

修士論文  
AdS/CFT 対応における Entanglement Entropy と  
Entanglement of Purification<sup>\*1</sup>

梅本滉嗣<sup>\*2</sup>

2018 年 6 月 8 日

<sup>\*1</sup> 2018 年 1 月に京都大学に提出した修士論文の修正版。

<sup>\*2</sup> 基礎物理学研究所 e-mail: [koji.umemoto\\_at\\_yukawa.kyoto-u.ac.jp](mailto:koji.umemoto_at_yukawa.kyoto-u.ac.jp)

## 概要

量子重力理論を定式化する試みの一つとして、ホログラフィー原理の研究が盛んに行われている。これの最もよく知られた実現例である AdS/CFT 対応は、 $d + 1$  次元 Anti de Sitter (AdS) 時空上の量子重力理論と、あるクラスの  $d$  次元共形場理論 (holographic CFTs) が、見かけの異なる同一の理論であることを予想する。AdS/CFT 対応は数多の証拠を持つ一方、過去に行われた導出は発見的な方法に依っており、その双対性が成立するメカニズムについては現在解明が進められている。

AdS/CFT 対応における近年の研究では、量子情報理論との融合によるアプローチが注目を集めている。その嚆矢となった Ryu-Takayanagi 公式は、共形場理論におけるエンタングルメントエントロピーを、AdS 時空中のある超曲面の最小面積として計算できることを主張する。これによって場の理論で計算することが困難なエンタングルメントエントロピーを、重力理論の幾何学量として求めることが可能となる。本論文の前半では、AdS/CFT 対応と Ryu-Takayanagi 公式に関する基本的な事項を紹介した後、[1] において与えた Lorentz boost を受けた系に関するエンタングルメントエントロピーおよび相互情報量の分析について論じる。

また AdS/CFT 対応をよりミクロな視点で捉えたものとして、時空全域の双対性ではなく部分的な時空領域に関する双対性は subregion/subregion duality と呼ばれている。本論文の後半では、AdS 時空の部分領域に entanglement wedge を採用する subregion/subregion duality の基礎付けについて解説した後、[2] において提案した entanglement wedge の最小断面積と entanglement of purification と呼ばれる情報量の双対性に関して論じる。

# 目次

第 1 章	導入	1
第 2 章	ホログラフィー原理と AdS/CFT 対応	8
2.1	ブラックホールエントロピー	8
2.2	Anti de Sitter 時空	10
2.3	共形場理論	15
2.3.1	$d$ 次元共形場理論	15
2.3.2	2次元共形場理論	23
2.4	AdS/CFT 対応	28
2.4.1	AdS <sub>5</sub> /CFT <sub>4</sub> model	28
2.4.2	AdS/CFT's Dictionary	33
第 3 章	量子情報理論	38
3.1	純粋状態と混合状態	38
3.2	Entangled states と Separable states	40
3.3	各種の情報量	42
3.3.1	von Neumann エントロピー	42
3.3.2	エンタングルメントエントロピー	43
3.3.3	相互情報量	46
3.3.4	量子相対エントロピー	47
第 4 章	AdS/CFT 対応とエンタングルメントエントロピー	51
4.1	場の理論におけるエンタングルメントエントロピー	52
4.1.1	2次元共形場理論のエンタングルメントエントロピー	59

4.2	Ryu-Takayanagi 公式 . . . . .	64
4.2.1	ホログラフィックエンタングルメントエントロピーの例 . . . . .	65
4.2.2	ホログラフィックエンタングルメントエントロピーの性質 . . . . .	67
4.3	Ryu-Takayanagi 公式の証明 . . . . .	73
4.4	Ryu-Takayanagi 公式の量子補正 . . . . .	80
4.5	Ryu-Takayanagi 公式の一般化 . . . . .	85
第 5 章	Lorentz boost された部分系のホログラフィックエンタングルメントエントロピー	87
5.1	In holographic CFTs . . . . .	88
5.1.1	AdS <sub>3</sub> /CFT <sub>2</sub> の場合 . . . . .	89
5.1.2	AdS <sub>d+1</sub> /CFT <sub>d</sub> の場合 . . . . .	94
5.2	In Lifshitz theories . . . . .	98
第 6 章	Subregion/Subregion duality	103
6.1	相対エントロピーとバルク相対エントロピー . . . . .	103
6.1.1	場の理論における modular Hamiltonian . . . . .	105
6.1.2	modular Hamiltonian の具体例 . . . . .	105
6.1.3	modular Hamiltonian の双対性 . . . . .	107
6.1.4	量子相対エントロピーの双対性 . . . . .	109
6.2	Entanglement wedge と Bulk reconstruction . . . . .	112
6.2.1	Entanglement wedge . . . . .	112
6.2.2	Bulk reconstruction . . . . .	115
6.3	量子誤り訂正符号とバルク再構成定理 . . . . .	118
6.3.1	量子誤り訂正符号 . . . . .	120
6.3.2	Bulk Reconstruction Theorem . . . . .	123
第 7 章	Holographic Entanglement of Purification	127
7.1	Entanglement wedge cross section . . . . .	129
7.1.1	Entanglement wedge cross section の定義 . . . . .	129
7.1.2	Entanglement wedge cross section の性質 . . . . .	132
7.1.3	Entanglement wedge cross section の例 . . . . .	136
7.2	Entanglement of purification . . . . .	141

---

7.2.1	Purification . . . . .	141
7.2.2	Entanglement of purification の定義 . . . . .	142
7.2.3	Entanglement of purification の性質 . . . . .	144
7.2.4	Entanglement of purification の例 . . . . .	147
7.3	Proposal . . . . .	149
7.3.1	Heuristic な証明 . . . . .	149
7.4	Strong superadditivity と holographic CFTs の関連 . . . . .	151
第 8 章	まとめと今後の展望	154
第 9 章	付録	158
9.1	Schwarzschild ブラックホールエントロピーの導出 . . . . .	159
9.2	量子情報理論に関する補題 . . . . .	162
9.2.1	相互情報量による共分散の上限 . . . . .	162
9.2.2	バルク再構成定理の証明に用いる補題 . . . . .	165
9.2.3	Conditional entropy の joint subadditivity . . . . .	168
9.3	エンタングルメント測度 . . . . .	169
9.3.1	エンタングルメント測度の一般論 . . . . .	169
9.3.2	Distillable entanglement . . . . .	172
9.3.3	Entanglement cost . . . . .	172
9.3.4	Entanglement of formation . . . . .	173
9.3.5	Relative entropy of entanglement . . . . .	173
9.3.6	Squashed entanglement . . . . .	174
9.3.7	Remarks . . . . .	175

# 第 1 章

## 導入

### ブラックホールエントロピーから見る量子重力理論とホログラフィー原理

現代の素粒子理論において、重力の量子化を理解することは最重要課題の一つである。自然界に存在する 4 つの相互作用のうち、重力を除いた他の 3 つの相互作用は既に標準模型として場の理論を用いて定式化されている。しかし重力相互作用は繰り込み不可能であるため、これらと同様の方法で量子化を行うと高エネルギー領域において予言能力が失われる。従って、量子重力理論の完全なる理解には、これまでになく新しい定式化が必要となる。

量子重力理論を構築する際に、道標の一つとなるのが Bekenstein-Hawking らによって見出されたブラックホールのエントロピー公式である [3, 4]。古典的な重力理論である一般相対性理論の議論によって、ブラックホール時空解は熱力学と同等の性質を満たし、特に事象の地平面の表面積に比例したエントロピーを持つことが知られている。この公式はブラックホールを背景時空とした場の理論の量子化を考えることで得られ、エントロピーの表式にプランク定数を含むため、重力の量子性に深い繋がりがあると考えられている。量子重力理論が完成した暁には、このエントロピーを生じさせている自由度の起源を説明せしめねばならない。

現在までに提唱されている量子重力理論のうち、その有力な候補と見なされているのが超弦理論である。これは全ての素粒子を極小の閉弦と開弦の異なる振動モードとして表す理論である。無矛盾な超弦理論には I 型、IIA 型、IIB 型、Heterotic  $SO(32)$ 、Heterotic  $E_8 \times E_8$  の 5 つの種類があるが、それらの全てが閉弦の励起状態として重力子を含んでいる。また量子アノマリーに関する無矛盾性の要請からは、量子重力の理論として期待されるように、Einstein 重力を含んだ低エネルギー有効理論が導かれる。さらに超弦理論のソリトンである D ブレーンの解析によって、あるクラスのブラックホールに関しては実際にエントロピー公式を再現することが確かめられている。このように

量子重力理論の候補として有望な超弦理論であるが、超弦理論による定式化で扱える量子重力の解析は、現在までのところ平坦時空中における摂動的な振る舞いに留まっている。従って、これを解決する量子重力理論の非摂動的な定式化が求められている。

ブラックホールエントロピーが事象の地平面の面積に比例する事実からは、量子重力理論ではある時空領域に含まれる量子的な自由度は実際は見掛けよりも 1 次元低いことが推察される。これは一般にホログラフィー原理 (holographic principle) と呼ばれている [5, 6]。ホログラフィー原理に従えば、量子重力理論を従来の重力を含まない場の理論による方法を援用して非摂動的に記述する可能性が拓かれる。ホログラフィー原理の具体的なモデルは、D ブレーンが存在する時空中の超弦理論の低エネルギー極限を異なる 2 つの見方で考察することによって最初に与えられた [7]。これは  $d + 1$  次元 Anti de Sitter 時空中の IIB 型超弦理論が、その境界上に住む  $d$  次元時空中の共形場理論 (conformal field theory, CFT) と見掛け上は異なるが同じ対象を記述する理論であることを主張する。この双対性は AdS/CFT 対応と呼ばれている。実際に、この予想は AdS 時空と共形場理論のそれぞれの独立な計算結果の一致に基づいた数多の実証を持っている。すなわち、一方の理論に現れる対象には、他方の理論においてその双対となる何らかの対象が常に存在し、これは同じものを異なる言語で記述しているに過ぎないことを意味する。その後も複数のモデルが発見され、現在では AdS/CFT はホログラフィー原理の一つの実現を与える一般論として受け入れられている。

しかしその一方で、AdS/CFT 対応の双対性は D/M-ブレーンを用いた発見的な方法によって導出されてきたため、「AdS/CFT 対応は、如何なる機構で成り立っているのか?」、「ホログラフィー原理の適用範囲はどの程度まで広いのか?」といった根本的な問いは発見から 20 年以上経った現在も未知のままである。この双対性を成り立たせている機構を完全に明らかにすることは、ホログラフィー原理に基づいて一般的な時空中の量子重力理論を定式化する第一歩になると期待される。

## AdS/CFT 対応と量子情報理論の結びつき

ホログラフィー原理の提唱がブラックホールのエントロピー公式を端緒としたように、量子重力理論と情報理論には深い繋がりがあると考えられている。これを反映するように、近年の AdS/CFT 対応における研究では、量子情報理論の知見が頻繁に活用されている。量子情報理論とは、古典情報理論が 0 か 1 かの 2 値状態 (bit) を情報の基礎単位として扱うように、量子的な 2 準位系の量子状態 (qubit) を基本的な情報の単位として扱う情報理論である。そこでは古典的な情報理論に現れた Shannon エントロピーなどの情報量や情報論的なプロトコルの量子版が導入され、古典系には無い新規な側面が数多く現れる。量子情報理論の対象となる範囲は、量子的な相関の定量化、量子状態の

相による分類、量子状態の空間の距離付け、一般的な物理過程における量子状態の変化の記述、量子暗号通信や量子誤り訂正符号化、量子テレポーテーションなど具体的なプロトコルの開発など多岐に渡っている。これらは AdS/CFT 対応を解析する上で、ホログラフィー原理に現れる量子状態の分析を行うための強力な道具となる。

本論文は、このような量子情報理論に基づいた AdS/CFT 対応の解析という観点を主軸に置いている。

量子情報理論と AdS/CFT 対応の本格的な結びつきは、Ryu-Takayanagi らによるホログラフィックエンタングルメントエントロピー公式の発見に始まった [8, 9]。エンタングルメントエントロピーとは、2つの量子系の間にある非局所的な量子相関（量子もつれ）を定量化する情報量の一つである。この公式は、AdS 時空中の重力理論を超弦理論の効果を無視した古典的な理論と見做せる極限において、共形場理論上で定義されるエンタングルメントエントロピーの大きさが、AdS 時空のある種の曲面の最小面積に等しいことを述べている。これは共形場理論上の量子状態における量子もつれの構造に、AdS 時空の幾何学の情報反映されていると読み替えることができる。この重力理論において定義されたエンタングルメントエントロピーの双対となる幾何学量を、ホログラフィックエンタングルメントエントロピーと呼ぶ。この公式に刺激される形で、「時空は量子もつれを基礎単位として構成されている」[10, 11] という発想の下、そこから tensor network によって AdS/CFT 対応を記述する方法 [12, 13, 14, 15, 16] や、時空の量子もつれによるワームホールの生成 [17] など、AdS/CFT 対応を構成的に理解する様々な方法が検討されている。この公式は後に、AdS/CFT 対応が成り立つという仮定の下で証明が与えられた [18, 19]。近年では、AdS 時空上に超弦理論から現れる効果を取り入れた場合や、量子的な補正効果を考慮した場合に関する Ryu-Takayanagi 公式の拡張が議論されている [20, 21, 22, 23, 24]。

ホログラフィックエンタングルメントエントロピーの公式からは、AdS/CFT 対応に関する様々な結論が得られる。例えば、共形場理論の量子状態を摂動したときのエンタングルメントエントロピーの変化を、ホログラフィックエンタングルメントエントロピー公式を通して AdS 時空中の計量の変化と読み替えると、これは AdS 時空における線形アインシュタイン方程式を与える [25, 26, 27]。また AdS ブラックホール時空に関しては、ホログラフィックエンタングルメントエントロピー公式はブラックホールエントロピーの公式を再現する。これによって AdS ブラックホールのエントロピーを、境界上の共形場理論が含む量子相関として理解する視点が与えられた。さらに重力理論において幾何学的に定義されているホログラフィックエンタングルメントエントロピーは、エンタングルメントエントロピーが一般の量子系では満たさない特殊な性質を満たすことが分かっている [28, 29]。こ



これらの性質は、古典的な時空と双対になる共形場理論上の量子状態に対して情報論的な特徴付けを与えている。

さらに近年では、エンタングルメントエントロピーのみならず、量子情報理論で用いられる相互情報量、量子相対エントロピー、Rényi エントロピー、Complexity、Fisher 計量、Holevo 情報量などの各種の情報量に関する重力双対が調べられている。また量子誤り訂正符号や量子テレポーテーションなど、情報論的なプロトコルと AdS/CFT 対応の関連性も議論されている。これらはその情報論的な性質を通して、AdS/CFT 対応が如何なるメカニズムで成り立っているか、そこに現れる量子状態の特徴は何かといった問いへの手掛かりを与える。

## Lorentz boost を受けた系の情報量

ホログラフィックエンタングルメントエントロピーの公式は、場の理論においてエンタングルメントエントロピーの計算を実行するのが難しいような状況でも、これを得るための新しい方法を与える。例えば場の理論において、相互情報量を計算する際などに必要な複数の非連結な成分からなる部分系のエンタングルメントエントロピーを求めるには、一般に複雑な多様体上の分配関数が必要になる。ところが、場の理論として holographic CFTs を考え、ホログラフィックエンタングルメントエントロピーの公式を用いると、これは単に AdS 時空上のいくつかの最小曲面の面積の和として与えられることが分かる。

本論文の第5章では、同様の事情が生じる状況として、holographic CFTs の Lorentz boost を受けた部分系に対するエンタングルメントエントロピーをホログラフィックエンタングルメントエントロピー公式を用いて導出する。またこの結果を応用することで、一方の部分系が Lorentz boost を受けた系の相互情報量について議論する。相互情報量とは、2つの量子系の間にある総相関を定量化する情報量の一つであり、エンタングルメントエントロピーの線形結合によって定義されているため、ホログラフィックエンタングルメントエントロピー公式から直接的に求めることができる。そしてその解析の結果、2つの部分系の位置関係が light-like に近づく極限において、相互情報量が対象となる量子状態に依存しない普遍的な形で発散することを示す。

また AdS/CFT 対応の拡張の一つとして、Lifshitz holography と呼ばれる非相対論的なスケール対称性を持った理論に関するホログラフィー原理が提案されている [30]。これは AdS/CFT 対応の 1 パラメータ拡張になっており、ホログラフィー原理が適用可能な範囲を探る上で興味深いモデルと見なされている。この双対性の重力側に現れる Lifshitz 時空は、時間一定面について考えている限り AdS 空間と同一となるため、AdS/CFT 対応における議論がそのまま成り立つ。一方、時間方向が

重要となる議論を適用した場合、AdS/CFT 対応とは異なる種類の振る舞いを示すことが知られている [31]。そこで我々は Lifshitz holography において、AdS/CFT 対応の場合と同様に、時間一定面上にはない量子系のホログラフィックエンタングルメントエントロピーの導出を行う。その結果から Lifshitz holography では、AdS/CFT 対応と異なり、ホログラフィックエンタングルメントエントロピーを定義可能な境界時空上の領域に、場の理論の局所性に関係した制限が入ることを示す。

## Subregion/Subregion duality と Entanglement wedge

AdS/CFT 対応は、通常は AdS 時空の全領域と共形場理論の全領域に関する双対性を考える。この双対性をよりミクロな視点から見れば、共形場理論のある部分系の情報（量子状態や演算子）が、重力側のある部分領域の情報と双対であることが期待できる。このような AdS 時空と共形場理論それぞれの部分領域に関する双対性は subregion/subregion duality と呼ばれている [32, 33, 34, 35, 36, 37]。そして近年では、entanglement wedge と呼ばれる AdS 時空の部分領域が共形場理論の部分領域に対応すると考えられている。Entanglement wedge は、ホログラフィックエンタングルメントエントロピーを求める際に現れる最小曲面と AdS 時空の境界によって囲まれた領域である。この双対性を支持する根拠の一つとして、AdS 時空側と共形場理論側の相対エントロピーの双対性が挙げられる [38]。相対エントロピーとは、与えられた 2 つの量子状態の間に距離のようなものを定量化する情報量である。この情報量は、与えられた 2 つの量子状態が等しいとき、またそのときに限ってゼロになるという性質を持つ。AdS/CFT 対応の文脈では、ホログラフィックエンタングルメントエントロピーの量子補正の結果に基づいて、共形場理論側における部分系上の量子状態に対する相対エントロピーと、AdS 時空側の entanglement wedge 上の量子状態に対する相対エントロピーが等しいことが示された。これはつまり、共形場理論の部分系上の相対エントロピーを用いることで、AdS 時空の entanglement wedge 上の 2 つの量子状態が同じかどうかを常に識別可能であることを意味する。従って、それぞれの部分領域上の量子状態の空間は、量子状態を完全に識別できるような同じ情報を持っていることが示唆される。

これとは異なる方向性の根拠として、AdS 時空上の局所演算子に関するバルク再構成定理が挙げられる [39, 40, 41]。一般に AdS 時空上の局所演算子を共形場理論上の演算子によって表現する試みは “bulk reconstruction” と呼ばれており、これは HKLL reconstruction と呼ばれる方法が最初の具体的な手段を与えた。その方法によれば、AdS 時空上の局所演算子は、共形場理論のある部分領域上の演算子を “smear” したものとして表現できる [42, 43]。HKLL による方法は、共形場理論のある部分領域に対して、causal wedge と呼ばれる entanglement wedge よりも一般には狭い領域上の

局所演算子しか復元できなかった。しかし最近になって、量子誤り訂正符号における議論を援用することで、entanglement wedge 上の任意の局所演算子は共形場理論の部分系上の演算子によって再構成できるという定理の証明が与えられた。これは 2 つの部分領域上の演算子の代数が等価であることを支持している。

## AdS/CFT 対応と Entanglement of Purification

先述したように、エンタングルメントエントロピーは 2 つの量子系の間にある量子相関の大きさを定量化する情報量である。しかし、これが相関を測る情報量として機能するのは、2 つの量子系を合わせた全体系が純粋状態である場合に限られる。そこで混合状態における相関の測度として、エンタングルメントエントロピーの拡張と見做せる情報量が量子情報理論において数多く提案されている [44, 45]。しかし、AdS/CFT 対応の文脈においては、これらの情報量の非自明な双対性は明らかにされていない。一方で、先述したように、AdS 時空の entanglement wedge は共形場理論における部分領域の双対になっているのであるから、共形場理論側における 2 つの量子系の間にある相関の情報も、entanglement wedge の幾何学的性質に反映されていると考えられる。この観察からは、entanglement wedge に内在する何らかの幾何学的な量によって、ホログラフィックエンタングルメントエントロピー公式の混合状態の相関測度に対する拡張が得られることが期待できる。

本論文の第 7 章では、AdS 時空側における entanglement wedge のある種の最小断面積と、共形場理論側における entanglement of purification と呼ばれる量子情報理論の相関測度が双対関係にあることを提案する。この関係式は、量子状態に含まれる相関と時空の幾何学の関係性に新たな理解を与える。これを支持する根拠として、これらの量が数多くの同じ情報論的な性質を満たすことを証明する。また将来的な課題である直接的な証明の糸口として、AdS/CFT 対応の tensor network による描像を用いた、この予想の発見的な証明を与える。さらにこの双対性からの帰結として、holographic CFTs に含まれる量子状態は、strong superadditivity と呼ばれる性質によって特徴付けられる特殊なクラスであることを示す。

### 本論文の構成

本論文の構成は以下の通りである。第二章では、ブラックホールエントロピーから AdS/CFT 対応までの基本的となる背景についての解説を与える。第三章では、量子情報理論における基礎知識と、エンタングルメントエントロピーや相対エントロピーなどの情報量の性質について説明する。第四章では、場の理論におけるエンタングルメントエントロピーの計算方法であるレプリカ法を導入し

た後、Ryu-Takayanagi らによるホログラフィックエンタングルメントエントロピーの公式について述べる。さらにここで Ryu-Takayanagi 公式の証明と、そこから導かれるホログラフィックエンタングルメントエントロピーの量子補正について詳しく解説する。第五章では、Ryu-Takayanagi 公式の拡張である Hubeny-Rangamani-Takayanagi 公式を用いて、holographic CFTs において Lorentz boost された量子系に対するエンタングルメントエントロピーと、そこから導かれる相互情報量の振る舞いについて議論する。また同様の解析を Lifshitz holography に関して適用して、その結果について考察する。第六章では、entanglement wedge を用いた subregion/subregion duality について述べる。ここではその双対性の根拠として、AdS/CFT 対応における相対エントロピーの双対性と、AdS 時空上の局所演算子の量子誤り訂正符号に基づくバルク再構成定理について詳細にレビューする。第七章では、entanglement wedge の最小断面積を定義して、その幾何学的な性質について詳しく調べる。この結果に基づいて、entanglement wedge の最小断面積が entanglement of purification と双対であるという予想を与え、その発見的な証明と帰結について考察する。第八章では、まとめと今後の展望を議論する。

尚、第 5 章および第 7 章の内容は、それぞれ著者らの研究結果 [1, 2] に基づいている。

## 第 2 章

# ホログラフィー原理と AdS/CFT 対応

ホログラフィー原理 [5, 6] とは、 $d + 1$  次元時空のある領域上の量子重力理論は、その領域の  $d$  次元境界上に定義された重力を含まない量子論（場の理論）を用いて記述できる、という一般的な予想である。これは量子重力理論を非摂動的に定式化する方法の一つとして期待されている。

AdS/CFT 対応 (AdS/CFT correspondence) は、漸近 AdS 時空と呼ばれるクラスの時空上の量子重力理論に関して、ホログラフィー原理の実現例を与える。歴史的には、ホログラフィー原理が提唱された後に、超弦理論における研究の中で Anti de Sitter 背景時空上の超弦理論とその境界上の共形場理論の双対性が発見された [7]。その後も AdS/CFT 対応を実証する数々のモデルが超弦理論における D/M ブレーンを用いた議論から発見されている。

本章では、まずホログラフィー原理の発端となったブラックホールのエントロピーについて簡単に触れる。これは古典的な重力理論である一般相対性理論に量子効果を取り入れることから導出されており、その式中にプランク定数を含むため、量子重力理論と深い繋がりを持つことが予想される。次に AdS 時空と共形場理論の基礎事項について簡単にレビューした後、AdS/CFT 対応の一般的な原理について述べる。

### 2.1 ブラックホールエントロピー

まずは量子重力理論の先駆的な研究結果として、ブラックホールがエントロピーを持つことの発見 (Bekenstein-Hawking formula) [3, 4] について説明する。

一般相対性理論におけるブラックホール時空は、漸近平坦性や時空の対称性などのいくつかの条件を課すと、ブラックホール唯一性定理によって質量  $M$  や電荷  $Q$ 、角運動量  $J$  といった少数のパラメータによって完全に特徴付けることができる。このことは、熱力学における平衡状態がいくつかの

巨視的パラメータによって特徴付けられることのアナロジーと見なせる。実際、古典的なブラックホールについても熱力学に類似した基本法則が成り立つ。例えば熱力学の第一法則に対応して、定常ブラックホールから新しい定常ブラックホールへの摂動的な変化を考えることで

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi G_N} d\mathcal{A}_h, \quad (2.1.1)$$

が成り立つ（簡単のため  $Q = J = 0$  と置いた）。ここで  $G_N$  は Newton 定数、 $\kappa = 1/4G_N M$  は表面重力、 $\mathcal{A}_h$  は事象の地平面 (event horizon) の表面積である。また熱力学の第二法則に類似して、適当なエネルギー条件を満たす時空では、ブラックホールの表面積  $A$  が時間発展に伴って常に増大則することが言える。

$$\delta\mathcal{A}_h \geq 0. \quad (2.1.2)$$

これらの事実から、ブラックホールは熱力学的な性質を持っており、そのエントロピーは表面積  $\mathcal{A}_h$  に比例すると推測できる。

実際に、ブラックホール時空上の場の理論を量子効果（地平面付近における粒子の対生成）を取り入れて解析することによって、ブラックホールが温度を持った黒体として熱輻射を行うことが Hawking によって示された [4]。この解析では、ブラックホールは古典的な背景時空として固定されており、その上の量子化された場が熱輻射の担い手となる。これを Hawking 輻射 (Hawking radiation) と呼ぶ。ブラックホールの温度 (Hawking temperature) は、Euclid 化したブラックホール時空においてホライゾン付近に conical singularity が生じない条件を課すことから比較的容易に導出できる。例えば  $Q = J = 0$  の状況に相当する Schwarzschild ブラックホールの場合、4次元の計量は

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_2^2, \quad f(r) = 1 - \frac{2G_N M}{r}, \quad (2.1.3)$$

と書ける。このとき動径方向の座標を事象の地平面周りで  $r \sim 2G_N M \left(1 + \left(\frac{\lambda}{4G_N M}\right)^2\right)$  と展開して、場の理論において熱状態を扱うときと同様に  $t = i\tau$  と虚時間化すると、地平面近傍の計量は

$$ds^2 \sim d\lambda^2 + \lambda^2 \left(\frac{d\tau}{4G_N M}\right)^2 + 4G_N^2 M^2 d\Omega_2^2, \quad (2.1.4)$$

と表せる。ここで Euclidean 時空において  $\lambda$  を動径方向、 $\tau/4G_N M$  を角度方向と見做したときに、時空に円錐特異性 (conical singularity) が無いという条件<sup>\*1</sup> から角度の周期性が  $\tau \simeq \tau + 8\pi G_N M$  と決まる。ここから逆温度を  $\beta_H \hbar = 8\pi G_N M$  と読み取ることができる。この結果、この系の

<sup>\*1</sup> この導出において、Euclid 化した時空が conical singularity を含まないという要請は Euclidean 経路積分に対する

Hawking 温度は

$$T_H = \frac{\hbar\kappa}{2\pi} = \frac{\hbar}{16\pi G_N M}, \quad (2.1.6)$$

と決まる。ここで量子的な効果を明示するために  $\hbar$  をあらわに書いた。この方法ではブラックホール周りの場を導入せず温度を求めることができた点に注意しておく\*2。

ブラックホールの温度が決まったことで、エントロピーの係数も  $dE = TdS$  の関係から次のように確定する。

$$S_{BH} = \frac{\mathcal{A}_h}{4\hbar G_N}. \quad (2.1.7)$$

これがブラックホールエントロピーの公式である。通常の熱力学のエントロピーは系の体積に比例する示量変数であるが、重力理論におけるエントロピーはブラックホールの体積ではなく地平面の面積に比例している。これは量子重力理論が持つ自由度の特性を示唆している。

ブラックホールエントロピーの面積比例による類推から、「量子重力理論は、見かけの次元より 1 次元低い領域の量子的な自由度によって記述される」というホログラフィー原理が 't Hooft [5] と Susskind [6] らによって提唱された。この双対性を利用すると、扱いが困難な重力の量子論を、通常の場合の理論など比較的扱いやすい手法を用いて表せる可能性がある。そのためホログラフィー原理は、量子重力理論を定式化するための有力な方法の一つと見做されている。

AdS/CFT 対応は、ある特定の時空上の量子重力理論について実際にホログラフィー原理が成り立つ具体的な状況を与える。以降の節ではこれについて順次解説する。

## 2.2 Anti de Sitter 時空

Anti de Sitter 時空は、一般相対性理論における負の宇宙定数を持った古典解である。 $d+1$  次元 AdS 時空を、計量を  $g_{MN} = \text{diag}(-, +, \dots, +, -)$  に持つ  $d+2$  次元時空

$$ds^2 = g_{MN} dX^M dX^N = -dX_0^2 + dX_1^2 + \dots + dX_d^2 - dX_{d+1}^2, \quad (2.2.1)$$

---

古典近似

$$Z(\beta) = \int Dg D\phi e^{-I_E[g_{\mu\nu}, \phi; \beta]} \sim e^{-I_E^{\text{cl}}}, \quad (2.1.5)$$

の重力解が Euclidean 重力理論のスムーズな古典解 (saddle point) となる条件に由来する。ここで  $\phi$  は計量以外の物質場である。これに関連する議論は 4.3 章を参照。

\*2 より直接的に、重力理論の古典的な分配関数  $Z \sim e^{-I_E}$  と Hawking 温度を用いて通常の統計力学の公式  $S = (1 - \beta\partial_\beta) \log Z$  を用いることでもブラックホールエントロピーの公式を再現できる。Schwarzschild ブラックホールに関する例は付録 9.1 を参照。

における  $d+1$  次元の超曲面

$$X_M X^M := -X_0^2 + X_1^2 + \cdots + X_d^2 - X_{d+1}^2 = -R^2, \quad (2.2.2)$$

として定義する。ここで定数  $R \geq 0$  は時空の大きさを表す AdS 半径である。AdS 半径と宇宙定数との関係は

$$\Lambda = -\frac{d(d-1)}{2R^2}, \quad (2.2.3)$$

で与えられる<sup>\*3</sup>。定義から明らかなように、 $d+1$  次元 AdS 時空には  $SO(2, d)$  の対称性 (Killing symmetry) が存在する。

AdS 時空の全域を張る座標系として、global 座標系 (global coordinates) を次のように導入する。

$$\begin{aligned} X_0 &= R \cosh \rho \sin \tau, \\ X_i &= R \sinh \rho \Omega_i \quad (i = 1, \dots, d), \\ X_{d+1} &= R \cosh \rho \cos \tau. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

ここでパラメータ  $(\rho, \tau, \Omega_1, \dots, \Omega_d)$  に関して  $d=1$  のとき  $\rho \in (-\infty, \infty)$ 、 $d>1$  のとき  $\rho \in [0, \infty)$  である。また  $\tau \in [0, 2\pi)$ 、 $\tau \simeq \tau + 2\pi$  であり、 $\Omega_i$  は  $d-1$  次元単位球面の座標である。計量は

$$ds^2 = R^2 (-\cosh^2 \rho d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_{d-1}^2), \quad (2.2.5)$$

と誘導される。ここで closed time-like circle を避けるために  $\tau$  方向を  $-\infty < \tau < \infty$  に拡張して取り扱うこととする。また次の座標変換

$$\tan \lambda = \sinh \rho, \quad (2.2.6)$$

を行うと計量は

$$ds^2 = \frac{R^2}{\cos^2 \lambda} (-d\tau^2 + d\lambda^2 + \sin^2 \lambda d\Omega_{d-1}^2), \quad (2.2.7)$$

と表せる。ここで  $d=1$  に対して  $\lambda \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 、 $d>1$  に対して  $\lambda \in [0, \frac{\pi}{2})$  である。 $d>1$  の場合の Penrose diagram は図 2.2.1 の左図のようになる。図の Solid cylinder の各点は  $S^{d-2}$  を表している。この時空は無限遠方  $\rho = \infty$  に time-like な境界  $\mathcal{B}_d = \mathbb{R} \times S^{d-1}$  を持つことが分かる。

<sup>\*3</sup> 2 次元重力理論では Einstein-Hilbert 作用がトポロジカル不変量 (オイラー数) によって表されるため、任意の解に対して真空の運動方程式が自動的に満たされる。このことは 2 次元の Riemann tensor が Ricci scalar  $R$  を用いて常に  $R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{R}{2}(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha})$  と書ける ( $R = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}R_{\mu\nu\alpha\beta} = 2(\det g)R_{1212}$  に注意) ことから確かめられる。



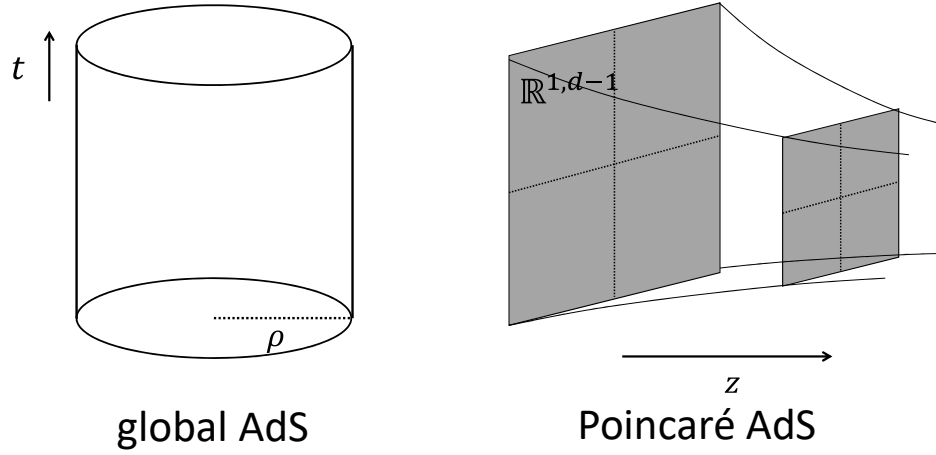


図 2.2.1 Anti de Sitter 時空の 2 つの座標系。

$d + 1$  次元 AdS 時空に Poincaré 座標系 (Poincaré coordinates) を次のように導入する。

$$\begin{aligned}
 X_\mu &= \frac{R}{z} x_\mu \quad (\mu = 0, 1, \dots, d-1), \\
 X_d &= \frac{R^2}{2z} \left( -1 + \frac{x_\mu x^\mu + z^2}{R^2} \right), \\
 X_{d+1} &= \frac{R^2}{2z} \left( 1 + \frac{x_\mu x^\mu + z^2}{R^2} \right).
 \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

ここでパラメータ  $(z, x_0, \dots, x_{d-1})$  は  $z \geq 0$  であり、 $x_\mu$  は  $d$  次元 Minkowski 時空  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, \dots, +)$ ,  $\mu, \nu \in \{0, 1, \dots, d-1\}$  の座標系である。計量は超曲面上に

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2} (dz^2 + dx_\mu dx^\mu), \tag{2.2.9}$$

と誘導される。すなわち、 $d + 1$  次元 Poincaré AdS 時空は、 $d$  次元 Minkowski 時空を  $z$  方向に向かってスケール変換して繋ぎ合わせたものである (図 2.2.1)。無限遠方の境界は  $z = 0$  にあり、境界面の形は  $\mathcal{B}_d = \mathbb{R}^{1,d-1}$  である。

Poincaré 座標系は、AdS 時空を表す超曲面の全域ではなく半分の領域のみを覆っている。このこ

とは、常に

$$X_{d+1} - X_d = \frac{R^2}{z} \geq 0, \quad (2.2.10)$$

が成り立つことから確かめられる。Poincaré 座標系と global 座標系との関係は

$$\begin{aligned} \frac{t}{z} &= \cosh \rho \sin \tau, \\ \frac{x_i}{z} &= \sinh \rho \Omega_i \quad (i = 1, \dots, d-1), \\ \frac{R}{z} &= \cosh \rho \cos \tau - \sinh \rho \cos \theta_d, \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

と表せる。特に境界  $\rho = \infty$  において、Poincaré AdS は  $|\tau| \leq |\theta_d|$ ,  $\theta_d \in [-\pi, \pi]$  を満たす diamond 型の領域を覆っている (Poincaré patch)。後の便宜のため、3次元 pure AdS 時空の時間一定面上の2点間を結ぶ測地線の長さ  $\sigma(p_1, p_2)$  を求めておくと、それぞれの座標系で

$$\sigma(p_1, p_2) = R \cosh^{-1} \left( \frac{-X_1 \cdot X_2}{R^2} \right) \quad (2.2.12)$$

$$= R \cosh^{-1} (\cosh \rho_1 \cosh \rho_2 - \sinh \rho_1 \sinh \rho_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)) \quad (2.2.13)$$

$$= R \cosh^{-1} \left( 1 + \frac{(x_1 - x_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}{2z_1 z_2} \right), \quad (2.2.14)$$

と書ける。

AdS 時空にはブラックホール解が存在する。 $d+1$ 次元の Schwarzschild-AdS ブラックホール (global AdS black hole) は次の計量で与えられる。

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{d-1}^2, \quad f(r) \equiv 1 + \frac{r^2}{R^2} - \frac{r_H^{d-2}}{r^{d-2}} \left( 1 + \frac{r_H^2}{R^2} \right). \quad (2.2.15)$$

これは平坦時空における Schwarzschild ブラックホールを負の宇宙定数に拡張した時空である。ブラックホールの事象の地平面は  $r = r_H$  にある (図 2.2.2)。境界上の時空は  $\mathcal{B} = \mathbb{R} \times S^{d-1}$  である。特に3次元の AdS ブラックホール解を (global) BTZ ブラックホールと呼ぶ。BTZ ブラックホールは

$$ds^2 = -\frac{r^2 - r_H^2}{R^2} dt^2 + \frac{R^2}{r^2 - r_H^2} dr^2 + r^2 d\phi^2, \quad (2.2.16)$$

で定義される。ここで座標  $\phi$  は周期境界条件  $\phi \simeq \phi + 2\pi$  を満たす。BTZ ブラックホールに対して、

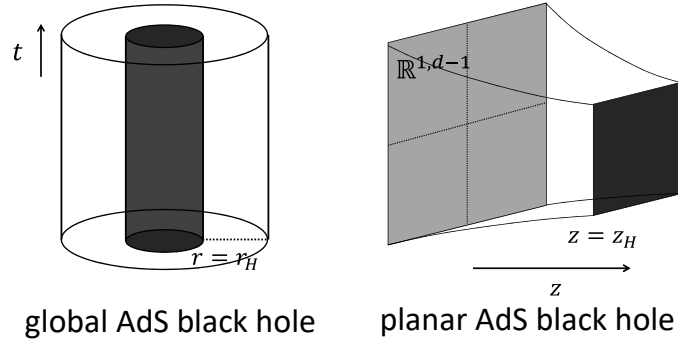


図 2.2.2 global AdS ブラックホールと planar AdS ブラックホール。事象の地平面はそれぞれ  $r = r_H$  と  $z = z_H$  にある。

座標変換

$$w_{\pm} = \sqrt{1 - \frac{r_H^2}{r^2}} e^{(R\phi \pm t) \frac{r_H}{R^2}}, \quad (2.2.17)$$

$$z = \frac{r_H}{r} e^{\frac{r_H}{R} \phi}, \quad (2.2.18)$$

を行うと、計量は

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2} (dw_+ dw_- + dz^2), \quad (2.2.19)$$

となる。従って、BTZ ブラックホールは  $(w_{\pm}, z) \simeq (e^{\frac{2\pi r_H}{R}} w_{\pm}, e^{\frac{2\pi r_H}{R}} z)$  の同一視による  $\text{AdS}_3$  時空の quotient spacetime と見做せる。この事実から、例えば BTZ ブラックホールの Green function は AdS 時空の Green function から鏡像法を用いて求めることができる。

また異なる境界を持つブラックホール解として、 $d + 1$  次元 AdS black brane 時空 (planar AdS black hole) は次の計量で与えられる。

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2} (-f(z) dt^2 + \frac{dz^2}{f(z)} + d\vec{x}^2), \quad f(z) \equiv 1 - \frac{z^d}{z_H^d}. \quad (2.2.20)$$

このときブラックホールの事象の地平面は  $z = z_H$  にある (図 2.2.2)。境界上の時空は  $\mathcal{B} = \mathbb{R}^{1,d-1}$

である。同様に 3 次元において BTZ black brane を

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2} (-f(z)dt^2 + f^{-1}(z)dz^2 + dx^2), \quad f(z) \equiv 1 - \frac{z^2}{z_H^2}, \quad (2.2.21)$$

で定義する。ここで  $x \in (-\infty, \infty)$  である。BTZ black brane は境界  $z = 0$  で Poincaré AdS 時空 (2.2.9) に漸近する。

一般に境界付近で局所 AdS 時空に近づく時空を漸近 AdS 時空と呼ぶ。そのような時空を、境界付近で摂動的に

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2} (dz^2 + \Gamma_{\mu\nu}(x, z)dx^\mu dx^\nu), \quad (2.2.22)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}(x, z) := \eta_{\mu\nu} + O(z), \quad (2.2.23)$$

と表したものを Fefferman-Graham 座標系と呼ぶ。

## 2.3 共形場理論

共形場理論は共形対称性を持った場の理論である。平坦時空においては、共形対称性は Poincaré 対称性にスケール変換と特殊共形変換に対する対称性を新たに加えたものである。共形場理論は、繰りこみ群の UV/IR 固定点や統計系における相転移点上の理論を記述する。相関関数の形はその対称性から強い制限を受け、特に低次の相関関数については具体的なモデルによらず関数形が完全に決定される。2 次元の共形場理論では、大域的共形変換に加えて、局所共形変換に相当する無限次元代数 (Virasoro 代数) が現れる。共形場理論の文献としては [46, 47, 48] を参照。

### 2.3.1 $d$ 次元共形場理論

まずは共形変換について定義する。共形変換とは、与えられた背景時空に対して、共形 Killing ベクトル場から生成される微分同相写像 (一般座標変換) である。すなわち、計量が  $g_{\mu\nu}$  ( $\mu, \nu \in \{1, \dots, d\}$ ) で与えられた  $d$  次元時空について、微分同相写像  $\varphi$  のうち、計量が

$$(\varphi^* g)_{\mu\nu}(x) = e^{\Omega(x)} g_{\mu\nu}(x), \quad (2.3.1)$$

と変換するものを、その背景時空における共形変換 (conformal transformation) と呼ぶ [46]。ここで  $*$  は  $\varphi$  による引き戻しを表す。 $\Omega(x)$  は任意の実数値関数である。すなわち、共形変換は、局所的なスケール変換を除いて計量を保つ微分同相写像であり、特に  $\Omega(x) \equiv 0$  の場合として時空の等長変

換 (isometry) を含んでいる。

ある背景時空に対する共形変換の作用は明らかに群を成す。これを共形変換群 (conformal group) と呼ぶ。その生成子を決定する方程式を導くため、無限小変換  $\varphi^\mu(x) = x^\mu + \epsilon^\mu(x)$  を考える。これによって、式 (2.3.1) は  $\epsilon$  の一次までで

$$\mathcal{L}_\epsilon g_{\mu\nu} \equiv (\varphi^* g)_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x) = \omega(x)g_{\mu\nu}(x), \quad (2.3.2)$$

と変換する。ただし微小変位を  $\Omega(x) = \omega(x) + O(\epsilon^2)$  と表した。ここで  $\mathcal{L}_\epsilon$  は Lie 微分であり、計量に関しては

$$\mathcal{L}_\epsilon g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \epsilon_\nu + \nabla_\nu \epsilon_\mu, \quad (2.3.3)$$

と作用する\*4。これを式 (2.3.2) の左辺に代入して両辺のトレースを取ることで、

$$\omega(x) = \frac{2}{d} \nabla_\mu \epsilon^\mu(x), \quad (2.3.5)$$

を得る。従って、計量が  $g_{\mu\nu}$  で与えられる時空に対する共形変換を決定する共形 Killing 方程式 (conformal Killing equation)

$$\nabla_\mu \epsilon_\nu + \nabla_\nu \epsilon_\mu = \frac{2}{d} (\nabla_\lambda \epsilon^\lambda) g_{\mu\nu}(x), \quad (2.3.6)$$

を得る。これは Killing ベクトル  $\mathcal{L}_\epsilon g_{\mu\nu} = 0$  を解として含む。特に Minkowski 時空  $\mathbb{R}^{1,d-1}$  に関しては、共形変換群は Poincaré 群の拡張となっている。

共形場理論とは、共形変換によって作用が不変な場の理論である。特に Minkowski 時空上の共形場理論は、Poincaré 変換によって不変な場の理論をさらに高い対称性によって制限したものになっている。

本論文で扱うような一般座標変換に対する不変性を持つ理論の場合、作用には計量  $g_{\mu\nu}$  が含まれている。この場合、共形場理論とは、背景時空を固定した上で、それ以外の場に対して共形変換  $\varphi$  を

\*4 これは次のように導出できる：

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_\epsilon g)_{\mu\nu}(x) &= (\varphi^* g)_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x) \\ &= \epsilon^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu} + (g_{\mu\alpha} \partial_\nu \epsilon^\alpha + g_{\nu\alpha} \partial_\mu \epsilon^\alpha) \\ &= (\partial_\nu (g_{\mu\alpha} \epsilon^\alpha) - \epsilon^\alpha \partial_\nu g_{\mu\alpha} + g_{\nu\alpha}(x) \partial_\mu \epsilon^\alpha) \\ &= \partial_{(\mu} \epsilon_{\nu)} - \epsilon^\alpha (\partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) \\ &= \nabla_{(\mu} \epsilon_{\nu)}. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

尚、微分同相写像 (active interpretation)  $\varphi(x)^\mu = x^\mu + \epsilon(x)$  を用いるか一般座標変換 (passive interpretation)  $x'^\mu = x^\mu + \epsilon(x)$  を用いるかによって計算する際に  $\epsilon$  が土のファクターだけ異なる。

施したときに作用が不変

$$I[\phi, g_{\mu\nu}] = I[\phi^* \phi, g_{\mu\nu}], \quad (2.3.7)$$

になる理論のことである。ただし  $I$  は (物質場の) 作用、 $\phi$  は計量以外の場を表す。従って、作用の共形対称性と一般座標共変性とは明確に区別されなければならない。

また共形変換に類似しているが異なる概念として、計量それ自体の局所的なスケール変換を Weyl 変換 (Weyl transformation) と呼ぶ\*5。

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu}(x) := e^{\Omega(x)} g_{\mu\nu}(x). \quad (2.3.8)$$

一般座標変換によって線素の長さは不変だが、Weyl 変換は線素の長さを変化させる。また Weyl 変換は 2 つのベクトルの局所的な角度を不変に保つ変換である。

$$\cos \theta := \frac{A_\mu B^\mu}{\sqrt{|A_\mu A^\mu| |B_\mu B^\mu|}} \rightarrow \cos \tilde{\theta} = \frac{\tilde{g}_{\mu\nu} A^\mu B^\nu}{\sqrt{|\tilde{g}_{\mu\nu} A^\mu A^\nu| |\tilde{g}_{\mu\nu} B^\mu B^\nu|}} = \cos \theta. \quad (2.3.9)$$

特に線素  $ds^2 = dx_\mu dx^\mu$  の符号は不変であるから、time-like/light-like/space-like の性質は保たれることが分かる。すなわち、Weyl 変換は因果律を保った時空の変形である。

Weyl 不変性を持った場の理論

$$I[\phi, e^\Omega g_{\mu\nu}] = I[\phi, g_{\mu\nu}], \quad (2.3.10)$$

では、エネルギー運動量テンソル (stress-energy tensor) が古典的にはトレースレスになる。これはエネルギー運動量テンソルの定義

$$T_{\mu\nu} := -\frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.3.11)$$

から、作用の計量による変分が

$$\delta_g I = -\frac{1}{2} \int dx^d \sqrt{g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (2.3.12)$$

と書けて、特に任意の微小 Weyl 変換  $\delta g^{\mu\nu} = -\Omega(x) g^{\mu\nu}(x)$  について、作用が不変となる要請から

$$g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = T_\mu^\mu = 0, \quad (2.3.13)$$

となり、エネルギー運動量テンソルのトレースレス性が従う。

共形場理論は Weyl 不変な理論に (古典的には) 等価である。実際、特に共形変換に対する一般座

\*5 宇宙論などの分野では Weyl 変換を共形変換 (conformal transformation) と呼ぶことがある。

標不変性 (2.3.20) および Weyl 不変性から

$$I[\phi, g_{\mu\nu}] = I[\varphi^* \phi, \varphi^* g_{\mu\nu}] = I[\varphi^* \phi, e^{\Omega} g_{\mu\nu}] = I[\varphi^* \phi, g_{\mu\nu}], \quad (2.3.14)$$

となり、共形変換に対して不変となることが確かめられる\*6。換言すれば、一般座標変換に対する不変性および Weyl 不変性を持つ作用について、計量をゲージ固定（平坦  $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$  に取ることが多い）した後に残った対称性が共形対称性である。

古典的に共形不変性を保つ理論であっても、量子的には共形対称性が破れることがある。一般座標共変性が量子的に破れない（重力アノマリーがない）と仮定した場合、共形不変性の破れは古典的な Weyl 不変性の破れ

$$\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle \neq 0, \quad (2.3.19)$$

として現れる。この量子効果による共形対称性の破れを Weyl anomaly (または conformal anomaly, scale anomaly) と呼ぶ。

尚、一般座標変換に対して不変な場の理論

$$S[\varphi^* \phi, \varphi^* g_{\mu\nu}] = S[\phi, g_{\mu\nu}], \quad (2.3.20)$$

では、エネルギー運動量テンソルに対する Noether の定理

$$\nabla^{\mu} T_{\mu\nu} = 0, \quad (2.3.21)$$

が運動方程式を用いることで成り立つ。これを導出するために、微小な座標変換  $\varphi^{\mu}(x) = x^{\mu} + \epsilon^{\mu}(x)$

\*6 例えば 2 次元 Polyakov 作用では、この操作は passive interpretation を用いると

$$S[\phi, g_{\mu\nu}] = \int dx^2 \sqrt{g(x)} g^{\mu\nu}(x) \partial_{\mu} \phi(x) \partial_{\nu} \phi(x) \quad (2.3.15)$$

$$= \int dx'^2 \sqrt{g'(x')} g'^{\mu\nu}(x') \partial'_{\mu} \phi'(x') \partial'_{\nu} \phi'(x') \quad (2.3.16)$$

$$= \int dx'^2 \sqrt{g(x')} g^{\mu\nu}(x') \partial'_{\mu} \phi'(x') \partial'_{\nu} \phi'(x') \quad (2.3.17)$$

$$= S[\varphi^* \phi, g_{\mu\nu}], \quad (2.3.18)$$

と書ける。ただし  $g = \det g_{\mu\nu}$  であり、2 行目の等式は作用の一般座標不変性を、3 行目の等式は (passive interpretation における) 共形変換の定義式  $g'_{\mu\nu}(x) = e^{\Omega(x)} g_{\mu\nu}(x)$  を、最後の等式は積分が全域であることを用いて変数の書き換え  $x' \rightarrow x$  をそれぞれ行った。

によって引き起こされる作用の変化を考える。作用の変化は次のように分離できる。

$$\begin{aligned}\delta I &= I[\phi + \delta\phi, g + \delta g] - I[\phi, g] \\ &= I[\phi + \delta\phi, g + \delta g] - I[\phi, g + \delta g] + I[\phi, g + \delta g] - I[\phi, g] \\ &\equiv \delta_\phi I + \delta_g I,\end{aligned}\tag{2.3.22}$$

ここで  $\delta_\phi I$  は計量  $g$  を固定したときの作用の場  $\phi$  による変分、 $\delta_g I$  は場を固定したときの計量による変分である。場  $\phi$  が運動方程式を満たすことを仮定すると ( $\delta_\phi I = 0$ )、作用の一般座標変換不変性から

$$0 = \delta I = \delta_g I = -\frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = - \int d^d x \sqrt{g} T_{\mu\nu} \nabla^\mu \epsilon^\nu = \int d^d x \sqrt{g} \epsilon^\nu \nabla^\mu T_{\mu\nu},\tag{2.3.23}$$

となる。ここで部分積分を行うために積分の境界上で  $\epsilon = 0$  となるように取った。 $\epsilon^\nu(x)$  は任意の微小変位であったから、各点における保存則 (2.3.21) を得る。

本論文では特に平坦時空  $\mathbb{R}^d$  上における共形対称性を考える\*7。この場合、共形 Killing 方程式は

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = \frac{2}{d} (\partial \cdot \epsilon) \delta_{\mu\nu},\tag{2.3.25}$$

で与えられる。ただし表記の簡約のため  $X \cdot Y := \delta_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu$  と定義する。この式の両辺を  $\partial_\mu \partial_\nu$  で微分することで

$$2\Box(\partial \cdot \epsilon) = \frac{2}{d}\Box(\partial \cdot \epsilon) = 0, \quad (d > 1),\tag{2.3.26}$$

を得る。ただし  $\Box := \partial_\mu \partial^\mu$  である。ここから、式 (2.3.25) に  $\Box$  を作用させることで

$$\partial_\mu \Box \epsilon_\nu + \partial_\nu \Box \epsilon_\mu = 0,\tag{2.3.27}$$

を得る。さらに再び式 (2.3.25) を  $\partial_\alpha \partial_\mu$  で微分すると、

$$\partial_\alpha \Box \epsilon_\nu + \partial_\alpha \partial_\nu (\partial \cdot \epsilon) = \frac{2}{d} \partial_\alpha \partial_\nu (\partial \cdot \epsilon),\tag{2.3.28}$$

\*7 平坦時空を考える上では、共形変換を

$$g'_{\mu\nu}(x') = e^{\Omega(x)} g_{\mu\nu}(x),\tag{2.3.24}$$

を満たす一般座標変換として定義した場合と、式 (2.3.1) で定義した場合とで共形 Killing 方程式 (2.3.25) が一致するために、以降の議論は変わらない。しかし一般の時空において共変な共形 Killing 方程式 (2.3.6) を導くためには、共形変換を式 (2.3.1)、すなわち  $g'_{\mu\nu}(x) = e^{\Omega(x)} g_{\mu\nu}(x)$  を満たす一般座標変換として定義する必要がある。



となる。これを  $\alpha \leftrightarrow \nu$  と入れ替えて足して、式 (2.3.27) を用いると

$$\partial_\alpha \partial_\nu (\partial \cdot \epsilon) = \frac{2}{d} \partial_\alpha \partial_\nu (\partial \cdot \epsilon) = 0, \quad (d > 2), \quad (2.3.29)$$

