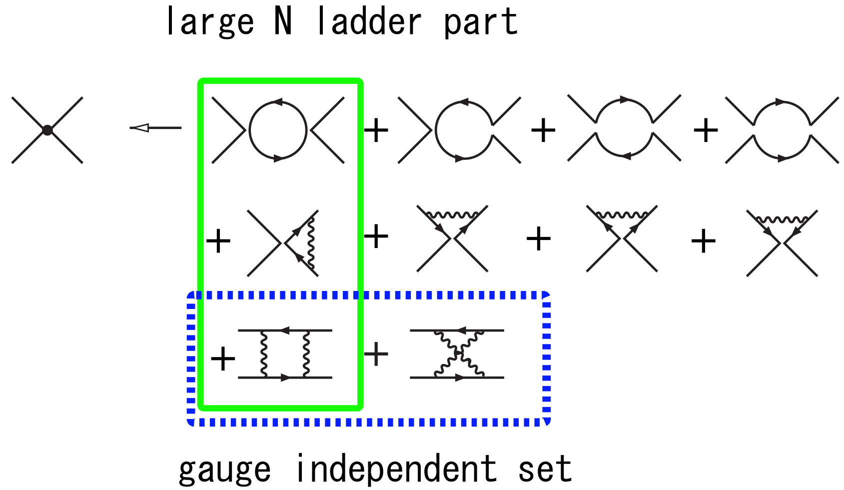
(A) 4-fermi couplingのくり込み群

Wilsonian 有効作用 (massless QED, 1 flavor):

$$S_{\mathrm{eff}} = \int d^4x \left\{ \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2\alpha}(\partial\cdot A)^2 + \bar{\psi}(\partial\!\!\!/ + eA\!\!\!/)\psi \right.$$
$$\left. -\frac{G_S}{2\Lambda^2}\left[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2\right] + \frac{G_V}{2\Lambda^2}\left[(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^2 + (\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi)^2\right] \right\}$$

先ず、4-fermi coupling G_S, G_V への補正のみ扱ったくり込み群を見よう。
（gauge coupling e は一定，$\lambda \equiv 3e^2/4\pi^2$）

$$\dot{g_S} = -2g_S + \frac{3}{2}g_S^2 + 4g_Sg_V + g_S\lambda + \frac{1}{6}\lambda^2$$
$$\dot{g_V} = -2g_V + \frac{1}{4}g_S^2 - g_V\lambda - \frac{1}{12}\lambda^2$$

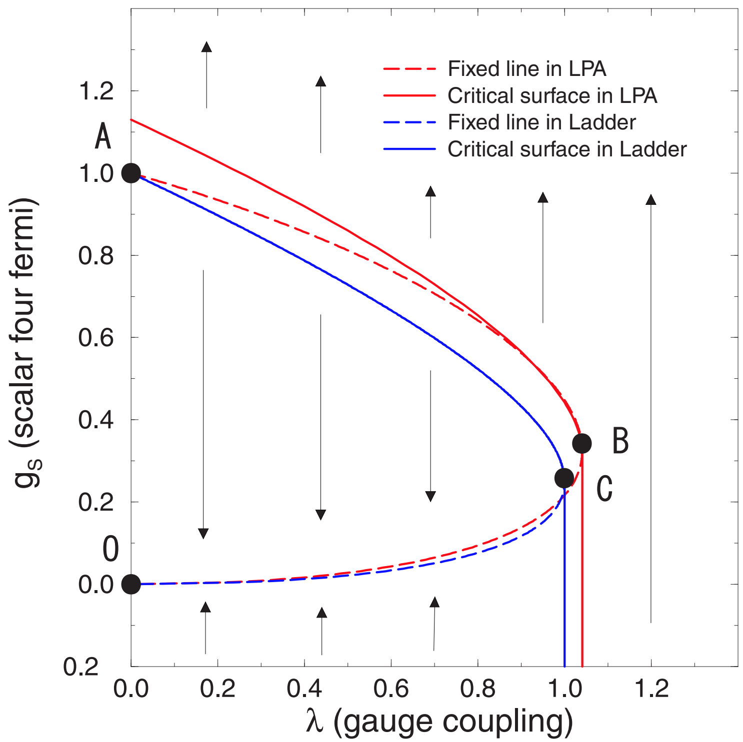


Note : gauge parameter α に依らない。

(B) 4-fermi couplingの "固定点" と相構造

4-fermi couplingのRG flow：

- $(A-B)$: IR unstable
- $(O-B)$: IR attractive
- 相境界 （カイラル対称性の破れ）
- Critical gauge coupling : $(\lambda \sim 1.03)$