を得る。この式によって、 $d \geq 3$  次元以上の平坦時空について共形 Killing ベクトル場  $\epsilon^\mu(x)$  は  $x$  の 2 次までに制限されることが分かる。一方、2 次元の場合、共形変換は必ずしも式 (2.3.29) を満たす必要がなくなり、結果として無限個の対称性が現れる。そのため、2 次元の共形場理論は高次元の共形場理論と比較してより強い制限を受ける。式 (2.3.29) を解くと、 $\mathbb{R}^d$  上の共形変換の生成子は次で与えられる。

$$\begin{aligned} \text{並進 (translation) :} & \quad p_\mu = \partial_\mu. \\ \text{回転 (rotation) :} & \quad m_{\mu\nu} = x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu. \\ \text{スケール変換 (dilatation) :} & \quad d = x^\mu \partial_\mu. \\ \text{特殊共形変換 (special conformal transformation) :} & \quad k_\mu = 2x_\mu x^\nu \partial_\nu - x^2 \partial_\mu. \end{aligned} \quad (2.3.30)$$

ここから生成される共形変換群の交換関係は次で与えられる\*8。

$$[D, P_\mu] = P_\mu, \quad (2.3.32)$$

$$[D, K_\mu] = -K_\mu, \quad (2.3.33)$$

$$[P_\mu, K_\nu] = 2(L_{\mu\nu} - \delta_{\mu\nu} D), \quad (2.3.34)$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\alpha\beta}] = \delta_{\mu\beta} L_{\nu\alpha} - \delta_{\mu\alpha} L_{\nu\beta} + \delta_{\nu\alpha} L_{\mu\beta} - \delta_{\nu\beta} L_{\mu\alpha}, \quad (2.3.35)$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\alpha] = \delta_{\nu\alpha} P_\mu - \delta_{\mu\alpha} P_\nu, \quad (2.3.36)$$

$$[M_{\mu\nu}, K_\alpha] = \delta_{\nu\alpha} K_\mu - \delta_{\mu\alpha} K_\nu, \quad (2.3.37)$$

$$\text{otherwise} = 0. \quad (2.3.38)$$

この群は次のようにまとめ直すことで  $\mathbb{R}^{1,d+1}$  における回転群  $SO(1, d+1)$  と同型であることが分

\*8 有限の特殊共形変換によって座標は

$$x'^\mu = \frac{x^\mu - a^\mu x^2}{1 - 2(a \cdot x) + a^2 x^2}, \quad (2.3.31)$$

と変換する。ここで  $a^\mu$  は有限変換のパラメータである。この式から分かるように、 $x'^\mu$  は有限の  $x^\mu$  において発散する。そのため共形変換を全域で well-defined にするためには、時空に無限遠点を付け加える必要がある (conformal compactification)。特殊共形変換は、無限遠点を固定して原点を動かす並進と対照的に、原点を固定して無限遠点を動かす操作と見ることができる [47]。

かる。

$$L_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu \in \{1, \dots, d\}), \quad (2.3.39)$$

$$L_{d+1,0} = D, \quad (2.3.40)$$

$$L_{0,\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu + K_\mu), \quad (2.3.41)$$

$$L_{d+1,\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu - K_\mu). \quad (2.3.42)$$

ここで  $L_{ab} = -L_{ba}$  ( $a, b \in \{0, 1, \dots, d+1\}$ ) であり、 $x^0$  方向を time-like に取っている。共形変換群の交換関係を用いると、 $L_{ab}$  は  $SO(1, d+1)$  の代数関係を満たすことが確かめられる。ここから示唆されるように、 $\mathbb{R}^d$  における共形変換は、 $\mathbb{R}^{1,d+1}$  における Lorentz 回転と、 $\mathbb{R}^{1,d+1}$  上の null cone に埋め込まれた  $\mathbb{R}^d$  へのスケール変換 ( $X \rightarrow \lambda X$ ) による射影を組み合わせた操作として表現できる (embedding space formalism)[48]。

以上の議論では時空をユークリッド化していたが、Minkowski 時空  $\mathbb{R}^{1,d-1}$  においても同様の議論が成り立つ。 $\mathbb{R}^{1,d-1}$  上の共形変換群は  $SO(2, d)$  と同型であり、時空の isometry として Poincaré 代数をその部分代数に含んでいる。

共形対称性を持った場の理論では、場の演算子は共形変換群の表現として定義される。これは Poincaré 対称性を持った理論に対する質量  $m^2 = P_\mu P^\mu$  ごとのスカラー場、ベクトル場などの Wigner による分類と同様である。共形場理論はスケール不変な理論であるから、原点  $x = 0$  における場に対する  $D$  の表現が対角化されるように場を定義することが自然である。原点  $x = 0$  におけるスケール変換  $D$  に対する場の固有値を共形次元 (conformal dimension) と呼び、 $\Delta$  で表す。ユニタリーな理論の場合、場の共形次元には下限がある [47]。式 (2.3.32) と (2.3.33) から、並進  $P_\mu$  と特殊共形変換  $K_\mu$  は共形次元に関する昇降演算子として働くことが分かる。特殊共形変換  $K_\mu$  の作用によって消滅する場をプライマリー場 (primary fields) と呼び、共形場理論における議論で基本的な役割を果たす。また共形次元  $\Delta$  のプライマリー場に対して (複数個の)  $P_\mu$  を作用させたものをディセendant場 (descendant fields) と呼ぶ。共形次元  $\Delta$  のプライマリー場に  $P_\mu$  を  $n$  回作用させたディセendant場の共形次元は  $\Delta + n$  となる。共形変換群の (共形次元  $\Delta$  の) プライマリー場  $O(x)$  に対する作用は次で与えられる。

$$P_\mu \cdot O(x) = \partial_\mu O(x), \quad (2.3.43)$$

$$M_{\mu\nu} \cdot O(x) = (x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu + S_{\mu\nu})O(x), \quad (2.3.44)$$

$$D \cdot O(x) = (x^\mu \partial_\mu + \Delta)O(x), \quad (2.3.45)$$

$$K_\mu \cdot O(x) = (2x_\mu x^\nu \partial_\nu - x^2 \partial_\mu + 2\Delta x_\mu - x^\nu S_{\mu\nu})O(x). \quad (2.3.46)$$

ただし  $S_{\mu\nu}$  は  $M_{\mu\nu}$  の原点  $x = 0$  における表現である。

共形場理論における低次の相関関数は、対称性による制約からその関数形が完全に決定される。例として、スカラーのプライマリー場  $O_{1,2}$  について、その2点相関関数は

$$\langle O_1(x_1)O_2(x_2) \rangle = \begin{cases} \frac{C}{|x_1 - x_2|^{2\Delta}} & (\Delta_1 = \Delta_2 \equiv \Delta) \\ 0 & (\Delta_1 \neq \Delta_2) \end{cases}, \quad (2.3.47)$$

与えられる。ここで  $C$  は定数、 $\Delta_{1,2}$  はそれぞれのプライマリー場の共形次元である。また3点相関関数は

$$\langle O_1(x_1)O_2(x_2)O_3(x_3) \rangle = \frac{f_{123}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3} |x_2 - x_3|^{\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1} |x_3 - x_1|^{\Delta_1 + \Delta_3 - \Delta_2}}, \quad (2.3.48)$$

と決まる。ここで  $f_{123}$  は理論の構造定数と呼ばれる定数である。

一般の  $n$  点相関関数

$$\langle X \rangle = \frac{1}{Z} \int D\phi X e^{-I[\phi, g]}, \quad (2.3.49)$$

に対して、対称性の情報は Ward-Takahashi 恒等式によって反映される。ここで  $X = \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_n(x_n)$  は一般に  $\phi$  によって作られる複合場、 $Z$  は分配関数である。これを導出するために、理論の対称性に関する場の微小変換  $\phi \rightarrow \phi' = \phi + \delta\phi$  を考えよう。経路積分において、積分変数の置き換えで相関関数是不変であるから、

$$0 = \int D\phi' X' e^{-I[\phi', g]} - \int D\phi X e^{-I[\phi, g]} \quad (2.3.50)$$

$$= \int \delta(D\phi) X e^{-I[\phi, g]} + \int D\phi (\delta X - \delta_\phi I) e^{-I[\phi, g]}, \quad (2.3.51)$$

と書ける。ただし  $X' = X + \delta X$  であり、 $\delta_\phi I = I[\phi', g] - I[\phi, g]$  は計量  $g_{\mu\nu}$  を固定して  $\phi$  のみを変換したときの変分である。ここで積分測度  $D\phi$  がこの置き換えに対して不変 ( $\delta(D\phi) = 0$ ) であることを仮定すると、

$$\langle \delta X \rangle = \langle X \delta_\phi I \rangle, \quad (2.3.52)$$

を得る。特に微分同相写像  $\varphi(x)^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x)$  による対称性  $I[\varphi^*\phi, \varphi^*g] = I[\phi, g]$  については、エネルギー運動量テンソルを用いて

$$0 = \delta_\phi I + \delta_g I = \delta_\phi I - \int dx^d \sqrt{g} T_{\mu\nu} \nabla^\mu \epsilon^\nu, \quad (2.3.53)$$

と書ける。ここで  $\delta_g I$  は作用の計量による変分であり、Lie 微分  $\mathcal{L}_\epsilon g^{\mu\nu} = \nabla^{(\mu} \epsilon^{\nu)}$  およびエネルギー

運動量テンソルの対称性を用いた。以上から

$$\sum_{i=1}^n \langle \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \delta_\epsilon \mathcal{O}_i(x_i) \cdots \mathcal{O}_n(x_n) \rangle = - \int dx^d \sqrt{g} \nabla^\mu \epsilon^\nu(x) \langle T_{\mu\nu}(x) \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_n(x_n) \rangle, \quad (2.3.54)$$

と Ward-Takahashi 恒等式 (Ward-Takahashi identity) を得る。ここからエネルギー運動量テンソルを対称性変換  $\delta_\epsilon$  の生成子と見做すことができる。特に平坦時空上の (大域的) 共形対称性については、共形 Killing ベクトル場  $\epsilon^\mu(x)$  は式 (2.3.30) で与えられる。

### 2.3.2 2次元共形場理論

2次元の共形場理論では共形変換群が拡大して局所的な共形変換である Virasoro 代数が現れる。そのため  $d \geq 3$  の場合と較べてより詳細な一般論の展開が可能となる。

2次元の座標系を複素座標を用いて  $z = x^1 + ix^2$ ,  $\bar{z} = x^1 - ix^2$  と表すと便利である ( $ds^2 = 2dzd\bar{z}$ )。  $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$  における共形変換は、 $z$  に関する任意の正則関数

$$z' = f(z), \quad (2.3.55)$$

によって表される。このことは正則変換によって平坦な計量が

$$g'(z', \bar{z}') = \left| \frac{df(z)}{dz} \right|^2 g(z, \bar{z}), \quad (2.3.56)$$

と変換することから確かめられる。リーマン球面  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  の全域で正則な共形変換を (リーマン球面の) 大域的共形変換 (global conformal transformation) と呼ぶ。無限遠点付近での正則性の要求から、大域的な共形変換の生成子は  $\epsilon^z \propto 1, z, z^2$  に制限される。これらは式 (2.3.29) を満たし、並進、回転、スケール変換、特殊共形変換の対称性  $SO(2, 2) \cong SL(2, \mathbb{C})$  に対応する。一方、それ以外の正則変換を局所共形変換 (local conformal transformation) と呼ぶ。

プライマリー場は、共形変換の下で

$$O(z, \bar{z}) = \left( \frac{dz'}{dz} \right)^h \left( \frac{d\bar{z}'}{d\bar{z}} \right)^{\bar{h}} O'(z', \bar{z}'), \quad (2.3.57)$$

と変換する。ここで  $(h, \bar{h})$  を  $O$  の共形ウェイト (conformal weight) と呼ぶ。共形次元  $\Delta$  およびスピン  $s$  とは  $\Delta = h + \bar{h}$  および  $s = h - \bar{h}$  の関係にある。また大域的な共形変換に対して変換則 (2.3.57) を満たす場を準プライマリー場と呼ぶ。任意の微小な共形変換  $\varphi(z) = z + \epsilon(z)$  に対して、

プライマリー場の変換性は

$$\begin{aligned}
\delta_\epsilon O(z, \bar{z}) &= (\varphi^* O)(z, \bar{z}) - O(z, \bar{z}) \\
&= \left( \frac{d\varphi(z)}{dz} \right)^h \left( \frac{d\varphi(\bar{z})}{d\bar{z}} \right)^{\bar{h}} O(\varphi(z), \varphi(\bar{z})) - O(z, \bar{z}) \\
&= (\epsilon\partial + h(\partial\epsilon) + \bar{\epsilon}\bar{\partial} + \bar{h}(\bar{\partial}\bar{\epsilon})) O(z, \bar{z}),
\end{aligned} \tag{2.3.58}$$

となり、共形変換による変化分が正則部分と反正則部分に分離する。ただし簡便のために  $\partial := \frac{\partial}{\partial z}$ ,  $\bar{\partial} := \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$  と定義した。従って、プライマリー場は次のように正則部分と反正則部分の積になっていると考えて計算を行うことができる。

$$O_{(h, \bar{h})}(z, \bar{z}) = O_h(z) O_{\bar{h}}(\bar{z}). \tag{2.3.59}$$

以下では主に正則部分について扱う。反正則部分については  $h \rightarrow \bar{h}$  などの置き換えから直ちに同様の結果が従う。

エネルギー運動量テンソルのトレースレス性からは、

$$0 = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = T_z^z + T_{\bar{z}}^{\bar{z}} \propto T_{z\bar{z}}, \tag{2.3.60}$$

と非対角成分の消滅  $T_{z\bar{z}} = 0$  を得る。

2次元における Ward-Takahashi 恒等式

$$\delta_\epsilon \langle \mathcal{O}_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \mathcal{O}_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle = - \int dz^2 \bar{\partial} \epsilon^z \langle T_{zz} \mathcal{O}_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \mathcal{O}_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle \tag{2.3.61}$$

$$- \int dz^2 \partial \epsilon^{\bar{z}} \langle \bar{T}_{\bar{z}\bar{z}} \mathcal{O}_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \mathcal{O}_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle, \tag{2.3.62}$$

からは様々な情報が得られる。ここで保存則 (2.3.21)

$$0 = \bar{\partial} T_{zz} = \partial T_{\bar{z}\bar{z}}, \tag{2.3.63}$$

が成り立つことを見るために、 $\epsilon^z(z, \bar{z})$  成分がいずれの  $z_i$  も含まない領域でのみ非ゼロになる変換を考える。Ward-Takahashi 恒等式の両辺の反正則項は消えるため、部分積分によって

$$\langle \bar{\partial} T_{zz} \mathcal{O}_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \mathcal{O}_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle = 0 \quad (z \neq \{z_1, \dots, z_n\}), \tag{2.3.64}$$

を得る。反正則部分についても同様である。

式 (2.3.60), (2.3.63) を踏まえて、エネルギー運動量テンソルのそれぞれの対角成分を

$$T(z) := 2\pi T_{zz}, \quad \bar{T}(\bar{z}) := 2\pi T_{\bar{z}\bar{z}}, \quad (2.3.65)$$

と定義する。\$2\pi\$ は留数定理を意識した convention である。後に見るように、\$T(z)\$, \$\bar{T}(\bar{z})\$ はそれぞれ共形ウェイト \$(2, 0)\$, \$(0, 2)\$ の準プライマリー場である。

さらにリーマン球面 \$\mathbb{C} \cup \{\infty\}\$ 上の大域的共形変換 \$\epsilon(z) \equiv \epsilon^z(z) \propto 1, z, z^2\$ に関しては、積分の全域で \$\epsilon\$ が正則であるため右辺は自明にゼロとなる。従って、相関関数が不変である条件

$$\delta_\epsilon \langle \mathcal{O}_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \mathcal{O}_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle = 0, \quad (2.3.66)$$

を得る。それぞれの大域的な対称性 \$SO(2, 2) \cong SL(2, \mathbb{C})\$ について条件式を書き下すことで、特に低次の相関関数の形を決定できる。1 点相関関数は、並進・回転・スケール変換に対する対称性から、恒等演算子 \$I((h, \bar{h}) = (0, 0))\$ を除いて消滅することが分かる。

$$\langle \mathcal{O}_{h, \bar{h}}(z, \bar{z}) \rangle = \delta_{h,0} \delta_{\bar{h},0}. \quad (2.3.67)$$

またプライマリー場の 2 点相関関数は、

$$\langle \mathcal{O}_{h_1, \bar{h}_1}(z_1, \bar{z}_1) \mathcal{O}_{h_2, \bar{h}_2}(z_2, \bar{z}_2) \rangle = \frac{C \delta_{h_1, h_2} \delta_{\bar{h}_1, \bar{h}_2}}{(z_1 - z_2)^{2h} (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{2\bar{h}}}, \quad (2.3.68)$$

で与えられる。ここで \$C\$ は定数である。

Ward-Takahashi 恒等式の正則部分に関して、\$T(z)\$ の正則性、およびストークスの定理を用いて \$\{z\_1, \dots, z\_n\}\$ を含む閉経路 \$C\$ による積分に書き換えると、

$$\delta_\epsilon \langle \mathcal{O}_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \mathcal{O}_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \epsilon \langle T(z) \mathcal{O}_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \mathcal{O}_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle, \quad (2.3.69)$$

と書ける。これと式 (2.3.58) の比較から、共形ウェイト \$(0, h)\$ のプライマリー場とエネルギー運動量テンソルの演算子積展開 (operator product expansion, OPE)

$$T(z) \mathcal{O}_h(w) \sim \frac{h \mathcal{O}(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w \mathcal{O}(w)}{(z-w)}, \quad (2.3.70)$$

を得る。ここで \$\sim\$ は \$z \to w\$ の極限において正則な部分を除いた等号を意味する。同様に、平坦な時空上の一般の 2 次元共形場理論に対して、\$T\$ を 2 つ挿入した場合の Ward-Takahashi 恒等式を用い

る [46] と、 $T$  の共形変換に関する変換則

$$\delta_\epsilon T = \epsilon \partial T + 2(\partial \epsilon)T + \frac{c}{12} \partial^3 \epsilon, \quad (2.3.71)$$

および OPE

$$T(z)T(w) \sim \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2\partial_w T(w)}{(z-w)^2} + \frac{T(w)}{z-w}, \quad (2.3.72)$$

を得る。ここで  $c$  を中心電荷 (central charge) と呼ぶ。 $c$  は理論が含む自由度の大きさを表している。例えば  $N$  個の自由スカラー場に関しては  $c = N$  である。大域的な共形変換に対しては  $\partial^3 \epsilon = 0$  となることから、 $T(z)$  が共形ウェイト  $(2, 0)$  の準プライマリー場であることが分かる。エネルギー運動量テンソルは、有限の共形変換に対して

$$T'(z') = \left( \frac{dz}{dz'} \right)^2 T(z) + \frac{c}{12} \{z, z'\}, \quad (2.3.73)$$

と振る舞う。ここで  $\{f(w), w\}$  は Schwarz 微分

$$\{f(w), w\} = \frac{f'''(w)}{f'(w)} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''(w)}{f'(w)} \right)^2, \quad (2.3.74)$$

である。ただし  $f'(w) = df(w)/dw$  である。特にリーマン球面からシリンダーへの写像  $z = e^{z'}$  に対しては、

$$T'(z') = z^2 T(z) - \frac{c}{24}, \quad (2.3.75)$$

となる。このエネルギー運動量テンソルの  $c$  に比例するずれは Casimir effect に対応している。

エネルギー運動量テンソル  $T(z)$  を  $z = 0$  周りの幕で展開して

$$T(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{L_n}{z^{n+2}}, \quad (2.3.76)$$

と表す。このとき  $L_n$  は、

$$L_n = \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{n+1} T(z), \quad (2.3.77)$$

と書けることから分かるように、共形変換  $\epsilon^z = z^{n+1}$  に対応する charge になっている。この  $L_n$  を Virasoro 演算子と呼ぶ。 $L_n$  が成す交換関係は、エネルギー運動量テンソルの OPE から

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12} m(m^2-1)\delta_{m+n}, \quad (2.3.78)$$

と計算できる。これを Virasoro 代数と呼ぶ。大域的な対称性には  $L_{-1,0,1}$  が対応しており、これら

の交換関係には central charge に比例する項が現れないことが分かる。Virasoro 代数は、 $z = 0$  周りの古典的な 2 次元共形変換群 (Witt 代数) の中心拡大になっている。

2 次元共形場理論の Weyl anomaly は、

$$\langle T_\mu^\mu \rangle = -\frac{c}{12}R, \quad (2.3.79)$$

で与えられる。ただし  $R$  は計量  $g_{\mu\nu}$  の Ricci scalar である。従って平坦な時空以外では、共形対称性は量子的に破れる。この意味で  $c \neq 0$  は量子的なアノマリーの効果を表している。

共形場理論の具体的なモデルの一つとして、2 次元スカラー場

$$I = \frac{1}{2\pi} \int dx^2 \sqrt{g} g_{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi, \quad (2.3.80)$$

を考える。 $J(z) := i\partial\phi$  と定義すると、エネルギー運動量テンソルは

$$T(z) = \frac{1}{2} : J(z)J(z) :, \quad (2.3.81)$$

で与えられる。ここで  $::$  は正規積 (normal-ordered product) であり、同一点に場を挿入したことによる紫外発散を取り除くため、一般に

$$: A(z)B(w) : \equiv \lim_{z \rightarrow w} \{A(z)B(w) - \langle A(z)B(w) \rangle\}, \quad (2.3.82)$$

として定義される。正準量子化等を用いて OPE を計算すると、

$$T(z)J(w) \sim \frac{1}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w \phi(w)}{(z-w)}, \quad (2.3.83)$$

$$T(z)T(w) \sim \frac{1/2}{(z-w)^4} + \frac{2\partial_w T(w)}{(z-w)^2} + \frac{T(w)}{z-w}, \quad (2.3.84)$$

を得る。すなわち、 $J(z)$  は共形ウェイト  $(1, 0)$  のプライマリー場であり、理論の中心電荷は  $c = 1$  である。

頂点演算子 (vertex operators) を

$$V_p(z) := e^{ip\phi(z)}, \quad (2.3.85)$$

で定義する。同様に OPE を計算すると

$$T(z)V(w) \sim \frac{p^2/2}{(z-w)^2} V(w) + \frac{\partial_w V(w)}{z-w}, \quad (2.3.86)$$

$$V_p(z)V_{p'}(w) \sim (z-w)^{pp'} V_{p+p'}(w), \quad (2.3.87)$$



を満たすことが分かる\*<sup>9</sup>。すなわち、 $V_p$  は共形ウェイト  $(\frac{p^2}{2}, 0)$  のプライマリー場である。また 1 点相関関数が 1 を除いてゼロとなることから、電荷保存則に対応する式

$$\langle V_{p_1}(z)V_{p_2}(w) \rangle = \frac{\delta_{p_1+p_2,0}}{(z-w)^{2p}}, \quad (2.3.92)$$

を得る。

## 2.4 AdS/CFT 対応

AdS/CFT 対応とは、ホログラフィー原理の一例として、 $d+1$  次元漸近 AdS 時空上の量子重力理論と、AdS 時空の境界上に定義されたある種類の  $d$  次元共形場理論の等価性を予想する理論である。AdS/CFT 対応が実際に成立する具体的なモデルは、超弦理論における D ブレーンに関する研究の中で Maldacena によって最初に発見された [7]。以降、現在までに多くの具体的なモデルが超弦理論や M 理論の中で検証されており、AdS/CFT 対応は一般的な状況においても成り立つ普遍的な原理と考えられている。AdS/CFT 対応を議論する際には、それらのモデルから抽出された AdS 側と CFT 側の対象を結びつける“辞書”を用いる。

この感覚を掴むために、まずは最も有名なモデルである Maldacena の発見した  $\text{AdS}_5 \times S^5$  上の IIB 型超弦理論と 4 次元  $\mathcal{N} = 4$  super Yang-Mills 理論の双対性について説明する（次節の議論の詳細は [49, 50, 51] 等の文献を参照）。次に AdS/CFT 対応の議論に現れる様々な対象の対応関係について解説する [52]。

### 2.4.1 $\text{AdS}_5/\text{CFT}_4$ model

超弦理論とは、万物の最小単位を従来のような点粒子ではなく、1 次元の広がりを持った弦として捉える理論である。超弦理論は重力の量子論として、背景時空上の散乱振幅を摂動的に計算する方法

\*<sup>9</sup> 例えば  $T(z)V(w)$  は、相関関数  $D(z_1, z_2) := -\ln |z_1 - z_2|^2$  および Wick の定理

$$:\mathcal{F}::\mathcal{G} := e^{\iint dz_1 dz_2 D(z_1, z_2) \frac{\delta}{\delta \phi_{F1}} \frac{\delta}{\delta \phi_{G2}}} : \mathcal{F} \mathcal{G} :, \quad (2.3.88)$$

を用いて、

$$T(z)V(w) = -\frac{1}{2} e^{\iint dz_1 dz_2 D(z_1, z_2) \frac{\delta}{\delta \phi_{F1}} \frac{\delta}{\delta \phi_{G2}}} : \partial_z \phi(z) \partial_z \phi(z) e^{ip\phi(w)} : \quad (2.3.89)$$

$$\sim -ip(\partial_z D(z, w)) : \partial_z \phi(z) e^{ip\phi(w)} : + \frac{1}{2} p^2 (\partial_z D(z, w))^2 : e^{ip\phi(w)} : \quad (2.3.90)$$

$$\sim \frac{\partial_w V(w)}{z-w} + \frac{p^2/2}{(z-w)^2} V(w), \quad (2.3.91)$$

と導出できる。ただし最後に  $z \sim w$  の近傍で  $\partial_z \phi(z) = \partial_w \phi(w)$  となることを用いた。

を与える。このアイデアを以下で手短かに紹介する。

まずは簡単のために超対称性を含まない弦理論を考えよう。これは相対論的粒子の作用（位置変数  $x^\mu(t)$  の時間軸上の積分）を拡張して、時間的座標  $\tau$  と空間的座標  $\sigma$  による 2 次元平面（世界面, worldsheet）上に定義された作用として表現される。最も単純な  $d$  次元 Minkowski 時空上の bosonic string の作用 (Polyakov action) は

$$I_P = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{|g|} g^{ab} \partial_a X^\mu(\tau, \sigma) \partial_b X^\nu(\tau, \sigma) \eta_{\mu\nu}, \quad (2.4.1)$$

で与えられる。ここで  $g_{ab}$  ( $a, b = \tau, \sigma$ ) は世界面上の計量、 $X^\mu(\tau, \sigma)$  は世界面から  $d$  次元時空 (“target space” と呼ばれる) への写像、 $\eta_{\mu\nu}$  ( $\mu, \nu = 0, \dots, d-1$ ) は  $d$  次元時空の Minkowski 計量である。全体に掛かる  $\alpha'$  は作用を無次元化するために必要であり、長さの 2 乗の次元を持った Regge slope と呼ばれる定数である。 $\alpha'$  は、弦理論が有する唯一のパラメータとして、弦の長さスケール

$$l_s := \sqrt{\alpha'}, \quad (2.4.2)$$

(または弦理論のエネルギースケール  $m_s^2 = 1/\alpha'$ ) を決定する\*10。

弦には空間的座標  $\sigma \in [0, \pi)$  に周期境界条件を課すか否かによって、端を持たないループ状の閉弦と、端を持つ開弦の 2 種類が存在する。さらに開弦の境界条件には、世界面上のエネルギー運動量保存則に対応する Neumann 条件  $\partial_\sigma X^\mu|_{\sigma=0, \pi} = 0$  と、弦の端を常に固定する Dirichlet 条件  $\partial_\tau X^\mu|_{\sigma=0, \pi} = 0$  の 2 通りの可能性がある\*11。これは時空の各空間方向に対して独立に選択できる。時空の全次元を  $D+1$  と表したとき、 $D-p$  個の空間方向について Dirichlet 条件を取ると、開弦の端点は Neumann 条件を課した残りの  $p$  個の空間方向に対してのみ自由に動くことができる。この空間領域は、開弦の端点を置けるオブジェクトとして解釈される。これを  $Dp$  ブレーンと呼ぶ。例えば  $D0$  ブレーンは点状のオブジェクト、 $D1$  ブレーンは線状のオブジェクトである。時空中でこれらの軌跡を見たものも区別せずに  $D$  ブレーンと呼ぶ。どちらの意味かは文脈から明らかである

\*10 現在までに観測されている様々な素粒子は、すべて (超) 弦の異なる振動モードと見なされる。弦を量子化してそのスペクトラムを考えると、重力子やゲージ場が現れる他、dilaton や高階のスピンを持った粒子に対応するセクターも現れる。弦理論の整合性を課すと、それぞれの量子状態に対応する粒子の質量が一意的に決定される。その大きさは弦理論のエネルギースケールの整数倍として現れる。例えば 26d bosonic bosonic string の場合は

$$m_N^2 = m_s^2 N \quad (N = -1, 0, 1, 2, \dots), \quad (2.4.3)$$

となる。大雑把には、高いスピンを持つ量子状態ほど重い質量を持つ。特に閉弦のセクターには、スピン 2 対称テンソルとして表される零質量の量子状態を含んでいる。これは重力子に対応すると解釈される。

\*11 Weyl アノマリーを含まない超弦理論では 10 次元時空を考える必要があるが、現状で観測できる宇宙は 4 次元時空である。これは残りの 6 次元はコンパクト化されており、現在のエネルギースケールではその影響が見えないためと考えられている。コンパクト化に関して  $T$ -duality と呼ばれる弦理論同士の双対性を考えるとき、Neumann 条件の双対として Dirichlet 条件が自然に現れる。

う。D ブレーンが  $N$  枚重なっている状況を考えると、開弦の端点はどのブレーン上に乗るかという新しい自由度を持つようになる。この選び方、つまり  $N$  枚の D ブレーンに伴う開弦の量子状態は  $N \times N = N^2$  通りあり、これは  $U(N)$  群の adjoint 表現として解釈される。すなわち、重なった  $N$  枚の D ブレーン上の開弦は  $U(N)$  ゲージ理論の自由度を持つようになる。

弦理論は世界面に関する一般座標変換不変性および Weyl 不変性をゲージ対称性として持っており、2次元共形場理論と見做すことができる。Weyl アノマリー (2.3.79) が消滅することを要請すると、理論には強い制限が入る。例えば、時空の次元  $d$  は中心電荷  $c$  と関係付いているため、 $d = 26$  (超弦理論では  $d = 10$ ) と決定される (critical dimension)。さらに Polyakov action を曲がった target space へ拡張して ( $\eta_{\mu\nu} \rightarrow G_{\mu\nu}(X^\mu(\tau, \sigma))$ )、同様に Weyl アノマリーの消滅を要請することで、弦理論の低エネルギー有効作用を決定できる。それには重力の UV 理論として期待される通り Einstein-Hilbert 作用を含んでいる。この作用には、閉弦の零質量スペクトラムを反映して、dilaton および  $B$  場と呼ばれる新たな場が現れる。

単純な bosonic string には、スペクトルにタキオンが含まれ、またフェミオンが存在しないという問題点がある。これらを解決するために、fermionic な場の作用を加えて理論に超対称性を持たせたものが超弦理論である。このとき超弦理論は 2次元  $\mathcal{N} = (1, 1)_2$  超対称共形場理論となる。整合性を持った超弦理論は 10次元時空上の type I, type IIA, type IIB, Heterotic  $SO(32)$ , Heterotic  $E_8 \times E_8$  の 5つに分類される。これらは互いに string duality と呼ばれる双対性によって結び付いている。元々は世界面上に導入された超対称性であるが、これらの理論では target space の時空にも超対称性が現れる。特に IIB 型超弦理論は閉弦で構成された理論であり、低エネルギー有効作用は IIB 型超重力理論によって記述される。

以下では、Maldacena の方法 [7] に従って AdS/CFT 対応の具体例を導出する。そのために、IIB 型超弦理論において、10次元時空上に  $N$  枚の平坦な D3 ブレーンが並行に重なって置かれている状況の低エネルギー極限について考える。この状況を 2通りの見方で記述することによって双対性は導かれる。

まずは D ブレーンおよび超弦による励起を用いた描像について考える。低エネルギー有効理論では、超弦に含まれるスペクトルのうち、零質量の量子状態に含まれるゲージ場や重力子などのモードのみが寄与する。D ブレーンの励起状態はブレーン上に端点を持つ開弦であり、これは今の場合 4次元  $\mathcal{N} = 4$   $U(N)$  super Yang-Mills (SYM) 理論によって記述される。このゲージ理論は共形対称性を持った 4次元共形場理論になることが知られている。さらに D ブレーンから transverse な方向に離れた時空上には、平坦時空上の励起として IIB 型の超弦理論があり、この有効理論は IIB 型超

重力理論によって記述される。これらの D ブレーン上の開弦と平坦時空中の閉弦は、一般には相互作用をしている。この状況を schematic に書くと

$$I = I_{\text{brane}} + I_{\text{string}} + I_{\text{interaction}}, \quad (2.4.4)$$

と表せる。ここで  $I_{\text{brane}}$  は DBI action と呼ばれる D ブレーン上の開弦の有効作用、 $I_{\text{string}}$  は IIB 型超重力理論の作用、 $I_{\text{interaction}}$  はこれらの間の相互作用である。ここで低エネルギー極限を解析する際、エネルギーを下げる代わりに、エネルギーと無次元のパラメータを固定して、弦の長さスケール  $l_s \rightarrow 0$  ( $\alpha' \rightarrow 0$ ) の極限を取ると見通しがよい。その結果、これらの相互作用の効果は消滅することが分かる ( $I_{\text{interaction}} \sim 0$ ) (Maldacena decoupling limit)。さらに同じ極限下で、それぞれの理論に含まれる高階微分項も消滅する。その結果、この描像では D ブレーン上の 4 次元 pure  $\mathcal{N} = 4$   $U(N)$  SYM と、D ブレーンから離れた時空中の IIB 型超重力理論が残る。

一方で、時空中に Dp ブレーンがある状況は、超重力理論の古典解である black p brane として解釈される。今の状況では、特に IIB 型超重力理論の解の計量は

$$ds^2 = H(r)^{-1/2}(-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + H(r)^{1/2}(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2), \quad (2.4.5)$$

$$H(r) = 1 + \frac{R^4}{r^4}, \quad R^4 = 4\pi g_s l_s^4 N, \quad (2.4.6)$$

で与えられる。ここで  $g_s$  は string coupling と呼ばれる無次元の定数である。計量の時間成分が動径方向の位置に依存しているため、Schwarzschild ブラックホールの場合と同様に、位置  $r$  におけるエネルギー  $E_r$  は無限遠において redshift を受ける。

$$E_\infty = H(r)^{-1/2} E_r. \quad (2.4.7)$$

この状況を無限遠の観測者から見たとき、低エネルギーに寄与するのは、時空全体に広がるような長い波長を持ったモードと、redshift の影響を強く受ける black p brane の極近傍の任意の高エネルギーモードのみである。そこで black p brane 付近 ( $\frac{R}{r} \gg 1$ ) の計量を見ると、これは

$$ds^2 \sim \left[ \frac{r^2}{R^2} (-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{R^2}{r^2} dr^2 \right] + R^2 d\Omega_5^2, \quad (2.4.8)$$

で与えられる。この大括弧の中身は、 $R$  を AdS 半径とする AdS 時空の Poincaré パッチに他ならない。すなわち、この場合は  $\text{AdS}_5 \times S^5$  時空中の IIB 型超弦理論と、black p brane から離れた時空中の低エネルギーモードが残る。

これらの結果を比較すると、どちらも共通した D ブレーン遠方の IIB 型超弦理論と、相異なる D

ブレーン上の低エネルギー有効理論から成っている。これらは同じ状況を記述しているはずであるから、後者の部分についても同一性を期待することで、 $\text{AdS}_5 \times S^5$  上の IIB 型超弦理論は、4次元  $\mathcal{N} = 4$   $U(N)$  super Yang-Mills 理論<sup>\*12</sup> に等価であるという予想が成り立つ [7]。例えばそれぞれの理論が持つ対称性について確認すると、 $\text{AdS}_5$  と  $\text{CFT}_4$  はどちらも  $SO(2, 4)$  の下で対称であり、さらにゲージ理論側の  $R$ -symmetry  $SU(4) \cong SO(6)$  は  $S^5$  と同じ対称性であることが分かる。

上記における双対性の導出では、ある種の低エネルギー極限を考えていた。これに対応して、それぞれの理論に含まれるパラメータの振る舞いには制限が入る。重力側のパラメータは、弦の長さスケール  $l_s$ 、AdS 半径  $R$ 、Newton 定数  $G_N^{(10)}$  の比を取った無次元量で表され、ゲージ理論側のパラメータと次のように対応している。

$$\frac{R^4}{l_s^4} \propto g_{YM}^2 N (\equiv \lambda), \quad (2.4.9)$$

$$\frac{G_N^{(10)}}{l_s^8} \propto \frac{\lambda^2}{N^2}, \quad (2.4.10)$$

ここで  $g_{YM}$  は Yang-Mills coupling、 $\lambda$  は 't Hooft coupling である。超重力理論で超弦理論のスペクトルから生じる高階微分の効果を見捨てるのは、AdS 半径  $R$  が弦の長さスケール  $l_s$  よりも十分に大きいときであり、それはゲージ理論側では強結合極限 (strong coupling limit)

$$\lambda \gg 1, \quad (2.4.11)$$

に対応する。また量子補正を見捨てた古典重力解による記述を用いることができるのは、Newton 定数が十分に小さい場合、すなわちゲージ理論側の large  $N$  limit

$$N \gg 1, \quad (2.4.12)$$

である。これらの高階微分の補正効果 ( $\alpha'$  corrections) と、量子効果によるループ補正効果 (quantum correction) は、極限を緩めることで摂動的に寄与してくる。特に AdS 半径を  $R = 1$  と置く convention では、これらの補正は

$$\alpha' \sim \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \quad G_N \sim \frac{1}{N^2}, \quad (2.4.13)$$

のオーダーで現れる。上記の導出では、 $\text{AdS}_5 \times S^5$  上の古典的な IIB 型超重力理論と、large  $N$  強結合極限を取った 4次元  $\mathcal{N} = 4$   $SU(N)$  super Yang-Mills 理論の等価性が  $\alpha'$  と  $G_N$  の摂動論の範

<sup>\*12</sup> 実際は  $U(N) \cong SU(N) \times U(1)$  の  $U(1)$  は抜け落ちて  $SU(N)$  が残ることが知られている。この自由度は singleton と呼ばれており、AdS boundary に局在するため bulk 内部の議論には寄与しない [52]。

囲で正当化される。この双対性が摂動論を超えて任意の  $\lambda$ ,  $N$  で成り立つと予想するのが強い形式の AdS/CFT 対応である。

以上で見たように、場の理論側にゲージ理論が現れることから、AdS/CFT 対応はゲージ重力対応 (gauge/gravity correspondence) と呼ばれることもある\*13。この例は AdS<sub>5</sub>/CFT<sub>4</sub> 対応を成り立たせる具体的なモデルを与える。この他には D1-D5 ブレーンを用いた AdS<sub>3</sub>/CFT<sub>2</sub> 対応や、M ブレーンの議論から導出された AdS<sub>4</sub>/CFT<sub>3</sub> 対応の ABJM モデル [53] などがよく知られている。これらの対応関係においては、通常計算が困難な強結合 large  $N$  ゲージ理論が弱結合の重力理論によって記述できるため、ゲージ理論側の物理量 (Wilson loop など) を比較的容易な幾何学的方法によって計算することができる。

## 2.4.2 AdS/CFT's Dictionary

一般の AdS/CFT 対応を論じる上では、重力側の対象とゲージ理論側の対象の対応関係を記した“辞書”を用いる。その際、 $d+1$  次元 AdS 時空の境界  $\mathcal{B}_d$  上に  $d$  次元 CFT が住んでいると見做すトリックを用いると便利である。この意味で重力を bulk の理論、ゲージ理論を boundary の理論と呼ぶ。

まず AdS/CFT 対応の基本原則として、分配関数の対応は

$$Z_{\text{string}} = Z_{\text{CFT}}, \quad (2.4.14)$$

で与えられる。

AdS 時空上の場  $\phi$  に対して、共形場理論上のある演算子  $\mathcal{O}$  が対応する (field-operator correspondence)。ここで  $\phi$  は dilaton や graviton など  $d+1$  次元 AdS 時空上の超重力理論に含まれる場や弦の励起モードが想定されている。bulk のある場にどのような boundary の演算子が対応するかは両者の理論に共通する  $SO(2,4)$  対称性による分類を用いて調べられている [54]。例として、質量  $m$  の massive free scalar の対応を考える。(Lorentzian) Poincaré AdS 時空上の運動方程式を解いて、特に境界付近  $z \rightarrow 0$  における古典解の振る舞いを見ると、

$$\phi(x, z) \sim z^{d-\Delta} \phi_0(x) + z^\Delta \phi_+(x), \quad (z \rightarrow 0), \quad \Delta_m = \frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2 R^2}, \quad (2.4.15)$$

\*13 歴史的には、元々弦理論は強い相互作用を記述する理論の候補として提案された。現在では強い相互作用は QCD で記述されることが分かっているが、 $SU(N)$  ゲージ理論における large  $N$  limit の相関関数に現れる planar diagram と、弦理論における散乱振幅の摂動計算との類似性は古くから指摘されていた。

のように2つ解が現れる。前者の境界で発散する項を non-normalizable、後者の境界でゼロになる項を normalizable と呼ぶ。non-normalizable な場は境界上の共形場理論の変形に、normalizable な場は共形場理論における励起モードにそれぞれ対応する。すなわち、 $\phi_0(x)$  は  $d$  次元共形場理論を変形する source term として

$$I_{CFT} + \int d^d x \phi_0(x) \mathcal{O}(x), \quad (2.4.16)$$

の形で現れる。ここで  $\mathcal{O}$  は  $\phi$  に対応する共形場理論のスカラー演算子であり、共形次元は  $\Delta_m$  で与えられる。また  $\phi_+(x)$  は演算子  $\mathcal{O}$  の期待値

$$\phi_+(x) = \langle \mathcal{O}(x) \rangle, \quad (2.4.17)$$

に対応する。一般に場  $\phi$  の表現や質量の情報は対応する演算子  $\mathcal{O}(x)$  の表現や共形次元に反映され、その境界付近における振る舞いが  $\mathcal{O}$  と上記のように関係している [55]。スカラー場の他には例えば spin-2 massless field (graviton) の場合は共形場理論のエネルギー運動量テンソル  $T_{\mu\nu}$  (共形次元  $\Delta = d$ ) に対応する。

一般に場の効果を含めた分配関数の関係式は

$$Z_{string}[\phi(x, z)|_{z=0} = \phi_0(x)] = \langle e^{-\int d^d x \phi_0(x) \mathcal{O}(x)} \rangle_{CFT}, \quad (2.4.18)$$

で与えられる。これは GKPW 関係式と呼ばれている [56, 54]。特に重力側の古典極限を考えると、共形場理論の generating functional は、与えられた境界条件  $\phi_0(x)$  を満たすような (超) 重力理論の on-shell action によって与えられる。

$$\langle e^{\int d^d x \phi_0(x) \mathcal{O}(x)} \rangle_{CFT} \sim e^{iI_{cl}[\phi(x, z)|_{z=0} = \phi_0(x)]}. \quad (2.4.19)$$

相関関数は generating functional の source に関する汎関数微分から求められる。上記の関係式を用いると、共形場理論の相関関数を重力理論における古典作用から計算できる。これを Euclidean AdS/CFT 対応で考える。この際、境界条件  $\phi_0(x)$  を顕に反映させるために、運動方程式の解を

$$\phi(x, z) = \int d^d y K_{\Delta}(x, z; y) \phi_0(y), \quad (2.4.20)$$

と表すと便利である。ここで  $(x, z)$  は AdS 時空における bulk の座標、 $y$  は boundary 上の座標である。  $K_{\Delta}(x, z; y)$  は bulk-to-boundary propagator と呼ばれる。例えば bulk 上のスカラー場に関する

る Klein-Gordon 方程式  $(\square - m^2)\phi = 0$  を考えると、 $K_\Delta$  は

$$(\square - m^2)K_\Delta(x, z \neq 0; y) = 0, \quad (2.4.21)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} (z^{\Delta-d} K_\Delta(x, z; y)) = \delta^d(x - y), \quad (2.4.22)$$

を満たすように取る。すると  $\phi(x, z)$  は確かに運動方程式を満たし、かつ  $z \rightarrow 0$  の極限で

$$\lim_{z \rightarrow 0} \phi(x, z) = \lim_{z \rightarrow 0} \int d^d y (z^{\Delta-d} K_\Delta(x, z; y)) (z^{d-\Delta} \phi_0(y)) \sim z^{d-\Delta} \phi_0(y), \quad (2.4.23)$$

となり、式 (2.4.15) を再現する<sup>\*14</sup>。この解は

$$K_\Delta(x, z; y) = \frac{\Gamma(\Delta)}{\pi^{d/2} \Gamma(\Delta - \frac{d}{2})} \left( \frac{z}{z^2 + (x - y)^2} \right)^\Delta, \quad (2.4.24)$$

で与えられる。これを重力の古典作用に代入して、 $\phi_0$  による汎関数微分の後には  $\phi_0 = 0$  と置くことで、共形場理論の相関関数が再現される。尚、通常の  $d + 1$  次元時空中の Green 関数  $G_\Delta(x, z; y, w)$  は bulk-to-bulk propagator と呼ばれる。

重力理論において、作用など境界までの領域を含んだ計算は、一般に無限大の体積の効果 (IR 効果) で発散する。そこで cut-off を入れる必要性が出てくる (ホログラフィック繰り込み、付録 9.1 を参照)。AdS 側の Poincaré パッチにおける

$$z = \epsilon, \quad (2.4.25)$$

の cut-off は、CFT 側の UV cut-off に対応する (IR-UV relation)[57]。実際、共形場理論の dilatation は AdS 時空中では  $x \rightarrow \lambda x$ ,  $z \rightarrow \lambda z$  というスケール変換に対応しており、boundary の  $z = 0$  は UV 極限に、 $z = \infty$  は IR 極限に対応している。

ゲージ理論の典型的な物理量である Wilson loop は、D ブレーンを用いた議論から、AdS 時空中の boundary 上に描いた Wilson loop を端を持った最小曲面で与えられることが知られている。これは後に現れるホログラフィックエンタングルメントエントロピーの計算に類似している。

AdS/CFT 対応は一般に、あるクラスの共形場理論が、漸近 AdS 時空中の量子重力理論と等価になるという予想である。この際、全ての共形場理論が古典的な AdS 時空中に対応しているわけではない。前節の例で見たように、古典重力理論 (超重力理論) によるよい記述を持つためには、重力の量子補正を消す large  $N$  極限と、高階スピンの効果を消す強結合性  $\lambda \rightarrow \infty$  が必要であった。これは一般には、ゲージ理論側が持つ実効的な自由度  $N_{eff}$  が無限大になること、および理論の低エネルギー

<sup>\*14</sup> Euclidean AdS 時空中の議論では、non-normalizable の項しか現れない [54]。



ギースペクトルに大きなギャップがある状況に相当する。これらの条件を満たし、重力双対を持つ共形場理論を holographic CFTs と呼ぶ。特に一般の 2 次元共形場理論では中心電荷  $c$  が自由度  $N_{eff}$  に相当する。

共形場理論が時空  $\mathcal{B}_d$  上で定義されているとき、その重力双対  $\mathcal{M}_{d+1}$  は  $\mathcal{B}_d$  を境界に持っている ( $\partial\mathcal{M}_{d+1} = \mathcal{B}_d$ )。

AdS/CFT 対応は量子重力理論側の Hilbert 空間の元と holographic CFT の Hilbert 空間の元が 1 対 1 に対応することを主張する。例えば、共形場理論の低エネルギーの励起状態は bulk の重力子が励起している相、高エネルギーの状態は励起した超弦が集まってブラックホールを形成している相に対応する。特に背景時空  $\mathcal{M}_{d+1}$  に注目すると、共形場理論の異なる量子状態はそれぞれ異なる漸近 AdS 時空に対応する<sup>\*15</sup>。すなわち、異なる量子状態には異なる演算子の期待値 (1 点関数) が与えられ、その情報は (2.4.17) によって bulk の場の境界条件に反映される。古典的な背景時空は、その境界条件を満たすような bulk の運動方程式 (例えば  $\alpha' \rightarrow 0$ ) の解として決定される<sup>\*16</sup>。本論文で用いる具体例としては、共形場理論の基底状態およびその低エネルギー励起状態は、pure AdS 時空上の量子状態に対応している。

$$|\text{vacuum}\rangle \sim \text{pure AdS}, \quad (2.4.26)$$

$\partial\mathcal{M}_{d+1} = \mathcal{B}_d$  という条件からは、Minkowski 時空  $\mathbb{R}^{1,d-1}$  上の真空には Poincaré AdS 時空が、 $\mathbb{R} \times S^d$  上の真空には global AdS 時空が対応することが分かる。

また有限温度状態 (thermal state) は AdS ブラックホール上の量子状態に対応する。

$$\rho_{\text{th}} = \frac{e^{-\beta H}}{Z} \sim \text{AdS black hole}, \quad (2.4.27)$$

同様に、 $\mathcal{B}_d = \mathbb{R}^{1,d-1}$  上の場合には planar AdS ブラックホール時空、 $\mathcal{B}_d = \mathbb{R} \times S^d$  上の場合には global AdS ブラックホール時空が対応する。さらに共形場理論を 2 つコピーした場の理論上で定義

<sup>\*15</sup> ただし全ての量子状態が古典的時空による描像を持つわけではない。例えば AdS 時空による古典的描像を持つ 2 つの量子状態を量子的に重ね合わせた状態は、真に量子的な時空に対応すると予想されている。古典的時空に対応する量子状態の空間は、後述の理由により code subspaces と呼ばれている。また正確には、量子状態はある時間一定面上に定義されるため、bulk の時空との対応には時間発展も考慮する必要がある。例えば quench 後などの非定常な量子状態には、bulk 側の非定常な時空が対応する。

<sup>\*16</sup> この手続きは、一般の量子状態に対しても行うことができる。しかし、その結果がホログラフィーの処方と常に整合するとは限らない。例えば、任意の共形場理論の真空に対してこの手続きは bulk に pure AdS 時空を再現するが、bulk と boundary でそれぞれ計算したエンタングルメントエントロピーは一般には同じにならない [58]。

された thermofield double state (TFD)

$$|\text{TFD}\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_n e^{-\frac{\beta E_n}{2}} |E_n\rangle_1 \otimes |E_n\rangle_2, \quad (2.4.28)$$

は、拡張されたブラックホール時空に対応する [59]。

$$|\text{TFD}\rangle \sim \text{maximally extended AdS black hole}, \quad (2.4.29)$$

ここで  $|E_n\rangle_{1,2}$  はそれぞれの共形場理論におけるエネルギー固有状態、 $Z(\beta)$  は1つの共形場理論における分配関数である。 $|\text{TFD}\rangle$  を片方の共形場理論に制限した量子状態、すなわち縮約密度行列は、逆温度  $\beta$  の有限温度状態に対応する。これを反映して、時空は2つのブラックホール時空を wormhole で結びつけた時空になっている。特に2つの共形場理論の間に相互作用を手で加えて  $|\text{TFD}\rangle$  を時間発展させた時空は traversable wormhole に対応する [60]。

この他、例えば共形場理論の local quench に対応する時空 [61] や global quench に対応する時空 [9, 62, 63, 64]、local projection や swapping などの量子操作を行った状態に対応する時空 [65] などが議論されている。

如何なる共形場理論ないし量子状態が古典重力による描像を持つか、または逆に、如何なる時空上の量子重力がゲージ理論による描像を持つか、は AdS/CFT 対応のメカニズムに関連する重要な未解決問題である。これらの問いに対して、後に議論する量子情報理論による手法を用いることで、一定の条件付けを与えることができる。

尚、本論文で主に扱う AdS/CFT 対応の他、ホログラフィー原理の実現例としてゲージ理論側が Lifshitz-fixed points 上の非相対論的な場の理論に対応する例 [30] や、Kerr/CFT 対応 [66]、dS/CFT 対応 [67] などへの拡張も議論されている。

## 第3章

# 量子情報理論

一般に「量子情報科学」と呼ばれる領域には、量子アルゴリズムや量子計算量理論、量子暗号、量子通信技術から量子基礎論、量子重力理論まで幅広い分野が含まれる。これらの研究は1990年代以降、情報科学、物理学、数学、計算機科学等の広汎な分野を巻き込みながら理論・実験の両面で発展を続けている。本論文では、それらの中でも特に情報理論的な側面に焦点を当てた量子情報理論の知見を頻繁に用いる。

量子情報理論 (quantum information theory) は、物理系の量子状態に対する操作、分類、特徴付けなどを扱う学問である。Shannon が創始した古典情報理論ではコインの表裏などの古典的な状態 (bit) が情報の基礎単位となることに対して、量子情報理論では  $\text{spin-}\frac{1}{2}$  系や光子の偏光状態などの量子的な2準位状態 (qubit) を基礎単位として扱う。量子状態に対するさまざまな量子操作を考える際には、量子もつれが基本的な計算資源としての役割を果たす。

本章では、以下の章に現れる量子情報理論の基礎的な概念について、必要な事項に絞って簡単にレビューする。

### 3.1 純粋状態と混合状態

量子力学では物理系の量子状態を Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  の元によって表現する。一方、量子測定や部分トレースなどの情報論的な操作を施した後の物理系、あるいは熱状態や雑音を受ける系など、Hilbert 空間の元として表せない量子状態が存在する。これらを統一的な枠組みで扱うために、まずは量子状態の定義を Hilbert 空間の元から拡張する必要がある。

ある物理系  $\mathcal{H}$  に対する (一般化された) 量子状態を、Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  上の密度行列 (density

matrix) によって定義する。

$$\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) \text{ s.t. } \text{Tr}\rho = 1, \rho \geq 0. \quad (3.1.1)$$

ここで  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  は密度行列、すなわち、Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  上のトレースが 1 に規格化された正值作用素の集合である。量子情報理論では、 $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  によって物理系  $\mathcal{H}$  の取り得るすべての量子状態を表す。

物理系が量子状態  $\rho$  にあるとき、物理量  $A = \sum_n a_n P_n$  の測定を行った結果、測定値として  $a_n$  を得る確率  $p(n)$  を

$$p(n) := \text{Tr}\rho P_n = \langle a_n | \rho | a_n \rangle, \quad (3.1.2)$$

によって定義する。ただし  $P_n$  は (縮退した) 固有空間への射影演算子  $P_n := |a_n\rangle \langle a_n|$  である。ここから量子状態  $\rho$  における物理量  $A$  の期待値は

$$\langle A \rangle_\rho := \sum_n p(n) a_n = \text{Tr}\rho \left( \sum_n a_n P_n \right) := \text{Tr}\rho A, \quad (3.1.3)$$

と表される。 $\rho$  が以下に述べる純粋状態のとき、これらの定義は通常量子力学における確率と期待値の定義に戻る。

$\mathcal{S}(\mathcal{H})$  のうち、Hilbert 空間の元として表すことができる量子状態を、純粋状態 (pure states) と呼ぶ。量子力学に現れる波動関数はすべて純粋状態である。これは密度行列として見たとき、ランク 1 の行列に対応する。

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H} \iff \rho = |\psi\rangle \langle \psi| \in \mathcal{S}(\mathcal{H}). \quad (3.1.4)$$

以下では純粋状態に関して、ランク 1 の密度行列と Hilbert 空間の元を特に区別せずに扱う。一

純粋状態の確率的な足し合わせによって作られる状態を混合状態 (mixed state) と呼ぶ。一般に、純粋状態  $\{|\psi_i\rangle\}_{i=1}^N$  を確率  $\{p_i\}_{i=1}^N$ ,  $p_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^N p_i = 1$  によって足し合わせた混合状態は、

$$\rho = \sum_{i=1}^N p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \in \mathcal{S}(\mathcal{H}), \quad (3.1.5)$$

と書ける。量子状態の集合  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  において、純粋状態は混合状態の集合の端点になっている (図 3.1.1)。例えば、spin  $-\frac{1}{2}$  系の  $\sigma_z$  の固有状態について、 $|0\rangle$  を  $p$ 、 $|1\rangle$  を  $1-p$  の確率で準備する状況を表す量子状態は、密度行列を用いて

$$\rho = p|0\rangle \langle 0| + (1-p)|1\rangle \langle 1|, \quad (3.1.6)$$

と表せる。この量子状態は量子的な重ね合わせ  $|\psi\rangle = \sqrt{p}|0\rangle + \sqrt{1-p}|1\rangle$  とは異なる状態である (これは例えば  $\sigma_x$  方向の測定によって判断できる)。他にカノニカルアンサンブルによって表される

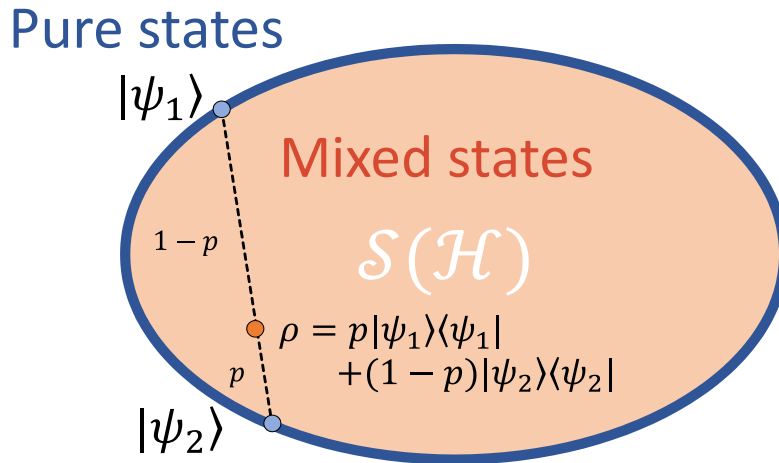


図 3.1.1 量子状態の空間  $S(\mathcal{H}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$  における純粋状態と混合状態。混合状態は純粋状態の凸結合によって表される。

熱平衡状態 (thermal state, Gibbs state) は典型的な混合状態である。

$$\rho_{\text{th}} := \frac{e^{-\beta H}}{Z(\beta)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\beta E_n}}{Z(\beta)} |E_n\rangle\langle E_n|. \quad (3.1.7)$$

ここで  $\beta$  は逆温度、 $H$  は系の Hamiltonian、 $Z(\beta) = \text{tr} e^{-\beta H}$  は分配関数である。これらの例から分かるように、量子状態の混合操作によって現れるランダムネスは純粋に古典的なものである。

## 3.2 Entangled states と Separable states

量子多体系の量子状態に特有の相関として、量子もつれ (quantum entanglement) と呼ばれる非局所相関がある。これはその存在を最初に指摘した Einstein-Podolsky-Rosen[68] らの頭文字を取って EPR 相関とも呼ばれる。エンタングルメントは古典情報理論の範疇を超えた情報操作を構築するためのリソースとして、様々な量子計算プロトコルの基礎となっている。

量子もつれは、典型的には、次のような 2 体 (bipartite) の 2 準位系の量子状態に含まれている。2

つの spin- $\frac{1}{2}$  系  $\mathcal{H}_A$  と  $\mathcal{H}_B$  に対して、全体系  $\mathcal{H}_{AB} := \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ <sup>\*1</sup> における次の量子状態を考える。

$$|\Psi\rangle_{AB} := \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B) \quad (3.2.1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\theta\rangle_A \otimes |\theta\rangle_B + |\theta_\perp\rangle_A \otimes |\theta_\perp\rangle_B) \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B. \quad (3.2.2)$$

ここで  $\{|\theta\rangle, |\theta_\perp\rangle\}$  は 2 次元 Hilbert 空間の基底

$$\begin{pmatrix} |\theta\rangle \\ |\theta_\perp\rangle \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |0\rangle \\ |1\rangle \end{pmatrix}, \quad (3.2.3)$$

である。量子状態  $|\Psi\rangle_{AB}$  に相当する物理系は EPR pair (または ebit) と呼ばれ、2 体純粋状態エンタングルメントの基礎単位になる。

量子系  $\mathcal{H}_A$  と  $\mathcal{H}_B$  (以下、量子情報理論の慣習に従って Alice と Bob と表記する) の間の EPR pair には、次の意味で非局所的な相関が存在する [69]: 任意の  $\theta \in \mathbb{R}$  に関して、基底  $\{|\theta\rangle_{A,B}, |\theta_\perp\rangle_{A,B}\}$  に対応する測定をそれぞれが独立に行った結果は、Alice と Bob で互いの物理的な距離に関係なく常に一致する。この相関は、古典的な混合によって作ることができる相関よりも遥かに強いものである。例えば、 $|\Psi\rangle_{AB}$  に類似する状況として、コインの表裏 (0 or 1) に合わせて固有状態を準備した 2 つのスピンを Alice と Bob が離れて持っている状況は、混合状態

$$\sigma_{AB} = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0|_A \otimes |0\rangle\langle 0|_B + |1\rangle\langle 1|_A \otimes |1\rangle\langle 1|_B), \quad (3.2.4)$$

によって表せる。一方、 $|\Psi\rangle_{AB}$  に対応する密度行列は

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle\langle\Psi|_{AB} &= \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0|_A \otimes |0\rangle\langle 0|_B + |1\rangle\langle 1|_A \otimes |1\rangle\langle 1|_B \\ &\quad + |0\rangle\langle 1|_A \otimes |0\rangle\langle 1|_B + |1\rangle\langle 0|_A \otimes |1\rangle\langle 0|_B), \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

である。 $z$  方向のスピンの  $\sigma_z$  を測定する場合は、量子状態  $\sigma_{AB}$  においても、 $|\Psi\rangle_{AB}$  と同じように Alice と Bob は常に同じ測定結果を得る。ところが、 $\sigma_{AB}$  で  $x$  方向のスピンを測定すると、 $|\Psi\rangle_{AB}$  の状態にあったような結果の一致性は失われ、Alice と Bob の測定結果の間に相関は見られなくなる。それぞれの表式を比較すると、 $|\Psi\rangle\langle\Psi|_{AB}$  に見られる非対角項が量子もつれの効果を表していることが分かる。

量子もつれを含む一般の量子状態 (entangled states) は、無相関にある量子状態の混合操作では表

\*1 本論文では、表記の簡約のため、系  $A, B$  に対して  $AB := A \cup B$  と略記する記法を頻繁に用いる。

せない量子状態として定義される。

$$\rho \text{ is entangled} \stackrel{\text{def}}{\iff} \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) \setminus \text{Sep}(\mathcal{H}). \quad (3.2.6)$$

ここで2体系における分離可能状態 (separable states) の集合 ( $\text{Sep}(\mathcal{H}_{AB}) \subset \mathcal{S}(\mathcal{H}_{AB})$ ) を

$$\rho_{AB} \text{ is separable} \quad (3.2.7)$$

$$\iff \exists \{\rho_i^{(A,B)}\}_{i=1}^N \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_{A,B}), \{p_i\}_{i=1}^N \text{ s.t. } \rho = \sum_{i=1}^N p_i \rho_i^{(A)} \otimes \rho_i^{(B)}, p_i \geq 0, \sum_{i=1}^N p_i = 1, \quad (3.2.8)$$

によって定義する。例えば式 (3.2.4) の  $\sigma_{AB}$  は separable state であり、 $|\Psi\rangle\langle\Psi|_{AB}$  は entangled state である。

以下、量子もつれによる相関を量子相関 (quantum correlation)<sup>\*2</sup>、状態の混合操作による相関を古典相関 (classical correlation) と呼んでこれを区別する。またこれらの相関を合わせたものを総相関 (total correlation) と呼ぶことがある。

量子もつれの大きさを定量化する情報量をエンタングルメント測度 (entanglement measures) と呼ぶ。一般にエンタングルメントの種類には、二体 or 多体 (bipartite or multipartite)、純粋状態 or 混合状態 (pure or mixed) に応じて4つの分類がある。最も基本的な状況である2体・純粋状態に関しては次節で紹介するエンタングルメントエントロピーによって一意的に定量化される。一方、多体または混合状態に関するエンタングルメント測度の決定版は未だに得られておらず<sup>\*3</sup>、重要な未解決問題になっている。

### 3.3 各種の情報量

#### 3.3.1 von Neumann エントロピー

量子状態の混合度を定量化する指標として、量子状態  $\rho$  に対する von Neumann エントロピー  $S(\rho)$  を次式で定義する。

$$S(\rho) := -\text{Tr} \rho \log \rho = -\sum_i p_i \log p_i \geq 0. \quad (3.3.1)$$

<sup>\*2</sup> “Quantum correlation” は最近では必ずしも量子もつれだけを意味しないが、本論文では量子もつれのみを取り扱う。尚、量子もつれ以外に関しては discord 等を用いた定量化が議論されている。

<sup>\*3</sup> 2体混合状態のエンタングルメント測度に関しては squashed entanglement と呼ばれる情報量が最も理想的な性質を満たすことが知られている [70]。しかし、この情報量の定義には複雑な最適化操作が含まれているため、具体的な計算の実行が困難であるという欠点を持つ。詳しくは付録 9.3 を参照。

ここで  $\{p_i\}_{i=1}^N$  は密度行列  $\rho = \sum_{i=1}^N p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$  の固有値である。ただし  $0 \log 0 = 0$  と規約する。 $S(\rho)$  は確率分布  $\{p_i\}_{i=1}^N$  に対する古典情報理論における Shannon エントロピーに等しい。純粋状態に対しては、常に  $S(\rho) = 0$  である。例えば熱状態の von Neumann エントロピーは、

$$S(\rho_{\text{th}}) = -\text{Tr} \rho_{\text{th}} \log \frac{e^{-\beta H}}{Z(\beta)} \quad (3.3.2)$$

$$= \beta \langle H \rangle_{\text{th}} + \log Z(\beta) \quad (3.3.3)$$

$$= \beta (\langle H \rangle_{\text{th}} - F), \quad (3.3.4)$$

となり、通常の統計力学のエントロピーと一致する。ここで  $\langle H \rangle_{\text{th}}$  は熱状態における期待値  $\langle H \rangle_{\text{th}} := \text{Tr} \rho_{\text{th}} H$ 、 $F$  は自由エネルギー  $F := -\frac{1}{\beta} \log Z(\beta)$  である。また二行目で演算子について成り立つ式  $\log(AB) = \log A + \log B$  および射影演算子  $P^2 = P$  の性質  $\log(aP) = (\log a)P$  を用いた。

また一般に von Neumann エントロピーはテンソル積に対して加法的である：

$$S(\rho \otimes \sigma) = S(\rho) + S(\sigma). \quad (3.3.5)$$

すなわち 2 つの独立な系に対応するエントロピーは、それぞれのエントロピーの和となる。

### 3.3.2 エンタングルメントエントロピー

2 体系の純粋状態のエンタングルメントに関しては、エンタングルメントエントロピー (entanglement entropy) が一意的な定量化を与える。

まずは Hilbert 空間  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  上の一般の線形作用素  $\mathcal{O}_{AB} = \sum_n \mathcal{O}_n^{(A)} \otimes \mathcal{O}_n^{(B)} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$  に対して、部分トレース (partial trace) を次のように定義する ( $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  は  $\mathcal{H}$  上の線形作用素の集合)。

$$\mathcal{O}_A := \text{Tr}_B \mathcal{O}_{AB} = \sum_n \left[ \text{Tr}_B \mathcal{O}_n^{(B)} \right] \mathcal{O}_n^{(A)}. \quad (3.3.6)$$

これを用いて、全体系の量子状態  $\rho_{AB}$  に対する部分系の縮約密度行列 (reduced density matrix)  $\rho_A$  を次のように定義する。

$$\rho_A := \text{Tr}_B \rho_{AB}. \quad (3.3.7)$$

縮約密度行列は、部分系の observable のみを観測できる observer にとっての量子状態を表している。すなわち、部分系  $\mathcal{H}_A$  上のみ作用する任意の物理量  $O_A$  に対して、全体系の量子状態  $\rho_{AB}$  による期待値は、

$$\text{Tr}_{AB} [\rho_{AB} O_A \otimes I_B] = \text{Tr}_A [O_A (\text{Tr}_B \rho_{AB})] = \text{Tr}_A [O_A \rho_A], \quad (3.3.8)$$



となり、部分系の量子状態を  $\rho_A$  であると見做したときの期待値と一致している。3体以上の多体系についても、部分トレース、縮約密度行列は同様に定義される。

全体系を  $A$  と  $B(\equiv A^c)$  の2つに分割したとき、量子状態  $\rho_{AB}$  に関するエンタングルメントエントロピー  $S_A$  を、縮約密度行列  $\rho_A$  の von Neumann エントロピーとして定義する。

$$S(\rho_A) := -\text{Tr} \rho_A \log \rho_A (\equiv S_A). \quad (3.3.9)$$

これが量子もつれの測度として機能することを見るために、任意の2体系の純粋状態  $|\psi\rangle_{AB}$  は、常に次の形に分解できることに注意する [69]。

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i=1}^N \sqrt{p_i} |\lambda_i^{(A)}\rangle_A \otimes |\lambda_i^{(B)}\rangle_B. \quad (3.3.10)$$

この分解は Schmidt decomposition と呼ばれる。ここで  $\dim \mathcal{H}_{A,B} = d_{A,B}$  と書いたとき  $N = \min\{d_A, d_B\}$  であり、 $\{|\lambda_i^{(A)}\rangle_{A(B)}\}_{i=1}^N$  はそれぞれ  $\mathcal{H}_{A(B)}$  の正規直交基底である。量子状態  $|\psi\rangle_{AB}$  が含む量子もつれの大きさは、Schmidt coefficient  $\{p_i\}_{i=1}^N$  ( $p_i \geq 0$ ,  $\sum_i p_i = 1$ ) の分布として現れている。例えば、全く相関の無い直積状態 (product states) であれば  $p_1 = 1$ ,  $p_{i \geq 2} = 0$  であり、最もエンタングルメントしている状態 (maximally entangled states) であれば  $p_i = 1/N$  ( $i = 1, \dots, N$ ) となる。縮約密度行列を Schmidt decomposition を用いて表すと、

$$\rho_A = \text{Tr}_B |\psi\rangle\langle\psi|_{AB} = \sum_{i=1}^N p_i |\lambda_i^{(A)}\rangle\langle\lambda_i^{(A)}|_A, \quad (3.3.11)$$

と書ける。すなわち、全体系の純粋状態は部分系をトレースアウトすることで混合状態となり、量子もつれとして含まれていた相関は縮約密度行列の混合度として現れることが分かる。この表式から、 $|\psi\rangle_{AB}$  のエンタングルメントエントロピーは、

$$S_A = -\sum_{i=1}^N p_i \log p_i \geq 0, \quad (3.3.12)$$

と書ける。このようにエンタングルメントエントロピーは、Schmidt coefficient を通して、元の量子状態  $|\psi\rangle_{AB}$  に存在する部分系  $A$  と  $B$  の間のエンタングルメントの大きさを測る指標となっている。

Schmidt decomposition を用いた構成法から明らかなように、純粋状態に関しては、エンタングルメントエントロピーには常に

$$S_A = S_{A^c}, \quad (3.3.13)$$

が成り立つ。一方、混合状態に関しては、エンタングルメントエントロピーは量子もつれの測度として用いることは出来ない。例えば  $\sigma_{AB}$  について計算してみると、

$$\sigma_A = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0|_A + |1\rangle\langle 1|_A), \quad (3.3.14)$$

であることから、

$$S(\sigma_A) = 2 \log 2 > 0, \quad (3.3.15)$$

となり、エンタングルメントエントロピーは separable な混合状態  $\sigma_{AB}$  に含まれていた古典的な相関を検出してしまうことが分かる。また混合状態の場合、一般には  $S_A \neq S_B (= S_{A^c})$  となる。これは  $A, B$  系の相関の測度として満たすべき  $A \leftrightarrow B$  の対称性を破ることを意味する。

現在までに数多くのエンタングルメント測度が提案されているが、適当な性質（公理系）を満たす任意のエンタングルメント測度は純粋状態の2体量子もつれに関してはエンタングルメントエントロピーと本質的には一致することが知られている [71]。従って、2体・純粋状態の量子もつれに関しては基本的にエンタングルメントエントロピーを用いて測ることになる。

エンタングルメントエントロピーの（純粋状態・混合状態を問わず成り立つ）基本的な性質を以下にまとめる。尚、これらの性質は適時 von Neumann エントロピーの性質と読み替えても差し支えない。

非負性：

$$S_A \geq 0. \quad (3.3.16)$$

非退化性\*4：

$$S_A = 0 \Leftrightarrow \rho_A \text{ is pure} \Rightarrow A \text{ and } B \text{ are decoupled: } \rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B. \quad (3.3.17)$$

Araki-Lieb 不等式：

$$|S_A - S_B| \leq S_{AB}. \quad (3.3.18)$$

劣加法性 (subadditivity)：

$$S_{AB} \leq S_A + S_B. \quad (3.3.19)$$

強劣加法性 (strong subadditivity)：

$$S_{AB} + S_{BC} \geq S_{ABC} + S_B. \quad (3.3.20)$$

---

\*4 一般に  $\rho_A$  が純粋状態であるとき、系  $A$  は任意の系  $B$  と decouple する。この証明は 7.2.3 節を参照。

### 3.3.3 相互情報量

相互情報量 (quantum mutual information) は、2 体量子系の量子状態に含まれる量子相関および古典相関を合わせて測る情報量の一つである。これは von Neumann エントロピーの線形結合として次式で定義される。

$$I(A : B) \equiv I(\rho_{AB}) := S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}) = S(\rho_A) - S(\rho_{A|B}). \quad (3.3.21)$$

ここで  $S(\rho_{A|B})$  は

$$S(\rho_{A|B}) := S(\rho_{AB}) - S(\rho_B) (\equiv S(A|B)), \quad (3.3.22)$$

で定義される conditional von Neumann エントロピーである\*<sup>5</sup>。この表式から、相互情報量は、部分系  $B$  ( $A$ ) の情報を得た場合の部分系  $A$  ( $B$ ) の情報の減少量を測る情報量と見做せる。この量は  $AB$  系が純粋状態・混合状態のどちらであるときも総相関の測度として用いられる。

相互情報量の一般的な次の性質を以下に述べる。

(I0)  $I$  は常に非負である。

$$I \geq 0. \quad (3.3.23)$$

これは von Neumann エントロピーの subadditivity  $S_A + S_B \geq S_{AB}$  から直ちに従う。

(I1) 純粋状態  $\rho_{AB}$  に関しては、相互情報量の半分はエンタングルメントエントロピーに常に一致する。

$$\frac{I(A : B)}{2} = S_A = S_B \text{ when } \rho_{AB} \text{ is pure.} \quad (3.3.24)$$

(I2) 相互情報量は product states に関して faithful である。

$$I(A : B) = 0 \iff \rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B. \quad (3.3.25)$$

これは後述する量子相対エントロピーの非退化性を用いると容易に示せる。

(I3)  $I(A : B)$  の半分は  $S_A, S_B$  で上から制限される。

$$\frac{I(A : B)}{2} \leq \min\{S_A, S_B\}, \quad (3.3.26)$$

\*<sup>5</sup> 量子論では  $S_{A|B}$  は正にも負にもなり得る情報量である。実際、 $\rho_{AB}$  を量子もつれを持った純粋状態に取ると  $S_{A|B} = -S_B < 0$  となる。

これは次の相互情報量のトレースアウトに対する単調性を用いることで

$$I(A : B) \leq I(A : BE) = S_A + S_{BE} = 2S_A, \quad (3.3.27)$$

と示せる。 $S_B$  についても同様。ただしここで  $\rho_{ABE}$  が pure state となるように  $E$  を取り、純粋状態に関するエンタングルメントエントロピーの性質  $S_A = S_{BE}$  を用いた。この量子状態  $\rho_{ABE}$  は  $\rho_{AB}$  の purification と呼ばれる。詳しくは第7章を参照。

(I4) 相互情報量は部分系の縮小（トレースアウト）に関して単調に減少する。

$$I(A : BC) \geq I(A : B). \quad (3.3.28)$$

これは von Neumann エントロピーの strong subadditivity の相互情報量による表現である。

(I5) 相互情報量は加法性 (additivity) を持つ。

$$I(A_1A_2 : B_1B_2) = I(A_1 : B_1) + I(A_2B_2) \text{ when } \rho_{A_1A_2B_1B_2} = \sigma_{A_1B_1} \otimes \sigma'_{A_2B_2}. \quad (3.3.29)$$

この性質は von Neumann エントロピーの加法性から直ちに誘導される。

(I6) 第7章で議論する entanglement wedge cross section の性質と対比して、相互情報量は strong superadditivity と呼ばれる次の不等式

$$I(A_1A_2 : B_1B_2) \geq I(A_1 : B_1) + I(A_2 : B_2). \quad (3.3.30)$$

を一般には満たさないことに注意しておく。例えば4つのスピン系における混合状態  $\rho = \frac{1}{2}(|0000\rangle\langle 0000| + |1111\rangle\langle 1111|)$  はこの不等式を破る。

### 3.3.4 量子相対エントロピー

量子相対エントロピー (quantum relative entropy, quantum Kullback-Leibler divergence, Umegaki entropy) は、量子状態の空間  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  に“距離”を定義する情報量である。2つの量子状態  $\rho$  と  $\sigma$  に対して、量子相対エントロピー  $S(\rho||\sigma)$  は

$$S(\rho||\sigma) := \text{Tr}\rho(\log \rho - \log \sigma) \geq 0, \quad (3.3.31)$$

で定義される。ここで引数に対称性はなく、一般に  $S(\rho||\sigma) \neq S(\sigma||\rho)$  であることに注意。これらを区別するために、第二引数に入る量子状態を参照状態 (reference state) と呼ぶことがある。

量子相対エントロピーは非退化である、

$$S(\rho||\sigma) = 0 \iff \rho = \sigma. \quad (3.3.32)$$

また  $\rho$  の support が  $\sigma$  の support に含まれない場合は  $S(\rho||\sigma) = +\infty$  となって発散する。

量子相対エントロピーは引数に対称性がなく、また一般には三角不等式も満たさないため、数学的に厳密な意味の距離ではない。一方、仮説検定の議論において、 $S(\rho||\sigma)$  が大きいほど、 $\rho$  と  $\sigma$  の2値の状態識別における誤り確率がサンプル数の増加に応じて早く減少することが知られている (quantum Stein lemma)[72, 73]。この定理と上記の非負・非退化性に基づいて、量子相対エントロピーは一種の距離を量子状態の空間に導入する情報量として広く受け入れられている。尚、一般にこのような情報量は divergence と呼ばれる。

例として、参照状態に熱状態  $\rho_{\text{th}}$  を取ると、

$$S(\rho||\rho_{\text{th}}) = \text{Tr}\rho \log \rho - \text{Tr}\rho \log \frac{e^{-\beta H}}{Z(\beta)} \quad (3.3.33)$$

$$= -S(\rho) + \beta \langle H \rangle_{\rho} + \log Z(\beta) \quad (3.3.34)$$

$$= \beta(F(\rho) - F(\rho_{\text{th}})), \quad (3.3.35)$$

となり、量子相対エントロピーを各量子状態における自由エネルギー  $F(\rho) := \beta(\langle H \rangle_{\rho} - S(\rho)/\beta)$  の差分として表せる。この場合、量子相対エントロピーの非負性  $S(\rho||\rho_{\text{th}}) \geq 0$  は、自由エネルギーが熱状態で最小となることに対応している。

この議論を一般化するために、任意の量子状態  $\rho$  に対して modular Hamiltonian  $K_{\rho}$  を次のように定義する。

$$K_{\rho} := -\log \rho, \quad (3.3.36)$$

これは  $\rho = e^{-K_{\rho}}$  と書けるから、 $K_{\rho}$  の固有値はすべて非負の実数である。 $K_{\rho}$  は量子状態  $\rho$  と同じだけの情報を持っている。これを任意の reference state に用いると、

$$S(\rho||\sigma) = \text{Tr}\rho \log \rho - \text{Tr}\rho \log \sigma \quad (3.3.37)$$

$$= (\text{Tr}\sigma \log \sigma - \text{Tr}\rho \log \sigma) + (\text{Tr}\rho \log \rho - \text{Tr}\sigma \log \sigma) \quad (3.3.38)$$

$$= (\langle K_{\sigma} \rangle_{\rho} - \langle H_{\sigma} \rangle_{\sigma}) - (S(\rho) - S(\sigma)) \quad (3.3.39)$$

$$\equiv \Delta K_{\sigma} - \Delta S, \quad (3.3.40)$$

と書ける。すなわち、量子相対エントロピー  $S(\rho||\sigma)$  は、一般に modular Hamiltonian  $K_{\sigma}$  と von Neumann エントロピーの差分として表すことが出来る。

また量子相対エントロピーと相互情報量には、

$$I(A : B) = S(\rho_{AB} || \rho_A \otimes \rho_B), \quad (3.3.41)$$

の関係がある。これと相対エントロピーの非退化性から、相互情報量の product states に関する faithfulness が直ちに導ける。ただし相互情報量は2体量子系の相関を測る情報量であることに對し、相対エントロピーは量子状態の間の距離を測る情報量であり、その意味合いは全く異なることに注意する。

量子相対エントロピーを用いてエンタングルメント測度を定義することができる。最も頻繁に用いられるものは relative entropy of entanglement (REE) と呼ばれており、量子状態  $\rho_{AB}$  と separable states の最近接距離として次式で定義される [74]。

$$E_R(A : B) \equiv E_R(\rho_{AB}) := \min_{\sigma_{AB} \in \text{Sep}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)} S(\rho_{AB} || \sigma_{AB}). \quad (3.3.42)$$

これは純粋状態に対してはエンタングルメントエントロピーに一致する。

$$E_R(A : B) = S_A = S_B \text{ when } \rho_{AB} \text{ is pure.} \quad (3.3.43)$$

また式 (3.3.41) の性質から、一般の量子状態に関して

$$E_R(A : B) \leq I(A : B), \quad (3.3.44)$$

が従う。この式は  $E_R$  で測った量子相関は  $I$  で測った総相関を超えることはないことを意味する。これはエンタングルメント測度に期待される性質の一つである。

類似のエンタングルメント測度として、引数の位置を入れ替えて、最小化を取る集合を特に局所的には元の量子状態と区別できない separable states

$$\sigma_{AB} \in \text{Sep}(\mathcal{H}) \text{ s.t. } \text{Tr}_A \sigma_{AB} = \rho_B, \text{Tr}_B \sigma_{AB} = \rho_A, \quad (3.3.45)$$

に制限した modified reversed relative entropy of entanglement を次のように定義する [75]。

$$E'_{RR}(\rho_{AB}) := \min_{\sigma_{AB} \in \text{Sep}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B), \sigma_{A,B} = \rho_{A,B}} S(\sigma_{AB} || \rho_{AB}). \quad (3.3.46)$$

このエンタングルメント測度は純粋状態に対してエンタングルメントエントロピーとは一致せず、ゼロになるか無限大に発散する。これは混合状態のエンタングルメント測度に対する良い性質の公理を全ては満たさないためである。一方、 $E'_{RR}$  は数少ない加法性を持つエンタングルメント測度の一

つでもある。

## 第 4 章

# AdS/CFT 対応とエンタングルメントエントロピー

2006 年、AdS/CFT 対応の研究において、共形場理論のエンタングルメントエントロピーが AdS 時空のある種の最小曲面の面積に対応することが発見された [8]。これは Ryu-Takayanagi 公式またはホログラフィックエンタングルメントエントロピー (holographic entanglement entropy, HEE) と呼ばれている。Ryu-Takayanagi 公式は、

$$S_A = \frac{\mathcal{A}(\gamma_A^{\min})}{4G_N}, \quad (4.0.1)$$

の形で表せる。ここで左辺の  $S_A$  は CFT 側の部分系  $A$  とその補集合  $A^c$  の間に定義されたエンタングルメントエントロピー、右辺の  $\mathcal{A}(\gamma_A^{\min})$  は AdS 側で定義されたある曲面  $\gamma_A$  の最小面積を表す。

Ryu-Takayanagi 公式は、量子情報理論の手法に基づいた AdS/CFT 対応の解析を行う最初の例であり、その後の様々な発展の基礎となっている。ホログラフィー原理がブラックホールエントロピーの研究から始まったことを思えば、AdS/CFT 対応を理解するために情報理論の手法が現れるのは自然である。実際、Ryu-Takayanagi 公式は AdS ブラックホールに対する Bekenstein-Hawking 公式の拡張になっていることを後に見る。この公式 (4.0.1) によれば、共形場理論のエンタングルメントエントロピーの構造を詳細に調べることで AdS 時空の幾何学的な情報を得ることができるため、原理的には boundary のエンタングルメントの情報から bulk の時空を再構成できることが期待される [10, 11]。

本章では、まず場の理論におけるエンタングルメントエントロピーの計算手法であるレプリカ法について論じる。この節では特に共形場理論において単純な部分系を取った場合に関する結果を導く。



次に、AdS/CFT 対応における Ryu-Takayanagi 公式の定義を与え、実際に重力側の幾何学量を計算することで公式 (4.0.1) が成り立つことを確認する。さらに Lewkowycz-Maldacena の方法 [18] に従って Ryu-Takayanagi 公式の証明を与える。最後に Ryu-Takayanagi 公式に関する量子補正について議論する。

本章の内容に関連する書籍は [76, 77] を参照のこと。またホログラフィックエンタングルメントエントロピーに関するレビューに [78, 79, 58] がある。

## 4.1 場の理論におけるエンタングルメントエントロピー

エンタングルメントエントロピーは、ある 2 つの部分系  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  上の量子状態  $\rho_{AB}$  に対して、次のように定義される情報量であった。

$$S(\rho_A) = -\text{Tr} \rho_A \log \rho_A = -\sum_n \lambda_n \log \lambda_n. \quad (4.1.1)$$

ここで  $\rho_A$  は縮約密度行列、 $\{\lambda_n\}$  は  $\rho_A$  の非負固有値である。これを計算するためには、一般の量子状態  $\rho_A$  を対角化してすべての固有値を求める必要がある。しかし無限自由度系である場の理論において、この操作を実行するのは困難である。そこで代替的な手法として、場の理論でエンタングルメントエントロピーを計算するためのレプリカ法 (replica method) と呼ばれる方法が知られている。以下でこれを紹介する。

まずエンタングルメントエントロピー  $S_A$  (または  $\rho_A$  の von Neumann エントロピー) を次のように表せることに注目する\*<sup>1</sup>。

$$S_A = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{1}{1-n} \log \text{Tr} [\rho_A^n] = -\lim_{n \rightarrow 1} \partial_n \log \text{Tr} [\rho_A^n]. \quad (4.1.3)$$

ここで Rényi エントロピー (Rényi entropy)

$$S_n(\rho) := \frac{1}{1-n} \log \text{Tr} [\rho^n], \quad (4.1.4)$$

を定義しておくと、一般に

$$S(\rho) = \lim_{n \rightarrow 1} S_n(\rho), \quad (4.1.5)$$

---

\*<sup>1</sup> これは l'Hôpital の定理を用いると

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{1}{1-n} \log \text{Tr} [\rho_A^n] = \lim_{n \rightarrow 1} \left( -\text{Tr} [\rho_A^n]^{-1} \text{Tr} [\rho_A^n \log \rho_A] \right) = S_A, \quad (4.1.2)$$

と確かめられる。

と表せる。式 (4.1.1) ではトレースの内部に  $\log$  が含まれていることが根本的な困難を引き起こしていたが、この表式ではトレース内部は  $\rho$  のべきになっている。このことが場の理論のエンタングルメントエントロピーを経路積分を用いて計算する方法を与える。

さて、場の理論のエンタングルメントエントロピーを考えるに当たり、導入としてまずはスピン系などの格子化された理論を考えよう。全体の Hilbert 空間は、ある Cauchy 面  $\Sigma$  上の各点に存在する自由度の Hilbert 空間に関するテンソル積になってい ( $\mathcal{H}_{tot} = \otimes_{n \in \Sigma} \mathcal{H}_n$ )。標準的には、Cauchy 面としてある時刻一定  $t = t_0$  の空間面 (canonical time slice) を取ることが多い。この系の純粋状態は、無限自由度多体系の状態として

$$|\Phi\rangle \in \mathcal{H}_{tot} = \otimes_{n \in \Sigma} \mathcal{H}_n, \quad (4.1.6)$$

と表せる。ここで  $n$  は Cauchy 面  $\Sigma$  上の全格子点上を走る。

多体系におけるエンタングルメントエントロピーは、全系を2つの部分系に別けることで定義される。すなわち、ある格子点の集合で構成された部分系  $A$  を決めると、それ以外の格子点の集合として  $A^c$  が決まり、全系の Hilbert 空間は

$$\otimes_n \mathcal{H}_n = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_{A^c}, \quad (4.1.7)$$

と2つの部分系のテンソル積に分解して表せる。このとき  $A$  と  $A^c$  の間のエンタングルメントエントロピーは、 $\rho_A$  に関する von Neumann エントロピー

$$S_A \equiv S(\rho_A), \quad \rho_A \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_A), \quad (4.1.8)$$

として定義される\*2。

場の理論は、格子理論の格子間隔を  $\delta \rightarrow 0$  と取った連続極限と考えることができる。場の理論において全 Hilbert 空間の部分 Hilbert 空間  $\mathcal{H}_A$  を指定することは、Cauchy 面上のある空間領域  $A$  を選ぶことに対応する (図 4.1.1)。ここで領域  $A$  の境界  $\partial A$  を entangling surface と呼ぶ。領域は連結に取る必要はなく、一般に非連結成分がいくつあってもよい。

場の理論の量子状態を経路積分を用いて表そう。時刻  $t = 0$  上の全系の基底状態  $|\Omega\rangle$  は、 $t = 0$  時

\*2 正確には、部分系  $A$  の von Neumann エントロピー  $S_A$  がエンタングルメント測度として適当な性質を持つのは、全系  $A \cup A^c$  が純粋状態にあるときのみであることに注意。本論文では通例に従い、全系の純粋性に関わらず  $S_A$  をエンタングルメントエントロピーと呼ぶ。

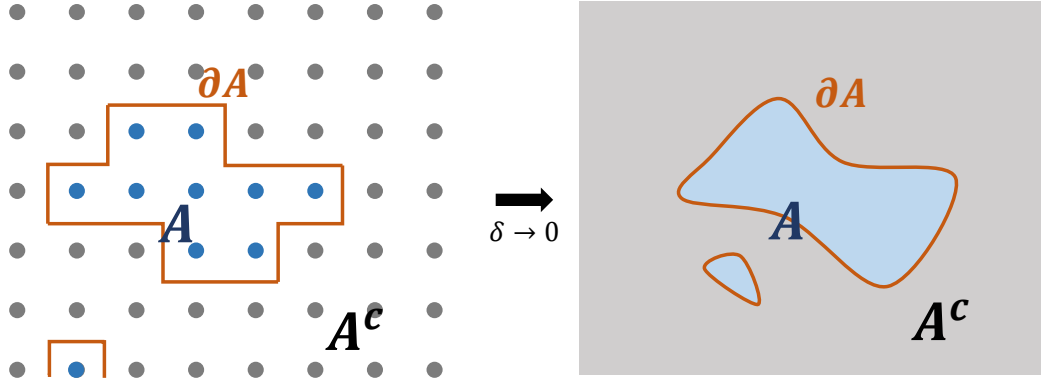


図 4.1.1 場の理論における Cauchy 面上の部分系  $A$  とその補集合  $A^c$ 。場の理論において部分系を選ぶことは、空間的な部分領域を選ぶことに対応する。エンタングルメントエントロピー  $S_A$  は、全系の Hilbert 空間をテンソル積  $\mathcal{H}_{tot} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_{A^c}$  の形に表現して計算する。このとき  $\partial A (= \partial A^c)$  は entangling surface と呼ばれる。部分系の取り方は一般に非連結でもよいことに注意。

刻の場  $\tilde{\phi}(x) := \phi(x, t = 0)$  に関する汎関数  $\Psi_0(\tilde{\phi})$  と見なせる。これは Euclidean 経路積分を用いて

$$\Psi_0[\tilde{\phi}] = \langle \tilde{\phi} | \Omega \rangle = \mathcal{N}^{\frac{1}{2}} \int D\phi \delta(\phi(x, \tau = 0_-) - \tilde{\phi}(x)) e^{-S[\phi]}, \quad (4.1.9)$$

と表される。ここで  $\mathcal{N}$  は  $\langle \Omega | \Omega \rangle = 1$  から決まる規格化定数である。自由度の積分は  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $-\infty < \tau < 0_-$  に渡って行う。デルタ関数は場  $\phi(x, \tau)$  の  $\tau = 0$  における境界条件が  $\tilde{\phi}(x)$  で与えられることを標語的に表し、 $0_-$  の添字は  $\tau < 0$  からの極限を取ることを示す。式 (4.1.9) は、任意の始状態  $|\Phi\rangle$  について無限大の Euclidean 時間発展を行うと

$$e^{-\tau H} |\Phi\rangle \sim e^{-\tau E_0} |\Omega\rangle \quad (\tau \rightarrow \infty), \quad (4.1.10)$$

と基底状態のみが抽出されることの経路積分を用いた表現である。同様に、基底状態の共役元  $\langle \Omega |$  も、 $(e^{-iHt} |\Phi\rangle)^\dagger = \langle \Phi | e^{iHt}$  に従って、 $\tau$  を反転した Euclidean 時間発展を用いて表される。従っ

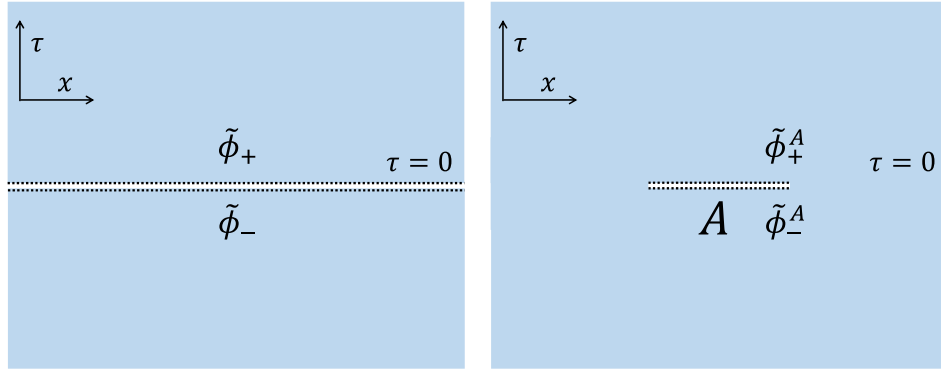


図 4.1.2 Euclidean 経路積分による量子状態（真空）の表現。左図は  $|\Omega\rangle\langle\Omega|$  を、右図は  $\rho_A = \text{Tr}_{A^c}[|\Omega\rangle\langle\Omega|]$  を表す。

て、基底状態の密度行列  $|\Omega\rangle\langle\Omega|$  は、経路積分を用いて

$$\begin{aligned} |\Omega\rangle\langle\Omega|_{\tilde{\phi}_-, \tilde{\phi}_+} &= \langle\tilde{\phi}_-|\Omega\rangle\langle\Omega|\tilde{\phi}_+\rangle \\ &= \mathcal{N} \int D\phi \delta(\phi(x, \tau = 0_-) - \tilde{\phi}_-(x)) \delta(\phi(x, \tau = 0_+) - \tilde{\phi}_+(x)) e^{-S[\phi]}, \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

と表せる。ここで添え字は密度行列としての足を表す。

密度行列へのトレースは、左右から同一のベクトル（正規直交基底）で挟んで全ての基底ベクトルについて足し合わせる操作である。これは経路積分では、場の境界条件  $\phi(x, 0_{\pm})$  を同じに揃えて、境界上の自由度を積分することに相当する（“sewing”と称する）。従って、経路積分の言葉では、ある部分系  $A$  上の縮約密度行列  $\rho_A$  は領域  $A^c$  の自由度に関して sewing した後の状況に対応する（図 4.1.2）。これは経路積分による表記で、明示的には

$$|\Omega\rangle\langle\Omega|_{\tilde{\phi}_-^A, \tilde{\phi}_+^A} = \mathcal{N} \int D\phi \delta(\phi^A(x, \tau = 0_-) - \tilde{\phi}_-^A(x)) \delta(\phi^A(x, \tau = 0_+) - \tilde{\phi}_+^A(x)) e^{-S[\phi]}, \quad (4.1.12)$$

と書ける。ただし  $\tilde{\phi}^A$  は部分系  $A$  上の場である。

同様に、有限温度状態  $\rho_{\text{th}} = \frac{e^{-\beta H}}{Z}$  は長さ  $\tau = \beta$  の Euclidean 時間発展に対応しており、経路積

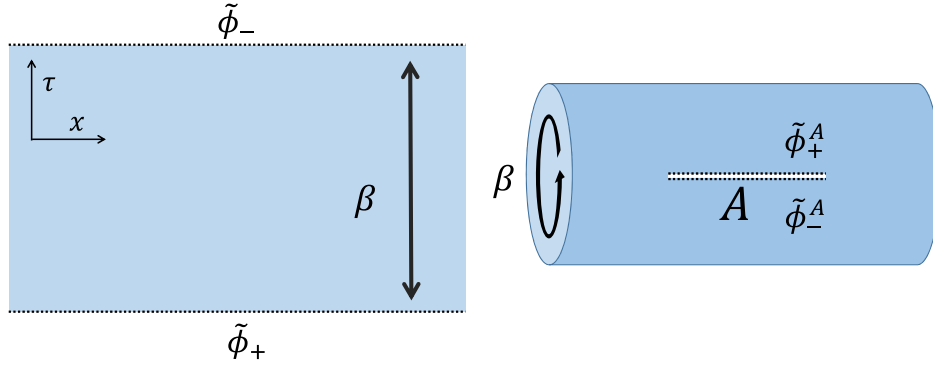


図 4.1.3 Euclidean 経路積分による熱平衡状態  $\rho_{\text{th}}$  の表現。左図は  $e^{-\beta H}$  を、右図は  $\rho_A = \text{Tr}_{A^c}[e^{-\beta H}]$  を表す。

分を用いて次のように表せる。

$$\begin{aligned} \rho_{\text{th}_{\tilde{\phi}_- \tilde{\phi}_+}} &= \frac{1}{Z} \langle \tilde{\phi}_- | e^{-\beta H} | \tilde{\phi}_+ \rangle \\ &= \frac{1}{Z} \int D\phi \delta(\phi(x, \tau = 0_-) - \tilde{\phi}_-(x)) \delta(\phi(x, \tau = 0_+) - \tilde{\phi}_+(x)) e^{-S[\phi]} \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

ここで積分は  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $0 < \tau < \beta$  の自由度に渡って行う。分配関数は

$$Z(\beta) = \text{Tr} e^{-\beta H} = \sum_{\tilde{\phi}} \langle \tilde{\phi} | e^{-\beta H} | \tilde{\phi} \rangle, \quad (4.1.14)$$

と書けるため、Euclidean 時間方向を  $S^1$  状に丸めた Euclidean 多様体上の積分が対応する。このトレース操作を部分系  $A^c$  に限って行うことで、有限温度状態に対する縮約密度行列が得られる（図 4.1.3）。

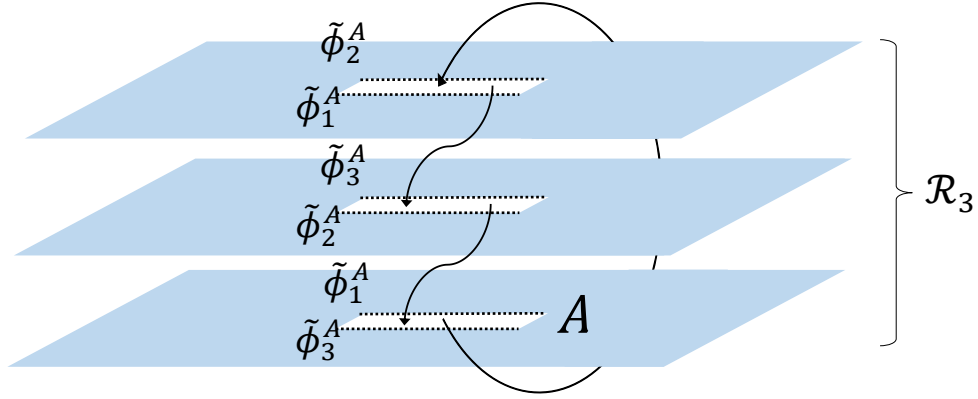


図 4.1.4 Euclidean 経路積分によるレプリカ法 (Rényi エントロピー) の表現。縮約密度行列  $\rho_A$  を複製して、部分系  $A$  において周期的に繋ぎ合わせている。

これらを踏まえて、Rényi エントロピー (4.1.4) は、

$$\begin{aligned}
\text{Tr} \rho_A^n &= \text{Tr}[\rho_A \cdots \rho_A] \\
&= \sum_{\tilde{\phi}^A} \langle \tilde{\phi} | \rho_A \cdots \rho_A | \tilde{\phi} \rangle \\
&= \sum_{\tilde{\phi}_1^A} \cdots \sum_{\tilde{\phi}_n^A} \langle \tilde{\phi}_1 | \rho_A | \tilde{\phi}_2 \rangle \langle \tilde{\phi}_2 | \rho_A | \tilde{\phi}_3 \rangle \cdots \langle \tilde{\phi}_n | \rho_A | \tilde{\phi}_1 \rangle \\
&= \mathcal{N}^n \int \left( \prod_{j=1}^n D\tilde{\phi}_j^A \right) \int D\phi_1 \delta(\phi_1^A(x, \tau = 0_-) - \tilde{\phi}_1^A(x)) \delta(\phi_1^A(x, \tau = 0_+) - \tilde{\phi}_2^A(x)) e^{-S[\phi_1]} \\
&\quad \cdots \times \int D\phi_n \delta(\phi_n^A(x, \tau = 0_-) - \tilde{\phi}_n^A(x)) \delta(\phi_n^A(x, \tau = 0_+) - \tilde{\phi}_1^A(x)) e^{-S[\phi_n]} \\
&= \mathcal{N}^n \int_{\mathcal{R}_n} D\phi e^{-S[\phi]}, \tag{4.1.15}
\end{aligned}$$

と表せる。ただしここで  $\mathcal{R}_n$  は図 4.1.4にあるような  $n$  枚のシートを境界  $A$  で周期的に張り合わせた多様体を表す。このとき境界  $\partial A$  周りの回転は  $2\pi n$  の周期を持っている。

以上の議論では規格化因子の存在を無視していた。経路積分によって表される規格化因子を除いた密度行列を  $\hat{\rho}$  などと表すと便利である。これを用いて、 $\mathcal{R}_n$  上の分配関数  $\mathcal{Z}_n$  を

$$\mathcal{Z}_n := \text{Tr} \hat{\rho}_A^n = \int_{\mathcal{R}_n} D\phi e^{-I[\phi]}, \tag{4.1.16}$$

と定義する。規格化因子は  $\mathcal{N}^{-1} = \text{Tr} \hat{\rho} = \mathcal{Z}_1 (= Z)$  で与えられる。従って、Rényi エントロピーは

$$S_n(\rho_A) = \frac{1}{1-n} \log \text{Tr} \rho_A^n = \frac{1}{1-n} \log \left[ \frac{\text{Tr} \hat{\rho}_A^n}{(\text{Tr} \hat{\rho}_A)^n} \right] = \frac{\log \mathcal{Z}_n - n \log \mathcal{Z}_1}{1-n}, \quad (4.1.17)$$

と表せる。これらの議論は元々は整数の  $n > 1$  に関して成り立っている。エンタングルメントエントロピーを求めるには、この結果を  $n \in \mathbb{R}$  へと解析接続<sup>\*3</sup> して、 $n \rightarrow 1$  の極限を取ることで

$$S_A = \lim_{n \rightarrow 1} S_n(\rho_A) = - \lim_{n \rightarrow 1} \frac{\partial}{\partial n} \frac{\mathcal{Z}_n}{\mathcal{Z}_1^n}, \quad (4.1.18)$$

と導出する。この処方に従って、エンタングルメントエントロピーを得るためには  $\mathcal{R}_n$  上の分配関数  $\mathcal{Z}_n$  を計算すればよい。このように経路積分の各シート上の理論を複製して計算を行うため、これをレプリカ法と呼ぶ [80, 81]。レプリカ法は、真空や熱状態、励起状態のような Euclidean 経路積分を用いて表せる量子状態に関して有効である。構成から明らかなように、 $\mathcal{R}_n$  上の理論には  $\mathbb{Z}_n$ -symmetry が現れる。これをレプリカ対称性 (replica symmetry) と呼ぶ。量子状態を表す経路積分は、密度行列の Hermit 性を反映して、Euclidean 時間方向の reflection symmetry を有する。

場の理論におけるエンタングルメントエントロピーは、系が無限自由度であることを反映して一般に発散する。そこで発散を制御するために UV-cutoff (lattice spacing)  $\epsilon$  を入れる必要がある。スケール不変性を持った相対論的  $d$  次元場の理論の真空におけるエンタングルメントエントロピーは、一般に

$$S_A = a_{d-2} \frac{\partial A}{\epsilon^{d-2}} + a_{d-4} \frac{L_A^{d-4}}{\epsilon^{d-4}} \cdots + \begin{cases} (-1)^{\frac{d-1}{2}} \mathbb{S}_A, & (d: \text{odd}) \\ (-1)^{\frac{d-2}{2}} \mathbb{S}_A \log \frac{L_A}{\epsilon} + S_A^{\text{finite}}, & (d: \text{even}) \end{cases} \quad (4.1.19)$$

と振る舞うことが知られている。ここで  $\partial A$  は entangling surface の面積、 $L_A$  は  $A$  の典型的なサイズである。UV 極限に伴うエンタングルメントエントロピーの leading な発散は、常に entangling surface の面積に比例する。これは面積則と呼ばれる [82, 83]。全系が純粋状態であるときのエンタングルメントエントロピーの性質  $S_A = S_{A^c}$  を思い出せば、 $A$  と  $A^c$  が共有する対象として表面積  $\partial A = \partial A^c$  が現れることは自然に理解できる。エンタングルメントエントロピーの UV 発散は、高エネルギー領域の自由度が無限大になることから生じる。エネルギーの期待値が有限の量子状態 (熱状態など) は、UV 領域の構造が真空と同じであるから、エンタングルメントエントロピーの発散も真空と同一である。また係数  $a_{j \geq 1}$  は考えている理論の詳細に依る定数である。これらは明らかに regularization scheme に依存するため、物理的な量としては解釈できない。一方、 $\mathbb{S}_A$  は正則化

<sup>\*3</sup> このようにして得られる解析接続は一意的とは限らないことに注意する。例えば  $\sin(\pi n)/(1-n)$  は  $n > 1$  の任意の整数点で 0 であるが  $n \rightarrow 1$  では 0 でない。本論文ではこの点に関する議論を留保して取り扱う。

の方法によらないため、その意味で universal な性質を捕らえており renormalized entanglement entropy と呼ばれる\*4。 $S_A^{\text{finite}}$  は有限の定数項である。

場の理論としてゲージ理論を考える場合は、Hilbert 空間をゲージ不変性を保ったまま式 (4.1.7) のようにナイーブには分割できず、エンタングルメントエントロピーを定義するために新たな取り扱いが必要になる。この事情は  $A$  と  $A^c$  に跨る非局所的な演算子（例えば Wilson loop）の存在に由来している。格子上の Abelian ゲージ理論における議論は [84] で与えられ、ここでは  $\mathcal{H}_A$  上の作用素代数  $\mathfrak{A}_A$  には不定性があり、典型的には  $\mathfrak{A}_A$  が非自明な中心 (center) を持つことが指摘された。非自明な中心の存在は、 $A, A^c$  上の演算子を単純に  $\mathcal{O}_A \otimes I_{A^c}, I_A \otimes \mathcal{O}_{A^c}$  と表せないことを意味する\*5。より一般に、non-Abelian のゲージ理論におけるエンタングルメントエントロピーでは、通常のゲージ不変な量子状態から拡張した Hilbert 空間による取り扱いが必要となる [86, 87, 88, 89]。

レプリカ法を用いてエンタングルメントエントロピーを求める場合、非自明な多様体  $\mathcal{R}_n$  上の分配関数を  $n$  を任意の整数変数としたまま計算する必要があり、これの実行は一般には困難である。ここでは計算が可能な具体例として 2 次元共形場理論におけるエンタングルメントエントロピーを以下で計算する。

#### 4.1.1 2次元共形場理論のエンタングルメントエントロピー

以下では 2 次元共形場理論のエンタングルメントエントロピーを [81, 90] に従って計算する。真空を与える Euclidean 時空は Riemann 面  $\mathcal{R}_1 = \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$  であり、位置を表すために複素座標  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  を用いると便利である。簡単のために、部分系  $A$  が一つの interval  $A = [u, v]$ , ( $u < v, u, v \in \mathbb{R}$ ) から構成される場合を考える。この場合、共形対称性のみから一般の 2 次元共形場理論に対して  $\mathcal{S}_A$  の形が決まる。

エンタングルメントエントロピーを求めるには、式 (4.1.16) に従って  $\mathcal{R}_n$  上の分配関数を計算すればよい。そのために、 $\mathcal{Z}_n$  は  $\mathbb{C}$  上の  $n$  個の同じ種類の場がある理論

$$\mathcal{Z}_n = \int_{\mathbb{C}|\mathbb{C}} D\phi_1 \cdots D\phi_n e^{-I^{(n)}[\phi_1, \dots, \phi_n]} \quad (4.1.20)$$

$$I^{(n)}[\vec{\phi}] := \sum_{j=1}^n I[\phi_j], \quad (4.1.21)$$

\*4  $\mathcal{S}_A$  が正則化に依らないことは、偶数次元の場合  $\log \epsilon$  の形から明らかである。奇数次元の場合、少なくとも共形場理論に関して universal になることが知られている。

\*5 このことは  $(\mathfrak{A}_A)' = \mathfrak{A}_{A^c}$ ,  $(\mathfrak{A}_A)'' = \mathfrak{A}_A$  を用いて  $I \neq \mathfrak{A}_A \cap (\mathfrak{A}_A)' = \mathfrak{A}_A \cap \mathfrak{A}_{A^c} = (\mathfrak{A}_{A^c})' \cap \mathfrak{A}_{A^c}$  から分かる。ただしここでプライムは作用素の集合  $\mathfrak{S} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$  に対する commutant  $\mathfrak{S}' = \{A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) | AB = BA, \forall B \in \mathfrak{S}\}$  である [85]。



と書き直せることに注目する。 $I^{(n)}$  に含まれる  $\mathbb{C}$  上の  $n$  個の場をレプリカ場 (replica fields) と呼ぶ。ここで  $\int_{\mathbb{C}|_{\mathcal{C}}}$  はレプリカ場に対する境界条件

$$\mathcal{C} : \phi_i(x, 0_+) = \phi_{i+1}(x, 0_-), \quad x \in A \ (i \bmod n), \quad (4.1.22)$$

の下で経路積分を行うことを表す。これは元々の  $\mathcal{R}_n$  が持っていた周期性を target space の周期性に押し付けたことに相当する。この境界条件は、 $\partial A$  に局在した  $\mathbb{C}$  上のツイスト演算子 (twist operator) を経路積分に挿入することで表せる\*6。特に2次元の場合、ツイスト演算子は局所演算子として

$$\mathcal{Z}_n \propto \langle \mathcal{T}_n(u, 0) \tilde{\mathcal{T}}_n(v, 0) \rangle_{\mathbb{C}}, \quad (4.1.23)$$