Large N ladder 近似：

Ladder diagram はゲージparameterに依る。
Landau gauge $(\alpha = 0)$ の場合

$$\dot{g_S} = -2g_S + 2g_S^2 + g_S\lambda + \frac{1}{2}\lambda^2$$

"Fixed point" line:

$$g_S^*(\lambda) = (1 \pm \sqrt{1-\lambda})^2/4$$

$$\begin{cases} + : & (A-C)\cdots \quad \text{IR unstable} \\ - : & (O-C)\cdots \quad \text{IR attractive} \end{cases}$$

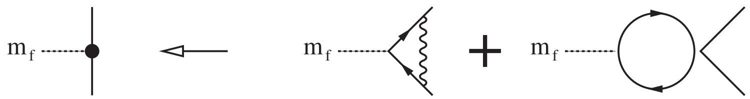
(C) 異常次元

“固定点” での異常次元：

1. mass parameter m の異常次元：

$$\dot{m} = (1+\gamma_m)m + O(m^3)$$

$$\gamma_m = 2g_S^*(\lambda) + \lambda/2$$

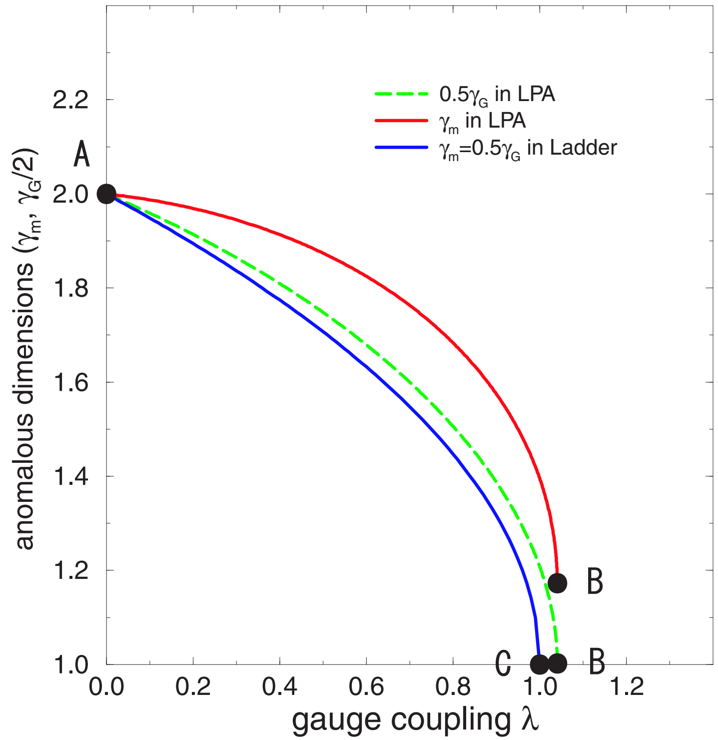


2. 4-fermi coupling G_S の異常次元：
   4-fermi coupling のベータ関数の微小解析

   large N ladder approximation

$$\gamma_G = 4g_S^*(\lambda) + \lambda = 2(1 \pm \sqrt{1-\lambda}) = 2\gamma_m$$

Note： Non-ladder diagram まで取り入れた解析では、$\gamma_m > \gamma_G/2$