を満たすものとして導入される。ここで  $\mathcal{T}$  は  $i \rightarrow i+1$ 、 $\tilde{\mathcal{T}}$  は  $i \rightarrow i-1$  の変換に対応したツイスト演算子である\*7。より一般に、演算子の挿入に対しても

$$\langle O^{(i)}(x, y) \cdots \rangle_{\mathcal{R}_n} = \frac{\langle \mathcal{T}_n(u, 0) \tilde{\mathcal{T}}_n(v, 0) O_i(x, y) \cdots \rangle_{\mathbb{C}}}{\langle \mathcal{T}_n(u, 0) \tilde{\mathcal{T}}_n(v, 0) \rangle_{\mathbb{C}}}, \quad (4.1.26)$$

が成り立つ。ここで  $\mathcal{R}_n$  上の  $O^{(i)}$  は  $i$  番目のシート上に存在する場であり、 $\mathbb{C}$  上の  $O_i$  は  $i$  番目のレプリカ場  $\phi_i$  のみから構成された場である。

この関係式 (4.1.26) を用いて  $\mathcal{T}_n$  の共形次元を求める。 $O^{(i)}$  として、エネルギー-運動量テンソルの正則成分  $T(w)$  を考える。 $z \in \mathbb{C}$  から  $w \in \mathcal{R}_n$  への共形変換は

$$z = \left( \frac{w - u}{w - v} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (4.1.27)$$

\*6 式 (4.1.20) ないし式 (4.1.16) から、ツイスト演算子が式 (4.1.23) を満たすものとして formal に定義される [90, 91]。これは  $\mathbb{Z}_n$  レプリカ対称性に関するオービフォールド理論  $\mathbb{C}^n/\mathbb{Z}_n$  上の twist operator と思うことができる [92]。

\*7 レプリカ場を Fourier 変換を用いて再定義する

$$\varphi_j := \sum_{k=1}^n e^{2\pi i \frac{jk}{n}} \phi_k, \quad (4.1.24)$$

と、 $\mathcal{T}_n$  および  $\tilde{\mathcal{T}}_n$  の作用は次のように対角化される。

$$\mathcal{T}_n \varphi_j = e^{-2\pi i \frac{j}{n}} \varphi_j, \quad \tilde{\mathcal{T}}_n \varphi_j = e^{2\pi i \frac{j}{n}} \varphi_j. \quad (4.1.25)$$

自由場など作用が  $I^{(n)}[\phi] = \sum_{j=1}^n I^{(j)}[\varphi_j]$  と decouple する場合は  $\varphi$  を用いた計算が簡単になる [93]。

と表せる。このとき  $\mathcal{R}_n$  上のエネルギー運動量テンソルは、式 (2.3.73) から

$$\begin{aligned}\langle T(w) \rangle_{\mathcal{R}_n} &= \left( \frac{dz}{dw} \right)^2 \langle T(z) \rangle_{\mathbb{C}} + \frac{c}{12} S[z, w] \\ &= \frac{c}{12} S[z, w] \\ &= \frac{c}{24} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \frac{(u-v)^2}{(w-u)^2 (v-u)^2},\end{aligned}\quad (4.1.28)$$

となる。ただし 2 行目で  $\langle T(z) \rangle_{\mathbb{C}} = 0$  を用いた。これは 1 つのレプリカ場から構成されたエネルギー運動量テンソルに対する結果であるから、全てのレプリカ場のエネルギー運動量テンソル  $T^{(n)}$  に関してはこの結果を  $n$  倍すればよい。すなわち、式 (4.1.26) から

$$\frac{\langle \mathcal{T}_n(u, 0) \tilde{\mathcal{T}}_n(v, 0) T^{(n)}(w) \rangle_{\mathbb{C}}}{\langle \mathcal{T}_n(u, 0) \tilde{\mathcal{T}}_n(v, 0) \rangle_{\mathbb{C}}} = n \langle T(w) \rangle_{\mathcal{R}_n} = \frac{c}{24} \left( n - \frac{1}{n} \right) \frac{(u-v)^2}{(w-u)^2 (v-u)^2}, \quad (4.1.29)$$

を得る。この結果を一般のプライマリー場に対する Ward-Takahashi 恒等式

$$\langle \Phi_n(u, 0) \tilde{\Phi}_n(v, 0) T^{(n)}(w) \rangle_{\mathbb{C}} = \left[ \frac{h_{\Phi}}{(w-u)^2} + \frac{\partial_w}{w-u} + \frac{h_{\tilde{\Phi}}}{(w-v)^2} + \frac{\partial_w}{w-v} \right] \langle \Phi_n(u, 0) \tilde{\Phi}_n(v, 0) \rangle_{\mathbb{C}}, \quad (4.1.30)$$

と比較することで、 $\mathcal{T}_n, \tilde{\mathcal{T}}_n$  が共形ウェイト

$$h_{\mathcal{T}_n} = h_{\tilde{\mathcal{T}}_n} = \frac{c}{24} \left( n - \frac{1}{n} \right), \quad (4.1.31)$$

のプライマリー場であることが分かる。反正則部に関しても同様の解析が成り立つ。従って、分配関数の計算に用いるツイスト演算子の 2 点相関関数は

$$\langle \mathcal{T}_n(u) \tilde{\mathcal{T}}_n(v) \rangle_{\mathbb{C}} \propto \frac{1}{(u-v)^{2h_{\mathcal{T}_n}} (\bar{u}-\bar{v})^{2h_{\tilde{\mathcal{T}}_n}}} = \frac{1}{|u-v|^{4h_{\mathcal{T}_n}}}, \quad (4.1.32)$$

によって与えられる。

以上の議論をまとめると、 $\text{Tr} \rho_A^n$  は一般の 2 次元共形場理論において

$$\text{Tr} \rho_A^n = \frac{\mathcal{Z}_n(A)}{\mathcal{Z}_1^n} \quad (4.1.33)$$

$$= \frac{\int_{\mathcal{R}_n(A)} D\phi e^{-S[\phi]}}{\left( \int_{\mathbb{C}} D\phi e^{-S} \right)^n} \quad (4.1.34)$$

$$\propto \langle \mathcal{T}_n(u) \tilde{\mathcal{T}}_n(v) \rangle_{\mathbb{C}} \quad (4.1.35)$$

$$\propto \left( \frac{l}{\epsilon} \right)^{-\frac{c}{6} \left( n - \frac{1}{n} \right)}, \quad (4.1.36)$$

と表せる。 $l$  は部分系のサイズ  $l := v - u > 0$ 、 $\epsilon$  は次元解析から挿入された UV-cutoff である。さらに理論の詳細に依存する比例定数を  $c_n$  で表すと、

$$\mathrm{Tr} \rho_A^n = c_n \left( \frac{l}{\epsilon} \right)^{-\frac{c}{6}(n - \frac{1}{n})}, \quad (4.1.37)$$

となる。ただし密度行列の規格化条件から、 $c_1 = 1$  であることが分かる。これを用いると、Rényi エントロピーは

$$S_n(A) = \frac{c}{6} \left( \frac{1+n}{n} \right) \log \frac{l}{\epsilon} + \frac{1}{1-n} \log c_n, \quad (4.1.38)$$

となる。従って 2 次元共形場理論におけるエンタングルメントエントロピーは

$$S(A) = \frac{c}{3} \log \frac{l}{\epsilon} + c'_1, \quad (4.1.39)$$

で与えられる。ただし  $c'_1 = (\partial_n c_n)|_{n=1}$  である。

エンタングルメントエントロピーはツイスト演算子の 2 点相関関数 (4.1.32) から得られた。これを利用して、ツイスト演算子  $h_n = \bar{h}_n = \frac{c}{24}(n - \frac{1}{n})$  の共形変換に対する変換性

$$\langle \mathcal{T}_n(w_1, \bar{w}_1) \tilde{\mathcal{T}}_n(w_2, \bar{w}_2) \rangle = \left| \frac{dz}{dw} \right|_{z=z_1}^{2h_n} \left| \frac{dz}{dw} \right|_{z=z_2}^{2h_n} \langle \mathcal{T}_n(z_1, \bar{z}_1) \tilde{\mathcal{T}}_n(z_2, \bar{z}_2) \rangle, \quad (4.1.40)$$

を用いることで、 $S^1$  上の真空や  $\mathbb{R}$  上の有限温度状態におけるエンタングルメントエントロピーを容易に導出できる。まず周期が  $L$  で与えられる円周  $S^1$  上の 2 次元共形場理論について、部分系を  $A = [u, v]$  と取る。基底状態はシリンダー  $\mathcal{R}_1 = S^1 \times \mathbb{R}$  上の経路積分で与えられる。座標  $w = (x, \tau) \in S^1 \times \mathbb{R}$  ( $x \simeq x + L$ ) から  $z \in \mathbb{C}$  への共形変換は  $z = e^{\frac{2\pi i}{L} w}$  で与えられるから、

$$\langle \mathcal{T}_n(w_1, \bar{w}_1) \tilde{\mathcal{T}}_n(w_2, \bar{w}_2) \rangle_{\mathrm{cyl}} \propto \left( \frac{2\pi\epsilon}{L} \right)^{4h_n} \frac{1}{\left| e^{\frac{2\pi i}{L} u} - e^{\frac{2\pi i}{L} v} \right|^{4h_n}} = \left[ \frac{\frac{\pi\epsilon}{L}}{\sin\left(\frac{\pi(u-v)}{L}\right)} \right]^{4h_n}, \quad (4.1.41)$$

を得る。従って、Rényi エントロピーとエンタングルメントエントロピーは

$$S_n^{(\mathrm{cyl})}(A) = \frac{c}{6} \left( \frac{1+n}{n} \right) \log \left[ \frac{L}{\pi\epsilon} \sin \left( \frac{\pi l}{L} \right) \right], \quad (4.1.42)$$

および

$$S_A^{(\mathrm{cyl})} = \frac{c}{3} \log \left[ \frac{L}{\pi\epsilon} \sin \left( \frac{\pi l}{L} \right) \right], \quad (4.1.43)$$

となる。ここで  $l = v - u (> \epsilon)$  である。また  $l \rightarrow 0$  の極限を取ると  $\mathbb{R}$  上のエンタングルメントエントロピー (4.1.39) に戻ることが確認できる。

次に  $\mathbb{R}$  上の有限温度状態は、シリンダー  $w = (x, \tau) \in \mathbb{R} \times S^1$ ,  $\tau \simeq \tau + \beta$  上の経路積分で与えられる。従って、共形変換  $z = e^{\frac{2\pi}{\beta}w}$  によって

$$\langle \mathcal{T}_n(w_1, \bar{w}_1) \tilde{\mathcal{T}}_n(w_2, \bar{w}_2) \rangle_{\text{thermal}} \propto \left( \frac{2\pi\epsilon}{\beta} \right)^{4h_n} \frac{e^{\frac{4\pi h_n}{\beta}u} e^{\frac{4\pi h_n}{\beta}v}}{\left| e^{\frac{2\pi}{L}u} - e^{\frac{2\pi}{L}v} \right|^{4h_n}} = \left[ \frac{\frac{\pi\epsilon}{\beta}}{\sinh\left(\frac{\pi(u-v)}{\beta}\right)} \right]^{4h_n}, \quad (4.1.44)$$

を得る。ここから同様に

$$S_n^{(\text{thermal})}(A) = \frac{c}{6} \left( \frac{1+n}{n} \right) \log \left[ \frac{\beta}{\pi\epsilon} \sinh \left( \frac{\pi l}{\beta} \right) \right], \quad (4.1.45)$$

および

$$S_A^{(\text{thermal})} = \frac{c}{3} \log \left[ \frac{\beta}{\pi\epsilon} \sinh \left( \frac{\pi l}{\beta} \right) \right], \quad (4.1.46)$$

となる。特に高温極限  $\beta \rightarrow 0$  では

$$S_A^{(\text{thermal})} \sim \frac{c}{3} \log \left[ \frac{\beta}{2\pi\epsilon} e^{\frac{\pi l}{\beta}} \right] = \frac{\pi c}{3} l T + \frac{c}{3} \log \left[ \frac{\beta}{2\pi\epsilon} \right], \quad (4.1.47)$$

となり、初項は高温状態の volume law の振る舞いを示している。

一般に部分系  $A$  が  $N \geq 2$  個の disjoint intervals から構成されている場合 ( $A = \bigcup_{i=1}^N [u_i, v_i]$ )、レプリカ多様体  $\mathcal{R}_n$  の種数は

$$g = (N-1)(n-1), \quad (4.1.48)$$

で与えられる。ここから分かるように、一般の  $N > 1$  に対するエンタングルメントエントロピーの計算は非常に複雑になる。共形場理論の場合は、同様の方法でツイスト演算子による  $2N$  点相関関数が現れる。 $N > 1$  の相関関数については、共形対称性のみからは関数系を決定できず、個々の理論モデルの詳細に依存する。

例えば 2 interval を  $A_1 = [u_1, v_1]$ ,  $A_2 = [u_2, v_2]$  のエンタングルメントエントロピーを求めるには、ツイスト演算子の 4 点関数を計算すればよい。それは一般に

$$\text{Tr} \rho_{AB}^n = c_n^2 \left( \frac{|u_1 - u_2| |v_1 - v_2|}{|u_1 - v_1| |u_2 - v_2| |u_1 - v_2| |u_2 - v_1|} \right)^{4h_n} \mathcal{F}(x), \quad (4.1.49)$$

で与えられる。ここで  $x$  は cross-ratio

$$x = \frac{(u_1 - v_1)(u_2 - v_2)}{(u_1 - u_2)(v_1 - v_2)}, \quad (4.1.50)$$

である。 $\mathcal{F}(x)$  は共形対称性のみからは決定できない理論に依存する関数である [91, 94]。

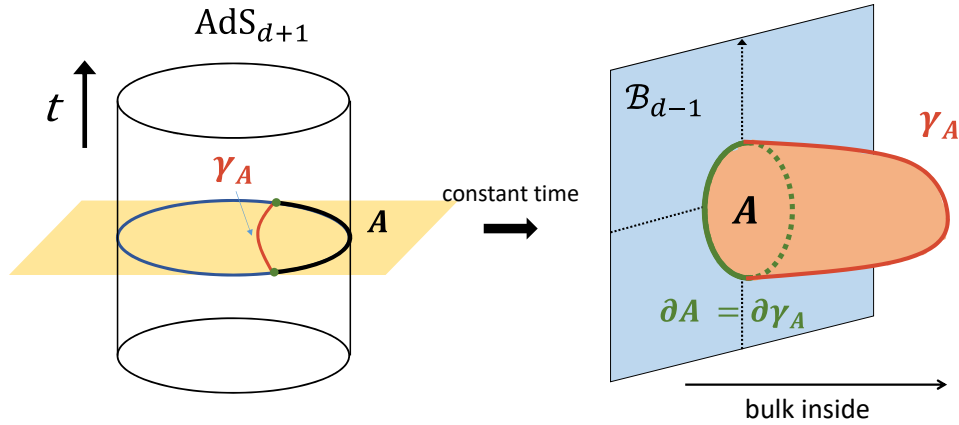


図 4.2.1 Ryu-Takayanagi 公式に現れる codimension-2 の (超) 曲面。エンタングルメントエントロピー  $S_A$  は、AdS 時空の時間一定面  $t = t_0$  (右図) において、(1)  $\partial A = \partial \gamma_A$ 、(2)  $\gamma_A$  と  $A$  は homologous、を満たすような曲面  $\gamma_A$  の最小面積によって与えられる。

## 4.2 Ryu-Takayanagi 公式

AdS/CFT 対応における Ryu-Takayanagi 公式は、共形場理論のエンタングルメントエントロピー  $S_A$  を重力側で計算する方法を与える。Ryu-Takayanagi 公式は、静的な漸近 AdS 時空に対して

$$S_A = \min_{\substack{\partial \gamma_A = \partial A \\ \gamma_A \sim A}} \frac{\mathcal{A}(\gamma_A)}{4G_N}, \quad (4.2.1)$$

で与えられる [8]。ここで左辺の  $S_A$  は、境界  $\mathcal{B}_d \equiv \mathbb{R} \times \mathcal{B}_{d-1}$  上で定義された共形場理論のある時刻  $t = t_0$  における部分系  $A$  に関するエンタングルメントエントロピーである。右辺の  $\mathcal{A}(\gamma_A)$  は、AdS 側の時間一定面  $t = t_0$  上に存在する codimension-2 の (超) 曲面  $\gamma_A$  の面積を表す。ここでは  $\gamma_A$  は部分系  $A$  の entangling surface  $\partial A$  と境界が一致し ( $\partial \gamma_A = \partial A$ )、また  $\gamma_A$  と  $A$  は homologous であるという条件 ( $\gamma_A \sim A$ ) を課している (homology condition) (図 4.2.1)。特にホモロジー条件は、部分系を multi-interval に取った場合やブラックホール時空において重要になる。Ryu-Takayanagi 公式は、このような条件を満たす  $\gamma_A$  の面積の最小値がエンタングルメントエントロピー  $S_A$  と等し

いことを主張する。

上記の最小値を達成する超曲面  $\gamma_A^{\min}$  を、本論文では Ryu-Takayanagi 曲面 (RT surface) と呼ぶことにする。重力側から計算される式 (4.2.1) の右辺はホログラフィックエンタングルメントエントロピー (holographic entanglement entropy) と呼ばれる。ホログラフィックエンタングルメントエントロピーは一般に AdS boundary まで伸びており、そのため曲面の面積が無限大になる発散を持つ。これを制御するために、ブラックホールエントロピーの計算と同様に IR-cutoff を入れて計算する。これは UV-IR relation によって共形場理論のエンタングルメントエントロピーの UV 発散に対応している。

具体例として、3次元 AdS 時空におけるホログラフィックエンタングルメントエントロピーを計算する。このとき codimension-2 の超曲面は1次元であり、RT surface は boundary 上の  $\partial A$  に端点を持つ bulk の測地線になる。 $A$  が複数の disjoint intervals で構成されている場合、RT surface はいくつかの測地線の和になる。

#### 4.2.1 ホログラフィックエンタングルメントエントロピーの例

まずは最も簡単な pure AdS 時空の Poincaré パッチについて考える。これには  $\mathbb{R}^{1,1}$  上の2次元共形場理論が対応しており、その部分系を  $A = [-l/2, l/2]$  と取る。重力側における entangling surface  $\partial A$  は  $P = (t_0, -l/2, \epsilon)$ ,  $Q = (t_0, l/2, \epsilon)$  に存在する。ここで発散を制御するために UV cutoff ( $z = \epsilon \rightarrow 0$ ) を導入した。測地線の長さは

$$\mathcal{A}(\gamma_A) = \int_{\gamma_A} ds = 2R \int_{\epsilon}^{z_*} \frac{dz}{z} \sqrt{1 + \left(\frac{dx(z)}{dz}\right)^2}, \quad (4.2.2)$$

によって与えられる。最小面積を与える測地線は明らかに  $x = 0$  に対して対称性を持つことから、 $x(z)$  とパラメトライズしている。 $z_*$  は turning point と呼ばれる  $\gamma_A$  上の  $z$  の最大値である。

最小条件は、運動方程式

$$\delta\mathcal{A}(\gamma_A) = 0, \quad (4.2.3)$$

によって与えられる。この解は  $z-x$  平面における半円

$$x^2 + z^2 = \frac{l^2}{4}, \quad (4.2.4)$$

で与えられることは直ぐに確認できる (図 4.2.2)。従って

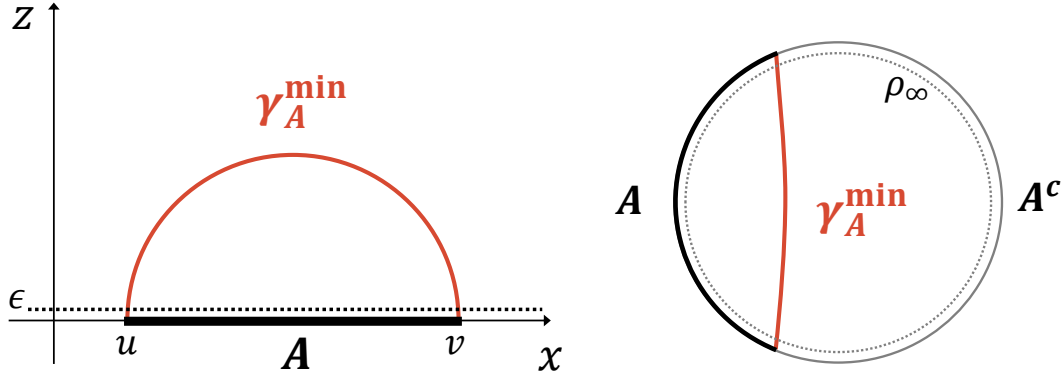


図 4.2.2 3次元 pure AdS 空間における Ryu-Takayanagi 曲面。左図は Poincaré AdS に、右図は global AdS に対応する。UV (IR) 発散を制御するために AdS boundary の手前に UV cutoff を入れる。

$$\frac{\mathcal{A}(\gamma_A^{\min})}{4G_N} = \frac{R}{2G_N} \int_{\epsilon}^{\frac{l}{2}} \frac{dz}{z\sqrt{1 - \left(\frac{2z}{l}\right)^2}} = \frac{R}{2G_N} \log \frac{l}{\epsilon} = \frac{c}{3} \log \frac{l}{\epsilon}, \quad (4.2.5)$$

を得る。ここで AdS<sub>3</sub>/CFT<sub>2</sub> 対応において共形場理論の中心電荷  $c$  と重力理論のパラメータ  $R/G_N$  を結びつける Brown-Henneaux の関係式 [95]

$$c = \frac{3R}{2G_N}, \quad (4.2.6)$$

を用いた。AdS/CFT 対応の一般論としては  $c$  は理論が含む有効自由度  $N_{\text{eff}}$  に対応することに注意。この結果から、ホログラフィックエンタングルメントエントロピー (4.2.5) が 2次元共形場理論で計算したエンタングルメントエントロピー 4.1.39と一致することが確かめられる。

次に global AdS<sub>3</sub> に関して考える。 $S^1$  上の共形場理論の部分系  $A$  の長さを  $l$ 、また  $S^1$  の周期を  $L$  と置く。重力側における UV cutoff を  $\rho_\infty (\rightarrow \infty)$  と表すと、 $\partial A$  の 2 点は bulk において  $P = (\tau_0, \rho_\infty, 0)$ 、 $Q = (\tau_0, \rho_\infty, \frac{2\pi l}{L})$  にある。測地線の長さを与える公式 (2.2.13) を用いると、

$\rho_\infty \rightarrow \infty$  の極限下で

$$\begin{aligned}\sigma(P, Q) &= R \cosh^{-1} \left( \cosh \rho_\infty \cosh \rho_\infty - \sinh \rho_\infty \sinh \rho_\infty \cos\left(\frac{2\pi l}{L}\right) \right) \\ &\sim R \cosh^{-1} \left( \frac{e^{2\rho_\infty}}{2} \sin^2\left(\frac{\pi l}{L}\right) \right) \\ &\sim 2R \log[e^{\rho_\infty} \sin\left(\frac{\pi l}{L}\right)],\end{aligned}\tag{4.2.7}$$

を得る。測地線の位置は図 4.2.2 のようになる。また UV cutoff については、Poincaré パッチと global AdS の関係 (2.2.8) および次元解析から  $e^{\rho_\infty} \propto \frac{L}{\epsilon}$  と関係付くことが分かる。ここで定数倍は不定であるが、エンタングルメントエントロピーの普遍的な部分を求める際には影響しない。従って、ホログラフィックエンタングルメントエントロピーは

$$\frac{A(\gamma_A^{\min})}{4G_N} \sim \frac{2R}{4G_N} \log\left[\frac{L}{\epsilon} \sin\left(\frac{\pi l}{L}\right)\right] = \frac{c}{3} \log\left[\frac{L}{\epsilon} \sin\left(\frac{\pi l}{L}\right)\right],\tag{4.2.8}$$

となる。これは  $\epsilon$  に残る定数倍の不定性を除いて式 (4.1.43) と一致する。

さらに AdS<sub>3</sub> black brane や BTZ ブラックホール時空に関しては、これらが局所的に AdS<sub>3</sub> と同じであることを用いて座標変換を行うと上の結果から容易に求めることができる。また高次元 AdS のホログラフィックエンタングルメントエントロピーに関しては、同様に codimension-2 の最小曲面の面積として計算できる。これらの計算は、一般的な状況に対して第 5 章で扱うため、ここでは割愛する。

## 4.2.2 ホログラフィックエンタングルメントエントロピーの性質

部分系が  $n > 1$  個の disjoint intervals から構成されている場合、ホモロジー条件を満たす曲面の候補が複数現れる。例えば  $n = 2$  の場合は図 4.2.3 で与えられるように、 $S_{AB}$  の候補として曲面  $\gamma_a \cup \gamma_b$  または曲面  $\gamma_c \cup \gamma_d$  が現れる。この場合、最小性条件によって、面積の和が小さい方を選ぶことになる。簡単のためにそれぞれの曲面の面積を  $4G_N$  で割ったものを同様に  $\gamma_a$  等で表すと、Ryu-Takayanagi 公式は

$$S_{AB} = \min\{\gamma_a + \gamma_b, \gamma_c + \gamma_d\},\tag{4.2.9}$$

と書ける。ここで  $S_A = \gamma_a$ ,  $S_B = \gamma_b$  であるから、ホログラフィックエンタングルメントエントロピーは劣加法性  $S_A + S_B \geq S_{AB}$  が常に成り立つことが分かる。この性質は  $n > 2$  の場合も同様の議論で示せる。またこれはホログラフィックエンタングルメントエントロピーによって求めた相互情報量  $I(A : B) = S_A + S_B - S_{AB}$  の正値性と言い換えることもできる。式 (4.2.9) の右辺でどちら



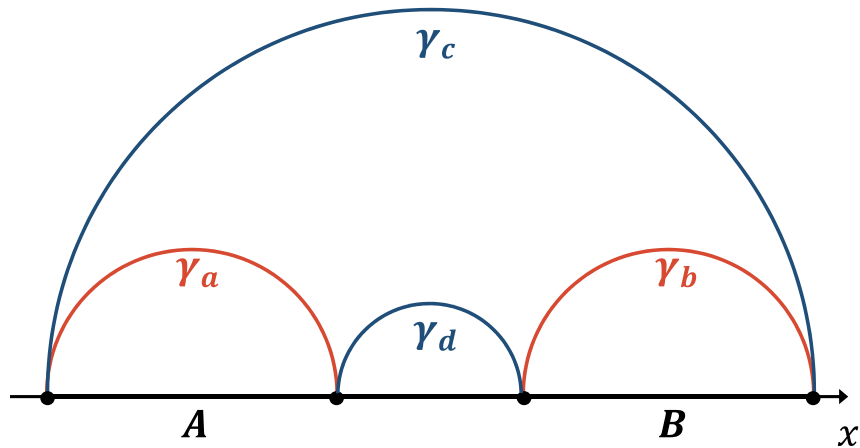


図 4.2.3 部分系の数  $n = 2$  の場合の Ryu-Takayanagi 曲面。曲面  $\gamma_a \cup \gamma_b$  と  $\gamma_c \cup \gamma_d$  は共にホモロジー条件を満たしている ( $\gamma_a \cup \gamma_b \sim \gamma_c \cup \gamma_d \sim A \cup B$ )。  $\gamma_{AB}^{\min}$  には、 $A$  と  $B$  の配置に応じて、これらのうち面積の小さい方が選ばれる。

の曲面が選ばれるかは、 $A$  と  $B$  のサイズや位置関係に依存する。特に 2 次元共形場理論で  $n = 2$  の場合は cross ratio のみに依存する。

具体例として  $n = 2$  のとき、Poincaré パッチで同じ長さ  $l$  の部分系  $A, B$  が距離  $r$  だけ離れている状況では、式 (4.2.5) から

$$\tilde{I}(A : B) := (\gamma_a + \gamma_b) - (\gamma_c + \gamma_d) = \frac{c}{3} \log \frac{l^2}{r(2l + r)}, \tag{4.2.10}$$

を得る。この  $\tilde{I}(A : B)$  を用いると相互情報量は

$$I(A : B) = \max\{\tilde{I}(A : B), 0\}, \tag{4.2.11}$$

と表せる。従って相互情報量は  $r = (\sqrt{2} - 1)l$  の点において 1 次微分の不連続な変化を起こす。これを相互情報量 (あるいは  $\gamma_{AB}^{\min}$ ) の相転移と呼ぶ。この現象は large  $c$  による古典重力近似の効果

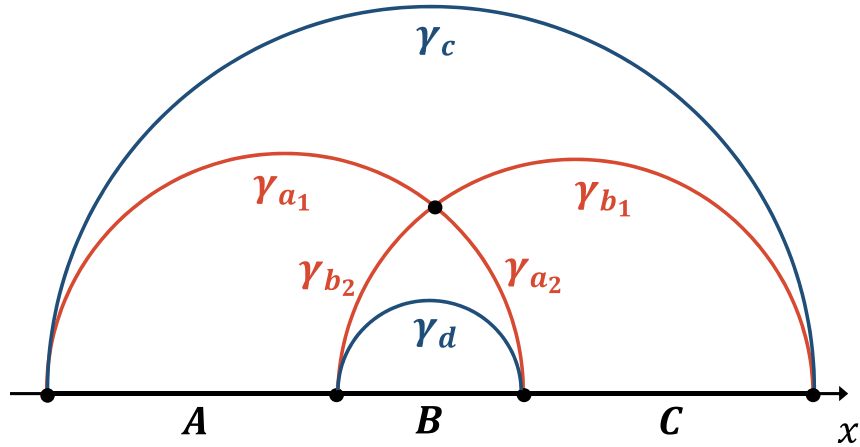


図 4.2.4 ホログラフィックエンタングルメントエントロピーの強劣加法性。

から生じている [96]。まとめると

$$S_{AB} = \begin{cases} \frac{2c}{3} \log \frac{l}{\epsilon} & (r > (\sqrt{2} - 1)l) \\ \frac{c}{3} \log \frac{r(2l+r)}{\epsilon} & (r < (\sqrt{2} - 1)l) \end{cases} \Rightarrow I(A : B) = \begin{cases} 0 & (r > (\sqrt{2} - 1)l) \\ \frac{c}{3} \log \frac{l^2}{r(2l+r)} & (r < (\sqrt{2} - 1)l) \end{cases}, \quad (4.2.12)$$

を得る。相互情報量は faithful な相関測度であったから、古典重力による近似  $O(N^2)$  の範囲では、holographic CFTs の相関は  $l$  程度の距離の範囲に局在していることが言える。

以上の議論の中でホログラフィックエンタングルメントエントロピーが劣加法性を満たすことを確認したが、より一般にホログラフィックエンタングルメントエントロピーがエンタングルメントエントロピーの一般的な性質を満たしていることを確認する。特に強劣加法性 (strong subadditivity)

$$S_{AB} + S_{BC} \geq S_{ABC} + S_B, \quad (4.2.13)$$

に注目すると、これはホログラフィックエンタングルメントエントロピーの定義に含まれる最小性およびホモロジー条件から示すことができる。簡単のために  $A, B, C$  がこの順に隣接している状況を考えよう (図 4.2.4)。このとき強劣加法性は

$$\begin{aligned}
S_{AB} + S_{BC} &= (\gamma_{a_1} + \gamma_{a_2}) + (\gamma_{b_1} + \gamma_{b_2}) \\
&= (\gamma_{a_1} + \gamma_{b_1}) + (\gamma_{a_2} + \gamma_{b_2}) \\
&\geq \gamma_c + \gamma_d \\
&= S_{ABC} + S_B,
\end{aligned} \tag{4.2.14}$$

と証明できる。ただし三行目の不等式においてホログラフィックエンタングルメントエントロピーの最小性を用いた。部分系の順序が異なる場合や、隣接せず相互に離れている場合、それぞれが disjoint intervals で構成されている場合についても同様の方法で証明できる。尚、劣加法性および Araki-Lieb 不等式は、強劣加法性から演繹できる。すなわち、 $B$  として空集合を取ることで直ちに劣加法性  $S_A + S_C \geq S_{AC}$  を得る。また  $C$  を  $AB$  の purification<sup>\*8</sup> に取ると、 $S_{AB} + S_A \geq S_B$  を得る。同様に  $A \leftrightarrow B$  とラベルを付け替えて同様の議論を行うことで Araki-Lieb 不等式を得る。

ホログラフィックエンタングルメントエントロピーは、一般の量子系におけるエンタングルメントエントロピーの性質に加えて、次の不等式

$$S_{ABC} + S_A + S_B + S_C \leq S_{AB} + S_{BC} + S_{CA}, \tag{4.2.15}$$

を満たす。これは holographic CFTs の特殊性を反映していると考えられる (7.4節参照)。この証明は強劣加法性と同様にして行える。例えば最も簡単な状況 (図 4.2.5) については、 $I(A : C) > 0$  であるとき

$$\begin{aligned}
S_{AB} + S_{BC} + S_{CA} &= (\gamma_{ab_1} + \gamma_{ab_2}) + (\gamma_{bc_1} + \gamma_{bc_2}) + (\gamma_b + \gamma_{abc}) \\
&= (\gamma_{ab_1} + \gamma_{bc_2}) + (\gamma_{ab_2} + \gamma_{bc_1}) + \gamma_b + \gamma_{abc} \\
&\geq \gamma_a + \gamma_c + \gamma_b + \gamma_c \\
&= S_A + S_B + S_C + S_{ABC},
\end{aligned} \tag{4.2.16}$$

を得る。 $I(A : C) = 0$  のときも同様に示せる。式 (4.2.15) を相互情報量を用いて書き直すと、monogamy と呼ばれる不等式

$$I(A : BC) \geq I(A : B) + I(A : C), \tag{4.2.17}$$

を得る。または同値な表式として、tripartite information  $I(A : B : C) = S_A + S_B + S_C - S_{AB} - S_{BC} - S_{CA} + S_{ABC}$  の非正性

$$I(A : B : C) \leq 0, \tag{4.2.18}$$

---

\*8 第7章参照。

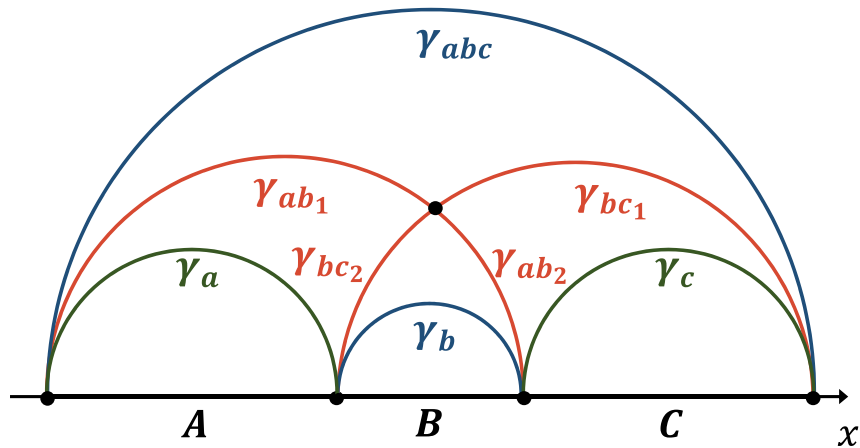


図 4.2.5 ホログラフィックな相互情報量の monogamy 性。

を得る。

Holographic な相互情報量の monogamy 性を用いると、エンタングルメントエントロピー（または von Neumann エントロピー）が一般の量子系において満たすべき無数の独立な性質 [97, 98] を、ホログラフィックエンタングルメントエントロピーが実際に満たしていることを証明できる [28]。これはホログラフィックエンタングルメントエントロピー公式を支持する重要な証拠の一つである。

Ryu-Takayanagi 公式は、AdS 時空におけるブラックホールエントロピーの拡張を与えている。このことを見るために、Schwarzschild-AdS ブラックホール時空のホログラフィックエンタングルメントエントロピーを考える。 $S^{d-1}$  上の場の理論の部分系  $A$  を徐々に拡大していくと、RT surface は部分系  $A$  が一定の大きさを越えたところでブラックホールの地平面に巻き付く形になる (図 4.2.6)。このとき地平面に巻き付いている曲面と、boundary にアンカーされた曲面を合わせた曲面は  $A$  へのホモロジー条件を満たしている。特に部分系  $A$  を  $S^{d-1}$  の全体に取ることで

$$S_{\text{tot}} = \frac{A_{\text{horizon}}}{4G_N}, \tag{4.2.19}$$

となり、AdS ブラックホールに対する Bekenstein-Hawking 公式を再現する。このとき共形場理論の量子状態は有限温度状態  $\rho_A \propto e^{-\beta H}$  である。すなわち、AdS ブラックホールに関しては、ブラックホールエントロピーは AdS boundary 上の量子論のエントロピーとして表すことができる。また

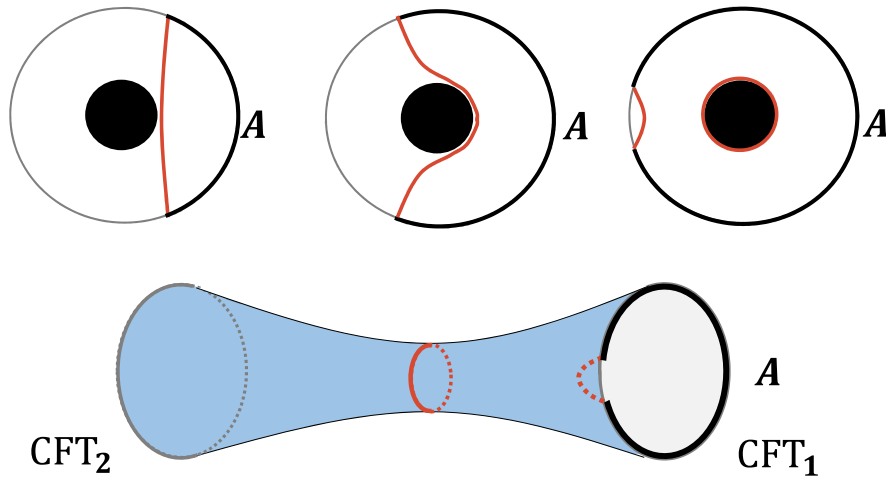


図 4.2.6 AdS ブラックホール時空中における Ryu-Takayanagi 曲面。上図は 1-side ブラックホール ( $S^1$  上の CFT の有限温度状態  $\rho_{\text{th}}$ )、下図は 2-sides ブラックホール (2つの境界上の  $\text{CFT}_1$ ,  $\text{CFT}_2$  に定義された |TFD>) に対応している。

全体系の量子状態が混合状態であることに対応して、ホログラフィックエンタングルメントエントロピーは一般に  $S_A \neq S_{A^c}$  となっている。特に RT surface が horizon に巻き付くほど十分大きな部分系  $A$  に対しては、

$$S_A = S_{A^c} + S_{AA^c}, \quad (4.2.20)$$

が成り立つ。これは Araki-Lieb 不等式を saturate しており、この現象は entanglement plateaux と呼ばれている [99]。

エンタングルメントエントロピー  $S_A$  は全体系が純粋状態のときに限って  $A$  と  $A^c$  の間の量子相関を表す。従って、混合状態である有限温度状態を見ている場合には  $S_A$  は量子相関としては解釈できない。ところが、CFT 上の有限温度状態をそれ自体がより大きな純粋状態にある系の部分系であると考えすることで、ブラックホールエントロピーを 2つの系の間の量子もつれとして解釈し直すことができる。この状況を与えるのが thermofield double state (TFD states) である (式 (2.4.28))。TFD 状態は同一の CFT の 2つのコピー  $\text{CFT}_1$ ,  $\text{CFT}_2$  上に定義された純粋状態である。片方の CFT をトレースアウトすると、残された CFT の量子状態は有限温度状態に戻ることが確認できる。TFD は 2つの boundary を持つ maximally extended AdS black hole 時空に対応している [59]。

図 4.2.6はその時間一定面を表しており、2つの AdS boundaries をワームホール (Einstein-Rosen bridge) が繋いでいる。この系においてホログラフィックエンタングルメントエントロピーを考えると、CFT<sub>1</sub> 上を取った部分系  $A$  が大きくなるにつれて、RT surface はワームホール時空の throat に巻き付くことが分かる。すなわち、ブラックホールエントロピーは TFD 状態にある 2つの CFT の間のエンタングルメントエントロピーと見做すことができる。この状況は境界にある 2つの場の理論の量子もつれによってワームホールで結び付いた時空が作り出されたと見做すことができる。これがより一般の状況でも成り立つという予想が [59] で与えられ、標語的に「ER=EPR 予想」と呼ばれている。また TFD 状態において両サイドの CFT を時間発展させた状況は global quench に対応している [64]。

AdS/CFT 対応の文脈で問題となる 2次元の holographic CFTs は、大自由度極限  $c \rightarrow \infty$  (large  $c$  limit) およびエネルギーギャップの存在  $\Delta_{gap} \sim O(c)$  (sparse spectrum) を満たす特殊なクラスの 2次元共形場理論である。これらの条件は、ゲージ理論の言葉では、前者は  $N \rightarrow \infty$  に、後者は  $\lambda \rightarrow \infty$  に相当する。1-interval の部分系に関するエンタングルメントエントロピーの結果 (4.1.39), (4.1.43), (4.1.46) は任意の 2次元共形場理論に共通であり、具体的なモデルの詳細に依存しないという意味で universal な結果である点に注意が必要である。さらに高次元  $d > 2$  の場合でも、球状の部分系  $A$  に対する真空状態 (およびその摂動) のエンタングルメントエントロピーは universal な結果を与えることが知られている [100, 101]。従ってこのような部分系のエンタングルメントエントロピーからは holographic CFTs に特有の情報を抜き出すことができないことに注意が必要である。そこで系の詳細に依存するようなエンタングルメントエントロピーの設定を考え、holographic CFTs の条件下における振る舞いを調べることで、重力側の計算との整合性を確認することが期待される。例えば部分系が  $n$ -disjoint intervals から構成されるエンタングルメントエントロピーを考えると、これはツイスト演算子の  $2N$  点相関関数から計算されるため、この量は理論の詳細に依存している。実際に、holographic CFTs の条件の下では、相互情報量  $I(A : B)$  について調べた重力側の相転移と同じ現象が起きることが確かめられている [96]。この事実は Ryu-Takayanagi 公式を支持する重要な結果の一つである。次節では、より直接的に Ryu-Takayanagi 公式の証明を行う。

### 4.3 Ryu-Takayanagi 公式の証明

Ryu-Takayanagi 公式を証明する試みは [102] に始まり、[92, 103] による改善を経て、一般的な状況における証明が [18] で与えられた。この証明は AdS/CFT 対応の一般原理を通して、重力理論側でレプリカ法の対応物を構成することで行われる。これは古典重力極限  $N \rightarrow \infty$  における公式の導

出を与えると同時に、次節で扱うホログラフィックエンタングルメントエントロピーの量子補正の効果をもたらす。尚、以下では簡単のために  $\alpha'$  による高階微分項の補正は考えず bulk は Einstein 重力理論に従うものとする。

場の理論におけるレプリカ法を再掲すると、 $n$  次の Rényi エントロピーおよびエンタングルメントエントロピーは

$$S_n(A) = \frac{\log \mathcal{Z}_n - n \log \mathcal{Z}_1}{1-n}, \quad S_A = \lim_{n \rightarrow 1} S_n(A), \quad (4.3.1)$$

で与えられた。ここで Rényi エントロピー  $S_n(A)$  を重力理論側で表すことを考えたい。そのために AdS/CFT 対応の辞書である GKPW の関係 (2.4.18) 式を用いて、分配関数  $\mathcal{Z}_n$  を対応する重力理論の分配関数として表すことにする。特に古典極限  $N \sim 1/\sqrt{G_N} \rightarrow \infty$  では、saddle point 近似を用いて重力側の分配関数は次のように与えられる。

$$\mathcal{Z}_n^{\text{CFT}} = \mathcal{Z}_n^{\text{AdS}} \sim e^{-I(\mathcal{M}_n)}. \quad (4.3.2)$$

ここで  $I(\mathcal{M}_n)$  は、 $\partial\mathcal{M}_n = \mathcal{R}_n$  を境界条件とする運動方程式 (Einstein 方程式) によって生成された古典解  $\mathcal{M}_n$  ( $\partial\mathcal{M}_n = \mathcal{R}_n$ ) の Einstein-Hilbert 作用および物質場である。

$$I(\mathcal{M}_n) = -\frac{1}{16\pi G_N} \int_{\mathcal{M}_n} (\sqrt{g}R - 2\Lambda) + I_{\text{matter}}. \quad (4.3.3)$$

レプリカ多様体  $\mathcal{R}_n$  は、分配関数の積分空間として現れるために  $S^1$  の周期性を持っている。例えば図 4.1.4 では  $\partial A$  周りに  $n$  回転すると元のシートに戻る。これに対応する  $\mathcal{R}_1$  の周期性を座標  $\tau$  を取って  $\tau \cong \tau + 2\pi$  と置くと、レプリカ多様体  $\mathcal{R}_n$  の周期性は  $\tau \cong \tau + 2\pi n$  と書ける。ここで境界  $\partial\mathcal{M}_n$  上の計量やその他の場は、 $n \in \mathbb{N}$  に依らずに

$$\phi|_B(\tau + 2\pi) = \phi|_B(\tau), \quad (4.3.4)$$

を満たしている。この条件は  $n$  が整数のときは周期性  $\tau \cong \tau + 2\pi n$  と整合することに注意。 $\mathcal{R}_n$  にはレプリカ対称性  $\mathbb{Z}_n$  があったことを思い出すと、この境界条件を満たす bulk の時空  $\mathcal{M}_n$  も  $\mathbb{Z}_n$  対称性を持つと考えるのが自然である。すなわち、bulk においてもレプリカ対称性は破れていないものと仮定する。また  $\mathcal{M}_n$  中に  $\mathbb{Z}_n$  対称性の固定点が存在する場合、その周りの極座標  $(r, \tau)$  による表示で計量は

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \frac{d\tau^2}{n^2} + \dots, \quad (4.3.5)$$

となる。ここで  $\dots$  は  $(r, \tau)$  と直交する方向の計量である。

エンタングルメントエントロピーを計算するためには、 $n$  を非整数に解析接続する必要がある。しかし、非整数の  $n$  に対して  $\tau \cong \tau + 2\pi n$  の周期性を取ると、境界条件 (4.3.4) と矛盾してしまう。そこで、bulk が持つ  $\mathbb{Z}_n$  対称性と作用積分の局所性を利用して、オービフォールド

$$\hat{\mathcal{M}}_n := \mathcal{M}_n / \mathbb{Z}_n, \quad (4.3.6)$$

上の  $\tau \in [0, 2\pi)$  の領域で定義される作用  $I(\hat{\mathcal{M}}_n)$  を計算し、それを  $n$  倍することによって元の作用  $I(\mathcal{M}_n)$  との解析接続を行う。

$$I(\mathcal{M}_n) \equiv nI(\hat{\mathcal{M}}_n). \quad (4.3.7)$$

ただし  $\hat{\mathcal{M}}_n$  は smooth な時空ではなく固定点 ( $\tau$  の  $S^1$  が潰れる点) の周りに conical singularity が存在することに注意が必要である。すなわち、 $\hat{\mathcal{M}}_n$  は計量 (4.3.5) を不変にしたまま  $\tau \simeq \tau + 2\pi$  の周期性を持つため、固定点の周りで  $2\pi(1 - \frac{1}{n})$  の欠損角が生じている。一般に conical singularity 上の Ricci scalar  $R$  は、デルタ関数型の特異性を持ち、Einstein-Hilbert 作用の積分に寄与する\*<sup>9</sup>。しかし、元の多様体  $\mathcal{M}_n$  が Einstein 方程式の解として smooth な時空であったことを思い出すと、 $I(\hat{\mathcal{M}}_n)$  にはその寄与を含めないと考えるのが妥当である。この条件の下で、 $n \in \mathbb{N}$  に関して式 (4.3.7) が成り立ち、右辺は非整数の  $n$  に関して well-defined に定義されて  $n \in \mathbb{R}$  への解析接続になっている。

例えば有限温度状態に対応する Euclidean ブラックホール時空では、 $A$  を全体系と置いたとき、bulk の深奥の点が  $\mathbb{Z}_n$  対称性の固定点になっている (図 (4.3.1))。この場合、周期的な座標  $\tau$  は Euclidean 時間  $t_E$  である。具体的に  $\mathcal{M}_1$  が 3 次元の BTZ ブラックホールであるときの計量は

$$ds^2 = \frac{r^2 - r_H^2}{l_{\text{AdS}}^2} dt_E^2 + \frac{l_{\text{AdS}}^2}{r^2 - r_H^2} dr^2 + r^2 d\phi^2, \quad (4.3.8)$$

であり、 $\mathcal{M}_n$  上の計量は

$$ds^2 = \frac{r^2 - r_H^2}{l_{\text{AdS}}^2} \frac{dt_E^2}{n^2} + \frac{l_{\text{AdS}}^2}{r^2 - r_H^2} dr^2 + r^2 d\phi^2, \quad (4.3.9)$$

となる。ただし  $l_{\text{AdS}}$  は AdS 半径である。固定点は  $r = r_H$  の horizon にある。また今の convention では温度は  $\beta = 2\pi l_{\text{AdS}}^2 / r_H \equiv 2\pi$  と規格化されている。これを horizon の付近で  $r^2 = r_H^2(1 + l_{\text{AdS}}^{-2} \tilde{r}^2) + O(\lambda^3)$  と展開すると、固定点周りの計量は

$$ds^2 = d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 \frac{dt_E^2}{n^2} + r_H^2 (1 + l_{\text{AdS}}^{-2} \tilde{r}^2) d\phi^2, \quad (4.3.10)$$

\*<sup>9</sup> 具体的には  $\int \sqrt{g} R = 4\pi(1 - n)$  となる。



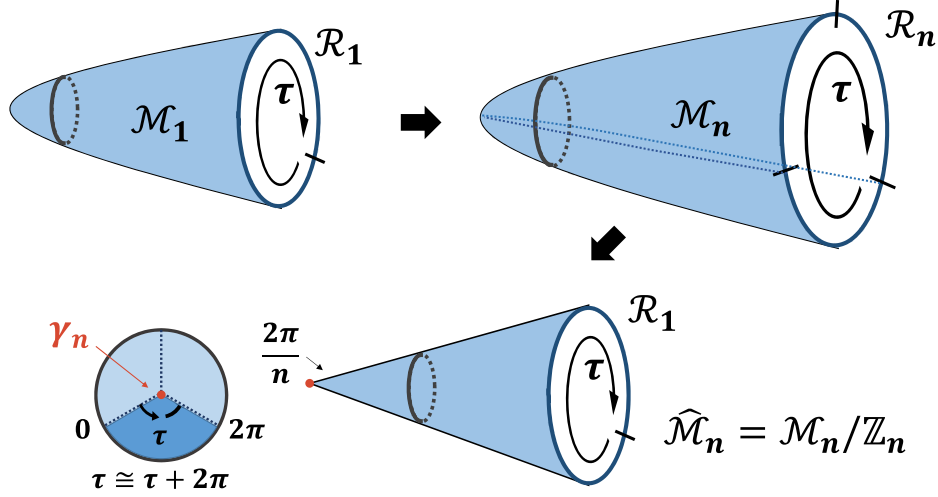


図 4.3.1 Euclidean ブラックホール時空に対応するレプリカ多様体。この例では周期座標  $\tau$  は Euclidean 時間  $t_E$  である。オービフォールド上の conical singularity  $\gamma_n$  は、Lorentzian ブラックホール時空における事象の地平面上に存在する。

となり、式 (4.3.5) の形で書ける。

この例のように部分系  $A$  を全体系に取らない場合は、boundary の  $\mathcal{R}_n$  上に  $\mathbb{Z}_n$  対称性の固定点  $\partial A$  が存在する。エンタングルメントエントロピーの計算に現れるのは通常こちらの状況である。この固定点は、運動方程式を通して  $\mathcal{M}_n$  へと伸長していくと考えることが自然である (図 4.3.2)。この固定点の集合を  $\gamma_n$  で表す。 $\gamma_n$  は任意の自然数  $n$  に対して  $\mathcal{M}_n$  を構成できるとき (またその場合に限って)  $A$  に homologous になることが知られている [104]。すなわち  $\gamma_n$  は bulk における codimension-2 surface である。

$I(\hat{\mathcal{M}}_n)$  には、 $\gamma_n$  周りの conical singularity が  $\frac{2\pi}{n}$  になるという条件を通して  $n$  の情報が反映される。この条件は、 $\gamma_n$  上に

$$T = \frac{1}{4G_N} \frac{n-1}{n}, \quad (4.3.11)$$

の tension を持った codimension-2 の cosmic brane

$$I_{\text{brane}} = T \int_{\gamma_n} \sqrt{h}, \quad (4.3.12)$$

を仮想的に配置して運動方程式を解くことで満たせる。ここで  $h_{ij}$  は brane 上の induced metric で

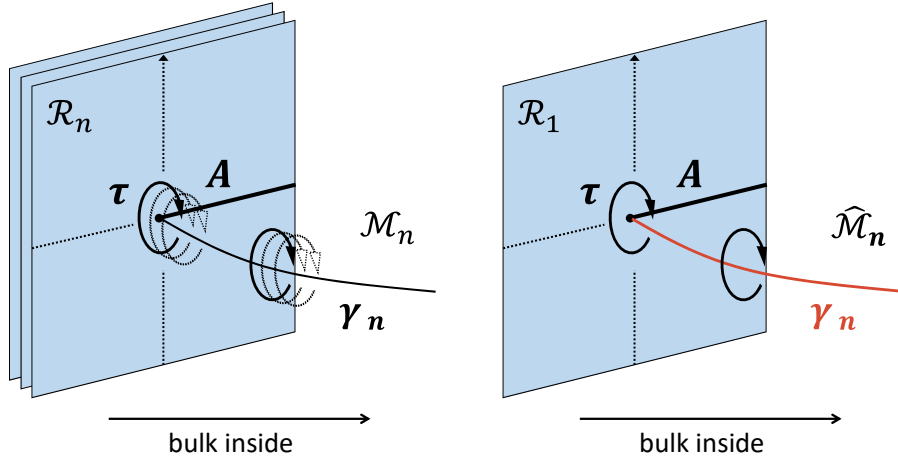


図 4.3.2 境界上の部分系  $A$  が entangling surface (周期座標  $\tau$  に関する固定点)  $\partial A$  を持つ場合の bulk のレプリカ多様体。  $\partial A$  の固定点は bulk 内部に伸長していき、オービフォルド時空の固定点  $\gamma_n$  を形成する。  $\gamma_n$  は  $A$  に homologous な codimension-2 surface である。

ある。  $T$  は  $0 \leq T \leq \frac{1}{4G_N}$  の任意の実数値を取る<sup>\*10</sup>。特に  $n = 1$  の場合、cosmic brane が消滅し元の時空に戻ることが分かる。このように解析接続された  $n \in \mathbb{R}$  の効果は cosmic brane の tension に押し付けられる形となる。尚、これらの操作は CFT 側におけるオービフォルドおよびツイスト演算子を用いた計算のアナロジーと見做せる。

以上から、重力理論における Rényi エントロピーは

$$S_n(A) = \frac{\log \mathcal{Z}_n - n \log \mathcal{Z}_1}{1 - n} = \frac{n}{n - 1} \left( I(\hat{\mathcal{M}}_n) - I(\mathcal{M}_1) \right), \quad (4.3.14)$$

と表せる。ここからエンタングルメントエントロピーを求める際に、Rényi エントロピーを直接扱

<sup>\*10</sup> 簡単な例として、4次元平坦時空において  $z$  軸上に codimension-1 の cosmic string  $I = T \int \sqrt{h}$  を置いた状況を考える。エネルギー運動量テンソルは  $T_{\mu\nu} = T\delta(x)\delta(y)\text{diag}(1, 0, 0, 1)$  となる。  $T$  が十分に小さいときに  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$  として線形アインシュタイン方程式を解くと、  $h_{tt} = h_{zz} = 0$ ,  $h_{xx} = h_{yy} = 8G_N T \log(r/r_0)$ ,  $(x + iy \equiv r e^{i\tau})$  となる。これを計量に戻すと、  $T$  の線形近似の範囲で

$$\begin{aligned} ds^2 &= dt^2 + dz^2 + (1 - 8G_N T \log \frac{r}{r_0})(dx^2 + dy^2) \\ &\sim dt^2 + dz^2 + dr'^2 + (1 - 4G_N T)^2 r'^2 d\phi^2, \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

と書ける。ただしここで  $r'(r)$  は新しい動径座標である。従って、この時空は  $z$  軸上に  $\phi \simeq \phi + 2\pi(1 - 4G_N T)$  となる conical singularity を持つ [105, 106]。

うよりも、モジュラーエントロピー (modular entropy) と呼ばれる次の量を導入すると便利である [107]。

$$\tilde{S}_n(\rho) = n^2 \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{n-1}{n} S_n(\rho) \right). \quad (4.3.15)$$

これが  $n \rightarrow 1$  でエンタングルメントエントロピーに一致することは、

$$\tilde{S}_n(\rho_A) = n^2 \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{-1}{n} \log \text{Tr} \rho_A^n \right) \quad (4.3.16)$$

$$= \log \text{Tr} \rho_A^n - \frac{n \text{Tr} [\rho_A^n \log \rho_A]}{\text{Tr} \rho_A^n} \quad (4.3.17)$$

$$\rightarrow S_A (n \rightarrow 1), \quad (4.3.18)$$

と確認できる。モジュラーエントロピーは、今の場合、式 (4.3.14) から、

$$\tilde{S}_n = n^2 \frac{\partial}{\partial n} \left( I(\hat{\mathcal{M}}_n) - I(\mathcal{M}_1) \right) = n^2 \frac{\partial}{\partial n} I(\hat{\mathcal{M}}_n), \quad (4.3.19)$$

と表せる。最右辺は重力側の古典作用の  $\hat{\mathcal{M}}_n$  周りでの計量の変分  $\delta_n I = \delta_g I|_{\delta g_{\mu\nu} = \partial_n g_{\mu\nu}^{(n)}}$  である。 $n$  を変化させることは、固定点上の cosmic barne の tension を変化させることに対応するため、 $\delta_n I$  は  $\mathcal{E}_n$  上に局在した量で表せると予想できる。実際、 $I(\hat{\mathcal{M}}_n)$  が cosmic brane からの寄与を含めない作用として定義されたことを思い出すと、cosmic brane を半径  $\epsilon \rightarrow 0$  の人工的な境界 (“tube“) で覆われた codimension-1 の object  $\gamma_n(\epsilon)$  と捉えて、境界付き時空の作用積分を考えることで右辺は計算できる。ここで一般に、境界付き時空において Einstein-Hilbert 作用に Gibbons-Hawking-York 項を加えた作用

$$I = I_{\text{EH}} + I_{\text{GHY}} = -\frac{1}{16\pi G_N} \int_M (\sqrt{g}R - 2\Lambda) - \frac{1}{8\pi G_N} \int_{\partial M} K, \quad (4.3.20)$$

の変分が

$$0 = \delta_g I = \int_M \mathbb{E} \delta_g g + \delta_g I_{\text{EH}}|_{\partial M} + \delta_g I_{\text{GHY}}, \quad (4.3.21)$$

を満たしたことを思い出すと、

$$\delta_g I_{\text{EH}}|_{\partial M} = -\delta_g I_{\text{GHY}}, \quad (4.3.22)$$

の関係式を得る<sup>\*11</sup>。ただしここで運動方程式  $\mathbb{E} = 0$  を用いた。また境界上の  $\delta g|_{\partial M}$  の項は計量に

<sup>\*11</sup> 境界項は symplectic form を用いて

$$\delta_g I_{\text{EH}}|_{\partial M} = \int \Theta(g, \partial g), \quad (4.3.23)$$

で与えられる [108, 109]。

Dirichlet 条件を課して落としている。今の場合、 $I(\hat{\mathcal{M}}_n)$  に同様の議論を適用することで

$$\frac{\partial}{\partial n} I(\hat{\mathcal{M}}_n) = \frac{\partial}{\partial n} I_{\gamma_n(\epsilon)}(\hat{\mathcal{M}}_n) = \frac{1}{8\pi G_N} \frac{\partial}{\partial n} \int_{\gamma_n(\epsilon)} K, \quad (4.3.24)$$

を得る<sup>\*12</sup>。ただし  $K$  は extrinsic curvature のトレース (mean curvature)

$$K_{\mu\nu} := h_\mu^\alpha h_\nu^\beta \nabla_\alpha n_\beta, \quad K = g^{\mu\nu} K_{\mu\nu} = \nabla_\mu n^\mu, \quad (4.3.25)$$

であり、 $n_\mu$  は境界面上の規格化された outward-pointing normal である<sup>\*13</sup>。今の場合、固定点周りの計量 (4.3.5) を用いると、曲面は  $r = \text{const.}$  で与えられるから、 $n_\mu \propto \delta_\mu^r$  および  $1 = n_\mu n^\mu$  によって  $n^\mu = -\frac{1}{n} \delta_r^\mu$  が分かる。ここで  $n^\mu$  を  $\hat{\mathcal{M}}_n$  の外側に向かうように取るため負号が付くことに注意。従って  $r = \epsilon$  の最低次のオーダーで

$$K|_{r=\epsilon} = \nabla_\mu n^\mu|_{r=\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial r} [\sqrt{g} n^\mu]|_{r=\epsilon} \sim -\frac{1}{n\epsilon}, \quad (4.3.30)$$

となる。従って

$$\tilde{S}_n = \frac{n^2}{8\pi G_N} \frac{\partial}{\partial n} \int_{\gamma_n(\epsilon)} K = \frac{\mathcal{A}(\gamma_n)}{4G_N}. \quad (4.3.31)$$

を得る。すなわち、一般の  $n \in \mathbb{R}$  に関して、 $\tilde{S}_n$  は cosmic brane の面積で与えられる [107]。

ここで特に  $n \rightarrow 1$  の極限を取ると、 $\gamma_n$  が時刻  $\tau = t = 0$  上の最小 (極値) 曲面  $\gamma_A^{\min}$  になることが分かる。これは  $n \sim 1$  ときの  $\gamma_n$  周りの計量の運動方程式から、曲面に垂直な方向の extrinsic curvatures のトレースがゼロになる事実から従う [18]。このことは cosmic brane が tension less

<sup>\*12</sup>  $I(\hat{\mathcal{M}}_n)$  には  $\mathcal{E}_n(\epsilon)$  上の GHY 項は含まれていないことに注意。一方、 $I(\hat{\mathcal{M}}_n)$  は AdS boundary の GHY 項を含んでいるが、ここでは特に変分として cosmic brane の tension  $n$  の変化を考えており、AdS boundary の境界項は  $\delta_n g_{\mu\nu}|_{z=\epsilon} = 0$  となって無視できることを暗に用いている。

<sup>\*13</sup> codimension-1 の超曲面  $\mathcal{B}$  への射影を、unit normal vector  $n_\mu$  を用いて

$$h_\mu^\alpha := \delta_\mu^\alpha - \epsilon n_\mu n^\alpha, \quad (n_\mu n^\mu = \pm 1 \equiv \epsilon), \quad (4.3.26)$$

と定義する。ここから  $h_\mu^\alpha n_\alpha = 0$  が従う。 $h_{\mu\nu}|_{\mathcal{B}}$  は  $g_{\mu\nu}$  から超曲面上に誘導された計量と見做せる。超曲面上の induced metric  $h_{ab}$  とは、超曲面が  $X^\alpha(x^a)$  でパラメトライズされるとき

$$h_{ab} = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^a} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^b} h_{\alpha\beta}, \quad (4.3.27)$$

の関係にある。これらを前提に  $h_{\mu\nu}$  を induced metric と呼ぶことが多い。一般に codimension- $q$  の超曲面への射影および extrinsic curvature は、直交する  $q$  個の normal vectors  $n^{(i)}$  を用いて

$$h_\mu^\alpha := \delta_\mu^\alpha - \sum_{i=1}^q n_\mu^{(i)} n^{(i)\alpha}, \quad (4.3.28)$$

$$K_{\mu\nu}^\alpha := -h_\mu^\beta h_\nu^\gamma \nabla_\beta h_\gamma^\alpha, \quad (4.3.29)$$

で定義される。

limit で時空中の極値曲面になる事実に対応している。

以上のことから、 $n \rightarrow 1$  の極限を取ることで

$$S_A = \lim_{n \rightarrow 1} \tilde{S}_n = \frac{\mathcal{A}(\gamma_A^{\min})}{4G_N}, \quad (4.3.32)$$

となり、Ryu-Takayanagi 公式が示された。

## 4.4 Ryu-Takayanagi 公式の量子補正

Ryu-Takayanagi 公式 (4.2.1) は AdS/CFT 対応の古典極限  $O(N^2)$  において成り立つ公式である。 $N$  を無限大から下げていくと bulk の量子重力の効果が現れて、ホログラフィックエンタングルメントエントロピーは補正を受ける。前節の証明は、ホログラフィックエンタングルメントエントロピー量子補正がどのような形に入るかを明らかにする。その効果は、本質的には bulk の背景時空の上で量子化された場の理論のエンタングルメントエントロピーから現れる。以下では Faulkner-Lewkowycz-Maldacena による議論 [21] に沿って、ホログラフィックエンタングルメントエントロピーの量子補正の公式を導出する\*14。

前節の議論において、ホログラフィックエンタングルメントエントロピーへの leading order  $O(N^2)$  の寄与は、式 (4.3.2) から明らかかなように経路積分の古典近似から現れた。次の sub-leading order  $O(N^0)$  の効果は、経路積分における半古典近似 (1-loop 補正) から生じる。すなわち、計量やその他の場の古典解を background として固定して、その quantum fluctuation (graviton  $h_{\mu\nu}$  やその他の場の微小変分  $\varphi$ ) について考えればよい。半古典近似の範囲で、bulk の分配関数は

$$\mathcal{Z}_n = e^{-I(\mathcal{M}_n)} \mathcal{Z}_n^q, \quad (4.4.1)$$

と書ける。以下では  $\mathcal{Z}_n^q$  による 1-loop の量子補正を求める。この方法は原理的には高次の量子補正についても導出する処方を与える。

まずは  $n$  が正整数である場合について考える。レプリカされた背景時空  $\mathcal{M}_n$  の計量を  $g_n$  で表す。この時空が持つ周期性を前節と同様に座標  $\tau \simeq \tau + 2\pi n$  で表す。この座標  $\tau$  を bulk の Euclidean 時間と見做すと、 $\mathcal{M}_n$  上の分配関数は

$$\mathcal{Z}_n^q = \text{Tr}[P e^{-\int_0^{2\pi n} d\tau H_n^{\text{bulk}}(\tau)}], \quad (4.4.2)$$

\*14 [21] とは異なる方法で AdS<sub>3</sub>/CFT<sub>2</sub> 対応に関する量子補正の計算が [110] で行われた。

と表せる。ここで  $H_n^{\text{bulk}}(\tau)$  は  $\tau$  を Euclidean 時間と見なしたときの bulk の (一般に time-dependent な) Hamiltonian であり、添字の  $n$  は  $H_n^{\text{bulk}}(\tau)$  が背景計量  $g_n$  に依存していることを表す。また  $P$  は Euclidean の時間順序積である。ここで  $\tau \rightarrow \tau + 2\pi$  に関する理論の対称性を利用して、 $\hat{\mathcal{M}}_n$  上の量子状態

$$\hat{\rho}_n := P e^{-\int_0^{2\pi} d\tau H_n^{\text{bulk}}(\tau)}, \quad (4.4.3)$$

を定義すると、 $\mathcal{Z}_n^q$  はさらに

$$\mathcal{Z}_n^q = \text{Tr}[\hat{\rho}_n^n], \quad (4.4.4)$$

と表せる。 $\hat{\rho}_n$  は  $\hat{\mathcal{M}}_n$  上の場の理論における thermal state のアナロジーである。

ホログラフィックエンタングルメントエントロピーを求めるには  $n > 1$  に解析接続を行う必要があった。ここでは式 (4.4.4) がその方法を与える。実際、前節で議論したように、 $\hat{\mathcal{M}}_n$  ないし  $\hat{g}_n$  は非整数の  $n > 1$  に対して、tension が式 (4.3.11) で与えられる cosmic brane (4.3.12) を  $\mathcal{E}_n$  上に配置した場合の運動方程式の解として定義された。従って、 $n > 1$  については  $\hat{g}_n \rightarrow H_n^{\text{bulk}}(\tau) \rightarrow \hat{\rho}_n$  と順繰りに矛盾なく定義されて、任意の  $n > 1$  に対する  $\mathcal{Z}_n^q$  は式 (4.4.4) の右辺によって well-defined である。

Rényi エントロピーは、式 (4.4.1) から

$$S_n = S_n^{(0)} + \frac{\log \mathcal{Z}_n^q - n \log \mathcal{Z}_1^q}{1-n} \equiv S_n^{\text{cl}} + S_n^q, \quad (4.4.5)$$

と分離する。ここで  $S_n^{\text{cl}}$  は前節で求めた古典的寄与から来る Rényi エントロピー (4.3.14) である。

ホログラフィックエンタングルメントエントロピーの量子補正は

$$\begin{aligned} S_A^q &= \lim_{n \rightarrow 1} S_n^q \\ &= - \lim_{n \rightarrow 1} \frac{\partial}{\partial n} (\log \text{Tr}[\hat{\rho}_n^n] - n \log \text{Tr}[\hat{\rho}_1]) \\ &= - \lim_{n \rightarrow 1} \frac{\partial}{\partial n} (\log \text{Tr}[\hat{\rho}_1^n] - n \log \text{Tr}[\hat{\rho}_1]) - \lim_{n \rightarrow 1} \left( \frac{\frac{\partial}{\partial n} \text{Tr}[\hat{\rho}_n]}{\text{Tr}[\hat{\rho}_1]} \right), \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

と表せる。第一項は、元の時空  $\mathcal{M}_1$  上の場の理論に関するエンタングルメントエントロピー (bulk entanglement entropy)

$$S_{M_A}^{\text{bulk}} := - \lim_{n \rightarrow 1} \frac{\partial}{\partial n} (\log \text{Tr}[\hat{\rho}_1^n] - n \log \text{Tr}[\hat{\rho}_1]), \quad (4.4.7)$$

である。ここで bulk の部分系  $M_A$  は RT surface  $\gamma_A$  と AdS boundary で囲まれた領域である (図 4.4.1)。ここで部分系として  $M_A$  が現れるのは、bulk の  $\gamma_A$  周りでの回転  $\tau$  を、bulk におけるレブ

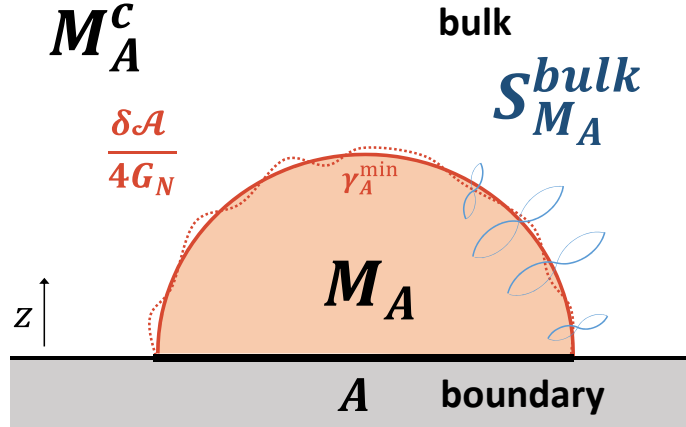


図 4.4.1 ホログラフィックエンタングルメントエントロピーの 1-loop 量子補正。Bulk 上の場の理論に対して、Ryu-Takayanagi 曲面  $\gamma_A^{\min}$  と境界上の部分系  $A$  で囲まれた領域  $M_A$  を部分系と見做したときのエンタングルメントエントロピー  $S_{M_A}^{\text{bulk}}$  が寄与する。またこのオーダー  $O(N^0)$  では最小曲面  $\gamma_A^{\min}$  の位置は変わらないが、backreaction に伴って面積  $\mathcal{A}(\gamma_A^{\min})$  が微小変化する。

リカ法の周期座標として取ったことを反映している。

簡単のために場の古典解を  $\phi = 0$  と置くと、式 (4.4.6) の第二項は、 $\hat{\mathcal{M}}_n$  上の quantum fluctuation の作用  $I_n^{\text{bulk}} := I(\hat{g}_n + h) - I(\hat{g}_n)$  を用いて

$$\begin{aligned}
 - \lim_{n \rightarrow 1} \frac{\frac{\partial}{\partial n} \text{Tr}[\hat{\rho}_n]}{\text{Tr}[\hat{\rho}_1]} &= \lim_{n \rightarrow 1} \frac{\int DhD\varphi \frac{\partial I_n^{\text{bulk}}}{\partial n} e^{-I_n^{\text{bulk}}}}{\int DhD\varphi e^{-I_1^{\text{bulk}}}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow 1} \int dx^{d+1} \langle \partial_n \mathcal{L}^{\text{bulk}}(\hat{g}_n; h, \varphi) \rangle \\
 &= \int dx^{d+1} \langle \mathbb{E}(\hat{g} + h, \varphi) \rangle \cdot \partial_n \hat{g}_n|_{n=1} + \langle d\Theta(\hat{g} + h, \varphi; \partial_n \hat{g}|_{n=1}) \rangle \quad (4.4.8) \\
 &\quad - \int dx^{d+1} d\Theta(\hat{g}; \partial_n \hat{g}|_{n=1}), \quad (4.4.9)
 \end{aligned}$$

と書ける。ここで  $\mathbb{E}$  は運動方程式に相当する項である。また最終行を求める際に、古典解についての性質  $\mathbb{E}(\hat{g}) = 0$  を用いた。この表式の symplectic potential  $\Theta$  に関する項は、次の Wald(-like) エ

ントロピーを与える [21]<sup>\*15</sup>。

$$\langle \Delta S_{\text{Wald}}^q \rangle := \int dx^{d+1} (\langle d\Theta(\hat{g}, h, \varphi; \partial_n \hat{g}|_{n=1}) \rangle - d\Theta(\hat{g}; \partial_n \hat{g}|_{n=1})). \quad (4.4.11)$$

この項が現れる典型的な状況としては、例えば作用に  $\zeta \phi^2 R$  の coupling 項が含まれている場合が相当する。ホログラフィックエンタングルメントエントロピーの面積項が Einstein-Hilbert 作用の  $R$  項から現れたことを思い出すと、この coupling 項は古典的には  $\phi = 0$  として寄与せずとも、quantum fluctuation の効果によって  $\zeta \mathcal{A}(\gamma_A^{\text{min}}) \langle \phi^2 \rangle > 0$  となる寄与が新たに現れることが分かる。

式 (4.4.8) の第一項は運動方程式の期待値である。これは場が off-shell であるため、非ゼロの値を持っている。そのため背景時空は backreaction を受けて

$$\mathbb{E}(\hat{g} + \bar{h}) \equiv - \langle \mathbb{E}(\hat{g} + h, \varphi) \rangle, \quad (4.4.12)$$

を満たすように  $g \rightarrow g + \bar{h}$  と変化する。ここで  $\bar{h}$  は  $O(G_N)$  の量であり、その定義から  $n$  には直接依存しない。これを用いると、古典的な変分操作によって

$$\begin{aligned} \int dx^{d+1} \langle \mathbb{E}(\hat{g} + h, \varphi) \rangle \cdot \partial_n \hat{g}_n|_{n=1} &= - \int dx^{d+1} \mathbb{E}(\hat{g} + \bar{h}) \cdot \partial_n \hat{g}_n|_{n=1} \\ &= \int dx^{d+1} d\Theta(\hat{g} + \bar{h}, \partial_n \hat{g}) - \partial_n I(\hat{g}_n + \bar{h})_{n=1}, \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

と書き換えることができる。ここで  $\hat{g}_n$  は saddle point であるから  $I(\hat{g}_n + \bar{h}) = I(\hat{g}_n) + O(\bar{h}^2)$  となり、 $I(\hat{g}_n + \bar{h})$  と  $I(\hat{g}_n)$  は  $\bar{h}$  の 1 次のオーダーで一致する。従って、第二項は前節の結果から表面積  $\mathcal{A}(\gamma_A)$  を与える。また第一項は、同様に backreaction を受けた時空において  $\gamma_A$  の面積を与える。 $O(N^0)$  の補正の範囲では minimal surface の位置は不変であるから、これらの項の差分は背景時空の backreaction に伴う表面積の変化分を与える。

$$\frac{\delta \mathcal{A}(\gamma_A^{\text{min}})}{4G_N} := \frac{\mathcal{A}(\gamma_A^{\text{min}}; \hat{g} + \bar{h})}{4G_N} - \frac{\mathcal{A}(\gamma_A^{\text{min}}; \hat{g})}{4G_N}. \quad (4.4.14)$$

<sup>\*15</sup> Wald エントロピーは、任意の重力理論（典型的には作用に高階微分項 ( $R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta}$ ,  $R^2$ , ...) を含む重力理論) に対する Bekenstein-Hawking エントロピーの拡張として (Euclidean signature で)

$$S_{\text{Wald}} = -2\pi \int_{\text{horizon}} d^{d-1} y \sqrt{\gamma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{\mu\nu\alpha\beta}} \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{\alpha\beta}, \quad (4.4.10)$$

と定義される。ここで  $\gamma$  は horizon 上の induced metric、 $\varepsilon_{\mu\nu}$  は binomial である。Riemann tensor による Lagrangian の微分は、 $R_{\mu\nu\alpha\beta}$  が計量  $g_{\mu\nu}$  と独立であると formal に見做して行う。このエントロピーは一般化された重力理論におけるブラックホールの 1st law を満たす [108, 109]。また本文に現れる項は、 $\tau$  の  $U(1)$  対称性を仮定していないため厳密には Wald-like エントロピーと呼ばれ、Wald エントロピーと同様の表式が存在することを仮定している [21]。



以上の議論では暗黙裡に置いたが、この他に重力理論の IR 発散を制御するための counter terms を作用に含める必要があり、ホログラフィックエンタングルメントエントロピーにその寄与  $S_{c.t.}$  が現れる。これはホログラフィックエンタングルメントエントロピーの量子補正を finite にする効果を持つ。

以上の議論から、ホログラフィックエンタングルメントエントロピーに対するオーダー  $O(N^0)$  (すなわち、 $O(G_N^0)$ ) の 1-loop 量子補正は、次の形で与えられる。

$$S_A^q = S_{M_A}^{bulk} + \frac{\delta\mathcal{A}(\gamma_A^{\min})}{4G_N} + \langle \Delta S_{\text{Wald}}^q \rangle + S_{c.t.} \quad (4.4.15)$$

この公式はホログラフィックエンタングルメントエントロピーの 1-loop 量子補正を直接計算する処方を与える。この計算の具体例は例えばスカラー場に関して [111] を参照。尚、量子補正を含めた場合も（最も強い性質である）strong subadditivity (3.3.20) は成り立つ。実際、 $S_{M_A}^{bulk}$  は bulk のエンタングルメントエントロピーであるから明らかにこれを満たし、さらに残りの項はすべて元の minimal surface  $\gamma_A^{\min}$  上の局所的な量であるから、小節 4.2.2 で行った leading order に対する証明がそのまま成り立つ。

ホログラフィックエンタングルメントエントロピーの量子補正が重要になる状況の例として、共形場理論における部分系を 2 つ ( $A, B$  と置く) 取ってこれらを十分に離れたときの相互情報量  $I(A : B)$  が挙げられる。式 (4.2.12) で見たように、holographic CFTs では、2 つの部分系の距離を十分に離すと leading order  $O(N^2)$  で  $S_{AB} = S_A + S_B$  が成り立つ。このとき相互情報量は  $I(A : B) = 0$  となる。一方、相互情報量と場の理論の相関関数に関して、次の一般的な不等式が知られている [112]。

$$I(A : B) \geq \frac{1}{2} \frac{C_{\rho_{AB}}[\mathcal{O}_A, \mathcal{O}_B]^2}{\|\mathcal{O}_A\|^2 \|\mathcal{O}_B\|^2}. \quad (4.4.16)$$

ここで  $\mathcal{O}_{A,B}$  はそれぞれ  $A, B$  上に support を持つ演算子であり、 $\|\mathcal{O}_A\|$  は operator norm (最大固有値) を表す。また共分散  $C_{\rho_{AB}}$  は相関関数を用いて

$$C_{\rho_{AB}}[\mathcal{O}_A, \mathcal{O}_B] := \text{Tr}[\rho_{AB} \mathcal{O}_A \otimes \mathcal{O}_B] - \text{Tr}[\rho_A \mathcal{O}_A] \text{Tr}[\rho_B \mathcal{O}_B] \quad (4.4.17)$$

$$= \langle \mathcal{O}_A \otimes \mathcal{O}_B \rangle_{\rho_{AB}} - \langle \mathcal{O}_A \rangle_{\rho_A} \langle \mathcal{O}_B \rangle_{\rho_B}, \quad (4.4.18)$$

と定義される<sup>\*16</sup>。共分散は一般には共形場理論側で非ゼロの値を持つため、bulk で計算した相互情

<sup>\*16</sup> この不等式は、quantum Pinsker inequality

$$S(\rho \|\sigma) \geq \frac{1}{2} \|\rho - \sigma\|_1^2, \quad (4.4.19)$$

報量も有限の値を持っていなければならない。このことは bulk の相互情報量が量子補正まで含めると正の値を持つことを意味する。実際、球状の部分系  $A$  と  $B$  が十分に離れた極限において、相互情報量の量子補正の計算が AdS 側と CFT 側で行われ、それらが一致することが確かめられた [113, 114]。その結果は、それぞれの部分系のサイズを  $l_{A,B}$ 、部分系間の距離を  $r$ 、最も小さなスカラー演算子の scaling dimension を  $\Delta$  およびその縮退度を  $\mathcal{N}_\Delta$  としたときに

$$I(A : B) = \mathcal{N}_\Delta \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2\Delta + 1)}{4\Gamma(2\Delta + \frac{3}{2})} \frac{(l_A l_B)^{2\Delta}}{r^{4\Delta}} + \dots, \quad (r \rightarrow \infty), \quad (4.4.21)$$

で与えられる。

## 4.5 Ryu-Takayanagi 公式の一般化

Ryu-Takayanagi 公式は静的な bulk の時空に対して定義された。一方、AdS/CFT 対応においては、例えば回転するブラックホール時空などの静的でない bulk の時空も考えられる。そのような場合、ホログラフィックエンタングルメントエントロピーは次の Hubeny-Rangamani-Takayanagi (HRT) 公式で与えられる [9]。

$$S_A = \min \left( \text{ext}_{\substack{\partial\gamma_A = \partial A \\ \gamma_A \sim A}} \frac{\mathcal{A}(\gamma_A)}{4G_N} \right). \quad (4.5.1)$$

ここで  $\gamma_A$  は、Ryu-Takayanagi 公式の場合と同様に、境界上の entangling surface  $\partial A$  に端を持ち、 $A$  と homologous になるような bulk の codimension-2 曲面である。以前と異なるのは、 $\gamma_A$  がある時間一定面  $t = t_0$  に制限されている必要が無い点である。ホログラフィックエンタングルメントエントロピーは、それらの条件を満たす極値曲面、すなわち  $\delta\mathcal{A}(\gamma_A^{\text{ext}}) = 0$  の解によって与えられる\*17。この極小曲面を  $\gamma_A^{\text{ext}}$  で表す。この条件を満たす曲面が複数ある場合はその面積が最小のものを選択する。また静的な時空に対しては、この公式は Ryu-Takayanagi 公式を再現する。

HRT 公式の場合、例えばホログラフィックエンタングルメントエントロピーの強劣加法性は、maximin surface's prescription と呼ばれる処方に従って、性質の良い一般の時空で成り立つことが証明されている [35]。またこの公式の直接的な証明は、近年 [19] によって与えられた。

---

および任意の (有界) 作用素  $X, Y$  に対する不等式

$$\|Y\| \|X\|_1 \geq \text{Tr}XY, \quad (4.4.20)$$

を用いると直ちに従う。詳細は付録 9.2.1 参照。

\*17 時間方向への変形を許した場合、 $\gamma_A$  の面積はいくらでも小さくできてしまう。そのため式 (4.2.1) の拡張として、最小値ではなく極値を考える必要がある。

次章ではこの公式を用いてホログラフィックエンタングルメントエントロピーの計算を行う。

尚、本論文では主に bulk が Einstein 重力理論に従う場合を扱うが、弦理論による  $\alpha' \sim l_s^2$  の補正効果を考慮すると、重力作用には高階微分項が現れる。例えば Gauss-Bonne 重力理論の作用は

$$I_{GB} = -\frac{1}{16\pi G_N} \int_{\mathcal{M}_n} (\sqrt{g}R - 2\Lambda + \lambda_{GB}(R_{\mu\nu\alpha\beta} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2)), \quad (4.5.2)$$

で与えられる。このような場合、ホログラフィックエンタングルメントエントロピーは次の汎関数

$$S_A = \min_{\partial\gamma_A = \partial A} \frac{1}{4G_N} \int_{\gamma_A} \sqrt{h}(1 + 2\lambda_{GB}R_{\text{intrinsic}}), \quad (4.5.3)$$

によって与えられる。ここで積分中の  $\gamma_A$  の intrinsic Ricci scalar が高階微分による補正効果を表している。一般の高階微分重力理論のホログラフィックエンタングルメントエントロピーに関する議論は [20, 24] 等を参照。

## 第 5 章

# Lorentz boost された部分系のホログラフィックエンタングルメントエントロピー

本章では、著者らの研究結果 [1] に基づいて、Lorentz boost を受けた部分系のホログラフィックエンタングルメントエントロピーについて詳しく解説する。

前章で述べたように、場の理論におけるレプリカ法を用いたエンタングルメントエントロピーの計算は、一般的なセットアップの状況では技術的に困難である。例えば、相互情報量の計算などに現れる 2 つ以上の disjoint な部分系のエンタングルメントエントロピーの導出には、一般に複雑なレプリカ多様体上の分配関数を求める必要が生じる。また Cauchy 面を時間一定面 ( $t = t_0$ ) 以外に取った場合、通常のレプリカ法から離れて複素時空へと解析接続した経路積分を取り扱わねばならない。しかしこのような状況においても、holographic CFTs に関しては、ホログラフィックエンタングルメントエントロピーの公式を用いることで、古典的な bulk の幾何学量としてエンタングルメントエントロピーを比較的容易に導出することが可能となる\*1。

本章では、まず holographic CFTs における Lorentz boost を受けた部分系のエンタングルメントエントロピーを、HRT 公式 (4.5.1) を応用して導出する。さらにその結果を用いて、一方の部分系が Lorentz boost された状況に対応する相互情報量について解析し、2 つの部分系  $A, B$  が互いに light-like な関係になる極限において相互情報量  $I(A : B)$  が普遍的な形で発散することを見る。また同様の議論を、AdS/CFT 対応をより一般的な holography として拡張した非相対論な場の理論

---

\*1 本章の議論に現れるエンタングルメントエントロピーは、全て leading order  $O(N^2)$  で扱う。

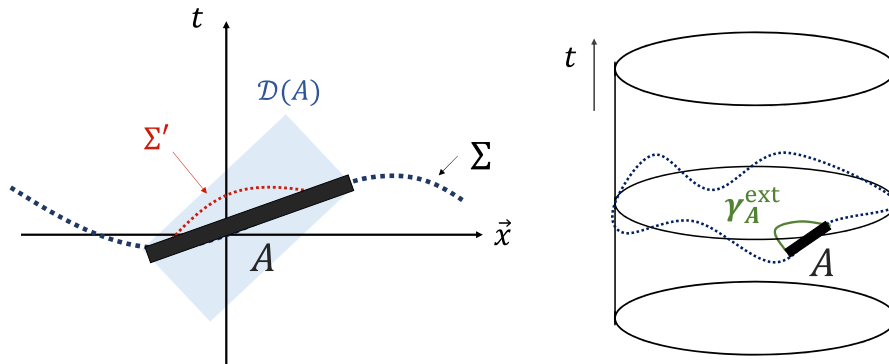


図 5.1.1 (左図) 一般的な Cauchy 面  $\Sigma$  とその上の部分系  $A$ 。部分系の量子状態  $\rho_A$  は、 $\Sigma$  上の量子状態  $\rho_\Sigma$  の縮約密度行列として  $\rho_A = \text{Tr}_{\Sigma \setminus A}[\rho_\Sigma]$  で定義される。部分系  $A$  の domain of dependence  $\mathcal{D}(A)$  の内部では、Cauchy 面をどのように取ってもエンタングルメントエントロピー  $S_A$  は変わらない。(右図) このセットアップのエンタングルメントエントロピー  $S_A$  に対応する HRT surface  $\gamma_A^{\text{ext}}$ 。

(Lifshitz-like fixed points) に関する双対性に適用する。

尚、holographic CFTs 以外における同様のセットアップを扱った先行研究として自由場 [115] や RCFT [116] に関する研究が挙げられる。また以下で議論する canonical time slice とは限らない Cauchy 面上の情報量は、エンタングルメントエントロピーを用いた  $c$ -定理 [117] や  $F$ -定理 [118] の証明を行う際に現れる。

## 5.1 In holographic CFTs

場の理論におけるエンタングルメントエントロピーは、ある部分系の量子状態に関する von Neumann エントロピーとして定義された (4.1節参照)。その際、全系の Hilbert 空間を定義する Cauchy 面は、canonical time slice (constant time slice)  $t = t_0$  に取る場合が多いが、相対論的な場の理論においては、これを一般化して任意の Cauchy 面  $\Sigma$  上に Hilbert 空間を定義することが可能である。このとき  $\Sigma$  上の部分系は Lorentz boost を受けた形になる (図 5.1.1)。エンタングルメ

ントエントロピー  $S_A$  は、Cauchy 面  $\Sigma$  上の  $A$  以外の自由度  $A^c = \Sigma \setminus A$  をトレースアウトした縮約密度行列  $\rho_A$  の von Neumann エントロピーとして定義される。

ここで任意の部分系  $A$  に関して、その domain of dependence<sup>\*2</sup>  $\mathcal{D}(A)$  内における Cauchy 面の取り方はエンタングルメントエントロピー  $S_A$  に影響しないことに注意する。すなわち、図 5.1.1 において  $\mathcal{D}(A)$  内で Cauchy 面として  $\Sigma$  の代わりに  $\Sigma'$  を取った場合でも、 $\Sigma'$  上の量子状態  $\rho_{A'}$  は  $\Sigma$  上の量子状態  $\rho_A$  を  $\mathcal{H}_A$  上のユニタリ演算子で時間発展させたものとして表せるため、 $S(\rho_A) = \text{Tr}_{\mathcal{H}_A} \rho_A \log \rho_A$  はどちらの取り方を選んでも不変となる [120]。従って、エンタングルメントエントロピーを考える上では、domain of dependence を共有する部分系（または Cauchy 面）の取り方は同一のものに見做してよく、domain of dependence  $\mathcal{D}(A)$  を決定する entangling surface  $\partial A$  の位置のみが重要となる<sup>\*3</sup>。

本章で扱う holographic CFTs に関しては、Lorentz boost を受けた部分系のエンタングルメントエントロピーは、HRT 公式（式 (4.5.1)）を用いて求めることができる（図 5.1.1）。すなわち、重力側の対応する時空において、 $\partial A$  を境界に持ち、 $A$  と homologous な極値曲面  $\gamma_A^{\text{ext}}$  の面積（複数ある場合は、それらの中で最小のもの）を計算すればよい。以下ではまず  $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$  対応において解析解を導出し、次に高次元  $\text{AdS}/\text{CFT}$  対応に関してホログラフィックエンタングルメントエントロピーの表式を得て数値計算を行う。またその応用として、一方の部分系が Lorentz boost を受けたときの相互情報量の性質について各場合に調べる。

### 5.1.1 $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$ の場合

まずは最も単純な  $\mathbb{R}^{1,1}$  上の 2 次元共形場理論の真空に関して考える。簡単のために、部分系  $A, B$  のそれぞれの端点を

$$\begin{aligned} P_A &= (0, 0), \quad Q_A = (x, t), \\ P_B &= (b, 0), \quad Q_B = (b + r, 0), \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

<sup>\*2</sup> Domain of dependence  $\mathcal{D}(A)$  は、情報伝達が光速以下でしか起きないことの帰結として、その内部における任意の点上の情報を  $A$  上の初期値問題から一意的に決定できる領域である（図 5.1.1）。これは formal には、時空  $\mathcal{B}$  上の closed achronal set  $A$  に対する future (past) domain of dependence  $\mathcal{D}^+(A)$  ( $\mathcal{D}^-(A)$ ) を、そこから伸びる任意の inextendible past(future)-directed causal curves が  $A$  と交わるような全ての点の集合と定義したとき、それらの和集合

$$\mathcal{D}(A) := \mathcal{D}^+(A) \cup \mathcal{D}^-(A) \subset \mathcal{B}, \tag{5.1.1}$$

によって定義される [119]。尚、 $\mathcal{D}(\Sigma) = \mathcal{B}$  であるとき、 $\Sigma$  を Cauchy 面と呼ぶ。Cauchy 面はその上の情報から時間発展による全時空の情報を決定できるような (achronal な) 空間的曲面である。

<sup>\*3</sup> この性質は、RT/HRT 公式におけるホログラフィックエンタングルメントエントロピーの定義と consistent である。

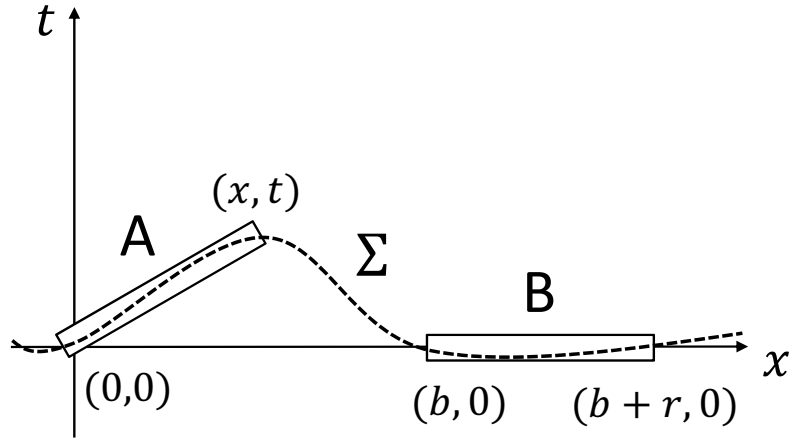


図 5.1.2 場の理論における部分系のセットアップ。Lorentz boost を受けた部分系  $A$  について、エンタングルメントエントロピー  $S_A$  を求める。またその結果から、部分系  $A$  と時間一定面  $t = 0$  上に定義された部分系  $B$  との相互情報量  $I(A : B)$  を計算する。

と取る (図 5.1.2)。以下の議論は、一般的な配置の部分系に対しても容易に拡張できる。bulk の時空は Poincaré  $\text{AdS}_3$

$$ds^2 = R^2 \frac{dz^2 - dt^2 + dx^2}{z^2}, \quad (5.1.3)$$

で与えられる。

Lorentz boost した (連結な) 部分系のエンタングルメントエントロピー  $S_A$  に関しては、相対論的な場の理論における真空の Lorentz 不変性に注意すれば、constant time slice 上のエンタングルメントエントロピーの結果から直接導出できる。すなわち、前章の結果から

$$S_A = \frac{c}{3} \log \frac{l_A}{\epsilon} = \frac{c}{6} \log \frac{x^2 - t^2}{\epsilon^2}, \quad (5.1.4)$$

を得る。ただし  $l_A$  は  $A$  の固有長さ、 $\epsilon$  は UV cutoff である。また Cauchy 面が空間的曲面となる条件から  $|x| > |t|$  を課している。

一方、2つの disjoint な領域から成る部分系のエンタングルメントエントロピー  $S_{AB}$  に関しては、場の理論の Lorentz 不変性からは明らかではない。ここでホログラフィックエンタングルメントエ

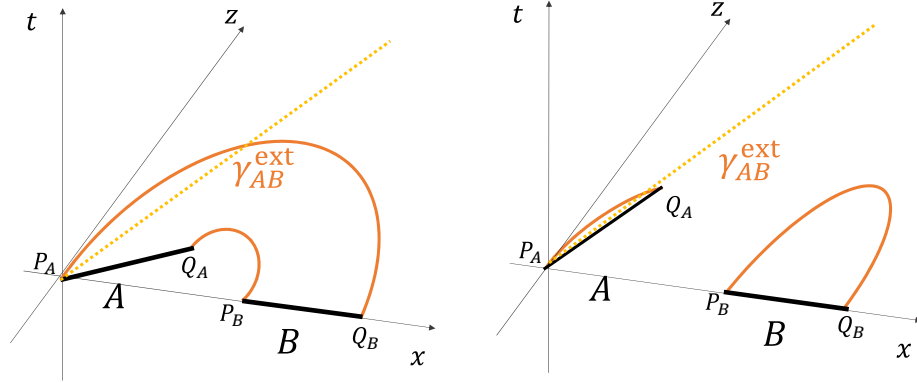


図 5.1.3 非連結な部分系  $A \cup B$  に対する HRT surfaces。左図と右図の 2 通りの極値曲面がホモロジー条件を満たす。 $\gamma_{AB}^{\text{ext}}$  には面積の和が小さい方が選ばれる。

ントロピーの性質を用いると、 $S_{AB}$  は 2 つの extremal surface の面積の和として

$$S_{AB} = \min \left\{ \frac{c}{6} \log \frac{((x-b)^2 - t^2)(b+r)^2}{\epsilon^2}, S_A + S_B \right\}, \quad (5.1.5)$$

と求められる。ただしここでホモロジー条件を満たす extremal surface  $\gamma_A^{\text{ext}}$  として、2 つの候補が現れていることに注意する (図 5.1.3、および 4.2 節の議論を参照)。前者は  $P_A, Q_B$  および  $Q_A, P_B$  をそれぞれ結ぶ測地線、後者は  $P_A, Q_A$  および  $P_B, Q_B$  をそれぞれ結ぶ測地線である。ホログラフィックエンタングルメントエントロピーには、HRT 公式の処方に従ってこれらのうちで面積の和が小さい方が選択される。どちらの曲面の面積が小さいかは  $A$  と  $B$  の位置関係に依存する。特に前者の曲面を用いて相互情報量を求めると

$$\begin{aligned} I(A : B) &= S_A + S_B - S_{AB} \\ &= \frac{c}{3} \log \frac{r\sqrt{x^2 - t^2}}{(b+r)\sqrt{(b-x)^2 - t^2}}, \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

を得る。ただしこの表式で  $I(A : B) < 0$  となる場合は、選択される曲面の相転移によって、 $I(A : B) = S_A + S_B - S_{AB} = 0$  になると規約する。

ここで次の 2 つの極限的な状況について考えよう、一つは部分系  $A$  が null になる極限、もう一つ



は2つの部分系  $A, B$  の相互位置が null になる極限である。そこでパラメータ  $\epsilon_{1,2}$  を

$$x - t \equiv \epsilon_1, (b - x) - t \equiv \epsilon_2, \quad (5.1.7)$$

と定義して、それぞれのゼロ極限を考える\*4。まず  $\epsilon_1 \rightarrow 0$  の極限では、 $A$  の固有長さ  $l_A$  はゼロに向かうため、

$$S_A = 0, (A \rightarrow \text{null}), \quad (5.1.8)$$

となり、エンタングルメントエントロピーが消滅することが分かる。このとき  $\gamma_A^{\text{ext}}$  は boundary に近接した楕円形になる\*5。さらに相互情報量の極限として

$$I(A : B) \sim \frac{c}{6} \log \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} + \text{finite}, \quad (5.1.10)$$

を得る。ここから、 $A$  の null 極限 ( $\epsilon_1 \rightarrow 0$ ) では  $I(A : B) = 0$  となり、図 5.1.3における右の decouple した  $\gamma_A^{\text{ext}}$  が選ばれることが分かる。また逆に、 $A$  と  $B$  が null な相互位置になる極限 ( $\epsilon_2 \rightarrow 0$ ) では、相互情報量は log 発散することが分かる。これは2つの部分系が causal な関係になるとき、相互情報量によって測られる情報論的な相関が時空の因果律を反映して無限大になると解釈できる。

次に  $\mathbb{R}^{1,1}$  上の有限温度状態について、同様のセットアップで解析しよう。このとき bulk の時空は BTZ black brane (2.2.21) に対応している。ここで3次元重力理論の性質を反映して、BTZ black brane は式 (2.2.17) と同様の座標変換を用いることで Poincaré AdS<sub>3</sub> 上の議論へ帰着できることに注意する [9]。すなわち、BTZ black brane

$$ds^2 = R^2 \frac{-f(z)dt^2 + f^{-1}(z)dz^2 + dx^2}{z^2}, \quad (f(z) = 1 - \frac{z^2}{z_H^2}), \quad (5.1.11)$$

に対して座標変換

$$w_{\pm} = \sqrt{1 - \frac{z^2}{z_H^2}} e^{\frac{x \pm t}{z_H}}, \quad (5.1.12)$$

$$\zeta = \frac{z}{z_H} e^{\frac{x}{z_H}}, \quad (5.1.13)$$

\*4 正確には、固有長さなどの量が UV cutoff  $\epsilon$  の長さになるまで  $\epsilon_{1,2}$  に関する極限を取る。

\*5 このことは、canonical time slice 上の結果 (4.2.4) を Lorentz boost することで分かる。すなわち、 $t = 0$  上の半円  $z^2 + x^2 = l^2$  を boost 変換 ( $X = \cosh \theta x + \sinh \theta t$ ,  $T = \cosh \theta t + \sinh \theta x$ ) すると

$$z^2 + \frac{X^2}{\cosh^2 \theta} = l^2, \quad T = \tanh \theta X, \quad (5.1.9)$$

となって楕円形を得る。

を施すと、

$$ds^2 = R^2 \frac{d\zeta^2 + dw_+ dw_-}{\zeta^2}, \quad (5.1.14)$$

となり、局所的に Poincaré AdS<sub>3</sub> と一致する。曲面の極値性およびその面積は座標系の取り方に依らないため、BTZ black brane における測地線の長さは Poincaré AdS<sub>3</sub> 上の測地線の長さとして求められる。ここでそれぞれの時空の UV cutoff の関係について、BTZ black brane 上の点  $(x, t, z = \epsilon)$  は Poincaré パッチの

$$\zeta \equiv \tilde{\epsilon}(x) = \frac{\epsilon}{z_H} e^{\frac{x}{z_H}}, \quad (5.1.15)$$

上に写されることに注意する。すなわち、Poincaré パッチから見た UV cutoff は  $x$  方向の位置に依存する。このことに注意して、Lorentz boost を受けた部分系  $A$  のエンタングルメントエントロピーは

$$\begin{aligned} S_A &= \frac{c}{6} \ln \frac{\Delta w_+ \Delta w_-}{\tilde{\epsilon}(0) \tilde{\epsilon}(x)} \\ &= \frac{c}{6} \ln \left[ \frac{\beta^2}{\pi^2 \epsilon^2} \sinh \left( \frac{\pi}{\beta} (x+t) \right) \sinh \left( \frac{\pi}{\beta} (x-t) \right) \right], \end{aligned} \quad (5.1.16)$$

と求められる\*6。ただし部分系  $A$  について  $\Delta w_{\pm}|_{z=0} \equiv e^{\frac{x \pm t}{z_H}} - 1$ 、および逆温度  $\beta = 2\pi z_H$  である。

一般の部分系に関する表式は、時間並進対称性および空間並進対称性を用いて式 (5.1.16) で  $x \rightarrow \Delta x$ ,  $t \rightarrow \Delta t$  と置き換えればよい。この結果を用いると、相互情報量は、

$$I(A : B) = \frac{c}{3} \log \frac{\sinh(\frac{\pi r}{\beta})}{\sinh(\frac{\pi(b+r)}{\beta})} + \frac{c}{6} \log \frac{\sinh(\frac{\pi}{\beta}(x+t)) \sinh(\frac{\pi}{\beta}(x-t))}{\sinh(\frac{\pi}{\beta}(x-b+t)) \sinh(\frac{\pi}{\beta}(x-b-t))}, \quad (5.1.18)$$

で与えられる。ここから同様に 2 種類の null 極限 ( $\epsilon_{1,2} \rightarrow 0$ ) を取ると、pure AdS<sub>3</sub> の式 (5.1.10) と同じ振る舞い

$$I(A : B) \sim \frac{c}{6} \log \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}, \quad (5.1.19)$$

をすることが分かる。これは発散が本質的には量子状態の UV 構造に由来するためと考えられる。

---

\*6 ここで  $t = 0$  と置くと、2次元共形場理論上の有限温度状態に関するホログラフィックエンタングルメントエントロピーの公式

$$S_A = \frac{c}{3} \log \frac{\beta}{\pi \epsilon} \sinh \left( \frac{\pi l}{\beta} \right), \quad (5.1.17)$$

が得られる。

### 5.1.2 AdS<sub>d+1</sub>/CFT<sub>d</sub> の場合

次に高次元の AdS<sub>d+1</sub>/CFT<sub>d</sub> 対応 ( $d > 2$ ) において解析を行う。まずは  $\mathbb{R}^{1,d-1}$  上の共形場理論の真空状態を考える。これは bulk では高次元 Poincaré AdS 時空

$$ds^2 = R^2 \frac{dz^2 - dt^2 + dx^2 + \sum_{i=1}^{d-2} (dy^i)^2}{z^2}, \quad (5.1.20)$$

に対応する。部分系  $A$  として、Lorentz boost された infinite strip

$$|x| \leq \frac{\Delta x}{2}, \quad |t| \leq \frac{\Delta t}{2}, \quad x = \frac{\Delta x}{\Delta t} t, \quad |y^i| \leq \frac{L}{2} \quad (i = 1, \dots, d-2), \quad (5.1.21)$$

を取る。ただし  $L$  は strip の長さ ( $L \rightarrow \infty$ ) である。この場合は、前節の Poincaré AdS<sub>3</sub> と同様に  $x-t$  平面における Lorentz boost を考えることで、canonical time slice の結果 [78] から

$$S_A = \frac{L^{d-2} R^{d-1}}{2G_N} \left[ \frac{1}{d-2} \left( \frac{1}{\epsilon} \right)^{d-2} - k_d \left( \frac{1}{l} \right)^{d-2} \right], \quad k_d \equiv \frac{\pi^{\frac{d-1}{2}} 2^{d-2}}{d-2} \left( \frac{\Gamma(\frac{d}{2(d-1)})}{\Gamma(\frac{1}{2(d-1)})} \right)^{d-1}, \quad (5.1.22)$$

と導出できる。ただし  $l := \sqrt{(\Delta x)^2 - (\Delta t)^2}$  である。この表式から、ホログラフィックエンタングルメントエントロピーの性質を用いて、式 (5.1.2) と同様に配置した 2 つの infinite strip  $A, B$  に関する相互情報量

$$I(A : B) = \frac{k_d L^{d-2} R^{d-1}}{2G_N} \left[ - \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 - t^2}} \right)^{d-2} - \left( \frac{1}{r} \right)^{d-2} + \left( \frac{1}{r+b} \right)^{d-2} + \left( \frac{1}{\sqrt{(x-b)^2 - t^2}} \right)^{d-2} \right], \quad (5.1.23)$$

を得る。ただしこの表式でも  $I(A : B) < 0$  となる場合は極小曲面の相転移により  $I(A : B) = 0$  と読み替える。

前節と同様の 2 つの null 極限に関しては、

$$I(A : B) \sim \frac{k_d L^{d-2} R^{d-1}}{2G_N} \left[ - \left( \frac{1}{\sqrt{2t\epsilon_1}} \right)^{d-2} + \left( \frac{1}{\sqrt{2t\epsilon_2}} \right)^{d-2} \right] + \text{finite}, \quad (5.1.24)$$

を得る。この式から、相互情報量は  $A$  の  $x-t$  平面における null 極限で消滅し、かつ  $A$  と  $B$  の相互位置が null になる極限で

$$I \propto \epsilon_2^{\frac{d-2}{2}}, \quad (5.1.25)$$

と発散することが分かる。

次に  $\mathbb{R}^{1,d-1}$  上の有限温度状態について考える。このとき bulk は高次元 AdS black brane

$$ds^2 = R^2 \frac{-f(z)dt^2 + f(z)^{-1}dz^2 + dx^2 + \sum_{i=1}^{d-2}(dy^i)^2}{z^2}, \quad f(z) = 1 - \frac{z^d}{z_H^d}, \quad (5.1.26)$$

で与えられる。ただし逆温度  $\beta = \frac{4\pi z_H}{d}$  である。この場合は Lorentz boost に関する対称性は破れているため、HRT 公式を用いて極小曲面の面積を計算する。

Lorentz boost した infinite strip  $A$  に関する codimension-2 の極値曲面  $\gamma_A^{\text{ext}}$  は、 $y$  方向に関する ( $L \rightarrow \infty$  の) 対称性を考えると

$$X(z, \vec{y}) := X(z), \quad T(z, \vec{y}) := T(z), \quad (Z := z, Y^i := y^i), \quad (5.1.27)$$

と  $z$  座標のみに依存する形でパラメトライズできる。この曲面に対する induced metric

$$h_{ab} = \frac{\partial X^\mu}{\partial x^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial x^b} g_{\mu\nu}, \quad (5.1.28)$$

の非自明な成分は

$$h_{zz} = R^2 \frac{X'^2 - fT'^2 + f^{-1}}{z^2}, \quad h_{y^i y^i} = \frac{R^2}{z^2}, \quad (i = 1, \dots, d-2), \quad (5.1.29)$$

で与えられる。ただし  $X' = \frac{dX}{dz}$ ,  $T' = \frac{dT}{dz}$  である。ホログラフィックエンタングルメントエントロピーの曲面  $(X, T)$  は、面積

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{A}[X, T]}{4G_N} &= \frac{1}{4G_N} \int d^{d-2}y dz \sqrt{\det h_{ab}} \\ &= \frac{L^{d-2} R^{d-1}}{2G_N} \int_\epsilon^{z_*} \frac{dz}{z^{d-1}} \sqrt{\frac{1}{f(z)} + X'^2 - f(z)T'^2}, \end{aligned} \quad (5.1.30)$$

に関する極値方程式

$$\delta \mathcal{A}[X, T] = 0, \quad (5.1.31)$$

を解くことで与えられる。ただし  $z_*$  は曲面  $\gamma_A^{\text{ext}}$  の turning point である。

式 (5.1.31) は、1次元系 Lagrangian の極値問題と見做せば  $X$  と  $T$  に関する運動方程式を解くことに帰着する。そこで運動の定数  $p, q$  を

$$\frac{1}{q} := \frac{f(z)T'}{z^{d-1} \sqrt{\frac{1}{f(z)} - f(z)T'^2 + X'^2}}, \quad (5.1.32)$$

$$\frac{1}{p} := \frac{X'}{z^{d-1} \sqrt{\frac{1}{f(z)} - f(z)T'^2 + X'^2}}, \quad (5.1.33)$$