	dim$[\bar{\psi}\psi]$	dim$[(\bar{\psi}\psi)^2]$
A	1	2
B	$\sim 1.8 < 2$	4
C	2	4

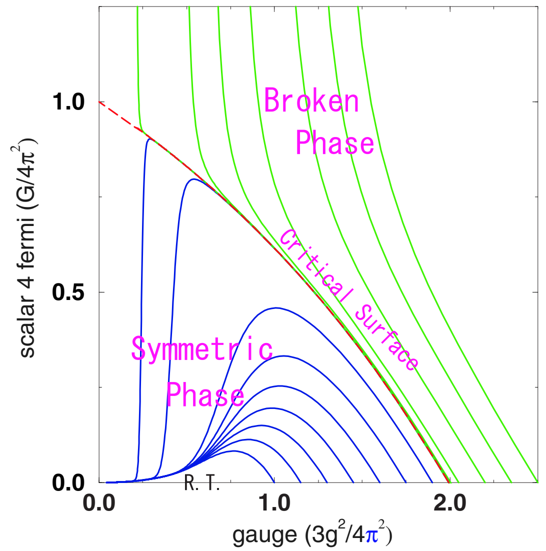
(D) Gauge couplingのrunning

Gauge couplingの扱い：

ゲージ対称性の問題 ⇒ 近似計算でも煩雑

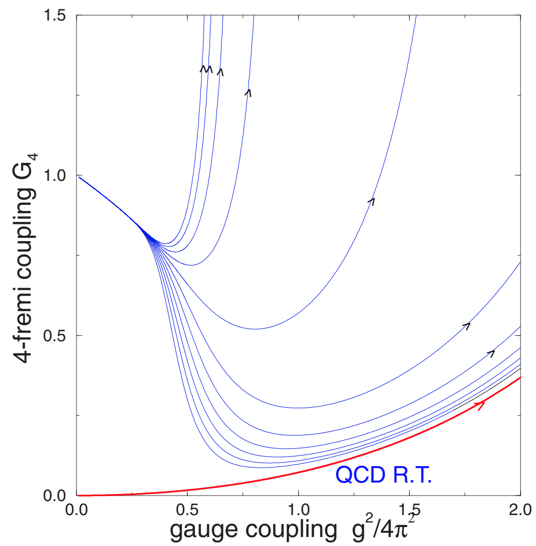
⇒ gauge couplingの補正の最低次（＝1 loop ベータ関数）でrunning の効果を取り入れる

1. QED like な理論
   カイラル対称性の相境界



2. QCD like な理論
   カイラル対称性の破れ

3. スケール不変な理論
   “Banks-Zaks fixed point” のgauge coupling の上限



ゲージ場の扱いが摂動的

⇒ 強結合領域での信頼性は？

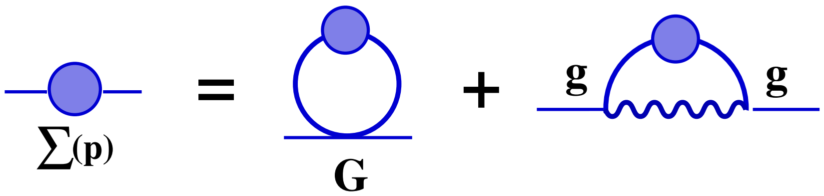
(E) Dyson-Schwinger 方程式

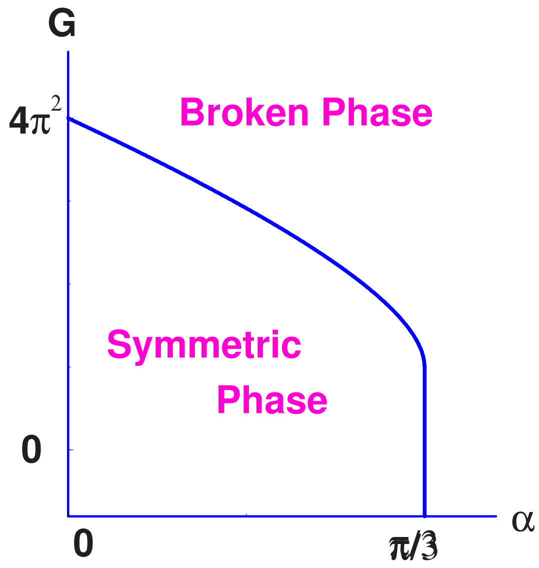
QED の electron propagator : $\Sigma(p)$: mass function

$$S_F^{-1}(p) = -i\not{p} + g^2 \int_{|k|<\Lambda_0} dk \;\; \gamma_\mu S_F(k) \Gamma_\nu(p,k) D_{\mu\nu}(p-k) = -i\not{p} + \Sigma(p)$$