によって導入する。この関係式を  $X', T'$  について解いて、 $X', T'$  が  $z = z_*$  で発散することをを用いると、 $p, q, z_*$  の間の関係式

$$\frac{1}{q^2} = f(z_*) \left( \frac{1}{p^2} - \frac{1}{z_*^{2(d-1)}} \right), \quad (5.1.34)$$

を得る。これらのパラメータと部分系のサイズ  $(\Delta x, \Delta t)$  は

$$\frac{\Delta t}{2} = \frac{1}{q} \int_0^{z_*} \frac{dz}{f(z)\sqrt{h(z)}}, \quad (5.1.35)$$

$$\frac{\Delta x}{2} = \frac{1}{p} \int_0^{z_*} \frac{dz}{\sqrt{h(z)}}, \quad (5.1.36)$$

$$h(z) := f(z) \left( \frac{1}{z^{2(d-1)}} - \frac{1}{p^2} \right) - f(z_*) \left( \frac{1}{z_*^{2(d-1)}} - \frac{1}{p^2} \right), \quad (5.1.37)$$

の関係にある。極値曲面  $\gamma_A^{\text{ext}} = \gamma_A^{\text{ext}}(\Delta x, \Delta t)$  は、これらの関係の下で  $p, q, z_*$  のうちの任意の 2 つのパラメータによって特徴付けられる。ただしこのときパラメータの領域には制限がある点に注意が必要である。例えば極値曲面を表すために  $(p, z_*)$  を用いる場合、まず  $q$  が実数になる要請からは

$$p < z_*^{d-1}, \quad (5.1.38)$$

が従う。さらに  $\lim_{z \rightarrow 0} h(z) \rightarrow +\infty$  と  $z_*$  が  $h(z) = 0$  の最小の根となる要請からは、 $h'(z_*) < 0$  が必要条件として現れる。これを解いて

$$p^2 \geq \frac{z_*^{2d-2} d \left(\frac{z_*}{z_H}\right)^d}{d - (2-d) \left(1 - \left(\frac{z_*}{z_H}\right)^d\right)}, \quad (5.1.39)$$

を得る。従ってパラメータ  $(p, z_*)$  は

$$\frac{\frac{z_*^d}{z_H^d} d}{d - (2-d) \left(1 - \frac{z_*^d}{z_H^d}\right)} \leq \frac{p}{z_*^{d-1}} < 1, \quad (5.1.40)$$

の範囲で有意な解を持つ。

これらを用いて、ホログラフィックエンタングルメントエントロピーは

$$S_A = \frac{L^{d-2} R^{d-1}}{2G_N} \int_\epsilon^{z_*} \frac{dz}{z^{2(d-1)} \sqrt{h(z)}}, \quad (5.1.41)$$

で与えられる。このときに数値的に求めたエンタングルメントエントロピーは図 5.1.4 で与えられる。

前節と同様に、部分系  $A$  について null 極限を取ったときのエンタングルメントエントロピーの振

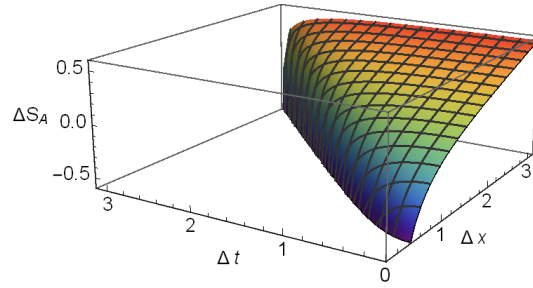


図 5.1.4 AdS<sub>4</sub> black brane 時空において infinite strip に取った部分系  $A$  のサイズ  $(\Delta x, \Delta t)$  に対するホログラフィックエンタングルメントエントロピー。部分系が空間的である要請から  $|\Delta x| < |\Delta t|$  の範囲にのみエンタングルメントエントロピーが定義される。尚、図中では UV cutoff の効果を差し引いている。

る舞いを調べよう。この状況はパラメータ  $(p, z_*)$  で表すと、 $\frac{p}{z_*^d}$  を有限に保ったまま  $z_* \rightarrow 0$  と取る極限に相当する。実際、このとき  $f(z)|_{z \leq z_*} \simeq 1$  となるから

$$\frac{\Delta t}{2} \simeq \frac{1}{q} \int_0^{z_*} \frac{z^{d-1} dz}{\sqrt{1 - \left(\frac{z}{z_*}\right)^{2(d-1)}}} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{d}{2(d-1)}\right) z_*^d}{\Gamma\left(\frac{1}{2(d-1)}\right) q}, \quad (5.1.42)$$

$$\frac{\Delta x}{2} \simeq \frac{1}{p} \int_0^{z_*} \frac{z^{d-1} dz}{\sqrt{1 - \left(\frac{z}{z_*}\right)^{2(d-1)}}} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{d}{2(d-1)}\right) z_*^d}{\Gamma\left(\frac{1}{2(d-1)}\right) p}, \quad (5.1.43)$$

を得る。さらに関係式 (5.1.34) からは  $p \simeq q$  が得られ、また  $\Delta t, \Delta x$  は有限値であるから、この極限は null な部分系  $\Delta x/\Delta t \simeq 1$  に対応している。このときエンタングルメントエントロピーは

$$\begin{aligned} S_A &\simeq \frac{L^{d-2} R^{d-1}}{2G_N} \int_\epsilon^{z_*} \frac{dz}{z^{d-1} \sqrt{1 - \left(\frac{z}{z_*}\right)^{2(d-1)}}} \\ &= \frac{L^{d-2} R^{d-1}}{2G_N} \left[ \frac{1}{d-2} \frac{1}{\epsilon^{d-2}} - \frac{\sqrt{\pi}}{d-2} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2(d-1)}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2(d-1)}\right)} \frac{1}{z_*^{d-2}} \right], \end{aligned} \quad (5.1.44)$$

となる。これは  $l = \sqrt{(\Delta x)^2 - (\Delta t)^2} \simeq \frac{2\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{d}{2(d-1)}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2(d-1)}\right)} z_*$  を用いて直すと、発散部分は

$$S_A \sim -\frac{L^{d-2} R^{d-1}}{2G_N} \frac{2^{d-2} \sqrt{\pi}^{d-1} \Gamma\left(\frac{d}{2(d-1)}\right)^{d-1}}{d-2} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2(d-1)}\right)^{d-1} l^{d-2}} = -\frac{k_d L^{d-2} R^{d-1}}{2G_N} \frac{1}{l^{d-2}}, \quad (5.1.45)$$

となり、高次元 pure AdS と同じ結果を得る。

相互情報量がエンタングルメントエントロピーの線形結合であることに注意すると、相互情報量の発散も高次元 pure AdS と同じ振る舞いをすることが確かめられる。

## 5.2 In Lifshitz theories

AdS/CFT 対応の拡張の一つとして、時間方向と空間方向の非等方的 (anisotropic) なスケール変換

$$t \rightarrow \lambda^\nu t, \quad x \rightarrow \lambda x, \quad \vec{y} \rightarrow \lambda t, \quad (z \rightarrow \lambda z), \quad (5.2.1)$$

に対して不変な理論に関する双対性が提案されている。これはこれは Lifshitz holography と呼ばれる<sup>\*7</sup>[30]。ここで  $\nu$  は時間と空間の非等方性を特徴付ける dynamical exponent である。この場合、ゲージ理論側は (5.2.1) に関する非相対論的なスケール不変性を持った相転移点上の理論 (Lifshitz-like fixed points) に対応している。例えば  $d = 3$ ,  $\nu = 2$  における toy model は

$$I = \int dx^2 dt [(\partial_t \phi)^2 - \kappa(\partial_x^2 \phi)^2], \quad (5.2.2)$$

で与えられる。ただしここで  $\kappa$  は fixed points を添字付けるパラメータである。

これに対応する重力解は、変換 (5.2.1) に対応する対称性を持った時空

$$ds^2 = \frac{dz^2 - z^{2(1-\nu)} dt^2 + dx^2 + d\vec{y}^2}{z^2}, \quad (5.2.3)$$

によって与えられる (Lifshitz geometry)<sup>\*8</sup>。このとき bulk における null energy condition を仮定すると、dynamical exponent の範囲は  $\nu \geq 1$  に制限される [123]。特に  $\nu = 1$  の場合、時空は  $\text{AdS}_{d+1}$  となって通常の AdS/CFT 対応に帰着する。

Lifshitz holography は AdS/CFT 対応の ( $\nu$  による) 1 パラメータ拡張になっている。特に Lifshitz 時空において、時間一定面  $t = t_0$  を取ると、Poincaré AdS 時空における時間一定面  $t = t_0$  と完全に一致する。従って、これらの holography の違いを見るには必然的に一般の Cauchy 面を見る必要がある。また次章で議論する entanglement wedge を Lifshitz 時空で考えようとする、bulk の光的測地線が caustics を持つてしまうため、AdS/CFT 対応の場合と比べて別の処方が必要になることが知られている [31]。これらのことを鑑みて、本節の以下では、Lifshitz holography において前節と同様に時間一定面がない (“Lorentz boost” を受けた) 部分系のホログラフィックエンタングルメントエントロピーを求める。これによって、時間方向まで考慮した Lifshitz holography への示唆を得ることが期待される。

<sup>\*7</sup> Lifshitz holography に関する近年の review は [121] を参照。

<sup>\*8</sup> この時空は物質場の入った Einstein 重力理論の解として構成できる [30]。あるいは、重力理論そのものを Lifshitz 対称性を持つように modify した Hořava-Lifshitz 重力理論の解と見做すこともできる [122]。

高次元の Lifshitz 時空において、部分系を前節と同様の infinite strip (5.1.21) に取る。この場合、面積汎関数は

$$\frac{\mathcal{A}[X, T]}{4G_N} = \frac{L^{d-2}R^{d-1}}{2G_N} \int_{\epsilon}^{z_*} \frac{dz}{z^{d-1}} \sqrt{1 + X'^2 - z^{2(1-\nu)}T'^2}, \quad (5.2.4)$$

で与えられる。運動の定数を

$$\frac{1}{q} := \frac{z^{2(1-\nu)}T'}{z^{d-1}\sqrt{1 + X'^2 - z^{2(1-\nu)}T'^2}}, \quad (5.2.5)$$

$$\frac{1}{p} := \frac{X'}{z^{d-1}\sqrt{1 + X'^2 - z^{2(1-\nu)}T'^2}}, \quad (5.2.6)$$

によって定義すると、前節と同様にして、パラメータの関係式

$$\frac{1}{q^2} = z_*^{2(1-\nu)} \left( \frac{1}{p^2} - \frac{1}{z_*^{2(d-1)}} \right), \quad (5.2.7)$$

および

$$\frac{\Delta t}{2} = \frac{1}{q} \int_0^{z_*} \frac{dz}{f(z)\sqrt{h(z)}}, \quad (5.2.8)$$

$$\frac{\Delta x}{2} = \frac{1}{p} \int_0^{z_*} \frac{dz}{\sqrt{h(z)}}, \quad (5.2.9)$$

$$S_A = \frac{L^{d-2}R^{d-1}}{2G_N} \int_{\epsilon}^{z_*} \frac{dz}{z^{2(d-1)+\nu-1}\sqrt{\tilde{h}(z)}}, \quad (5.2.10)$$

$$\tilde{h}(z) := z^{2(1-\nu)} \left( \frac{1}{z^{2(d-1)}} - \frac{1}{p^2} \right) - z_*^{2(1-\nu)} \left( \frac{1}{z_*^{2(d-1)}} - \frac{1}{p^2} \right), \quad (5.2.11)$$

を得る。極小曲面のパラメータを  $(p, z_*)$  に取った場合の値域の制限は

$$\sqrt{\frac{\nu-1}{d+\nu-2}} \leq \frac{p}{z_*^{d-1}} < 1, \quad (5.2.12)$$

で与えられる。特に  $d = \nu = 2$  の場合は、これらは解析的に解ける。このときホログラフィックエンタングルメントエントロピーは

$$S_A = \frac{R}{4G_N} \log \frac{(\Delta x)^2 \eta^2}{\epsilon^2 \sqrt{1-\eta^2} (\log(\sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}}))^2} \quad (\eta := \frac{2p^2}{q}), \quad (5.2.13)$$



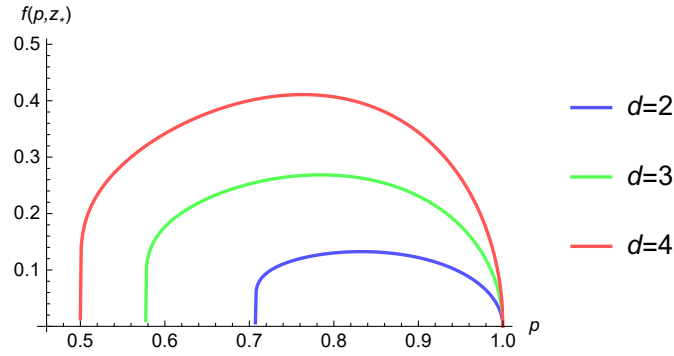


図 5.2.1 スケール不変量  $f_{\nu,d}(p, z_*)$  の数値計算による値。図では  $\nu = 2$  と取っている。スケール不変性を利用して  $z_* = 1$  と設定した。時空の次元  $d$  に対応して上限  $f_{\nu,d}^{\max}$  が存在することが分かる。

となる。ただし  $\eta$  は以下の関係式

$$\frac{\Delta t}{2} = \frac{q^2}{4p^2} \log \sqrt{\frac{q+2p^2}{q-2p^2}} - \frac{q}{2}, \quad (5.2.14)$$

$$\frac{\Delta x}{2} = \frac{q}{4p} \log \sqrt{\frac{q+2p^2}{q-2p^2}}, \quad (5.2.15)$$

を通して  $\Delta x, \Delta t$  に依存している。

これらの解は、Lifshitz 対称性からの帰結として、パラメータのスケール変換

$$(\Delta t, \Delta x, z_*, p) \rightarrow (\lambda^\nu \Delta t, \lambda \Delta x, \lambda z_*, \lambda^{d-1} p), \quad (5.2.16)$$

に関する不変性を持っている。そこで  $\Delta x - \Delta t$  平面におけるスケール不変量

$$f_{\nu,d}(p, z_*) := \frac{\Delta t}{(\Delta x)^\nu}, \quad (5.2.17)$$

に注目する。これを各次元において数値的に解析すると、時空の次元  $d$  および dynamical exponent  $\nu$  に依存した  $O(1)$  の定数  $f_{\nu,d}^{\max}$  による bound

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^\nu} \leq f_{\nu,d}^{\max}, \quad (5.2.18)$$

が存在することが分かる (図 5.2.1)。これはホログラフィックエンタングルメントエントロピーを定義可能な部分系のサイズ  $(\Delta x, \Delta t)$  が、 $\Delta x - \Delta t$  平面において、下に凸な曲線で制限されることを意味する (図 5.2.2)。これは通常の AdS/CFT 対応では任意の space-like な部分系に対してホログラフィックエンタングルメントエントロピーが定義されたことと対照的である。

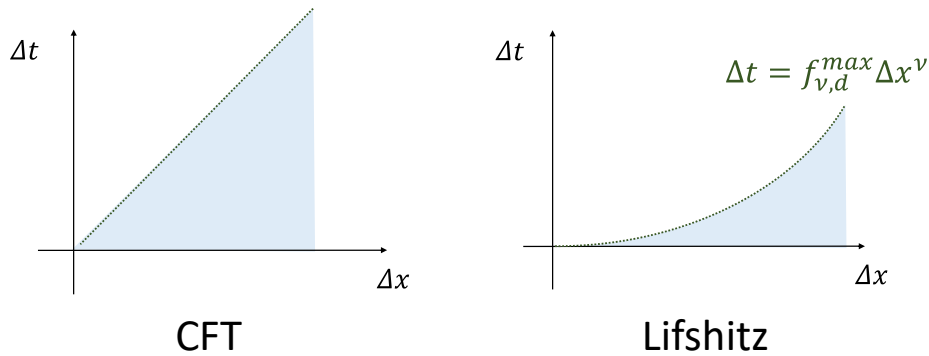


図 5.2.2 ホログラフィックエンタングルメントエントロピーを定義可能な boundary の領域。部分系のサイズを  $(\Delta x, \Delta t)$  と置いた。この領域は共形場理論では光的直線  $\Delta t = \Delta x$  によって制限されている。一方、Lifshitz 時空の場合は下に凸な曲線  $\Delta t = f_{\nu,d}^{\max}(\Delta x)^\nu$  によって制限されている。

この結果は、場の理論側において、Hilbert 空間を

$$\mathcal{H}_{\text{tot}} = \otimes_{x \in \Sigma} \mathcal{H}_x, \tag{5.2.19}$$

と時空の各点上のテンソル積として局所的に分解できることを要請した場合、Cauchy 面は canonical time slice 上でのみ定義可能であることを意味する。すなわち、Cauchy 面上に  $\Delta t > 0$  となる領域が僅かでもある場合、その領域上に微小な部分系を取ると、ホログラフィックエンタングルメントエントロピーの定義域 (5.2.18) から外れてしまう。これは Cauchy 面上の Hilbert 空間が well-defined ではないことを意味する。実際、非相対論的な理論では光速無限大となるため、domain of dependence は常に canonical time slice 上に潰れる\*<sup>9</sup>。一方で、この結果は、一定以上の大きさ  $(\Delta x, \Delta t)$  を持った部分系であれば、それが canonical time slice 上に存在しなくともエンタングルメントエントロ

\*<sup>9</sup> この事実は bulk の causality から見ることもできる。Lifshitz 時空 (5.2.3) において、 $z = z_0$  面上の  $x-t$  平面における光的曲線は

$$t = z_0^{2(1-\nu)} x, \tag{5.2.20}$$

となる。すなわち、boundary  $z_0 \rightarrow 0$  に近付くと、光的曲線の軌道は  $t$  一定面へと漸近する。従って、boundary 近傍に局在する極値曲面  $\gamma_A^{\text{ext}}$  は常に  $t$  一定面上に存在する。

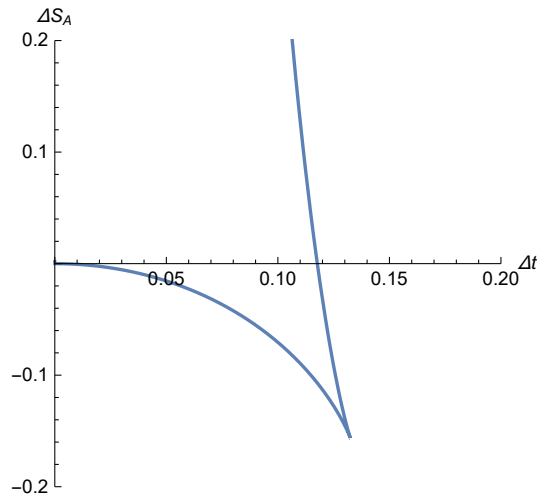


図 5.2.3 Lifshitz 時空におけるホログラフィックエンタングルメントエントロピー。図中には 2 つの extremal surface が現れているが、下の曲線をホログラフィックエンタングルメントエントロピーとして採用する。ここでは  $\Delta x$  を固定して  $\Delta t$  をパラメータとして変化させた。部分系のサイズに関する bound  $\Delta t = f_{\nu,d}^{\max}(\Delta x)^\nu$  に対応する点で曲線は途切れている。このときもホログラフィックエンタングルメントエントロピーは有限値に留まる。尚、UV cutoff は予め差し引いている。

ピーが定義可能となることを示唆している。すなわち、non-local な Hilbert 空間の分割を行った場合には、Lifshitz theory 上の “Lorentz boost” を行った部分系に関して（少なくともエンタングルメントエントロピーを定義できるという意味で）量子状態が well-defined となることが予想される。

このような  $(\Delta x, \Delta t)$  に関する制限 (5.2.18) の下、ホログラフィックエンタングルメントエントロピー  $S_A$  の振る舞いを求めると図 5.2.3 のようになる。ここから特に、式 (5.2.18) で与えられる bound の極限に対して、UV cutoff を差し引いたホログラフィックエンタングルメントエントロピーは、AdS/CFT 対応における null 極限とは異なり、有限値に留まることが分かる。

前節で議論した相互情報量の発散は、UV cutoff を差し引いたエンタングルメントエントロピーの（負の）発散から生じたことを思い出すと、Lifshitz holography では、部分系  $A, B$  の相互位置を canonical time slice 上以外に取った場合は相互情報量は発散せずに常に有限となることが分かる\*10。

\*10 以上の議論は、Lifshitz 対称性をさらに拡張した hyperscaling violations geometry に関しても同様に成り立つ [1]。

## 第 6 章

# Subregion/Subregion duality

AdS/CFT 対応では通常、AdS 時空の全域と共形場理論の全域に関する双対性を考える。これを “microscopic” な双対性に分解すると、bulk の部分的な領域には、boundary の部分的な領域が双対となることが期待される。この発想を subregion/subregion duality と呼ぶ。これは AdS/CFT 対応の基本原理を、より構成的な形で明らかにすることを目的とする。

Boundary のある部分領域（部分系の domain of dependence）に対応する bulk の領域としては、当初は causal wedge と呼ばれる領域が考えられていた。しかし近年では、bulk の部分領域として、entanglement wedge と呼ばれる領域が有力視されている。本論文でもこの立場に立って、以下で entanglement wedge に基づいた subregion/subregion duality について紹介する。

本章では、まず (4.4) 節で議論したホログラフィックエンタングルメントエントロピーの量子補正の結果から出発して、boundary の部分系  $A$  上の相対エントロピーと、bulk の部分系  $M_A$  上の相対エントロピーが等しいことを見る。次に boundary の部分系に対応する bulk の部分領域として、entanglement wedge の定義とその性質について議論する。最後に、bulk reconstruction と量子情報理論における量子誤り訂正符号の関連と、Dong-Harlow-Jafferis らによって証明された entanglement wedge 上の局所演算子の再構成定理について解説する。

### 6.1 相対エントロピーとバルク相対エントロピー

第 4 章において、ホログラフィックエンタングルメントエントロピーの 1-loop 量子補正 (4.4.15) が

$$S(\rho_A) = \text{Tr} \left( \rho_{M_A} \hat{A}(\gamma_A^{\text{ext}}) \right) + S(\rho_{M_A}), \quad (6.1.1)$$

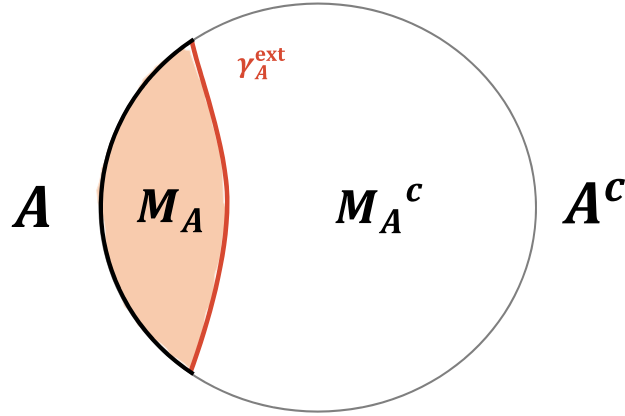


図 6.1.1 HRT surface  $\gamma_A^{\text{ext}}$  を含むような AdS 時空のある Cauchy 面。Boundary の部分系  $A$ ,  $A^c$  に合わせて、bulk の領域も  $M_A$ ,  $M_A^c$  に分割される。

と表せることを見た\*1。左辺の  $S(\rho_A)$  は boundary 上の部分系  $A$  に対するエンタングルメントエントロピー、右辺の第 1 項は面積期待値、第 2 項は bulk における極小曲面  $\gamma_A^{\text{ext}}$  によって囲まれた空間的曲面上の部分系  $M_A$  に対する bulk のエンタングルメントエントロピーである (図 6.1.1)。ここで右辺の第 1 項において、その期待値が  $\gamma_A$  の面積を与える area operator  $\hat{\mathcal{A}}$  を導入した [124]。特に  $1/N$  expansion の leading order では、これは単位元  $I$  に比例して古典的な極小曲面の面積

$$\text{Tr} \left( \rho_{M_A} \hat{\mathcal{A}}(\gamma_A^{\text{ext}}) \right) = \frac{\mathcal{A}(\gamma_A^{\text{ext}})}{4G_N}, \quad (6.1.2)$$

を与える。また sub-leading order では、4.4 節において現れた backreaction による補正項  $\langle \delta \mathcal{A} \rangle$  が  $\hat{\mathcal{A}}$  の中に含まれている。

$\hat{\mathcal{A}}$  は一般に量子状態に依存する演算子である。これを見るために、まず boundary の適当な量子状態  $\rho_{\text{tot}}$  を与えると、AdS/CFT 対応に従ってその量子状態に対応した bulk の classical な背景時空が決定されることに注意する。ここで  $\rho_{\text{tot}}$  としては、bulk 側が古典的なある背景時空上の量子重力理論による記述を許すような量子状態の集合を想定している。例えば真空状態  $\rho_{\text{tot}} = |\Omega\rangle \langle \Omega|$  およ

\*1 以下では簡単のために  $\langle \Delta S_{\text{Wald}}^q \rangle$  が現れない状況について考える。また  $S_{c.t.}$  は右辺の 1-loop 補正による発散を取り除いた形として省略されている。

びその励起状態に対しては、pure AdS 時空とそれを摂動的に変化した時空が対応する。これらの量子状態の集合を、後述する理由によって code subspace と呼ぶ\*2。真空状態以外にも、例えば有限温度状態、TFD の周りの量子状態は bulk における古典的な描写を持つ。より一般に、このような古典的な描写を持つ量子状態とその励起状態の集合のそれぞれに対応して、Hilbert 空間の内部には複数の code subspaces が存在する。holographic CFTs の全ての Hilbert 空間の中で、これらの code subspaces は各地に点在する部分集合を成していると考えられる。以下ではそれらのうちの一つを考え、これを  $\mathcal{H}_{\text{code}}$  で表す。

量子状態に対応して bulk の背景時空が決定されると、部分系  $A$  を選ぶことで、その entangling surface にアンカーされたホモロジー条件を満たす極小曲面として  $\gamma_A^{\text{ext}}$  が決まる。このとき area operator  $\hat{\mathcal{A}}(\gamma_A^{\text{ext}})$  は、 $\gamma_A^{\text{ext}}$  上に局在した演算子である。このような構成のされ方によって、area operator は量子状態  $\rho_{\text{tot}}$  に依存している。またこれは AdS 時空上の量子重力理論におけるゲージ不変な演算子になっている [23]。

### 6.1.1 場の理論における modular Hamiltonian

まずは準備として、場の理論における modular Hamiltonian

$$K_A = -\log \rho_A, \quad (6.1.3)$$

を導入する。 $K_A$  はその定義から、全系の量子状態  $\rho_{\text{tot}}$  や部分系  $A$  の取り方に依存する演算子である。 $K_A$  は部分系の量子状態  $\rho_A$  に等しい情報を持っている。量子状態の定義  $\text{Tr} \rho = 1$ ,  $\rho \geq 0$  から、 $K$  の正値性が従う。 $K_A$  は一般に non-local な演算子であり、特別な場合を除いて具体的な表式を得ることは困難である。

### 6.1.2 modular Hamiltonian の具体例

$K_A$  の例として、まず明らかな場合として有限温度状態  $\rho_{\text{th}} \propto e^{-\beta H}$  に関して  $A$  を全系に取ったときが挙げられる。このとき modular Hamiltonian  $K$  は、全体系の Hamiltonian  $H$  と温度  $\beta = 1$  の下で一致する\*3。

他に modular Hamiltonian の具体形が知られている例として、 $\mathbb{R}^{1,d-1} = (t, \vec{x})$  上の一般の場の理

\*2 AdS/CFT 対応の文脈で現れる “subspace” は正確には部分空間ではなく部分集合の意である。すなわち、 $|\Psi\rangle, |\Phi\rangle \in \mathcal{H}_{\text{code}}$  であっても一般に  $|\Psi\rangle + |\Phi\rangle \in \mathcal{H}_{\text{code}}$  とは限らない。これに関連した area operator の議論は [23] を参照。

\*3 正確には、有限温度状態の規格化因子  $F = -\log Z(\beta)$  分だけずれる。

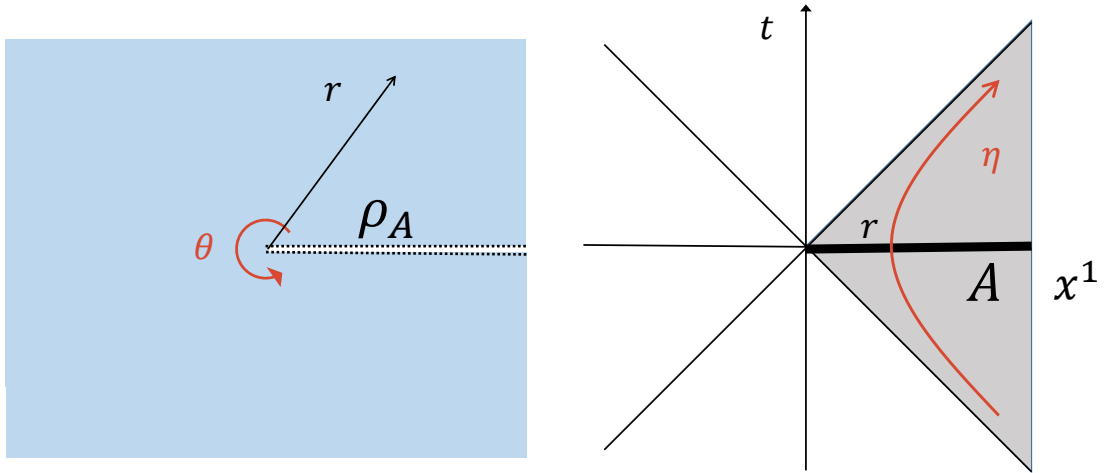


図 6.1.2 (左図) 場の理論の真空状態において、部分系  $A$  を half plane に取ったときの量子状態  $\rho_A$ 。この経路積分は、 $\theta$  を Euclidean 時間と見做すことで、 $\beta = 2\pi$  の有限温度状態と解釈できる。(右図) これを Lorentzian 時空に写すと、 $\rho_A$  の modular Hamiltonian  $K_A$  は、Rindler 時間  $\eta = -i\theta$  に対する Hamiltonian (すなわち、Lorentz boost の生成子) で与えられる。

論の真空状態に関して、部分系  $A$  を空間の half plane  $\mathbb{R}_{x^1 > 0}^d$  に取った場合が挙げられる。これを得るには、まず  $A$  上の量子状態  $\rho_A$  を Euclidean 経路積分によって準備することを考える。これは原点周りの回転  $\theta$  に関する ( $\beta = 2\pi$  の) 有限温度状態として表せることに注意する。通常の有限温度状態における時間  $\tau = it$  と Hamiltonian の関係を思い出すと、この量子状態は Rindler 時間  $\theta \equiv i\eta$  に対する系の Hamiltonian  $H_\eta$  を用いて

$$\rho_A = \frac{1}{Z(2\pi)} e^{-2\pi H_\eta}, \quad (6.1.4)$$

と表せることが分かる (図 6.1.2)。ここで元の座標  $(t, x^1)$  と Rindler 座標系とは

$$ds_E^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \rightarrow ds^2 = dr^2 - r^2 d\eta^2, \quad (6.1.5)$$

$$x = r \cosh \eta, \quad t = r \sinh \eta, \quad (6.1.6)$$

の関係にある。従って、時間対称性を生成する Killing ベクトル  $\xi$  は

$$\xi = \partial_\eta = x \partial_t + t \partial_x, \quad (6.1.7)$$

と表せる。故に、時刻一定面  $t = 0$  上における modular Hamiltonian は

$$K_A = 2\pi H_\eta = 2\pi \int_{x^1 > 0} \xi^\mu T_{\mu\nu} \epsilon^\nu = 2\pi \int_{x^1 > 0} dx^{d-1} x x^1 T_{00}, \quad (6.1.8)$$

となる。すなわち、 $K_A$  は Rindler wedge 内の時間発展 flow を生成する Lorentz boost 演算子である [125, 126]。

また共形場理論の真空状態については、任意の球状領域  $B$  に対する modular Hamiltonian を、domain of dependence  $\mathcal{D}(B)$  から Rindler wedge への共形変換を利用して求められる。すなわち、共形変換によって量子状態は

$$\rho_B = U^\dagger \rho_{\text{Rindler}} U = \frac{1}{Z} e^{-2\pi U^\dagger H_\eta U} \equiv \frac{1}{Z} e^{-2\pi H_\zeta}, \quad (6.1.9)$$

と変化するため、 $\mathcal{D}(B)$  内における modular flow の生成子  $H_\zeta$  を求めればよい。例えば  $\mathbb{R}^{1,d-1}$  上の原点を中心にした spherical region  $B = \{r \leq L, r = \sqrt{\sum_{i=1}^{d-1} x^i x_i}\}$  の domain of dependence  $\mathcal{D}(B) = \{r + t \leq L\} \cap \{r - t \leq L\}$ ,  $t \equiv x^0$  は、特殊共形変換および並進

$$x^\mu = \frac{X^\mu + C^\mu X^2}{1 + 2(X \cdot C) + X^2 C^2} + 2R^2 C^\mu, \quad C^\mu := (0, 1/(2R), 0, \dots, 0), \quad (6.1.10)$$

によって、 $\mathbb{R}^{1,d-1}$  の (right) Rindler wedge に写すことができる (図 6.1.3)。従って Rindler wedge の結果から、modular flow の Killing vector は

$$\xi = \partial_\zeta = \frac{1}{2L} ((L^2 - t^2 - r^2) \partial_t - 2t x^i \partial_i), \quad (6.1.11)$$

となり、 $t = 0$  面上の modular Hamiltonian は

$$K_B = \pi \int_B dx^{d-1} \frac{L^2 - r^2}{L} T_{00}, \quad (6.1.12)$$

となる [103]。この他にも  $\mathbb{R} \times S^{d-1}$  上の共形場理論や、有限温度状態、励起状態における spherical region  $B$  の modular Hamiltonian の具体形が得られている [127, 128, 129]。

### 6.1.3 modular Hamiltonian の双対性

AdS/CFT 対応では、boundary の部分系  $A$  に対する modular Hamiltonian  $K_A$  と、bulk の部分系  $M_A$  に対する modular Hamiltonian  $K_{M_A}$  は area operator  $\hat{\mathcal{A}}$  を含めた双対関係にある。これを [41] に従って導出する。



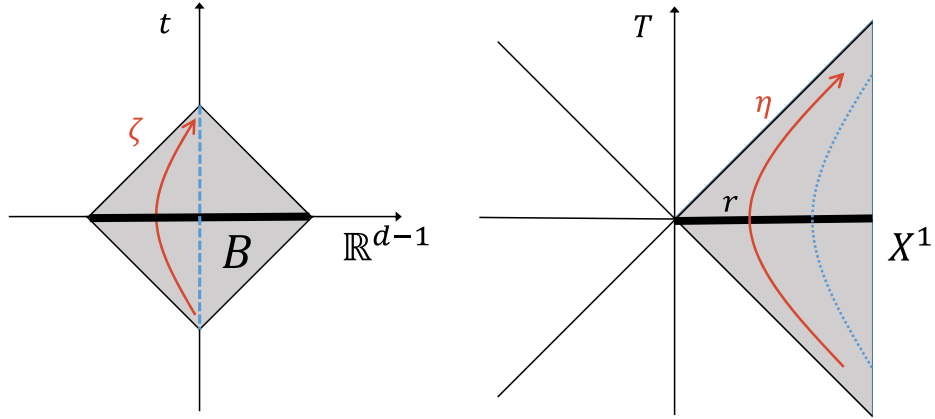


図 6.1.3 (左図) 共形場理論の真空状態において、球状に取った部分系  $B$  と modular flow  $\zeta$ 。  
 (右図) 共形変換によって  $\mathcal{D}(B)$  を Rindler wedge に写せる。modular flow は Rindler time に  
 対応する。 $|X^1| > |T|$ ,  $X^1 > 0$  の領域のみで  $\mathcal{D}(B)$  を覆うことに注意。

まずエンタングルメントエントロピー  $S_A$  は、modular Hamiltonian  $K_A$  の量子状態  $\rho_A$  における  
 期待値として

$$S_A = -\text{Tr} \rho_A \log \rho_A = \text{Tr} \rho_A K_A, \quad (6.1.13)$$

と書けることに注目する。従って、ホログラフィックエンタングルメントエントロピーの量子補正  
 (6.1.1) は、modular Hamiltonian を用いると

$$\text{Tr}(\rho_A K_A) = \text{Tr}(\rho_{M_A} \hat{A}) + \text{Tr}(\rho_{M_A} K_{M_A}), \quad (6.1.14)$$

と表せる。

次に演算子としての双対関係を見るために、code subspace 内の量子状態の摂動変化  $\rho_A \in$   
 $\mathcal{H}_{\text{code}} \rightarrow \rho'_A = \rho_A + \delta\sigma_A \in \mathcal{H}_{\text{code}}$  を考える。量子状態の摂動に対して、エンタングルメントエント  
 ロピーは

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\rho'_A \log \rho'_A) - \text{Tr}(\rho_A \log \rho_A) &= \text{Tr}(\delta\sigma_A \log \rho_A) + \text{Tr} \delta\sigma_A + O(\delta\sigma_A^2) \\ &= \text{Tr}(\delta\sigma_A K_A) + O(\delta\sigma_A^2), \end{aligned} \quad (6.1.15)$$

と変化する。ただしここで  $\text{Tr}\delta\sigma_A = 0$  を用いた。  $\delta\sigma_A = \rho'_A - \rho_A$  であるから、この式は  $\delta\sigma_A$  の一次において

$$\delta S_A = \delta \langle K_A \rangle, \quad (6.1.16)$$

と表せる。これはエンタングルメントエントロピーの第一法則と呼ばれている<sup>\*4</sup>[130]。この結果から、(6.1.14) に対する摂動として

$$\text{Tr}(\delta\sigma_A K_A) = \text{Tr} \left( \delta\sigma_{M_A} \left( \hat{\mathcal{A}} + K_{M_A} \right) \right), \quad (6.1.17)$$

を得る。この微小変化  $\delta\sigma_A$  は code subspace において任意であるから、これを積分して

$$\text{Tr}(\sigma_A K_A^{(\rho)}) = \text{Tr} \left[ \sigma_{M_A} \left( \hat{\mathcal{A}}^{(\rho)} + K_{M_A}^{(\rho)} \right) \right], \quad (6.1.18)$$

を得る。ここで上付きの添え字は、area operator と modular Hamiltonian が  $\rho_A$  によって定義されたものであることを表す。ここから、modular Hamiltonian に関する bulk と boundary の双対関係として

$$\Pi_c K_A \Pi_c = \hat{\mathcal{A}}(\gamma_A^{\text{ext}}) + K_{M_A}, \quad (6.1.19)$$

を得る。ただし  $\Pi_c$  は考えている code subspace への射影である。

#### 6.1.4 量子相対エントロピーの双対性

ホログラフィックエンタングルメントエントロピーの量子補正 (6.1.1) および modular Hamiltonian の双対性 (6.1.19) を用いると、boundary における相対エントロピーと bulk の相対エントロピーが semiclassical 近似  $O(N^0)$  の範囲で等しいことを示せる。すなわち、1 loop 補正のオーダーで

---

<sup>\*4</sup> エンタングルメントエントロピーの第一法則は、相対エントロピー  $S(\rho||\sigma) = \Delta S - \Delta \langle K_\sigma \rangle$  が非負性および  $S(\rho||\rho) = 0$  を満たすことからの 1 次変分でゼロになることの帰結である。また相対エントロピーの 2 次の変分量は Fisher 情報量で与えられる。

は extremal surface  $\gamma_A^{\text{ext}}$  の位置が変わらない\*5 ことに注意して、

$$\begin{aligned}
S(\rho_A || \sigma_A) &= -S(\rho_A) + \text{Tr} \rho_A K_A^{(\sigma)} \\
&= -\text{Tr} \left( \rho_{M_A} \hat{\mathcal{A}}(\gamma_A^{\text{ext}}) \right) - S(\rho_{M_A}) + \text{Tr} \left[ \rho_{M_A} \left( \hat{\mathcal{A}}(\gamma_A^{\text{ext}}) + K_{M_A}^{(\sigma)} \right) \right] \\
&= \text{Tr} \rho_{M_A} \left( K_{M_A}^{(\sigma)} - K_{M_A}^{(\rho)} \right) \\
&= S(\rho_{M_A} || \sigma_{M_A}), \tag{6.1.21}
\end{aligned}$$

を得る [38]\*6。ここで  $\gamma_A^{\text{ext}}$  の位置が変わらないことから、2つの量子状態  $\rho_{M_A}$ ,  $\sigma_{M_A}$  を同一の Hilbert 空間  $\mathcal{H}_{M_A(\gamma_A^{\text{ext}})}$  上の量子状態として扱えることに注意。

尚、この議論は  $O(N^2)$  以降の高次の量子補正を取り入れた場合に拡張できる。まず高次の量子補正を取り入れたホログラフィックエンタングルメントエントロピーについて、その関数形が式 (6.1.1) で与えられることを仮定して、曲面  $\chi_A$  の位置を右辺 (面積項  $\hat{\mathcal{A}}$  と bulk entanglement entropy  $S_a$  の和) が極小になるように定義する方法が提案されている [22]。すなわち、一般化されたホログラフィックエンタングルメントエントロピー (generalized entropy) を

$$S(\rho_A) := \min_{\chi_A^{\text{ext}}} \left( S_{\text{bulk}}(\chi_A^{\text{ext}}) + \langle \hat{\mathcal{A}}(\chi_A^{\text{ext}}) \rangle \right), \text{ for all orders in } G_N, \tag{6.1.22}$$

で定義する。このように定義された極小曲面  $\chi_A^{\text{ext}}$  を quantum extremal surface と呼ぶ。この仮定の下で、modular Hamiltonian の双対関係 (6.1.19) は式 (6.1.1) からの帰結であったことから、同様の議論で任意の  $1/N$  のオーダーに対して modular Hamiltonian の双対関係 (6.1.19) が成り立つことが分かる。一方、高次の量子補正を取り入れると  $\chi_A^{\text{ext}}$  の位置はそれぞれの量子状態に依存するようになる。その結果、bulk と boundary の相対エントロピーは一般には等しくならず、差分が生じ

\*5 一般に、 $X$  を極小曲面への埋め込みとして、metric の摂動  $g \rightarrow g + \delta g$  に対する極小曲面  $\mathcal{A}(X, g)$  の変分は、 $\delta g$  の1次のオーダーで

$$\delta \mathcal{A}(X, g) = \frac{\delta \mathcal{A}(X, g)}{\delta g} \delta g + \frac{\delta \mathcal{A}(X, g)}{\delta X} \frac{\delta X}{\delta g} \delta g, \tag{6.1.20}$$

と書けるが、極小性から  $\delta \mathcal{A} / \delta X = 0$  となり第2項はゼロになる。第1項は1 loop レベルの量子補正として  $\hat{\mathcal{A}}$  に現れる。4.4節の議論を参照。

\*6 これに類似した現象として、格子ゲージ理論における相対エントロピーは、格子の連続極限において、部分系  $A$  上の代数  $\mathfrak{A}_A$  の選び方に伴う不定性が無くなることが知られている [84]。

る。これは式 (6.1.1),(6.1.18) から

$$\begin{aligned}
S(\rho_A||\sigma_A) &= -S(\rho_A) + \text{Tr}\rho_A K_A^{(\sigma)} \\
&= -S(\rho_{M_A}^{(\rho)}) - \text{Tr}\left(\rho_{M_A}^{(\rho)} \hat{\mathcal{A}}^{(\rho)}\right) + \text{Tr}\left[\rho_{M_A}^{(\sigma)} \left(\hat{\mathcal{A}}^{(\sigma)} + K_{M_A}^{(\sigma)}\right)\right] \\
&= S(\rho_{M_A}^{(\sigma)}||\sigma_{M_A}) \\
&\quad + \left(S(\rho_{M_A}^{(\sigma)}) + \text{Tr}\rho_{M_A}^{(\sigma)} \hat{\mathcal{A}}^{(\sigma)}\right) - \left(S(\rho_{M_A}^{(\rho)}) + \text{Tr}\rho_{M_A}^{(\rho)} \hat{\mathcal{A}}^{(\rho)}\right), \tag{6.1.23}
\end{aligned}$$

と示せる。ただし量子状態の上付きの添字は、bulk の量子状態がどの量子状態を元にした  $\chi_A^{\text{ext}} = \chi_A^{\text{ext}}(\rho)$  によって分割した bulk の部分領域  $M_A$  上で定義されているかを表す。トレースに含まれる演算子は同じ bulk の領域上で定義されていなければならないことに注意。最終行は、2 つの quantum extremal surface  $\chi_A^{\text{ext}}(\rho)$ ,  $\chi_A^{\text{ext}}(\sigma)$  上で計算した generalized entropy の差分である。特に  $O(N^0)$  では  $\chi_A^{\text{ext}}(\rho)$  の定義から最終行の項は消滅して、かつ  $\rho_{M_A}^{(\sigma)} = \rho_{M_A}^{(\rho)}$  であるから、先述の結果と一致する。また高次の量子補正を含めたときも、 $\rho_{M_A}^{(\sigma)} = \sigma_{M_A}$  と置いた場合、 $\chi_A^{\text{ext}}(\rho)$  と  $\chi_A^{\text{ext}}(\sigma)$  のずれを一次の差分と仮定すれば、同様に最終行の項が消えて  $S(\rho_A||\sigma_A) = 0$  が言える。

一般の場合は、bulk と boundary の相対エントロピーは完全には一致しなくなる。この場合の議論については [131] を参照。また高階微分項による補正と量子補正の両方を取り入れた議論は [24] を参照。

尚、エンタングルメントエントロピーの第一法則 (6.1.16) は、boundary における量子状態の摂動論に関する主張であるが、これを holography の状況に適用すると、bulk における線形 Einstein 方程式を導出できる。この導出の概要は次の通りである。例として真空状態  $\rho$  およびその摂動状態  $\rho + \delta\rho$  を考えると、これに対応する背景時空は pure AdS 時空に対する摂動であり、Fefferman-Graham 計量 (2.2.22) を用いて表せる。Ryu-Takayanagi 公式を用いると、第一法則 (6.1.16) の左辺は、 $O(N^2)$  のオーダーでは計量の摂動に伴った極小面積の変化  $\delta\mathcal{A} = \mathcal{A}[g + \delta g] - \mathcal{A}[g]$  として表せる。また右辺は、modular Hamiltonian の形が分かれば、共形場理論のエネルギー運動量テンソルの期待値の微小変化として (例えば  $\delta\langle T_{00} \rangle$  を用いて) 陽に書き下せる。さらに field-operator 対応を用いると、エネルギー運動量テンソルの期待値は、 $z \rightarrow 0$  における計量の摂動  $\delta g|_{z=0}$  によって表すことができる。従って、エンタングルメント第一法則は、両辺ともに bulk における計量の摂動を用いて表すことができる。ここで特に部分系  $A$  として球状領域を取ると、modular Hamiltonian の表式 (6.1.12) を用いることができ、ある具体的な関数  $F_{1,2}$  を用いて、schematic には

$$\int_{\gamma_B^{\text{ext}}} F_1(x, z, \delta g) = \int_B F_2(x, z=0, \delta g|_{z=0}), \tag{6.1.24}$$

と書ける。さらに Stokes の定理によって、これと同値な命題として

$$\int_b \delta E_{\mu\nu} = 0, \quad (6.1.25)$$

を得る。ここで  $\delta E_{\mu\nu}$  は線形 Einstein 方程式を与えるテンソルであり、 $b$  は  $\gamma_B^{\text{ext}}$  と  $B$  で囲まれた codimension-1 の領域である。この式が成り立つためには bulk の局所的な各点で  $\delta E_{\mu\nu} = 0$  が必要十分条件であることから、線形 Einstein 方程式を得る [25, 26]。この結果は、近年 non-linear Einstein 方程式 (2 次) にまで拡張された [27]。

## 6.2 Entanglement wedge と Bulk reconstruction

前節の結果

$$S(\rho_A || \sigma_A) = S(\rho_{M_A} || \sigma_{M_A}), \quad (6.2.1)$$

に相対エントロピーの非退化性 (式 (3.3.32)) を考慮すると、 $O(N^0)$  で

$$\rho_A = \sigma_A \Leftrightarrow \rho_{M_A} = \sigma_{M_A}, \quad (6.2.2)$$

を得る。これは bulk の部分系  $M_A$  において発生した励起などの如何なる変化も、boundary の部分系  $A$  上の量子状態の変化として現れることを意味する。すなわち、bulk の部分系  $M_A$  上の量子状態と boundary の部分系  $A$  上の量子状態は等しい情報を持っており、boundary の部分系  $A$  に双対な bulk の領域が  $M_A$  で与えられることが期待できる。

### 6.2.1 Entanglement wedge

Bulk の全体系が古典的な時空による記述を持っているとき、boundary のある部分領域の情報に bulk のある部分領域の情報に対応することを subregion/subregion duality と呼ぶ。換言すると、boundary の部分系の量子状態  $\rho_A$  を固定したときに、それを縮約密度行列として与えるような (古典的な bulk 描像を持つ) 全ての量子状態  $\rho_{\text{tot}}$  の集合を考えて、それらの bulk に共通する部分領域を「部分系  $A$  の情報  $\rho_A$  のみによって決定される双対領域」と考えると考える。この意味で  $\rho_A$  と双対な bulk の領域は “dual of density matrix  $\rho_A$ ” とも言われる [34]。これは boundary の部分系  $A$  における量子状態  $\rho_A$  を用いて、bulk のある領域の時空やその上の量子状態、局所演算子、相関関数などを復元できることを意味する。部分系  $A$  が同じであっても、 $\rho_A$  が異なるならば、一般には双対となる bulk の領域も変化する。

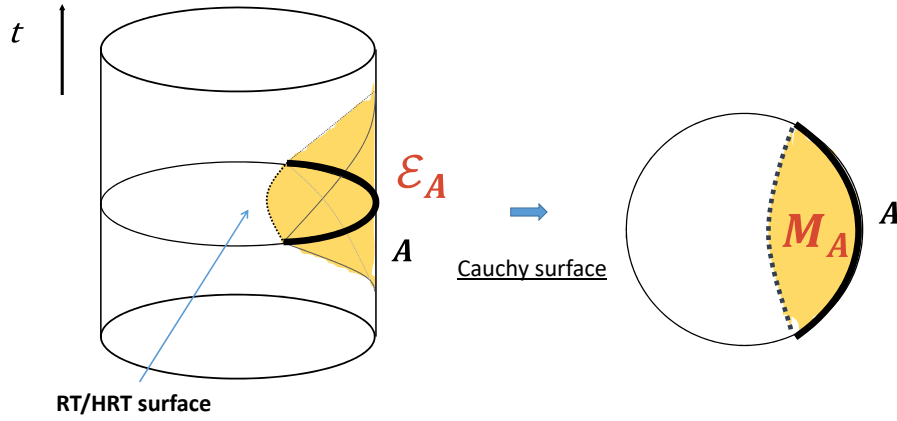


図 6.2.1 Global AdS 時空における entanglement wedge。境界上の部分系  $A$  の domain of dependence  $\mathcal{D}(A)$  に対して、bulk の entanglement wedge  $\mathcal{E}_A \equiv \mathcal{E}(A)$  が対応する。Entanglement wedge  $\mathcal{E}_A$  は、部分系  $A$  と RT/HRT surface で囲まれた任意の Cauchy 面上の領域  $M_A$  に対して  $\mathcal{E}(A) := \mathcal{D}(M_A)$  で定義される。

このような bulk の部分領域として、近年では entanglement wedge と呼ばれる領域が考えられている [34, 35, 37]。ここで entanglement wedge は、boundary の部分系  $A$  (または量子状態  $\rho_A$ ) に対して、extremal surface  $\gamma_A^{\text{ext}}$  から決まる bulk の空間的超曲面  $M_A$  に対する domain of dependence  $\mathcal{D}(M_A)$  として定義される (図 6.2.1)。

$$\mathcal{E}_A := \mathcal{D}(M_A). \tag{6.2.3}$$

これは bulk における codimension-0 の部分領域である。以下ではこれを  $\mathcal{E}_A$  で表す。これに対応して、boundary では部分系  $A$  の domain of dependence  $\mathcal{D}(A)$  を考える。すなわち、entanglement wedge に基づく subregion/subregion duality は、これらの間の双対性

$$\mathcal{D}(A) \Leftrightarrow \mathcal{E}(A), \tag{6.2.4}$$

を主張する。尚、 $\mathcal{E}_A$  についてある Cauchy 面を取った  $M_A$  を entanglement wedge と呼ぶことも多い。実際、第 (7) 章では専ら  $M_A$  上の幾何学量に関して議論する。

以下では entanglement wedge による subregion/subregion duality を支持する事実を見ていこ

う。ここでは一旦、entanglement wedge に限らず、一般に部分系  $A$  の dual の候補となる領域を  $\mathcal{R}_A$  で表す。

まず相対論的な場の理論に関して、ある部分系とそれとは異なる部分系の domain of dependence が等しいならば、これらの 2 つの部分系は完全に同じ情報を持っていることに注意する。実際、このとき片方の量子状態や演算子は、他方の量子状態や演算子のユニタリ時間発展によって表せる。従って、boundary の部分系  $A$  と双対になる bulk の領域  $\mathcal{R}_A$  は、domain of dependence を共有する部分系に対して同一になる必要がある。そして実際に Entanglement wedge がこの性質を満たしていることは容易に確かめられる。すなわち、boundary の部分系に  $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A')$  となる他の部分系  $A'$  を選んだとき、 $\gamma_{A'}^{\text{ext}}$  がアンカーされる entangling surface は  $A$  のそれと変わらないために

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A') \Rightarrow \partial A = \partial A' \Rightarrow \mathcal{E}_A = \mathcal{E}_{A'}. \quad (6.2.5)$$

が成り立つ。このように entanglement wedge は boundary 上の domain of dependence に対して定義されている。以降では一般性を失わずに、 $\mathcal{D}(A)$  を代表させる形で、部分系  $A$  に対する entanglement wedge  $\mathcal{E}_A$  を考える。Bulk の領域  $\mathcal{R}_A$  自身についても、boundary の部分系  $A$  の情報から復元できる bulk の最大領域として定義されることから、その領域の domain of dependence と一致しなければならない ( $\mathcal{R}_A = \mathcal{D}(\mathcal{R}_A)$ )。Entanglement wedge がこの性質を満たすことはその定義から明らかである。

$$\mathcal{E}_A = \mathcal{D}(\mathcal{E}_A). \quad (6.2.6)$$

次に部分系  $A$  が他の部分系  $B$  に含まれている場合、bulk の領域  $\mathcal{R}_B$  は、 $\mathcal{R}_A$  を含んでいなければならない。これは  $B$  の量子状態をトレースアウトすることで  $A$  の量子状態を得られることから自然な要請である。そして実際に entanglement wedge が広いクラスの時空においてこの性質を満たすことが示されている [35]。

$$A \subset B \Rightarrow \mathcal{E}_A \subset \mathcal{E}_B. \quad (6.2.7)$$

また逆に、boundary の部分系  $A$  が部分系  $B$  と交わらないならば、bulk の領域  $\mathcal{R}_A$  は  $B$  上の変化によって影響を受けるべきではない。この要請は  $\mathcal{R}_A$  として可能な最大領域に制限を与える。実際、entanglement wedge はこの制限を満たすことが知られている [34]。

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathcal{E}_A \cap \{J^+(\mathcal{E}_B) \cup J^-(\mathcal{E}_B)\} = \emptyset. \quad (6.2.8)$$

ただし  $J^{+(-)}(X)$  は bulk における部分領域  $X$  の因果的未来（過去）であり、 $X$  の変化によって影響を受ける（与える）領域を表す。

これらの議論により、entanglement wedge は部分系の双対領域としての必要条件を満たしていることが分かった。他に entanglement wedge による双対性を支持するより積極的な理由の一つとして、ホログラフィックエンタングルメントエントロピーに関する RT/HRT 公式が挙げられる。これを見るために、まず境界上で部分系  $A$  の上の量子状態  $\rho_A$  が与えられたとき、任意の部分系  $B \subset A$  について、エンタングルメントエントロピー (von Neumann エントロピー)  $S_B$  を求めることが原理的には可能であることに注意する。これは bulk においては、 $\gamma_A^{\text{ext}}$  を境界を持つ codimension-2 surfaces の族  $\Gamma_A = \{\gamma_B^{\text{ext}} | B \subset A\}$  の面積の情報を得たことに相当する。従って、ある部分系  $A$  の情報に対応する時空の領域は、少なくとも  $\Gamma_A$  を含んでいると考えることが自然である。Entanglement wedge はこれを明らかに満たしている\*7。

さらに、先述した相対エントロピーによる状態識別の同一性 (6.2.2) は、 $\mathcal{R}_A \equiv \mathcal{E}_A$  を根本的に裏付けている。尚、この結果は 6.3節における証明においても本質的に用いられる。

これらの事実から、boundary の部分系の bulk の双対領域は entanglement wedge であると考えられる。

## 6.2.2 Bulk reconstruction

Subregion/subregion duality の意味する結果をより明確にするために、ここでは共形場理論側のある部分領域上の演算子を用いて bulk のある領域における局所演算子を書き表すことを考える。これは現在では様々な方法が提案されているが、以下では標準的な方法である HKLL reconstruction[42, 43] について述べる。

AdS/CFT 対応の基本原則の一つである式 (2.4.17)、すなわち、共形場理論の (single trace) 演算子の 1 点関数および normalizable fields の AdS boundary における値の対応関係は、AdS boundary 付近における (重力理論の) 演算子としての等式として

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^{-\Delta} \phi(x, z) = \mathcal{O}(x), \quad (6.2.9)$$

が成り立つことを示唆する (“extrapolate dictionary”)[132]。この対応関係を bulk の内部に延長して、bulk の局所演算子を boundary の演算子によって表すことを考える [42]。このために、まず

\*7 この  $\Gamma_A$  を元にして定義された domain of dependence  $\mathcal{D}(\Gamma_A)$  は、RT/HRT surface が相転移を起こす場合など、entanglement wedge の一部しか覆わず中心部に“欠損”を残すことがある。エンタングルメントエントロピーの議論のみからは、 $\mathcal{E}_A$  ではなく  $\mathcal{D}(\Gamma_A)$  を  $\mathcal{R}_A$  の候補とすることも考えられる。しかし次章で議論するように、この“穴”の部分に存在する幾何学量は、 $\rho_A$  から計算可能な他の情報量に対応することが予想される [2]。これに関連する議論は [37] を参照。



normalizable fields の boundary における値を

$$\phi_+(x) := \lim_{z \rightarrow 0} z^{-\Delta} \phi(x, z), \quad (6.2.10)$$

で定義したときに、次の関係式

$$\phi(x, z) = \int_{\mathcal{B}_d} dy^d K(x, z; y) \phi_+(y), \quad (6.2.11)$$

を満たす関数  $K(x, z; y)$  を、 $\phi(x, z)$  に関する bulk の運動方程式を用いて求める。この  $K$  は smearing function と呼ばれる\*<sup>8</sup>。この smearing function を用いて bulk の局所演算子を

$$\hat{\phi}(x, z) := \int_{\mathcal{B}_d} dy^d K(x, z; y) \mathcal{O}(y), \quad (6.2.12)$$

で定義する。この方法によれば、bulk の局所演算子を共形場理論の “smear” された non-local な演算子によって表せる。このように、semiclassical な bulk の fluctuation として現れる局所演算子を、boundary 側の演算子によって表現することを一般に bulk reconstruction と呼ぶ。これを用いると、例えば bulk における 2 点相関関数は

$$\langle \phi(x, z) \phi(x', z') \rangle_{\text{AdS}} = \int_{\mathcal{B}_d} dy^d \int_{\mathcal{B}_d} dy'^d K(x, z; y) K(x', z'; y') \langle \mathcal{O}(y) \mathcal{O}(y') \rangle_{\text{CFT}}. \quad (6.2.13)$$

と boundary の共形場理論における 2 点相関関数によって表される。

ここで重要な点は、 $K$  として boundary の（全域ではなく）一部の領域上のみ support を持つものを選べることである [42, 43]。例えば global AdS 時空に対しては、bulk の局所演算子が挿入されている点から space-like な関係にある boundary の領域上のみで非ゼロになるように  $K$  を構成できる。これを逆から見ると、一般には boundary の部分系  $A$  上に support を持つ  $K$  によって、bulk の causal wedge  $\mathcal{C}_A$  に含まれている局所演算子を HKLL の方法で再構成できる。ここで causal wedge  $\mathcal{C}_A$  とは、境界上の  $\mathcal{D}(A)$  との情報のやり取りが可能な bulk の部分領域として

$$\mathcal{C}_A := J^+(\mathcal{D}(A)) \cap J^-\mathcal{D}(A), \quad (6.2.14)$$

で定義される [32, 33]。すなわち、HKLL reconstruction は causal wedge に属する局所演算子の再構成法を与えている。

この結果は、 $\mathcal{D}(A)$  上の情報と双対な bulk の領域は少なくとも causal wedge  $\mathcal{C}_A$  を含んでいな

---

\*<sup>8</sup> これは (2.4.20) に現れる bulk to bulk propagator  $K_\Delta$  とは別物であることに注意。 $K_\Delta$  は non-normalizable modes に対して定義される一方、smearing function  $K$  は normalizable modes に対して定義される。normalizable fields は semiclassical な bulk theory の励起モードとして、bulk の局所演算子に相当する。

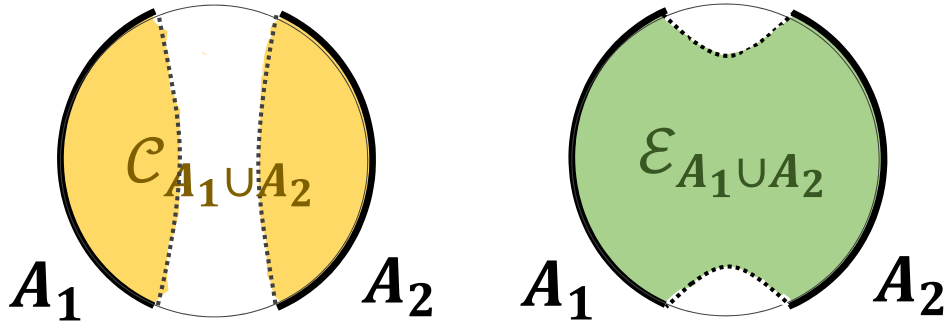


図 6.2.2 Global AdS 時空の Cauchy 面上で見た Causal wedge  $\mathcal{C}_A$  と entanglement wedge  $\mathcal{E}_A$ 。部分系  $A$  として 2-disjoint intervals  $A = A_1 \cup A_2$  を取っている。 $I(A_1 : A_2) > 0$  となるように大きく部分系を取ったとき、entanglement wedge は causal wedge と比較して bulk の深部を覆っている。

なければならないことを示唆する。実際、entanglement wedge  $\mathcal{E}_A$  は常に causal wedge  $\mathcal{C}_A$  を含むことが知られている [35]。一方、これらの領域は常に一致するとは限らない。 $\mathcal{E}_A \neq \mathcal{C}_A$  となる典型的な例としては、2つの disjoint intervals から成る部分系  $A = A_1 \cup A_2$  において、 $A_1, A_2$  を十分に大きく取った場合が挙げられる (4.2.2節参照)。すなわち、相互情報量が  $I(A_1 : A_2) > 0$  となるとき、 $\gamma_{A_1 A_2}^{\text{ext}}$  は2つの部分系を繋ぐ形になり、 $\mathcal{C}_A$  と比較して  $\mathcal{E}_A$  の領域は bulk の深部に達する (図 6.2.2)。また causal wedge はそれ自身の domain of dependence と一般には一致しない [36]。従って、causal wedge 自体は bulk の双対領域の候補としては不適當である\*<sup>9</sup>。

それでは entanglement wedge における bulk の局所演算子はどのように再構成されるのか。これに関しては現在盛んに研究されており、様々な方法が提案されている。特に量子誤り訂正符号を用いた議論からは、entanglement wedge  $\mathcal{E}_A$  上の局所演算子を部分系  $A$  上の演算子のみを用いて (原理的には) 再構成できることが証明された [41]。この結果は subregion/subregion duality における重力側の領域として、entanglement wedge を考える新たな根拠の一つとなっている。次節ではこの再

\*<sup>9</sup> ただし、causal wedge の domain of dependence  $\mathcal{D}(\mathcal{C}_A)$  は、この要請からは候補として除外されないことに注意。

構成定理について詳しく述べる。

尚、前節の modular Hamiltonian にも関連する局所演算子の再構成法として、modular Hamiltonian に関する双対性 (6.1.19) から得られるもう一つの結論、すなわち、entanglement wedge 上の局所演算子に対して modular Hamiltonian の作用が bulk modular Hamiltonian の作用と一致することをを用いる方法がある。

$$[\phi_{\text{bulk}}, K_A] = [\phi_{\text{bulk}}, K_{M_A}]. \quad (6.2.15)$$

この事実は entanglement wedge 内の局所演算子は  $\gamma_A^{\text{ext}}$  上に局在する area operator  $\hat{A}$  と常に space-like になることから従う。この式と、bulk の modular flow に関して RT/HRT surface が bifurcation surface になっている事実を用いると、 $\gamma_A^{\text{ext}}$  上の局所演算子は共形場理論における modular Hamiltonian  $K_A$  と交換しなければならないことが分かる。この事実を利用して、2つの交叉する RT/HRT surface の交叉点上に存在する局所演算子を、共形場理論の情報のみから再構成する方法が近年提案された [133]。これは HKLL reconstruction と異なり bulk の背景計量の知識を用いない点の特徴である。また他に modular flow を用いた方法として、部分系が spherical region などの場合には HKLL reconstruction が  $A$  上の演算子の modular flow  $s$  に沿った積分

$$\phi(x, z) = \int ds \int_A d\vec{y}^{d-1} K(x, z; \vec{y}, s) \mathcal{O}(\vec{y}, s), \quad \mathcal{O}(\vec{y}, s) := U(s)^\dagger \mathcal{O}(\vec{y}, 0) U(s), \quad (6.2.16)$$

と見做せることの類推から、この式を一般の状況（例えば上記の 2 disjoint intervals）に拡張して、同様に modular flow によって局所演算子を定義する方法が提案されている [38, 134]。

### 6.3 量子誤り訂正符号とバルク再構成定理

Entanglement wedge  $\mathcal{E}_A$  上の局所演算子を、部分系  $A$  上の演算子のみを用いた何らかの方法で（例えば式 (6.2.12) のような形で）再構成できると仮定しよう。この仮定は、次に述べるように一見して矛盾した状況を引き起こす [39]。

Boundary の部分系  $A, B$  を交叉する ( $A \cap B \neq \emptyset$ ) ように取り、それぞれの entanglement wedge  $\mathcal{E}_A$  と  $\mathcal{E}_B$  について、これらが交叉する領域上の点  $X \in \mathcal{E}_A \cap \mathcal{E}_B$  の局所演算子  $\hat{\phi}(X)$  について考える (図 6.3.1)。仮定から、 $\hat{\phi}(X)$  は部分系  $A, B$  のどちらの演算子のみによっても再構成可能である。すると、 $\hat{\phi}(X)$  は  $A$  と  $B$  に共通する領域  $A \cap B$  の Hilbert 空間  $\mathcal{H}_{A \cap B}$  上の演算子のみから構成されていなければならない。ところが、一般には  $X \notin \mathcal{E}_{A \cap B}$  となる点  $X$  が存在し、このような点上の局所演算子は  $A \cap B$  上の演算子のみからは再構成できない。

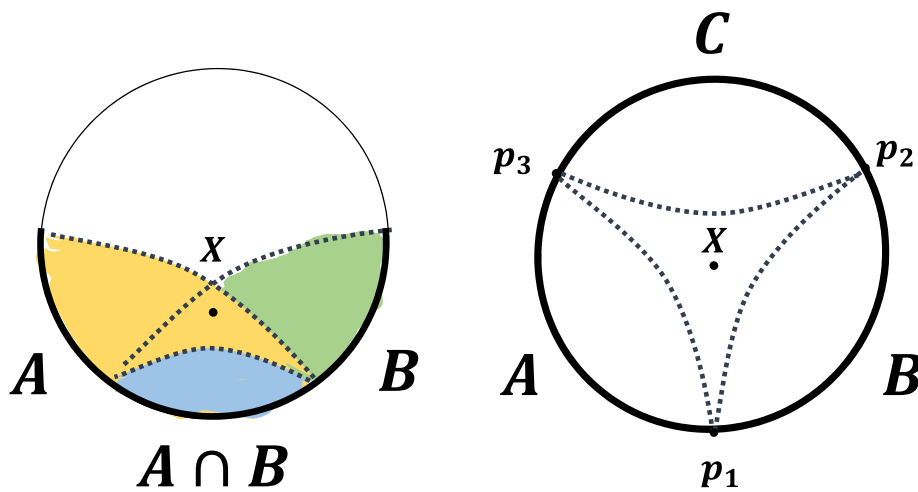


図 6.3.1 Bulk の局所演算子の再構成に関する矛盾。(左図)  $X \in \mathcal{E}_A \cap \mathcal{E}_B$  上の局所演算子  $\hat{\phi}(X)$  は、boundary の部分系  $A, B$  どちらの上の演算子によっても再構成可能である。すると  $\hat{\phi}(X)$  は部分系  $A \cap B$  上の演算子によって表されているはずであるが、 $\mathcal{E}_{A \cap B}$  によっては  $X$  を再構成できない。(右図)  $X \in \mathcal{E}_A \cap \mathcal{E}_B$  上の局所演算子  $\hat{\phi}(X)$  は、 $A \cup B, B \cup C, C \cup A$  のいずれの部分系によっても再構成可能であるから、これらに共通する 3 点  $\{p_1, p_2, p_3\}$  上の演算子によって表せるはずである。ここで  $A, B, C$  の位置を図中で僅かに回転させると、同様の議論から新たな 3 点  $\{p'_1, p'_2, p'_3\}$  上の演算子による  $\hat{\phi}(X)$  の再構成を得る。ところが、これら新旧の 3 点の間には最早共通する領域が 1 点も無いため、 $\hat{\phi}(X)$  は再構成され得ないことになる。以上の議論は entanglement wedge を causal wedge に置き換えても成り立つことに注意。

仮に何らかの事情によって、共通部分  $A \cap B$  の情報のみから  $X$  上の局所演算子を再構成できると仮定しよう。しかしそれでも、より極端な状況を考えることで避けられない矛盾が生じる。今度は 3 つの部分系  $A, B, C$  を図 6.3.1 の右ように取り、簡単のために bulk の中心点  $X$  について考えよう。このとき  $A, B, C$  のいずれの部分系によっても単独では  $\hat{\phi}(X)$  は再構成できないが、任意の 2 つの部分系の組み合わせ  $A \cup B, B \cup C, C \cup A$  で再構成が可能である。この 3 通りの組み合わせに共通する boundary の領域は、それぞれの部分系の端点  $\partial A \cup \partial B \cup \partial C \equiv \{p_1, p_2, p_3\}$  のみである。従って、 $\hat{\phi}(X)$  はこの 3 点上の演算子によって再構成されなければならない。ここで新たな部分系  $A', B', C'$  を、元の  $A, B, C$  を図中で少しだけ回転させたものとして選ぶ。同様の議論を繰り返すことで、今度は 3 点  $\partial A' \cup \partial B' \cup \partial C' \equiv \{p'_1, p'_2, p'_3\}$  上の演算子によって  $\hat{\phi}(X)$  は再構成されることになる。しかし  $\{p_1, p_2, p_3\}$  と  $\{p'_1, p'_2, p'_3\}$  にはもはや 1 点の共通部分も無く、従って  $\hat{\phi}(X)$  は

如何なる boundary の領域上の演算子によっても再構成され得ないことになってしまう。

以上の議論は entanglement wedge に限らず causal wedge を用いた再構成に関しても同様に当てはまることに注意する<sup>\*10</sup>。Causal wedge に関しては実際に HKLL reconstruction による再構成が可能であるから、これらの矛盾は局所演算子の再構成が可能であるという仮定や、双対となる部分領域を entanglement wedge に取ったことに起因するものではない。

それでは矛盾はどのように解決されるのか。これらの矛盾が生じた原因は、暗黙裡に置いていた「それぞれの部分系によって再構成された演算子がすべて同一のものである」という仮定に由来する。そこでこの仮定を放棄して、それぞれの部分系によって復元される局所演算子はそれぞれ異なるものであるが、対象となる量子状態への作用については同じであると考えよう。例えば図 6.3.1 の後者の例では、

$$\hat{\phi}_{AB} |\Phi\rangle = \hat{\phi}_{BC} |\Phi\rangle = \hat{\phi}_{CA} |\Phi\rangle, \quad (6.3.1)$$

となっていれば bulk の局所演算子は矛盾なく定義される。ここで量子状態  $|\Phi\rangle$  は背景時空に対応した code subspace  $\mathcal{H}_{\text{code}}$  に含まれる任意の状態  $|\Phi\rangle \in \mathcal{H}_{\text{code}}$  を表す。

このような量子状態や局所演算子は、量子情報理論における量子誤り訂正符号 (quantum error correction, QEC) において議論される code subspace および logical operator と同じ構造を持っている<sup>\*11</sup>。そこで次に量子誤り訂正符号について簡潔に紹介する。

### 6.3.1 量子誤り訂正符号

量子誤り訂正符号とは、ある量子系の量子状態を別の量子系へと転送する際に用いる雑音等などによるエラーを低減するためのプロトコルである。ここでは特にそのようなエラーとして、AdS/CFT 対応の議論に関係する情報の部分的な喪失 (トレースアウト) について考えよう。

具体例として、次の 3 準位系 (qutrit) の量子状態

$$|\psi\rangle = \sum_{i=0}^2 a_i |i\rangle = a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle + a_2 |2\rangle, \quad (6.3.2)$$

を量子通信 (CPTP 写像) によって転送する状況を考える。ここで量子状態が含む情報とは、具体的には係数  $\{a_i\}_{i=0}^2$  のことを指す。ただ単純にこの量子状態を用いて通信を行うと、雑音等によって、

<sup>\*10</sup> 実際、次に述べる quantum error correction との類似性は、最初に causal wedge 上の再構成に基づいて指摘された [39]。

<sup>\*11</sup> AdS/CFT 対応の文脈で semiclassical な bulk 描像を持った量子状態の集合を code subspace と呼ぶことはここに由来する。

例えば 2 つの基底を flip させるようなエラー ( $|0\rangle \longleftrightarrow |1\rangle$ ) によって元とは異なる情報が受け手側で復元されてしまう可能性がある。今考えている情報喪失に関しては、1 つの qutrit ではそもそも転送が失敗して全く情報が伝わらなくなってしまう。そこで情報の耐久性を上げるために、誤り訂正符号のプロトコルを用いる必要が生じる。

古典的な情報理論における誤り訂正符号では、元となる情報 (bit の列) と同一の系を複数用意しておき、それらを一齐に転送することで誤り確率を低減することが可能である。ところが量子情報理論では、量子複製可能性定理が存在するため、未知である一般の量子状態についてそのコピーを作製することは原理的に不可能である (No-cloning theorem)[135]。従って、古典情報理論のアナロジーとして、単純に元の量子状態を複数用意する方法は利用できない。

そこで量子情報理論における誤り訂正符号では、元となる量子状態を、より大きな Hilbert 空間に埋め込むことで情報の耐久性を向上させる。例えば量子状態 (6.3.2) の代わりに、3 つの qutrit から成る Hilbert 空間  $\mathcal{H}_{123} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$  の部分空間  $\tilde{\mathcal{H}}_{123}$  の元

$$|\tilde{\psi}\rangle = \sum_{i=0}^2 a_i |\tilde{i}\rangle \in \tilde{\mathcal{H}}_{123}, \quad (6.3.3)$$

を考える。ここで部分空間  $\tilde{\mathcal{H}}_{123}$  の基底を

$$|\tilde{0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|000\rangle + |111\rangle + |222\rangle), \quad (6.3.4)$$

$$|\tilde{1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|012\rangle + |120\rangle + |201\rangle), \quad (6.3.5)$$

$$|\tilde{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|021\rangle + |102\rangle + |210\rangle), \quad (6.3.6)$$

で定義した。また  $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle$  は qutrit  $\mathcal{H}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) の基底である。 $\tilde{\mathcal{H}}_{123}$  には、元の Hilbert 空間が等長的に埋め込まれている。

量子状態 (6.3.3) を用いると、3 つの qutrit のうちどれか 1 つが失われても受け手側で元の量子状態を復元できる。実際、例えば 3 番目の qutrit が失われて、受け手側は 1 番目と 2 番目の qutrits  $\mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  にしか操作を行えないと仮定しよう。このとき  $\mathcal{H}_{12}$  上のユニタリ写像  $U_{12}$  を、次の基底の入れ替え

$$U_{(12)} : |01\rangle \mapsto |12\rangle \mapsto |10\rangle \mapsto |22\rangle \mapsto |02\rangle \mapsto |21\rangle \mapsto |20\rangle \mapsto |11\rangle \mapsto |01\rangle, |00\rangle \mapsto |00\rangle, \quad (6.3.7)$$

によって定義すると、その作用によって各基底は

$$U_{(12)} |\tilde{i}\rangle = |i\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{3}}(|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle), \quad (6.3.8)$$

と変換する。これを  $|\tilde{\psi}\rangle$  に作用させることで

$$U_{(12)} |\tilde{\psi}\rangle = |\psi\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{3}}(|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle), \quad (6.3.9)$$

となり、1 番目の qutrit に量子状態  $|\psi\rangle$  を復元できる。同様に  $U_{(23)}$ ,  $U_{(31)}$  を作ることで、他の qutrit の情報を喪失した場合でも必ず元の量子状態を復元可能になる。このプロトコルによって、任意の 1 qutrit の喪失に関する量子誤り訂正符号が達成されたことになる<sup>\*12</sup>。

このように量子誤り訂正符号では、元となる量子状態をより大きな Hilbert 空間の元に対応させることで、一定範囲のエラーに対する情報の耐久性を得る。元となる量子状態の Hilbert 空間（メッセージ系）は、より大きな Hilbert 空間（入力系）の部分空間となるように通常は等長写像によって埋め込まれる。この埋め込まれた部分空間を符号空間 (code subspace) と呼び  $\mathcal{H}_{\text{code}}$  で表す。上の例では、元の  $|\psi\rangle$  を含む Hilbert 空間がメッセージ系、3 つの qutrit による Hilbert 空間  $\mathcal{H}_{123}$  が入力系、 $|\hat{0}\rangle, |\hat{1}\rangle, |\hat{2}\rangle$  が張る部分空間  $\tilde{\mathcal{H}}_{123}$  が code subspace である。

以上では、量子誤り訂正符号における量子状態の対応に注目したが、次にメッセージ系上の演算子が入力系でどのように表されるかを考える。メッセージ系は符号空間に等長に埋め込まれているので、符号空間上にメッセージ系における演算子と同じ作用をする演算子が存在することは明らかである。ここで重要な点は、その符号空間上で表現される演算子が一意的ではないということである。これを見るために、上記の具体例において

$$O|i\rangle = \sum_{j=1}^3 O_{ji}|j\rangle, \quad (O_{ij} := \langle i|O|j\rangle), \quad (6.3.10)$$

と作用するメッセージ系の演算子を考える。次の符号空間上の演算子

$$\tilde{O}_{(12)} := U_{(12)}^\dagger O_{(1)} U_{(12)} \text{ on } \mathcal{H}_{12}, \quad (O_{(1)} := O \otimes I \otimes I), \quad (6.3.11)$$

<sup>\*12</sup> 一般に量子誤り訂正符号は、予め定められた範囲内のエラーに対して情報を保護するプロトコルである。これは極端な状況として、全ての情報を受け手が喪失した場合は情報の復元がどのような方法でも不可能になることから明らかである。

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{H}_{\text{String}} & \cong & \mathcal{H}_{\text{holo.CFT}} \\
\cup & & \cup \\
\mathcal{H}_{\text{semiclassical}} & \cong & \mathcal{H}_{\text{code}}
\end{array}$$

図 6.3.2 AdS/CFT 対応における Hilbert 空間の構造。

を用いると、

$$\tilde{O}_{(12)} |\tilde{i}\rangle = U_{(12)}^\dagger (O |i\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{3}} (|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle) = \sum_{j=1}^3 O_{ji} |\tilde{j}\rangle, \quad (6.3.12)$$

となり、メッセージ系の演算子  $O$  と同じ作用を持つ演算子  $\tilde{O}_{(12)}$  を符号空間上に再現できる。ところが、同様に  $U_{(23)}$ ,  $U_{(31)}$  を用いて定義された  $\tilde{O}_{(23)}$ ,  $\tilde{O}_{(31)}$  についても  $O$  と同じ作用を持っている。これらはそれぞれ  $\mathcal{H}_{23}$ ,  $\mathcal{H}_{31}$  上に support を持った符号空間上の演算子である。このような符号空間上の演算子を logical operators と呼ぶ。すなわち、メッセージ系の演算子は、符号空間上の logical operators として複数の異なる support による表現方法を持っており、かつそれらの  $\mathcal{H}_{\text{code}}$  上の量子状態に対する作用は常に一致する。

$$\tilde{O}_{(12)} |\psi\rangle = \tilde{O}_{(23)} |\psi\rangle = \tilde{O}_{(31)} |\psi\rangle, \quad \forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}_{\text{code}}. \quad (6.3.13)$$

### 6.3.2 Bulk Reconstruction Theorem

量子誤り訂正符号における結果 (6.3.1) と式 (6.3.1) との間には、明らかな類似性を見出させる。この事実に基づいて、AdS/CFT 対応における holographic CFTs の Hilbert 空間のうち、古典的な bulk 上の量子状態として表せるものの集合およびその上の局所演算子は、量子誤り訂正符号に現れる code subspace と logical operators と同一の構造を持っているという主張が提案された [39]。AdS/CFT 対応の原理によれば、semiclassical な bulk 上の Hilbert 空間は等長写像によって holographic CFT の Hilbert 空間の部分集合に埋め込まれている (図 6.3.2)。

$$\mathcal{H}_{\text{bulk semiclassical}} \cong \mathcal{H}_{\text{code}} \subset \mathcal{H}_{\text{holographic CFT}}. \quad (6.3.14)$$



これは量子誤り訂正符号の言葉では、bulk における semiclassical な理論をメッセージ系、境界上の holographic CFTs を入力系と見做したことに相当する。

以上の発想に基づいて、entanglement wedge 上の局所演算子を対応する boundary の部分系上の演算子を用いて再構成できることの証明が行われた。すなわち、 $\mathcal{E}_A$  の Cauchy 面  $M_A$  に含まれる任意の演算子  $\hat{\phi}_{M_A}$  に対して、次の性質を満たす部分系  $A$  上の演算子  $\mathcal{O}_A$  が存在する。

$$\forall \hat{\phi}_{M_A}, \exists \mathcal{O}_A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \text{ s.t. } \hat{\phi}_{M_A} |\Phi\rangle = \mathcal{O}_A |\Phi\rangle, \forall |\Phi\rangle \in \mathcal{H}_{\text{code}}. \quad (6.3.15)$$

以下では Dong-Harlow-Wall らの方法 [41] に沿ってこの定理の証明を行う ([39] も参照のこと)。尚、以下の定理およびその証明は、AdS/CFT 対応に依拠しない、純粋に量子力学に関する議論である。これを AdS/CFT 対応の状況に適用することで、再構成定理 (6.3.15) の証明が得られる。

**定理 1.** 有限次元<sup>\*13</sup> Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  に関するテンソル積  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_{A^c}$  と、その部分空間  $\mathcal{H}_{\text{code}} \subset \mathcal{H}$  を考える。 $\mathcal{H}_{\text{code}}$  のテンソル積による表示  $\mathcal{H}_{\text{code}} = \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_{a^c}$  が、任意の量子状態  $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}_{\text{code}}$  に対して、次の性質

$$\rho_{a^c} = \sigma_{a^c} \Rightarrow \rho_{A^c} = \sigma_{A^c}, \quad (6.3.16)$$

を満たすと仮定する。ただし

$$\rho_{a^c} := \text{Tr}_a |\psi\rangle \langle \psi|, \sigma_{a^c} := \text{Tr}_a |\phi\rangle \langle \phi|, \quad (6.3.17)$$

$$\rho_{A^c} := \text{Tr}_A |\psi\rangle \langle \psi|, \sigma_{A^c} := \text{Tr}_A |\phi\rangle \langle \phi|, \quad (6.3.18)$$

と定義した。このとき、 $\mathcal{H}_a$  上の (すなわち、 $\mathcal{H}_a$  を *support* と *domain* に持ち、かつ  $O_a^\dagger$  も同様の性質を満たす) 任意の演算子  $O_a$  に対して、次の性質を満たす  $\mathcal{H}_A$  上の演算子  $O_A$  が存在する。

$$O_A |\eta\rangle = O_a |\eta\rangle, \forall |\eta\rangle \in \mathcal{H}_{\text{code}}. \quad (6.3.19)$$

*Proof.* 証明は  $O_A$  を実際に構成して行う。また証明は式 (6.3.25) の導出までと、その後の式 (6.3.27) の導出の2部に分かれている。後者に関する詳細は付録 (9.2.2) を参照。

対象となる演算子  $O_a$  は Hermitian であると仮定して一般性を失わないことに注意する。実際、任意の演算子  $X$  は2つの Hermitian 演算子  $X^+ = \frac{X+X^\dagger}{2}$ ,  $X^- = \frac{X-X^\dagger}{2i}$  の線形結合  $X = X^+ + iX^-$  によって表せるため、一般の演算子についてはそれぞれの部位に分解して以下と同様の議論を適用すればよい。

<sup>\*13</sup> 数学的な煩雑さを避けるため、以降の議論は有限次元 Hilbert 空間を仮定する。

任意の量子状態  $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_{\text{code}}$  に対して、 $\lambda$  を実数パラメータとして

$$|\psi\rangle := e^{i\lambda O_a} |\phi\rangle, \quad (6.3.20)$$

と定義する。演算子  $O_a$  が  $\mathcal{H}_a$  上で閉じているという仮定から、この状態に関して

$$\rho_{a^c} = \sigma_{a^c}, \quad (6.3.21)$$

が成り立つ。従って、仮定から

$$\rho_{A^c} = \sigma_{A^c}, \quad (6.3.22)$$

を得る。ここから任意の  $\mathcal{H}_{A^c}$  上の演算子  $X_{A^c}$  に対して

$$\begin{aligned} \langle \phi | X_{A^c} | \phi \rangle &= \text{Tr}_{\mathcal{H}} [|\phi\rangle \langle \phi| X_{A^c}] \\ &= \text{Tr}_{\mathcal{H}_{A^c}} [\sigma_{A^c} X_{A^c}] \\ &= \text{Tr}_{\mathcal{H}_{A^c}} [\rho_{A^c} X_{A^c}] \\ &= \langle \psi | X_{A^c} | \psi \rangle, \end{aligned} \quad (6.3.23)$$

が成り立つことが分かる。これを  $|\psi\rangle$  の定義において  $\lambda$  の1次まで展開すると、今は  $O_a^\dagger = O_a$  であるから、

$$0 = \langle \phi | X_{A^c} | \phi \rangle - \langle \phi | e^{-i\lambda O_a} X_{A^c} e^{i\lambda O_a} | \phi \rangle = i\lambda \langle \phi | [O_a, X_{A^c}] | \phi \rangle + O(\lambda^2), \quad (6.3.24)$$

となる。 $\lambda$  は任意であったから、結局

$$\langle \phi | [O_a, X_{A^c}] | \phi \rangle = 0, \quad (\forall |\phi\rangle \in \mathcal{H}_{\text{code}}, \forall X_{A^c} \text{ on } \mathcal{H}_{A^c}), \quad (6.3.25)$$

を得る。

ここで付録9.2.2の結果によって、式(6.3.25)は命題と同値であることが分かる。すなわち、 $\rho_A$  を  $\rho_A \equiv CC^\dagger$  と表したときの演算子  $C$  および  $\rho_A$  を可逆な領域に制限した演算子  $g := \rho_A|_{>0}$  によって

$$O_A := CO_a C^\dagger g^{-1}, \quad (6.3.26)$$

と  $O_A$  を定義すると、式(6.3.25)と合わせることで

$$O_A |\eta\rangle = O_a |\eta\rangle, \quad \forall |\eta\rangle \in \mathcal{H}_{\text{code}}, \quad (6.3.27)$$

が成り立つ。 □

この証明では、Hilbert 空間のテンソル積による分割  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_{A^c}$  に対して、 $\mathcal{H}_{\text{code}}$  が定理の仮定 (6.3.16) を満たすような“適切な”部分系  $a$  の選び方によって  $\mathcal{H}_{\text{code}} = \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_{a^c}$  と分割されていることが肝要である。この注意の下、この定理を AdS/CFT 対応の状況に適用すると、entanglement wedge による bulk の分割  $\mathcal{H}_{\text{code}} = \mathcal{H}_{M_A} \otimes \mathcal{H}_{M_A^c}$  は、相対エントロピーの双対性から誘導された結果 (6.2.2) によって、正にこの適切な選び方に相当することが分かる。従って、entanglement wedge  $\mathcal{E}_A$  上の局所演算子は、常に boundary の部分系  $A$  上の演算子として再構成が可能であることが言える。

この結果は、boundary の部分系の情報に対応する bulk の領域が entanglement wedge であることを、bulk reconstruction の観点から支持している。

## 第 7 章

# Holographic Entanglement of Purification

本章では、著者らの研究結果 [2] に基づいて、entanglement wedge に内在する幾何学量と、entanglement of purification と呼ばれる情報量の双対性に関して議論する。

前章までに見たように、AdS/CFT 対応におけるエンタングルメントエントロピーの双対性は、量子情報理論を用いたホログラフィー原理の解析に基礎的な役割を果たしている。ここで量子情報理論におけるエンタングルメントエントロピー  $S_A = -\text{Tr}_{\mathcal{H}_A} \rho_A \log \rho_A$  の操作論的な意味を考えると、これは全系  $A \cup A^c$  が純粋状態であるときに部分系  $A$  とその補集合  $A^c$  の間にある量子相関（量子もつれ）の大きさ、すなわち  $A$  と  $A^c$  の間に存在する EPR ペアの数を表している\*<sup>1</sup>。この視点と、ホログラフィックエンタングルメントエントロピーの結果に基づいて、AdS/CFT 対応における bulk の時空を量子もつれまたは “ebit” によって再構成する方法が活発に議論されている [12, 10, 11, 17, 136, 40, 13, 137, 14, 15, 16]。

ここで注意すべきは、エンタングルメントエントロピーが量子もつれの測度として意味を持つのは、全体系  $A \cup B (= A \cup A^c)$  が純粋状態のときに限るということである\*<sup>2</sup>。全体系が純粋状態にならない例には、有限温度状態  $\rho_{\text{th}}$  における  $A$  と  $A^c$  の相関や、場の理論における 2 つの部分系  $A, B (\neq A^c)$  の相関を考える場合などが含まれる。混合状態に対する古典相関や量子相関の測度は、

\*<sup>1</sup> このことは操作論的な議論を用いて数学的に定式化される。局所的な操作および古典通信 (local operations and classical communication, LOCC) のみを用いることで、1 つの  $|\Psi\rangle_{AA^c}$  あたり  $S_A$  個の EPR ペアを生産し、また逆変換を行うことが可能である。詳しくは [44] 等を参照。

\*<sup>2</sup> 任意の 2 つの量子系  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  上の量子状態  $\rho_{AB}$  に対して、 $A$  と  $B$  の間にある情報論的な相関を定量化する情報は 2 体相関測度 (bipartite correlation measures) と呼ばれる。良い性質を持った任意の相関測度は、純粋状態に対してはエンタングルメントエントロピーと本質的に一致することが知られている (uniqueness theorem of entanglement entropy) [71]。尚、純粋・混合状態の別に依らず、 $S_A$  は  $\rho_A$  に関する von Neumann エントロピーとして、時空のある部分領域  $A$  に含まれる自由度の多寡を測る情報量と見做することができる。この見方による  $S_A$  は geometric entropy と呼ばれており、ブラックホールエントロピーを一般の時空の部分領域に拡張したものとして自然に現れる [120]。

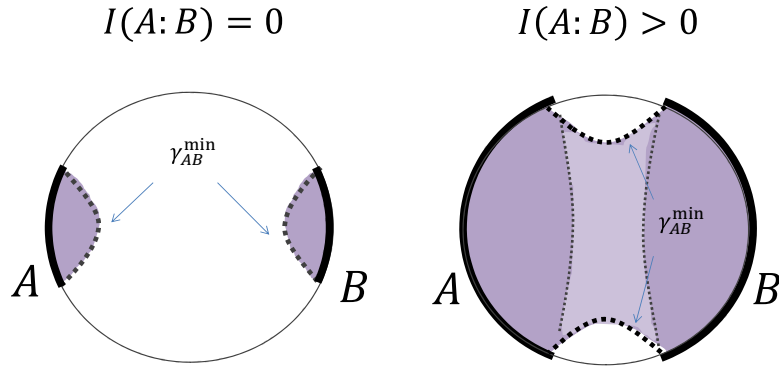


図 7.0.1 Boundary の部分系  $A \cup B$  に対応する 2 種類の entanglement wedge  $M_{AB}$ 。左は  $I(A : B) = 0$  の状況、右は  $I(A : B) > 0$  の状況を表す。 $M_{AB}$  の連結性は holographic CFTs における部分系  $A, B$  の相関の有無に対応している。

純粋状態におけるエンタングルメントエントロピーの拡張となるような形で、相互情報量を始めとして現在までに様々な情報量が提案されている ([45, 138, 44]、または付録 9.3 を参照)。しかし AdS/CFT 対応において、これらの混合状態の相関測度の (非自明な) 双対性については長らく知られていなかった\*3。

一方、第 6 章で見たように、holographic CFTs における量子状態  $\rho_{AB}$  の情報は、AdS 時空の entanglement wedge  $M_{AB}$  に全て含まれている\*4。従って、bulk における entanglement wedge  $M_{AB}$  の形状は、部分系  $A$  と  $B$  の間にある相関の情報を反映していることが期待される。

ここで例として、global AdS 時空において図 7.0.1 のような 2 つの disjoint な部分系  $A, B$  を取った場合の entanglement wedge  $M_{AB}$  を考える。このとき  $M_{AB}$  は 2 つの相を持つことに注意する。すなわち、 $I(A : B) = 0 \Leftrightarrow S_A + S_B = S_{AB}$  となる場合\*5 は、 $M_{AB}$  は 2 つの entanglement wedges

\*3 混合状態の相関測度のうち、相互情報量  $I(A : B) = S_A + S_B - S_{AB}$  はホログラフィックエンタングルメントエントロピーの線形結合として自明な双対を持っている。

\*4 以下では前章と同様に、codimension-0 の entanglement wedge  $\mathcal{E}_{AB}$  に対してある Cauchy 面を取った codimension-1 の空間領域を  $M_{AB}$  で表し、これを同様に entanglement wedge と呼ぶ。

\*5 本章の議論は全て leading order  $O(N^2)$  について行う。量子補正まで含めると、常に  $I(A : B) > 0$  となる (4.4 節参照)。

に decouple する ( $M_{AB} = M_A \cup M_B$ )。一方、 $I(A : B) > 0$  となる場合は、 $M_{AB}$  は bulk の内部を通過して boundary の  $A$  と  $B$  の間を橋状につなぎ合わせる。ここで相互情報量は総相関について faithful な相関測度 (式 3.3.25) であったことに注意すると、holographic CFTs では、 $M_{AB}$  が 2 つに decouple する場合は  $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$  と product state になり、 $M_{AB}$  が 2 つの boundary の領域を結び付けている場合は  $\rho_{AB} \neq \rho_A \otimes \rho_B$  となることが分かる。この事実から、 $M_{AB}$  の中間領域  $M_{AB} \setminus (M_A \cup M_B)$  (図 7.0.1 の薄い色の領域) の存在は、boundary における  $A$  と  $B$  の間の相関の情報を反映していることが期待できる。特に、これを情報理論における相関測度と結びつける上で顕著な幾何学量として、 $\gamma_{AB}^{\min}$  の間を繋ぐ codimension-2 曲面<sup>\*6</sup> の最小面積が考えられる。例えば  $B = A^c$  と置いた場合、この幾何学量はエンタングルメントエントロピーに帰着し、実際に  $A$  と  $B$  の相関を測ることが確認できる。

本章では、これらの観察に基づいて、まずは次節で entanglement wedge の最小断面積の一般的な定義を与え、その幾何学的な性質について述べる。次に entanglement of purification と呼ばれるエンタングルメントエントロピーを拡張した相関測度について、その情報論的な性質を詳しく見る。これらの一致に基づいて、この幾何学量が entanglement of purification の重力双対であることを提案する。またこの双対性に関して、tensor network の議論を援用した heuristic な証明について議論する。さらにこの双対性の帰結として、holographic CFTs における古典的な時空を双対に持つような量子状態 (すなわち、code subspaces の元) は、entanglement of purification が strong superadditivity と呼ばれる不等式を満たす特殊なクラスとして特徴付けられることを述べる。

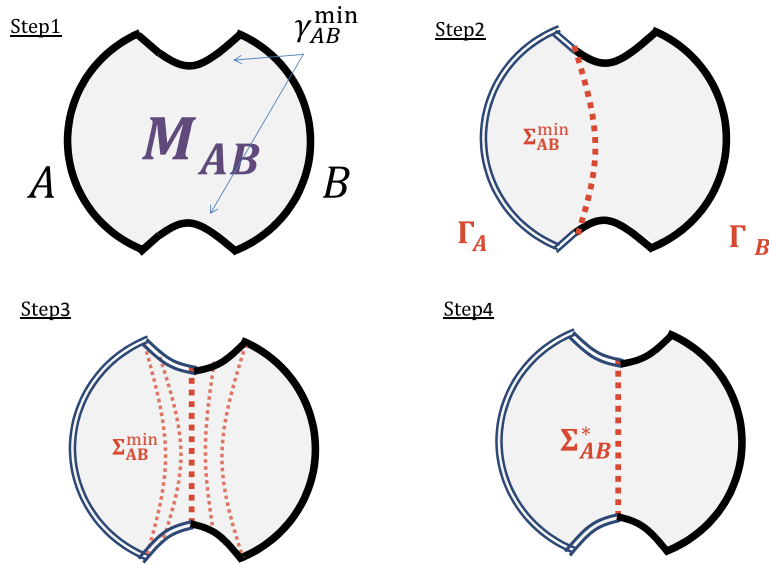
## 7.1 Entanglement wedge cross section

本節では、boundary の任意の 2 つの部分系  $A, B$  に対応する entanglement wedge  $M_{AB}$  に対して、その最小断面積を定義する。このとき  $A, B$  はそれぞれが非連結な成分から構成されていてもよい。また、この幾何学量が満たす様々な性質について調べ、それらの証明を与える。

### 7.1.1 Entanglement wedge cross section の定義

最初に静的な bulk の時空について考える。任意の entanglement wedge  $M_{AB}$  について、その境界  $\partial M_{AB}$  は、boundary の部分系  $A, B$  および部分系  $A \cup B$  に関する Ryu-Takayanagi 曲面  $\gamma_{AB}^{\min}$

<sup>\*6</sup>  $M_{AB}$  中の幾何学量  $\mathcal{G}$  がエンタングルメントエントロピーと同じ  $O(N^2)$  オーダーの情報量  $E$  と双対になることを仮定すると、次元解析  $E(A : B) \sim \frac{\mathcal{G}}{G_N}$  から、 $\mathcal{G}$  が codimension-2 の幾何学量であることが決まる。



0

 図 7.1.1 Entanglement wedge  $M_{AB}$  の最小断面積 (entanglement wedge cross section) の定義。

によって構成されている。

$$\partial M_{AB} = A \cup B \cup \gamma_{AB}^{\min}. \quad (7.1.1)$$

ここでまず  $\partial M_{AB}$  に対して、その分割  $\Gamma_A, \Gamma_B \subset \partial M_{AB}$  を

$$\Gamma_A \cup \Gamma_B = \partial M_{AB}, \Gamma_A \cap \Gamma_B = \emptyset, A \subset \Gamma_A, B \subset \Gamma_B, \quad (7.1.2)$$

を満たすように定義する。このとき定義から  $\partial \Gamma_A = \partial \Gamma_B$  である。次に  $\partial M_{AB}$  を “boundary” と見做して、部分系  $\Gamma_A$  に対する Ryu-Takayanagi 曲面を取り、それを  $\Sigma_{AB}^{\min}$  と置く。すなわち、 $\Sigma_{AB}^{\min}$  は条件

$$\partial \Sigma_{AB} = \partial \Gamma_A, \Sigma_{AB} \sim \Gamma_A, \quad (7.1.3)$$

を満たす codimension-2 の曲面  $\Sigma_{AB}$  のうち、その面積が最小のものである。ただし  $\sim$  はホモロジー条件を表す。この定義において、 $\Sigma_{AB}^{\min}$  は  $\partial M_{AB}$  の分割の仕方に依存することに注意する ( $\Sigma_{AB}^{\min} = \Sigma_{AB}^{\min}(\Gamma_A)$ )。そこでさらに、 $\partial M_{AB}$  の任意の分割  $\Gamma_A$  に対して最小化した  $\Sigma_{AB}^{\min}$  の面積 (を  $4G_N$  で割ったもの) を考え、これを entanglement wedge cross section として定義する [2] (図 7.1.1 参照)。

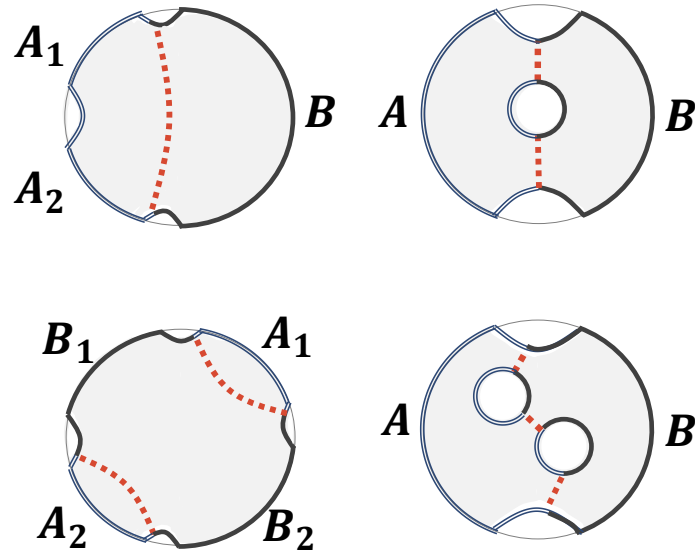


図 7.1.2 Entanglement wedge cross section  $E_W(A : B)$  を与える最小曲面  $\Sigma_{AB}^*$  の例。一般に部分系が disjoint な場合は  $A = A_1 \cup A_2$ ,  $B = B_1 \cup B_2$  等と見做して計算を行う。右の“穴”は AdS ブラックホール時空における事象の地平面を表す。

$$E_W(M_{AB}) := \min_{\Gamma_A} \frac{\mathcal{A}(\Sigma_{AB}^{\min}(\Gamma_A))}{4G_N} \quad (\equiv E_W(A : B)). \quad (7.1.4)$$

この幾何学量は、直感的には entanglement wedge  $M_{AB}$  の最小断面積を表している。 $E_W(A : B)$  の最小化を達成する  $\Sigma_{AB}^{\min}$  を  $\Sigma_{AB}^*$  で表す。いくつかの状況における  $\Sigma_{AB}^*$  の例を図 7.1.2 に載せた\*7。 $E_W(A : B)$  は常に 2 体系に対して定義されることに注意。図 7.1.2 の場合、例えば左下の状況では  $A = A_1 \cup A_2$ ,  $B = B_1 \cup B_2$  と見做して、 $\Sigma_{AB}^*$  の定義を行う。

$E_W(A : B)$  は  $M_{AB}$  を構成する時空のみを用いて純粋に幾何学的に定義される。一方、 $M_{AB}$  は subregion/subregion duality の元で holographic CFTs の量子状態  $\rho_{AB}$  と双対関係にあるため、 $E_W(A : B)$  を、boundary における部分系の量子状態  $\rho_{AB}$  に対して定義されていると見做せる。

$$E_W(M_{AB}) = E_W(\rho_{AB}), \quad M_{AB} \Leftrightarrow \rho_{AB}. \quad (7.1.5)$$

この事情は、純粋に幾何学的に定義されるホログラフィックエンタングルメントエントロピー (4.2.1 の右辺) を、bulk の時空を定める量子状態  $\rho_{\text{tot}}$  および holographic CFTs 上の部分系  $A$  に対

\*7 最小面積を与える  $\Sigma_{AB}^{\min}$  が複数ある場合は、 $\Sigma_{AB}^{\min}$  の取り方には任意性が残る。その場合も、 $E_W(A : B)$  の値は一意的に決まる。



して定義される量と見做せることと同様である。

静的であるとは限らない一般の時空に対する  $E_W$  は、上記の手続きにおける “minimal surface“ を “extremal surface“ に置き換えることで同様に定義される。すなわち、部分系  $A, B$  および HRT surface  $\gamma_{AB}^{\text{ext}}$  による境界  $\partial M_{AB} = A \cup B \cup \gamma_{AB}^{\text{ext}}$  を、まず  $\Gamma_A, \Gamma_B$  の2つへと分割して、条件 (7.1.3) を満たす極値曲面  $\Sigma_{AB}^{\text{ext}}(\Gamma_A)$  (複数ある場合は、その中で面積が最小のもの) を定義する。この面積を  $\Gamma_A$  の取り方に対して最小化することで、covariant な entanglement wedge cross section

$$E_W(M_{AB}) := \min_{\Gamma_A} \frac{\mathcal{A}(\Sigma_{AB}^{\text{ext}}(\Gamma_A))}{4G_N}. \quad (7.1.6)$$

が定義される。

以下では、 $E_W$  が満たす一般的な性質について調べる。

### 7.1.2 Entanglement wedge cross section の性質

(W0)  $E_W$  は常に非負である。

$$E_W \geq 0. \quad (7.1.7)$$

これは  $E_W$  がある曲面の面積として定義されていることから明らかである。

(W1)  $\rho_{AB}$  が純粋状態のとき  $E_W(A : B)$  はエンタングルメントエントロピーと一致する。

$$E_W(A : B) = S_A = S_B \text{ when } \rho_{AB} \text{ is pure.} \quad (7.1.8)$$

このことは、純粋状態に対応する  $M_{AB}$ <sup>\*8</sup> に関しては、 $\Sigma_{AB}^{\text{min}}$  が  $\gamma_A^{\text{min}} (= \gamma_B^{\text{min}})$  と一致することから分かる (図 7.1.3)。

(W2)  $E_W$  は product states に関して faithful である<sup>\*9</sup>。

$$E_W(A : B) = 0 \Leftrightarrow \rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B. \quad (7.1.9)$$

これは相互情報量の product states に関する faithfulness から従う (図 7.1.3)。

(W3)  $E_W(A : B)$  は  $S_A, S_B$  で上から制限される。

$$E_W(A : B) \leq \min\{S_A, S_B\}. \quad (7.1.10)$$

<sup>\*8</sup>  $M_{AB}$  が純粋状態に双対となるためには、任意の部分系  $A$  に対して  $S_A = S_{A^c}$  が必要である。このことから、 $M_{AB}$  は少なくともブラックホールや境界上の端を持っていないことが分かる。

<sup>\*9</sup> 相互情報量の場合と同様に、この性質も leading order  $O(N^2)$  のみで成り立つと考えられる。量子補正を取り入れると、 $\rho_{AB}$  は完全な product states にならず、 $A$  と  $B$  には  $O(N^0)$  の相関が残る。

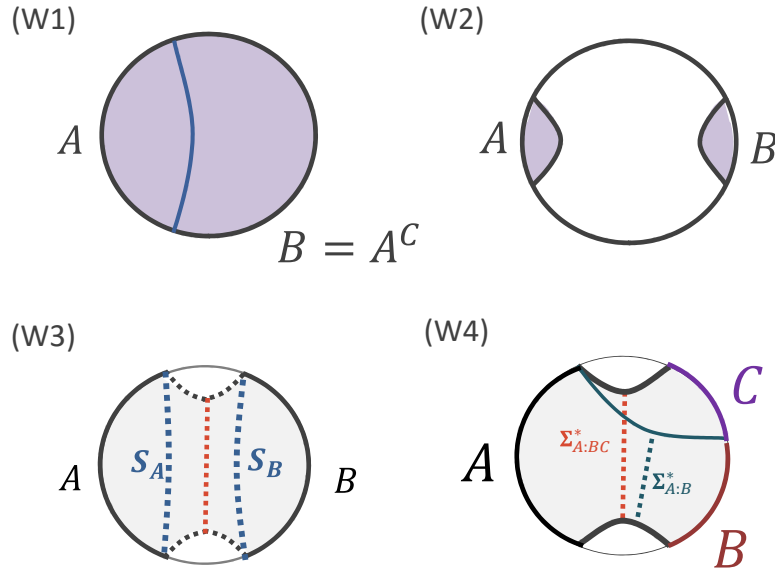


図 7.1.3 Entanglement wedge cross section の性質 (W1)-(W4)。

$S_A$  以下になることは、 $\Gamma_A$  に関する minimization の中に ( $\Gamma_A = A$  と置くことで)  $\Sigma_{AB}^{\min} = \gamma_A^{\min}$  となる場合が含まれることから従う。 $S_B$  についても同様 (図 7.1.3)。

(W4)  $E_W$  は部分系の縮小 (トレースアウト) に関して単調に減少する。

$$E_W(A : BC) \geq E_W(A : B). \quad (7.1.11)$$

これは entanglement wedge nesting と呼ばれる式 (6.2.7) の性質 [35]

$$X \subset Y \Rightarrow M_X \subset M_Y, \quad (7.1.12)$$

から従う (図 7.1.3)。

(W5)  $E_W$  は additivity を満たす。

$$E_W(\rho_{A_1 B_1} \otimes \sigma_{A_2 B_2}) = E_W(\rho_{A_1 B_1}) + E_W(\sigma_{A_2 B_2}). \quad (7.1.13)$$

ここで左辺は  $A = A_1 \cup A_2$ ,  $B = B_1 \cup B_2$  と見做したときの  $\Sigma_{AB}^*$  の面積、右辺の各項はそれぞれ  $\Sigma_{A_1 B_1}^*$ ,  $\Sigma_{A_2 B_2}^*$  の面積である。この等式は、(W2) によって  $M_{A_1 B_1}$  と  $M_{A_2 B_2}$  が decouple する結果、 $\Sigma_{AB}^* = \Sigma_{A_1 B_1}^* \cup \Sigma_{A_2 B_2}^*$  ( $\Sigma_{A_1 B_1}^* \cap \Sigma_{A_2 B_2}^* = \emptyset$ ) となることから分かる (図 7.1.4)。