Large N ladder 近似の Gap 方程式 : $(\alpha = g^2/4\pi^2)$

$$\Sigma(k) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[G + \frac{3\pi\alpha}{(k-p)^2} \right] \mathrm{tr} \left(\frac{1}{-i\not{p} + \Sigma(p)} \right)$$





結果 :

- 相境界、異常次元は Large N ladder part のくり込み群の結果と同じ。
- Large N ladder 近似では、ERG 方程式と DS 方程式の同等性が示される。

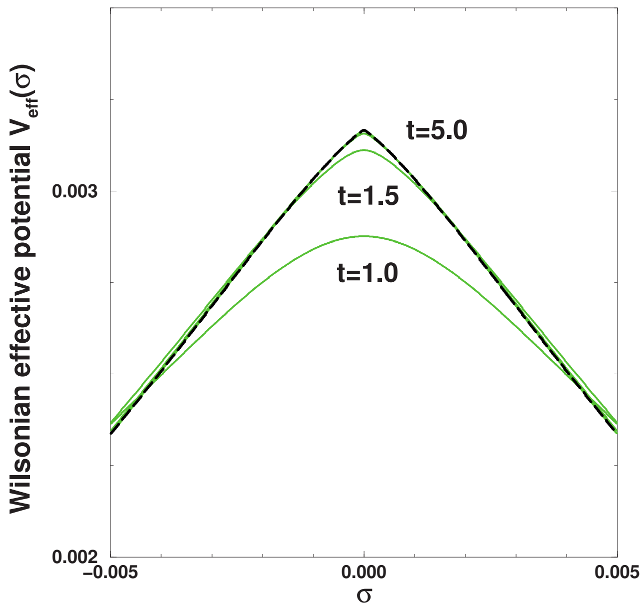
R.Fukuda, T.Kugo (1976)
K.-I.Kondo, et.al. (1989)
T.Appelquist, et.al. (1989)
K.Yamawaki, hep-ph/9603293

6. Wilsonくり込み群とdynamical mass

(A) Wilson有効作用の変化：

カイラル対称性の破れはどのように現れるのか？

- $G_4, G_8, \cdots$ のRG flowは2相の相境界を示す。
- これらのRG flow からは対称性の破れは分からず、しかもあるスケールで発散する。(フェルミオン場はカイラル対称性が破れのorder parameterではない。)
- Wilosnian有効作用はカイラル対称であり、フェルミオンの質量項は決して量子補正からは生じない。



有効ポテンシャルの非解析性 (Large N Gross-Neveu模型)：

$$m_{\text{eff}} = \lim_{t\to\infty} \left.\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \sigma}\right|_{\sigma=0} \neq 0 \qquad \text{in the broken phase}$$

(B) RG flow の "分岐" (特異性の種明かし) with J.Kato

Wilsonian有効ポテンシャルのくり込み群方程式:

$$\frac{dV_{\rm eff}}{dt} = 4V - 3\sigma V_{\rm eff}(\sigma) - \frac{1}{4\pi^2}\ln(1+V'_{\rm eff}(\sigma)^2)$$

$u(\sigma,t) \equiv V'_{\rm eff}(\sigma,t)$ ("有効質量") の方程式:

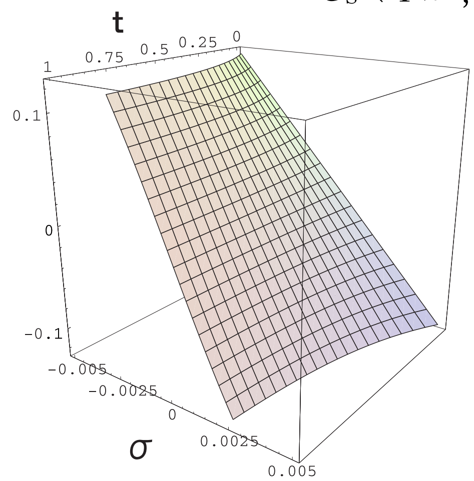
$$u_t + \left(3\sigma + \frac{1}{2\pi^2}\frac{u}{1+u^2}\right)u_\sigma = u, \quad u(\sigma, t=0) = -G\sigma$$

この方程式は$\sigma = \sigma(u)$として解くことができる。
(quasi linear equation)

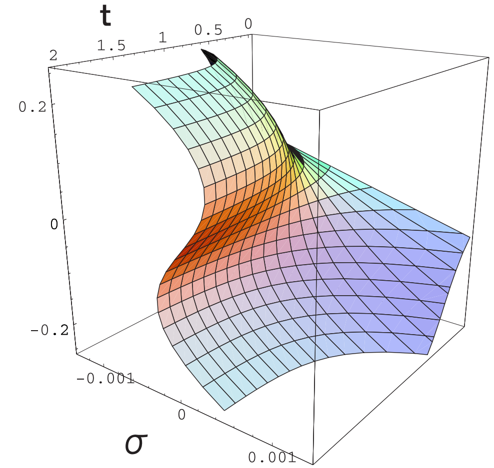
$$\frac{d\sigma}{dt} = 3\sigma + \frac{1}{2\pi^2}\frac{u}{1+u^2}, \qquad \frac{du}{dt} = u$$

$\Rightarrow$ 有効ポテンシャル$V_{\rm eff}(\sigma)$はある
スケールで2価になる。

Symmetric Phase $G_S < 4\pi^2,\ \alpha = 0$



Broken Phase $G_S > 4\pi^2, \alpha = 0$



7. 2日目のまとめとコメント

(A) 非摂動領域の異常次元

強結合領域では大きな異常次元のため豊かな相構造が生じる。

Naive dimensional analisis:

$$\text{Non-trivial fixed point} \quad \Rightarrow \quad \frac{Ng^2}{16\pi^2} \sim 1$$

(B) 素粒子物理との関わり

標準理論のパラメーターの問題：

- Naturalnessの問題(ヒッグス粒子の質量)

  $\Rightarrow$ What is the New physics at TeV scale? (超対称理論では μ 問題)
- クォーク・レプトンの質量階層性

  (超対称理論ではスクォーク・スレプトンの質量構造)
- Strong CP 問題（θ 真空）
- 宇宙定数

小さいパラメーターの説明として対称性の破れを通常考える。
(neutrino mass, quark/lepton mass, etc)

$\Rightarrow$ **何らかの強い相互作用による大きな異常次元に起因する可能性**

参考文献

- 夏の学校講義録
  「Wilson 流のくり込み群」大川正典.
  「テクニカラー理論とその周辺」山脇幸一(1991).
  「非摂動論的くり込み群」青木健一(1996).
- 教科書
  J.Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Oxford University Press (1989).
  N. Goldenfeld, *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group*, Addison–Wesley (1992).
- Reviews, Lecture Note
  K.G. Wilson and J.B. Kogut, Phys. Rep. **12** (1974) 75.
  E. Brezin, *Applications of the Renormalization Group to Critical Phenomena*, in Methods in field theory, North–Holland (1976).
  S.Weinberg, *Critical Phenomena for Field Theories*, in Proc. of the International Subnuclear Physics, Plenum Press (1978).
  J. Polichinski, hep-th/9210046, TASI Lecture note (1992).
  D. B. Kaplan, Lecture note (1995).

- 参考論文

F. Wegner and A. Houghton, Phys. Rev. **A8** (1973) 401.
J. Polchinski, Nucl. Phys. **B231** (1984) 269.
A. Hazenfratz and P. Hazenfratz, Nucl. Phys. **B270** (1986) 269.
T.E. Clark, B. Haeri and S.T. Love, Nucl. Phys. **B402** (1993) 628.
C. Wetterich, Phys. Lett. **B301** (1993) 90.
T. R. Morris, Phys. Lett, **B334** (1994) 355; Int. J. Mod. Phys, **A9** (1994) 2411.
K-I. Aoki et.al. Prog. Theor. Phys. **97** (1997) 479; Prog. Theor. Phys. **99** (1998) 451; Prog. Theor. Phys. **102** (1999) 1151; Phys. Rev. **D61** (2000) 045008; Prog. Theor. Phys. **103** (2000) 815.
K-I. Kubota and H. Terao, Prog. Theor. Phys. **102** (1999) 1163; Prog. Theor. Phys. **105** (2001) 809.
H. Terao, Int. J. Mod. Phys. **A16** (2001) 1913.