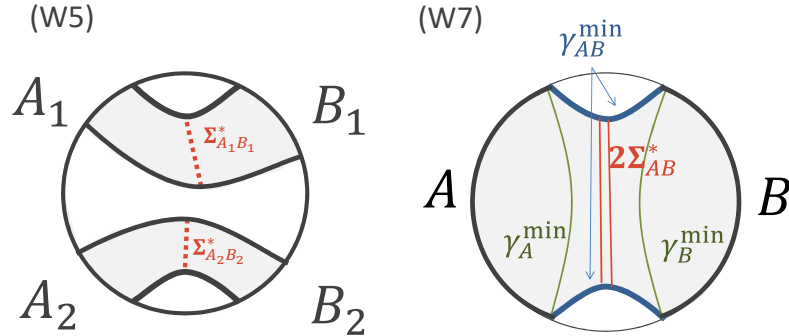


図 7.1.4 Entanglement wedge cross section の性質 (W5), (W7)。

(W6)  $E_W$  は strong superadditivity を満たす。

$$E_W(\rho_{A_1 A_2 B_1 B_2}) \geq E_W(\rho_{A_1 B_1}) + E_W(\rho_{A_2 B_2}). \quad (7.1.14)$$

この式と (W5) との違いは、 $A_1 B_1$  系と  $A_2 B_2$  系の間に関連の有無である。この効果は bulk の時空で  $M_{A_1 A_2 B_1 B_2} \neq M_{A_1 B_1} \cup M_{A_2 B_2}$  となって現れる、この不等式の一般的な状況における証明は、entanglement wedge nesting (7.1.12) および式 (6.2.8) から来る次の性質

$$X \cap Y = \emptyset \Rightarrow M_X \cap M_Y = \emptyset, \quad (7.1.15)$$

によって従う。例えば4つのそれぞれが連結な部分系  $A_1, A_2, B_1, B_2$  に関しては、図 7.1.5 のように3通りの配置が考えられる。この場合、上記の性質を用いるとそれぞれで式 (7.1.14) が成り立つことが確かめられる。特に3つめの配置に関しては、 $M_{A_1 B_1} \cap M_{A_2 B_2} = \emptyset$  の要請から、右辺の一方の  $E_W$  のみが非ゼロになることに注意。

(W7)  $E_W(A : B)$  は相互情報量  $I(A : B)$  の半分を下回らない\*10。

$$E_W(A : B) \geq \frac{I(A : B)}{2}. \quad (7.1.16)$$

\*10 この事実は、異なる文脈において [137] で最初に指摘された。

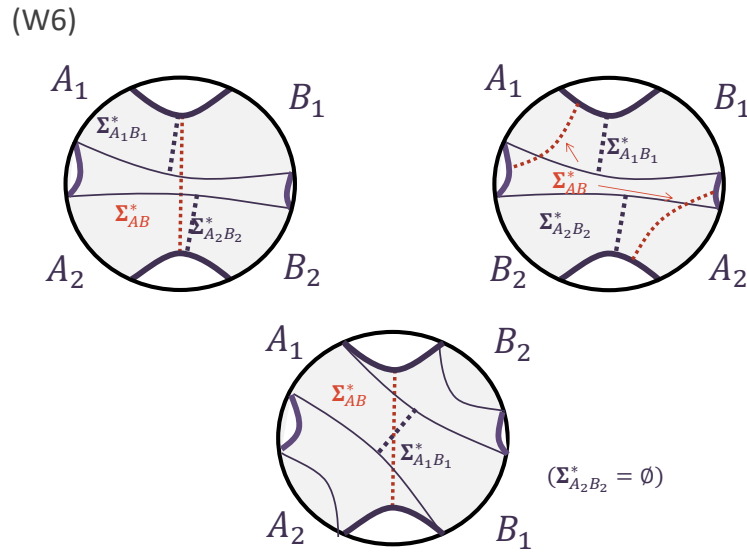


図 7.1.5 Entanglement wedge cross section の性質 (W6)。 $\Sigma_{AB}^*$  の定義に現れる最小性から、いずれの状況でも、それぞれの面積について  $\mathcal{A}(\Sigma_{A_1 A_2 B_1 B_2}^*) \geq \mathcal{A}(\Sigma_{A_1 B_1}^*) + \mathcal{A}(\Sigma_{A_2 B_2}^*)$  となることが明らかである。

これを示すには、式を少し変形して

$$2E_W(A : B) + S_{AB} \geq S_A + S_B, \quad (7.1.17)$$

と書き表した後、Ryu-Takayanagi 曲面  $\gamma_A^{\min}, \gamma_B^{\min}$  のそれぞれの最小性に注意すればよい (図 7.1.4)。

(W8) 相互情報量は、holographic CFTs では monogamy (式 (4.2.17))

$$I(A : BC) \geq I(A : B) + I(A : C), \quad (7.1.18)$$

を常に満たすことが知られている [28]。この性質は、一般の量子系の相互情報量では成り立つとは限らないことに注意。この式と (W7) を組み合わせると、次の不等式

$$E_W(A : BC) \geq \frac{I(A : B) + I(A : C)}{2}, \quad (7.1.19)$$

を得る。

(W9)  $I(A : B) = 0$  の phase transition point において、 $E_W(A : B)$  は  $O(N^2)$  の値からゼロへと離散的に変化 (ジャンプ) する。特に  $I(A : B)$  がゼロに近いとき、 $E_W(A : B) \geq I(A : B)$  とな

る<sup>\*11</sup>。

以上の性質は、covariant に拡張した  $E_W$  に関して [35] の方法を応用することで同様に証明できる。

### 7.1.3 Entanglement wedge cross section の例

以下では、 $E_W$  の具体的な表式を AdS<sub>3</sub>/CFT<sub>2</sub> 対応の下で導出する。

まずは最も単純な Poincaré AdS<sub>3</sub> 時空

$$ds^2 = R^2 \frac{dz^2 - dt^2 + dx^2}{z^2}, \quad (7.1.20)$$

について考える。任意の部分系  $A, B$  について、真空における 2 次元共形場理論の共形対称性を利用することで、これらを原点  $x = 0$  について対称な位置  $A = [-b, -a]$ ,  $B = [a, b]$  に取ることができる。この配置のとき、 $I(A : B) > 0$  となる場合の  $\gamma_{AB}^{\min}$  は、原点を中心にした半径  $a, b$  の 2 つの半円から成る (図 7.1.6)。このときは対称性から明らかに

$$E_W(A : B) = \frac{R}{4G_N} \int_a^b \frac{dz}{z} = \frac{c}{6} \log \frac{b}{a}, \quad (7.1.21)$$

を得る。一方、相互情報量は

$$I(A : B) = \frac{c}{6} \log \frac{(a-b)^2}{4ab} = \frac{c}{6} \log z \quad (z > 1), \quad (7.1.22)$$

で与えられる。ここで  $z$  は一般の部分系を  $A = [a_1, a_2]$ ,  $B = [b_1, b_2]$  と置いたときの cross ratio

$$z := \frac{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)}{(b_1 - a_2)(b_2 - a_1)} > 0, \quad (7.1.23)$$

である。 $z = 1$  は  $\gamma_{AB}^{\min}$  の相転移点であり、 $z < 1$  のときは  $I(A : B) = 0$  と読み替える<sup>\*12</sup>。部分系  $A, B$  の 4 つの端点によって決まる  $E_W$  は同様に cross ratio のみに依存するので、相互情報量から得られる関係式  $z = \frac{(a-b)^2}{4ab}$  を逆に解いて、 $E_W$  の一般形

$$E_W(A : B) = \frac{c}{6} \log[1 + 2z + 2\sqrt{z(z+1)}], \quad (7.1.24)$$

<sup>\*11</sup> 量子情報理論に現れるほとんどのエンタングルメント測度は  $E_{\#}(A : B) \leq I(A : B)$  を満たすため、この事実は、これらの相関測度について  $E_{\#} = E_W$  となることを禁止する。

<sup>\*12</sup> ここで用いる cross ratio は  $A, B$  を  $A = [0, z]$ ,  $B = [-\infty, -1]$  に map することに注意。2 つの部分系が離れる極限は  $z \rightarrow 0$  に、接触する極限は  $z \rightarrow \infty$  に対応する。

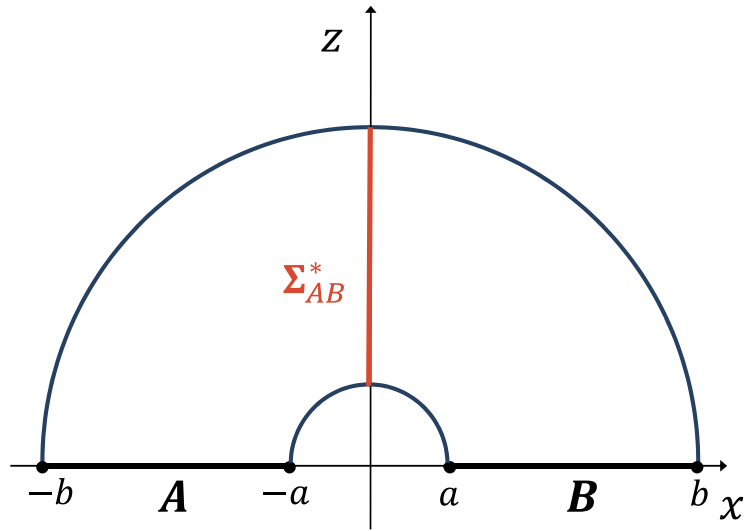


図 7.1.6 Poincaré AdS<sub>3</sub>/CFT<sub>2</sub> における  $E_W(A : B)$  の計算例。境界上の部分系  $A, B$  は  $x = 0$  に関して対称となるように配置されている。この場合、 $\Sigma_{AB}^*$  は対称性から明らかに  $x = 0$  軸上に存在する。

を得る。この表式から直接的に、(W4)  $E_W$  は部分系の縮小 ( $z$  の減少) に関して単調減少、(W7)  $E_W(A : B) \geq \frac{I(A:B)}{2}$ 、(W9)  $\lim_{z \rightarrow +1} E_W(A : B) = \frac{c}{6} \log[3 + 2\sqrt{2}] > 0$  が確かめられる。

次に global AdS<sub>3</sub> 時空

$$ds^2 = R^2(-\cosh^2 \rho d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\phi^2), \quad \phi \in [-\pi, \pi], \quad (7.1.25)$$

について考える。測地線の長さをこの時空において直接計算してもよいが、この場合は global AdS<sub>3</sub> 時空を座標変換によって局所的に Poincaré AdS<sub>3</sub> 時空へと写すと、先の結果から容易に一般式を得られる。Global AdS<sub>3</sub> と Poincaré AdS<sub>3</sub> の各座標系は、 $t = \tau = 0$  面上で

$$\begin{aligned} R \cosh \rho &= \frac{R^2}{2z} \left( 1 + \frac{x^2 + z^2}{R^2} \right), \\ R \sinh \rho \cos \phi &= \frac{R^2}{2z} \left( -1 + \frac{x^2 + z^2}{R^2} \right), \\ R \sinh \rho \sin \phi &= \frac{R}{z} x, \end{aligned} \quad (7.1.26)$$

と結び付いている（式 (2.2.11)）。特に境界上の部分系の位置は

$$x = \pm R \cot \frac{\phi}{2} \text{ at boundary,} \quad (7.1.27)$$

と対応している。ただし  $x = 0$  は  $\phi$  座標における  $\pm\pi$  に位置することに注意。これを用いると、部分系  $A, B$  の global AdS における  $\phi$  方向に関する位置を  $A = [\phi_{a_1}, \phi_{a_2}]$ ,  $B = [\phi_{b_1}, \phi_{b_2}]$  と表したとき、相互情報量は

$$\begin{aligned} I(A : B) &= \frac{c}{3} \log \left[ \frac{(\cot \frac{\phi_{b_2}}{2} - \cot \frac{\phi_{b_1}}{2})(\cot \frac{\phi_{a_2}}{2} - \cot \frac{\phi_{a_1}}{2})}{(\cot \frac{\phi_{b_1}}{2} - \cot \frac{\phi_{a_2}}{2})(\cot \frac{\phi_{b_2}}{2} - \cot \frac{\phi_{a_1}}{2})} \right] \\ &= \frac{c}{3} \log \left[ \frac{\sin(\frac{\phi_{b_2} - \phi_{b_1}}{2}) \sin(\frac{\phi_{a_2} - \phi_{a_1}}{2})}{\sin(\frac{\phi_{b_1} - \phi_{a_2}}{2}) \sin(\frac{\phi_{b_2} - \phi_{a_1}}{2})} \right] \\ &= \frac{c}{3} \log \left[ \frac{\sin(\frac{\pi(b_2 - b_1)}{L}) \sin(\frac{\pi(a_2 - a_1)}{L})}{\sin(\frac{\pi(b_1 - a_2)}{L}) \sin(\frac{\pi(b_2 - a_1)}{L})} \right] \\ &= \frac{c}{3} \log \tilde{z}, \end{aligned} \quad (7.1.28)$$

と計算できる。ただし  $\mathbb{R} \times S^1$  上の holographic CFT に関してシリンダーの周の長さを  $L$ 、部分系  $A, B$  の位置を  $A = [a_1, a_2]$ ,  $B = [b_1, b_2]$  と表した。また

$$\tilde{z} := \frac{\sin(\frac{\pi(b_2 - b_1)}{L}) \sin(\frac{\pi(a_2 - a_1)}{L})}{\sin(\frac{\pi(b_1 - a_2)}{L}) \sin(\frac{\pi(b_2 - a_1)}{L})}, \quad (7.1.29)$$

と定義した。同様にして、global AdS<sub>3</sub> における  $E_W$  の一般式

$$E_W(A : B) = \frac{c}{6} \log[1 + 2\tilde{z} + 2\sqrt{\tilde{z}(\tilde{z} + 1)}], \quad (7.1.30)$$

を得る。

ここで図 7.1.7 のような部分系  $A, B$  の対となる部分系  $\bar{A}, \bar{B}$  の entanglement wedge cross section  $E_W(\bar{A} : \bar{B})$  に関しては、部分系の取り替えによって

$$E_W(z^\perp) = E_W\left(\frac{1}{z}\right), \quad (7.1.31)$$

と表せることに注意する。ただしここで

$$z^\perp := \frac{(\bar{a}_2 - \bar{a}_1)(\bar{b}_2 - \bar{b}_1)}{(\bar{b}_1 - \bar{a}_2)(\bar{b}_2 - \bar{a}_1)} = \frac{(a_1 - b_2)(b_1 - a_2)}{(a_2 - a_1)(b_1 - b_2)} = \frac{1}{z}, \quad (7.1.32)$$

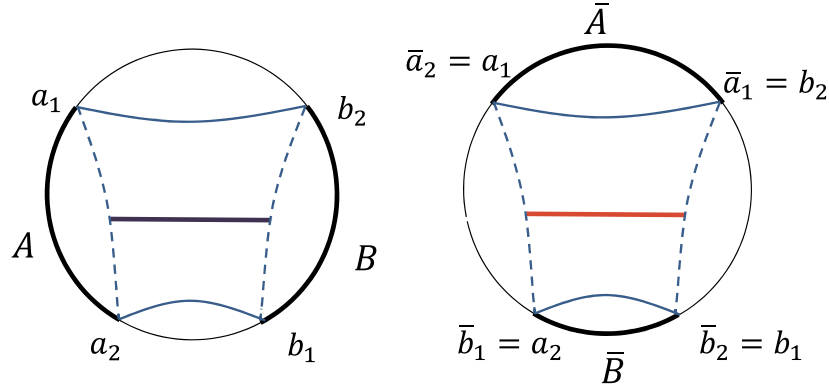


図 7.1.7 部分系  $A, B$  の対となる部分系  $\bar{A}, \bar{B}$  に関する  $E_W$ 。

である\*13。

最後に BTZ ブラックホール

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= -\frac{r^2 - r_H^2}{R^2} dt^2 + \frac{R^2}{r^2 - r_H^2} dr^2 + r^2 d\phi^2 \\
 &= R^2 \frac{-f(z) dt^2 + f^{-1}(z) dz^2 + R^2 d\phi^2}{z^2}, \quad f(z) = 1 - \frac{z^2}{z_H^2}, \quad \phi \simeq \phi + 2\pi, \quad (7.1.33)
 \end{aligned}$$

について  $E_W$  の一般形を求める\*14。この場合は、曲面  $\Sigma_{AB}^*$  に全部で4種類の相が存在しており、それぞれにおいて  $E_W$  の表式は異なる(図 7.1.8)。まず (a) の場合は明らかに  $I(A : B) = E_W(A : B) = 0$  である。次に  $\Sigma_{AB}^{\min}$  が事象の地平面に端点を持たない (b), (c) について、(b) の場合は第5章の議論と同様に BTZ ブラックホールから Poincaré AdS<sub>3</sub> 時空への map を利用することで

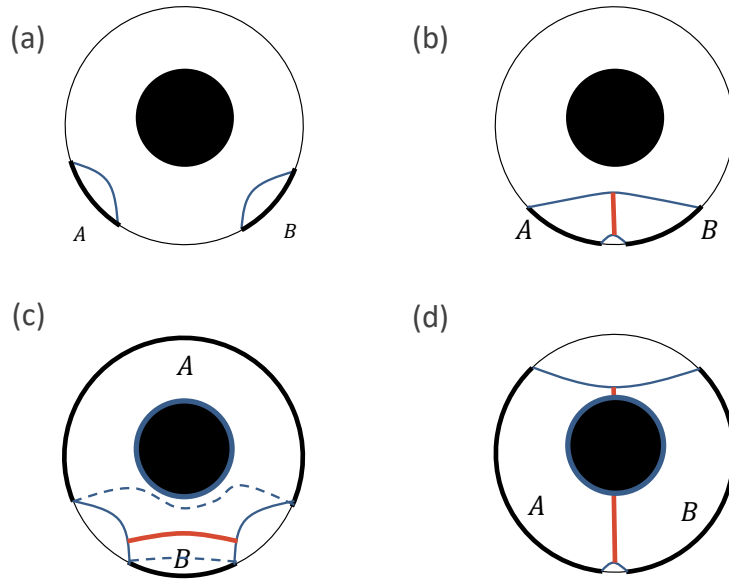
$$E_W(A : B) = \frac{c}{6} \log \left[ 1 + 2\zeta + 2\sqrt{\zeta(\zeta + 1)} \right], \quad (7.1.34)$$

を得る。ただし  $S^1$  の周期を  $L = 2\pi$  と置いたとき、 $A = [a_1, a_2]$ ,  $B = [b_1, b_2]$  および  $\beta = 2\pi z_H$  に

\*13 ここから entanglement wedge の性質 (7.1.15) の例として、entanglement wedge  $M_{AB}$  が connected である ( $I(A : B) > 0 \Leftrightarrow z > 1$ ) ことと、 $M_{\bar{A}\bar{B}}$  が disconnected である ( $I(\bar{A} : \bar{B}) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{z} < 1$ ) ことが同値であることが分かる。

\*14 ここで空間座標を  $x \equiv R\phi$ ,  $x \in (-\infty, \infty)$  と置けば planar BTZ に対応する。




 図 7.1.8 BTZ ブラックホール時空における  $\Sigma_{AB}^*$  の 4 種類の相。

対して

$$\zeta := \frac{\sinh\left(\frac{\pi(b_2-b_1)}{\beta}\right) \sinh\left(\frac{\pi(a_2-a_1)}{\beta}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi(b_1-a_2)}{\beta}\right) \sinh\left(\frac{\pi(b_2-a_1)}{\beta}\right)}, \quad (7.1.35)$$

である。またこのとき  $I(A:B) = \frac{c}{6} \log \zeta$  である。一方、部分系が十分大きい場合に現れる  $c$  に関しては、部分系の写りに注意して

$$E_W(A:B) = E_W(\zeta^\perp) = \frac{c}{6} \log \left[ 1 + \frac{2}{\zeta} + 2\sqrt{\frac{2}{\zeta} \left(\frac{2}{\zeta} + 1\right)} \right], \quad (7.1.36)$$

となる。最後に  $\Sigma_{AB}^{\min}$  が事象の地平面に端点を持つ (d) を考える。他方の端点に乗る最小曲面に関する部分系のサイズを  $l$  と置いたときに、turning point は  $z_* = z_H \tanh \frac{l}{2z_H}$  で与えられる。これを用いて

$$\frac{\mathcal{A}(\Sigma_{AB}^h(l))}{4G_N} = \frac{R}{4G_N} \int_{z_*}^{z_H} \frac{dz}{z\sqrt{f(z)}} = \frac{c}{6} \log \left[ \frac{2 \cosh^2\left(\frac{\pi l}{2\beta}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi l}{\beta}\right)} \right], \quad (7.1.37)$$

を得る。(d) の  $E_W(A:B)$  は、この一般式を用いて、2つの  $\Sigma_{AB}^h$  の和として表せる。

$E_W$  の値の変化 (a)  $\rightarrow$  (b)  $\rightarrow$  (d) および変化 (c)  $\rightarrow$  (d) をそれぞれ図 7.1.9、7.1.10に示した。

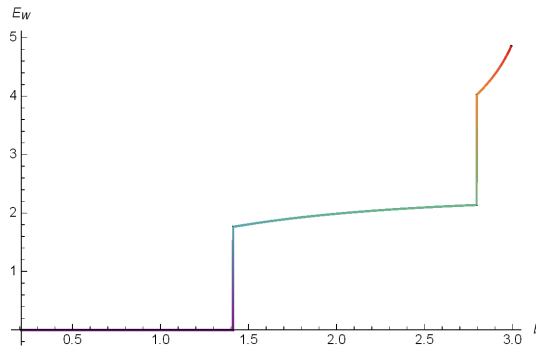


図 7.1.9  $E_W(A : B)$  の  $(a) \rightarrow (b) \rightarrow (d)$  の変化。  $L = \beta = 2\pi$ 、部分系を  $A = [-b, -a]$ ,  $B = [a, b]$ ,  $a = \pi/15$  と取って  $b$  の関数としてプロットした。

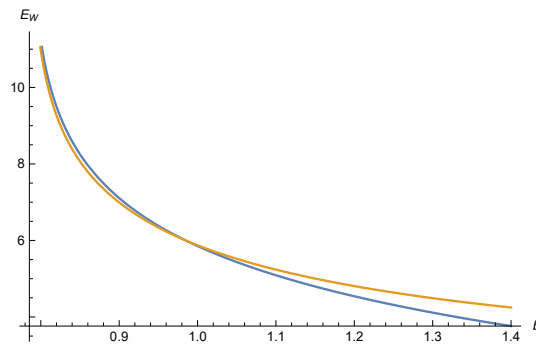


図 7.1.10  $E_W(A : B)$  の  $(c) \rightarrow (d)$  の変化。  $L = \beta = 2\pi$ 、部分系を  $A = [-a, a]$ ,  $B = [b, 2\pi - b]$ ,  $a = \pi/4$  と取って  $b$  の関数としてプロットした。黄色（青色）の線が  $(c)$  ( $(d)$ ) にそれぞれ対応する。

## 7.2 Entanglement of purification

本節では、量子情報理論における総相関測度の一つである entanglement of purification について解説する。この情報は [139] の中で定義された後、[140] において詳細な性質が調べられた。本節の内容は主にこれらの文献に依っている。

### 7.2.1 Purification

まずは準備として purification と呼ばれる量子状態を定義する。ある量子系  $\mathcal{H}_A$  上の任意の量子状態  $\rho_A$  に対して、補助系を加えた量子系  $\mathcal{H}_{AA'} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_{A'}$  上の純粋状態

$$|\Psi\rangle_{AA'} \in \mathcal{H}_{AA'}, \tag{7.2.1}$$

が次の性質を満たすとき、 $|\Psi\rangle_{AA'}$  を  $\rho_A$  の purification と呼ぶ。

$$\mathrm{Tr}_{A'} |\Psi\rangle\langle\Psi|_{AA'} = \rho_A. \quad (7.2.2)$$

任意の量子状態  $\rho_A$  に対して purification は常に存在する。例えば  $\rho_A$  を対角化して

$$\rho_A = \sum_i p_i |i\rangle\langle i|_A, \quad (7.2.3)$$

と表したとき、補助系として  $\mathcal{H}_A$  と同じものを持ってくると、次の量子状態

$$|\Psi^{\mathrm{TFD}}\rangle_{AA'} := \sum_i \sqrt{p_i} |i\rangle_A \otimes |i\rangle_{A'}, \quad (7.2.4)$$

は、 $\rho_A$  の1つの purification を与える<sup>\*15</sup>。このタイプの purification は、第2章において有限温度状態  $\rho_{\mathrm{th}}$  に対する  $|\mathrm{TFD}\rangle$  (式(2.4.28)) として既に現れていた。ある量子状態の purification は1つとは限らず、一般に無限個に存在する。例えば、上記の例において  $|\Psi^{\mathrm{TFD}}\rangle_{AA'}$  に  $\mathcal{H}_{A'}$  上のユニタリ演算子  $I_A \otimes U_{A'}$  を掛けた量子状態は、同様に  $\rho_A$  の purification である。実際、 $U_{A'}^\dagger U_{A'} = I_{A'}$  によって

$$\mathrm{Tr}_{A'} [(I_A \otimes U_{A'}) |\Psi^{\mathrm{TFD}}\rangle\langle\Psi^{\mathrm{TFD}}|_{AA'} (I_A \otimes U_{A'})^\dagger] = \mathrm{Tr}_{A'} [|\Psi^{\mathrm{TFD}}\rangle\langle\Psi^{\mathrm{TFD}}|_{AA'}] = \rho_A. \quad (7.2.5)$$

が成り立つ。また補助系の大きさに関しても、 $\dim\mathcal{H}_{A'} \geq \mathrm{rank}\rho_A$  を満たすものであれば任意に選べる。

尚、同様に次の性質

$$\mathrm{Tr}_{A'} \rho_{AA'} = \rho_A, \quad (7.2.6)$$

を満たす量子状態  $\rho_{AA'}$  を、 $\rho_A$  の extension と呼ぶ。すなわち、extension は purification の定義を  $\mathcal{H}_{AA'}$  上の量子状態が混合状態である場合まで拡張したものである。一般に、ある量子状態に対する extension も無数に存在する。

## 7.2.2 Entanglement of purification の定義

任意の量子系  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  上の量子状態  $\rho_{AB}$  に対して、entanglement of purification  $E_P(\rho_{AB})$  を次のように定義する<sup>\*16</sup>。まず  $\rho_{AB}$  の purification を一つ選び、これを  $|\Psi\rangle_{ABC'}$  と表す。次に補助

<sup>\*15</sup> このように、ある補助系を取ってきて対象となる混合状態  $\rho_A$  を大きな純粋状態の一部と見做すことを「 $\rho_A$  を純粋化する (purify  $\rho_A$ )」と呼ぶ。

<sup>\*16</sup> Entanglement of purification と “entanglement purification“ (エンタングルメント純粋化) は全くの別物である点に注意されたい。前者は本論文で議論する2体系の相関を測る情報量であり、後者は与えられた混合状態  $\rho_{AB}$  から

系  $\mathcal{H}_{C'}$  を、任意の2つの量子系  $A', B'$  のテンソル積に分割する。

$$\mathcal{H}_{C'} = \mathcal{H}_{A'} \otimes \mathcal{H}_{B'}.$$

このとき、 $|\Psi\rangle_{AA'BB'}$  に関するエンタングルメントエントロピー

$$S_{AA} = S(\rho_{AA'}), \quad \rho_{AA'} := \text{Tr}_{BB'} |\Psi\rangle\langle\Psi|_{AA'BB'}, \quad (7.2.7)$$

を考えると、これは部分系  $AA'$  と  $BB'$  の間の (量子) 相関の大きさを与えている。尚、 $AA'BB'$  の純粋性から  $S_{AA'} = S_{BB'}$  となることに注意する。これらの手続きにおいて、(1)  $\rho_{AB}$  の purification  $|\Psi\rangle_{ABC'}$  の選び方 (2)  $C' = A' \cup B'$  の分割の仕方、の両方に関して  $S_{AA'}$  を最小化する。この結果を entanglement of purification  $E_P(\rho_{AB})$  として定義する。

$$E_P(\rho_{AB}) := \min_{\rho_{AB} = \text{Tr}_{A'B'} |\Psi\rangle\langle\Psi|_{AA'BB'}} S_{AA'} (\equiv E_P(A : B)). \quad (7.2.8)$$

この最小化を達成する  $|\Psi\rangle_{AA'BB'}$  を  $|\Psi^*\rangle_{AA'BB'}$  と表す。 $|\Psi^*\rangle_{AA'BB'}$  は一般に複数存在するが、その場合も  $E_P(A : B)$  の値は一意的に決まる。有限次元系の場合は、Hilbert 空間  $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B$  の次元をそれぞれ  $d_A, d_B$  と表したときに、 $E_P$  の最小化は補助系の次元を大きくとも  $d_{A'}, d_{B'} \leq \text{rank} \rho_{AB} \leq d_{AB}$  と取ることによって達成できることが知られている [141]。

Entanglement of purification  $E_P$  は量子系  $AA'$  と  $BB'$  の量子もつれを用いて定義されているが、対象となる量子系  $A$  と  $B$  の量子もつれの測度ではないことに注意する<sup>\*17</sup>。すなわち、 $E_P$  は量子もつれによる量子相関および量子状態の確率混合による古典相関の両方を測定する総相関測度の一つである。実際、例えば次のような separable states

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2} (|0\rangle\langle 0|_A \otimes |0\rangle\langle 0|_B + |1\rangle\langle 1|_A \otimes |1\rangle\langle 1|_B), \quad (7.2.9)$$

はその定義から  $A$  と  $B$  の間に量子もつれを含んでいないが、この場合でも  $E_P > 0$  となる。この点や以下で述べる各種の性質において、 $E_P$  は相互情報量  $I$  に類似した情報量である (3.3.3節参照)。

EPR pair を取り出すためのプロトコル (またの名を entanglement distillation、エンタングルメント蒸留) である。

<sup>\*17</sup> 混合状態に対する相関測度のうち、量子相関 (厳密には、特に量子もつれに由来する量子相関) のみを測る情報量はエンタングルメント測度と呼ばれる。 $E_P$  はエンタングルメント測度ではない。

## 7.2.3 Entanglement of purification の性質

(P0)  $E_P$  は常に非負である<sup>\*18</sup>。

$$E_P \geq 0. \quad (7.2.10)$$

これはエンタングルメントエントロピーの非負性から明らかである。

(P1)  $AB$  が純粋状態  $\rho_{AB} = |\psi\rangle_{AB}$  のとき、 $E_P(A : B)$  はエンタングルメントエントロピーと一致する。

$$E_P(A : B) = S_A = S_B \text{ when } \rho_{AB} \text{ is pure.} \quad (7.2.11)$$

これを示すには、まず  $|\psi\rangle_{AB}$  はそれ自体が  $|\psi\rangle_{AB}$  の一つの purification であることに注意する ( $A' = B' = \emptyset$ )。これが  $E_P$  の定義に現れる最小値を達成することを見るために、純粋状態  $|\psi\rangle_{AB}$  およびその任意の extension  $\rho_{ABC}$ , ( $\text{Tr}_C \rho_{ABC} = |\psi\rangle_{AB}$ ) に対しては一般に

$$I(AB : C) = 0, \text{ when } \rho_{AB} \text{ is pure,} \quad (7.2.12)$$

が成り立つことに注意する。実際、 $\rho_{ABC}$  に対する purification  $|\Psi\rangle_{ABCD}$  を考えると、相互情報量の性質 (I3) から

$$I(AB : C) \leq I(AB : CD) = S_{AB} + S_{DC} = 2S_{AB} = 0, \quad (7.2.13)$$

と示せる。従って、 $|\psi\rangle_{AB}$  の任意の purification は、 $|\Psi\rangle_{AA'BB'} = |\psi\rangle_{AB} \otimes |\psi'\rangle_{A'B'}$  と常に decouple している。これと von Neumann エントロピーの加法性を合わせると、非自明な purification は常に  $AA'$  と  $BB'$  の間の相関を増大させることが分かる。よって  $E_P(A : B) = S_A = S_B$  を得る。

(P2)  $E_P$  は product states に関して faithful である。

$$E_P(A : B) = 0 \Leftrightarrow \rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B. \quad (7.2.14)$$

これを順に示そう。まず  $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$  であるときは、それぞれの系  $A, B$  の独立な任意の purification ( $|\psi\rangle_{AA'}$ ,  $|\psi\rangle_{BB'}$ ) を考えて、 $|\Psi\rangle_{AA'BB'} = |\psi\rangle_{AA'} \otimes |\psi\rangle_{BB'}$  と取ることで  $E_P(A : B) = 0$  を得る。逆に関しては、後に述べる相互情報量に対する不等式 (P7) および相互情報量の faithfulness から、

$$E_P(A : B) = 0 \Rightarrow I(A : B) = 0 \Rightarrow \rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B, \quad (7.2.15)$$

<sup>\*18</sup> 量子情報理論に現れる情報量の中には、負の値を取り得るものもある。例えば quantum conditional entropy  $S(A|B) = S_{AB} - S_B$  や tripartite mutual information  $I_3(A : B : C) = S_A + S_B + S_C - S_{AB} - S_{BC} - S_{CA} + S_{ABC}$  はその代表例である。

と従う。

(P3)  $E_P(A : B)$  は  $S_A, S_B$  で上から制限される。

$$E_P(A : B) \leq \min\{S_A, S_B\}. \quad (7.2.16)$$

このことは  $AB$  系の任意の purification に対して、補助系を  $\tilde{A} = \emptyset$  ( $\tilde{B} = \emptyset$ ) となるように分割することで、式 (7.2.8) の右辺を少なくとも  $S_A$  ( $S_B$ ) までは minimize できることから従う。

(P4)  $E_P$  は部分系の縮小 (トレースアウト) に関して単調に減少する。

$$E_P(A : BC) \geq E_P(A : B). \quad (7.2.17)$$

これは  $E_P(A : BC)$  の最小化に現れる purifications が、 $E_P(A : B)$  の最小化に現れる purifications に全て含まれていることから分かる。

(P5)  $E_P$  は一般に subadditivity を満たす [140]。

$$E_P(\rho_{A_1 B_1} \otimes \sigma_{A_2 B_2}) \leq E_P(\rho_{A_1 B_1}) + E_P(\sigma_{A_2 B_2}). \quad (7.2.18)$$

特に、 $\rho_{A_1 B_1} \otimes \rho_{A_2 B_2}$  の最適な purification  $|\Psi^*\rangle_{A_1 A_2 A' B_1 B_2 B'}$  が、 $\rho_{A_1 B_1}$  および  $\rho_{A_2 B_2}$  の最適な purifications のテンソル積 (ユニタリ同値な形) で書ける

$$|\Psi^*\rangle_{A_1 A_2 A' B_1 B_2 B'} = |\Psi_1^*\rangle_{A_1 A' B_1 B''} \otimes |\Psi_2^*\rangle_{A_2 A''' B_2 B'''}, \quad (7.2.19)$$

とき、またそのときに限って  $E_P$  は additivity

$$E_P(\rho_{A_1 B_1} \otimes \sigma_{A_2 B_2}) = E_P(\rho_{A_1 B_1}) + E_P(\sigma_{A_2 B_2}), \quad (7.2.20)$$

を満たす。ここで左辺は、 $A = A_1 \cup A_2$ ,  $B = B_1 \cup B_2$  における  $A, B$  間の相関、右辺はそれぞれ  $A_1, B_1$  間および  $A_2, B_2$  間の相関を測っている。

(P6) 一般の量子系に対しては、 $E_P$  は strong superadditivity を満たさないことが数値計算の結果から示されている [142]。ただしこの結果は strong superadditivity を満たす量子系の存在を否定しないことに注意。

(P7)  $E_P(A : B)$  は相互情報量  $I(A : B)$  の半分を下回らない。

$$E_P(A : B) \geq \frac{I(A : B)}{2}. \quad (7.2.21)$$

これは2つの総相関測度  $E_P$  と  $I$  の関係性を与える不等式である。これを見るために、まず  $E_P(A :$

$B$  の最小化を達成する補助系を  $A', B'$  と置くと、 $E_P(A : B) = S_{AA'} = S_{BB'} (= \frac{I(AA':BB')}{2})$  が成り立つことに注意する。この4体系に、付録(9.2.3)の conditional entropy の joint subadditivity

$$S(AB|CD) \leq S(A|C) + S(B|D), \quad (7.2.22)$$

を適用すると、

$$\begin{aligned} S(A'B'|AB) &\leq S(A'|A) + S(B'|B) \\ \Rightarrow S_{AA'BB'} - S_{AB} &\leq S_{AA'} - S_A + S_{BB'} - S_B \\ \Rightarrow S_A + S_B - S_{AB} &\leq S_{AA'} + S_{BB'} \\ \Rightarrow I(A : B) &\leq 2E_P(A : B), \end{aligned} \quad (7.2.23)$$

となり、式(7.2.21)を得る。

(P8)  $E_P(A : BC)$  は次の不等式を満たす。

$$E_P(A : BC) \geq \frac{I(A : B) + I(A : C)}{2}. \quad (7.2.24)$$

これを見るために、まず全体系  $ABC$  が純粋状態であるときは、相互情報量に関して

$$\begin{aligned} I(A : BC) &= 2S_A \\ &= S_A + S_A + (S_B - S_{AC}) + (S_C - S_{AB}) \\ &= I(A : B) + I(A : C), \end{aligned} \quad (7.2.25)$$

が成り立つことに注意する。これを  $E_P(A : BC)$  の最小化を達成する purification  $AA'BCD'$  に適用すると

$$\begin{aligned} E_P(A : BC) &= \frac{I(AA' : BCD')}{2} \\ &= \frac{I(AA' : B) + I(AA' : CD')}{2} \\ &\geq \frac{I(A : B) + I(A : C)}{2}, \end{aligned} \quad (7.2.26)$$

を得る。ただし最終行で相互情報量の単調性(3.3.28)を用いた。

(P9)  $E_P(A : B)$  は相互情報量  $I(A : B)$  によって上から制限されない\*19。この事実は、 $E_P$  が

---

\*19 量子相関を測る情報量の多くは、 $I(A : B)$  (または  $I(A : B)/2$ ) によって上から制限される

$$E_{\#} \leq I(A : B), \quad (7.2.27)$$

ことが知られている。

entanglement of formation  $E_F$  よりも常に大きい [139] ことと、 $E_F$  が相互情報量を超える場合があることから従う。

## 7.2.4 Entanglement of purification の例

Entanglement of purification  $E_P$  は、その定義に“任意の purifications”に関する最適化を含んでいる。この事情は、低次元の Hilbert 空間においてさえ  $E_P$  の解析解の導出を困難にする。ここでは原論文 [139] で行われた数値計算の例を簡単に紹介する。他の数値計算の例は [142, 143, 144] を参照。

量子系  $A, B$  を 2 準位系とする。Bell states<sup>\*20</sup>

$$|\psi_0\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle_{AB} + |11\rangle_{AB}), \quad (7.2.28)$$

$$|\psi_1\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle_{AB} - |11\rangle_{AB}), \quad (7.2.29)$$

$$|\psi_2\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle_{AB} + |10\rangle_{AB}), \quad (7.2.30)$$

$$|\psi_3\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle_{AB} - |01\rangle_{AB}), \quad (7.2.31)$$

を用いて、量子状態  $\rho_{AB}$  を次のように定義する。

$$\rho_{AB} = e|\psi_0\rangle\langle\psi_0|_{AB} + \frac{1-e}{3} \sum_{i=1}^3 |\psi_i\rangle\langle\psi_i|_{AB}. \quad (7.2.32)$$

ここで  $e$  は  $[0, 1]$  に含まれる任意の実数である。この  $\rho_{AB}$  に対する  $E_P$  を考える。 $\rho_{AB}$  の purification としては、例えば |TFD> 型の

$$|\Psi^{\text{TFD}}\rangle_{AA'BB'} = \sqrt{e}|\psi_0\rangle_{AB}|\psi_0\rangle_{A'B'} + \sqrt{\frac{1-e}{3}} \sum_{i=1}^3 |\psi_i\rangle_{AB}|\psi_i\rangle_{A'B'}, \quad (7.2.33)$$

が存在する。この purification に対する  $AA'$  と  $BB'$  の間のエンタングルメントエントロピーを求め

<sup>\*20</sup> これらは  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  上の最大エンタングルメント状態 (EPR pairs) であり、2 準位系の  $|0\rangle, |1\rangle$  を qubit と呼ぶことに準えて“ebit”と呼ばれることがある。



るには、まずテンソル積の表示を

$$\begin{aligned} |\Psi^{\text{TFD}}\rangle_{AA'BB'} &= \alpha(|00\rangle_{AA'}|00\rangle_{BB'} + |11\rangle_{AA'}|11\rangle_{BB'}) \\ &\quad + \beta(|01\rangle_{AA'}|01\rangle_{BB'} + |10\rangle_{AA'}|10\rangle_{BB'}) \\ &\quad + \gamma(|00\rangle_{AA'}|11\rangle_{BB'} + |11\rangle_{AA'}|00\rangle_{BB'}), \end{aligned} \quad (7.2.34)$$

$$\alpha := \frac{\sqrt{e}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-e}{3}}, \quad \beta := \frac{\sqrt{e}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-e}{3}}, \quad \gamma := \sqrt{\frac{1-e}{3}}, \quad (7.2.35)$$

と組み直す。この表式から  $\rho_{AA'}$  の固有値を求めると、これは1つの  $(\alpha + \gamma)^2$  と3つの  $\beta^2$  で与えられることが分かる。従って、この purification に対するエンタングルメントエントロピー  $S_{AA'}^{\text{TFD}}$  は

$$\begin{aligned} S_{AA'}^{\text{TFD}} &= -\left(\frac{\sqrt{e}}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1-e}{3}}\right)^2 \log\left(\frac{\sqrt{e}}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1-e}{3}}\right)^2 \\ &\quad - 3\left(\frac{\sqrt{e}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-e}{3}}\right)^2 \log\left(\frac{\sqrt{e}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-e}{3}}\right)^2, \end{aligned} \quad (7.2.36)$$

となる。

この結果からは、 $E_P$  に関する上限

$$E_P(A : B) \leq S_{AA'}^{\text{TFD}}, \quad (7.2.37)$$

が分かる。 $|\Psi^{\text{TFD}}\rangle_{AA'BB'}$  は  $\rho_{AB}$  に対する purification の一つであり、 $E_P(A : B)$  の最小化を達成するとは限らないことに注意。実際、数値的な結果から、 $|\Psi^{\text{TFD}}\rangle_{AA'BB'}$  が最小化を達成するのは  $e \in (0.005, 0.25)$  の範囲であることが確認されている [139]。

$\rho_{AB}$  に対する任意の purifications は、基準となる一つの purification を用意して、そこに  $\mathcal{H}_{A'B'}$  上の任意のユニタリ写像を掛けることで生成できる。例えば  $d_{A'B'} = 4$  となる補助系に関しては、 $|\Psi^{\text{TFD}}\rangle_{AA'BB'}$  を基準状態として用いて

$$|\Psi(U)\rangle_{AA'BB'} := I_{AB} \otimes U_{A'B'} |\Psi^{\text{TFD}}\rangle_{AA'BB'}, \quad (7.2.38)$$

と置くことで、 $\rho_{AB}$  の新たな purification を得る。これらのエンタングルメントエントロピー  $S_{AA'}$  を計算して、様々な  $U_{A'B'}$  に関して最小化することで、 $E_P$  に対する改善された上限を得る。しかし、この例のように  $d_{A'B'} = d_{AB}$  と取った “minimal” な purification が、 $E_P$  の最適化において十分であるとは限らない。実際、数値的な結果から、上記の例の  $\rho_{AB}$  のうち  $e \in (0.69, 1)$  の範囲の量子状態に関しては、 $d_{A'B'} = 6$  と置いた場合が  $d_{A'B'} = 4$  の場合よりも小さな  $E_P$  の上限を与えることが分かっている。尚、先述のように、 $E_P$  の最小化の達成には、最大でも  $d_{A'B'} = d_{AB}^3$  と取れば

十分であるから、この例の場合は補助系として最大で8つの2準位系を用意すれば十分である。

尚、 $e = \frac{1}{4}$  と置いたときの量子状態は完全に無相関  $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$  である。このとき確かに  $|\Psi\rangle_{AA'BB'}$  は  $AA'$  と  $BB'$  の product state に分解し、 $E_P = 0$  を与えることが分かる。これは (P2) の状況の具体例を与える。また (P3) に相当する purification については、 $|\Psi^{\text{TFD}}\rangle_{AA'BB'}$  において  $A'B'$  の分割を  $A' = \emptyset$  となるように選んで

$$|\tilde{\Psi}^{\text{TFD}}\rangle_{AA'BB'} = \sqrt{e} |\psi_0\rangle_{AB} |\psi_0\rangle_{B'B'} + \sqrt{\frac{1-e}{3}} \sum_{i=1}^3 |\psi_i\rangle_{AB} |\psi_i\rangle_{B'B'}, \quad (7.2.39)$$

を考えれば良い。このとき確かに  $S_{AA'} = S_A$  である。

### 7.3 Proposal

以上で述べた  $E_W$  と  $E_P$  の類似性に基づいて、著者らはこれらが AdS/CFT 対応の下で双対関係にあることを提案した\*21。

$$E_W(A : B) = E_P(A : B). \quad (7.3.1)$$

ここで  $E_W$  と  $E_P$  の性質のうち、(W0)-(W4), (W7)-(W9) および (P0)-(P4), (P7)-(P9) に関しては、それぞれ明らかに一致している。性質 (W5) の加法性に関しては、entanglement wedge が分離しているとき、全体の  $\Sigma_{AB}^*$  はそれぞれの entanglement wedges で独立に求めた  $\Sigma_{A_1B_1}^*$ ,  $\Sigma_{A_2B_2}^*$  の和集合で与えられるため、これは (P5) における  $E_P$  の加法性の成立条件と整合している。性質 (W6) の strong superadditivity は、 $E_P$  が一般に満たすとは限らない非自明な性質である。これは holographic CFTs に関して、 $E_P$  を用いた新たな特徴付けを予想する (7.4.1節参照)。

尚、式 (7.3.1) は  $O(N^2)$  における双対性である。高次のオーダーに関しては、ホログラフィックエンタングルメントエントロピーの量子補正 ((4.4) 節参照) と類似の機構で、 $E_W$  に量子補正が現れることが予想される。

#### 7.3.1 Heuristic な証明

以下では、AdS/CFT 対応の tensor network による記述を用いることで、予想 (7.3.1) の heuristic な証明を与える。この洞察は、特に holographic CFTs において  $E_P$  を計算する際に、その方法の指針となることが期待される。

\*21 [2] の後に、同様の提案が [143] によって独立に与えられた。また、この予想の拡張について [145] の議論も参照。

まずは準備として、purification を重力側で見た場合に、それがどのような時空となり得るかについて考察しよう。Holographic CFTs の量子状態を  $\rho_{AB}$ 、AdS 時空の entanglement wedge を  $M_{AB}$  と置く。ある純粋状態  $|\psi\rangle_{ABC}$  が  $\rho_{AB}$  の purification であるとは、条件

$$\text{Tr}_C |\psi\rangle \langle \psi|_{ABC} = \rho_{AB}, \quad (7.3.2)$$

を満たすことであった。また純粋状態の仮定からは、任意の  $X \subset ABC$  に対して

$$S_X = S_{X^c}, \quad (X^c = ABC \setminus X), \quad (7.3.3)$$

が必要である。ここで仮に  $|\psi\rangle_{ABC}$  が双対な時空  $M_{ABC}$  を持つとした場合、 $M_{ABC}$  は、式 (7.3.2) および subregion/subregion duality の性質から

$$M_{AB} \subset M_{ABC}, \quad \gamma_{AB}^{\min}(M_{AB}) = \gamma_{AB}^{\min}(M_{ABC}), \quad (7.3.4)$$

を満たすことが要請される。すなわち、 $\rho_{ABC}$  が  $\rho_{AB}$  の情報を含んでいることに対応して、entanglement wedge  $M_{ABC}$  も  $M_{AB}$  を含んでいなければならない、さらにトレースアウトによって補助系  $\mathcal{H}_C$  の情報を消したときに  $\rho_{ABC}$  は  $\rho_{AB}$  に戻ることからは、 $M_{ABC} \setminus M_C = M_{AB}$  が必要である\*<sup>22</sup>。また式 (7.3.3) からは、 $M_{ABC}$  のトポロジーが自明であること（すなわち、ブラックホールのような欠陥や境界  $\partial M_{ABC}$  に端が無いこと）が要請される。これらの条件を満たす  $M_{ABC}$  の自明な例としては、 $(AB)^c$  をトレースアウトする前の純粋状態に対応する AdS 時空が挙げられる。以上の議論において、 $|\psi\rangle_{ABC}$  は所期の holographic CFTs の Hilbert 空間に一般には含まれていないことに注意する。

以上の議論から、上記の条件を満たす中のあるクラスの時空  $M_{ABC}$  は、境界  $\partial M_{ABC}$  上に定義されたある場の理論に含まれる purification  $|\psi\rangle_{ABC}$  と双対になっていることが期待される\*<sup>23</sup>。Boundary の場の理論は、 $M_{AB}$  では  $A \cup B$  上のみで定義されている一方、 $M_{ABC}$  ではその全体  $\partial M_{ABC}$  上で定義される点に注意。

ここでは、これを実現する一つの方法として、tensor network における AdS/CFT 対応の記述を用いた方法を議論する。Bulk の AdS 空間を tensor network として表現する発想は最初に [12] で提案された。それ以降この方法は様々な角度から検証されている。特に [136] では、bulk の空間内にお

\*<sup>22</sup> 例えば、boundary の  $A$  と  $B$  を非常に短い距離で結ぶ時空を  $M_{AB}$  に付加して  $M_{ABC}$  を作ると、 $M_{ABC}$  における RT surface  $\gamma_{AB}^{\min}(M_{ABC})$  は、一般に元の曲面  $\gamma_{AB}^{\min}(M_{AB})$  と異なる可能性がある。この場合、 $\gamma_C^{\min}(M_{ABC}) = \gamma_{AB}^{\min}(M_{ABC}) \neq \gamma_{AB}^{\min}(M_{AB})$  となり、トレースアウトによって元の時空に戻らない ( $M_{ABC} \setminus M_C \neq M_{AB}$ )。

\*<sup>23</sup> ここで“あるクラス”の最も強い仮定は、任意の上記の条件を満たす時空について purification との双対性を認めることである。この場合、以下の記述と同様に  $M_{ABC} = M_{AB}$  と置くことで証明が得られる。

ける任意の閉かつ凸な曲面  $\sigma$  に対して、boundary の純粋状態  $|\psi\rangle$  にユニタリ写像  $U(\sigma)$  を掛けることで、 $\sigma$  上の純粋状態

$$|\Psi(\sigma)\rangle_{\mathcal{H}_\sigma} := U(\sigma)|\psi\rangle, \quad (7.3.5)$$

を定義することが提案された。ここで曲面が凸であるとは、その上の任意の RT surface が  $\sigma$  で囲まれた空間中に含まれることを指す。これは Surface/State correspondence と呼ばれており、asymptotic AdS boundary とは限らない一般の曲面上の AdS/CFT 対応を tensor network に基づいて与える。尚、連続系における同様の議論は最近 [14, 15, 16] によって与えられた。

これを今の状況に対して適用しよう。まず  $\sigma$  として、 $A, B$  およびそれらを結ぶ任意の凸曲面  $\tilde{\gamma}_{AB}$  から成る曲面を取る。

$$\sigma := A \cup B \cup \tilde{\gamma}_{AB}, \quad (7.3.6)$$

このとき  $\sigma$  は閉かつ凸である。ここで式 (7.3.5) によって定義された純粋状態  $|\Psi(\sigma)\rangle$  を考える。この量子状態は、 $\rho_{AB}$  の一つの purification になっている。実際、純粋性は定義から明らかであり、また  $U$  はユニタリ演算子であるから

$$\mathrm{Tr}_{\tilde{\gamma}_{AB}}[|\Psi(\sigma)\rangle\langle\Psi(\sigma)|] = \mathrm{Tr}_{(AB)^c}[|\psi\rangle\langle\psi|] = \rho_{AB}, \quad (7.3.7)$$

となって条件 (7.3.2) が従う。ここで  $\mathcal{H}_{\tilde{\gamma}_{AB}}$  は、 $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B$  に対する補助系として機能している。ここで  $E_P$  の定義に従って、まず  $\tilde{\gamma}_{AB}$  を 2 つの部分系  $A', B'$  に分割し、RT surface  $\gamma_{AA'}^{\min}(= \gamma_{BB'}^{\min})$  を一つ決める。さらにこの操作を (1) 任意の  $\sigma$  ( $\tilde{\gamma}_{AB}$ ) の取り方 (2)  $\tilde{\gamma}_{AB} = A' \cup B'$  の分割の仕方、に対して最小化する。その結果、 $\tilde{\gamma}_{AB} = \gamma_{AB}$  と取ることで  $E_p = E_W$  を得る (図 7.3.1)。

ただし、以上の証明では  $E_P$  の最小化を達成する purification が少なくとも 1 つは重力双対を持つ (または tensor network による描像を持つ) ことを仮定していることに注意。そうでない場合は、以上の議論は  $E_P$  に対する上限  $E_P \leq E_W$  を与える。

## 7.4 Strong superadditivity と holographic CFTs の相関

$E_P$  と  $E_W$  の双対性は、(W6) からの帰結として、holographic CFTs において  $E_P$  が strong superadditivity を満たすことを予想する。

$$E_P(\rho_{A_1 A_2 B_1 B_2}) \geq E_P(\rho_{A_1 B_1}) + E_P(\rho_{A_2 B_2}). \quad (7.4.1)$$

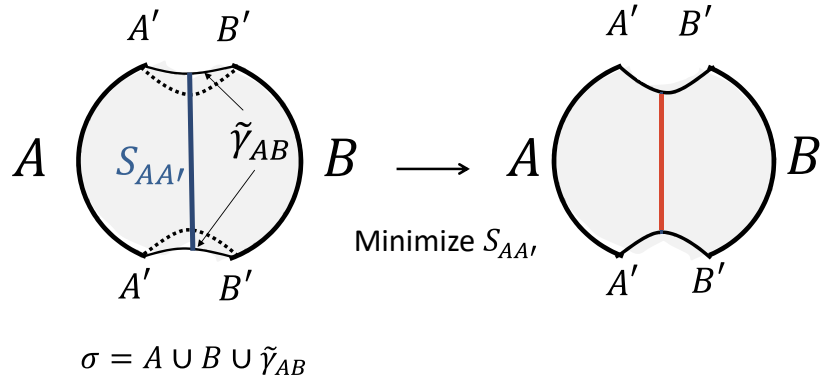


図 7.3.1 Surface/State 対応を用いた  $E_P = E_W$  の証明。任意の凸曲面  $\tilde{\gamma}_{AB}$  について、 $\sigma$  上に定義される量子状態  $|\Psi(\sigma)\rangle$  は、 $\rho_{AB}$  の purification になっている。 $\tilde{\gamma}_{AB}$  およびその分割  $\tilde{\gamma}_{AB} = A' \cup B'$  に関して右図のように取することで、 $E_W = E_P$  を得る。

実際に  $E_P$  を holographic CFTs において計算してこの成否を確認することは、予想 (7.3.1) の非自明な検証を与える。(P6) で述べたように、式 (7.4.1) は一般の量子系で成り立つとは限らず、実際に数値的な検証によってこれを破るケースの存在が示されている [142, 139]。尚、(P5) における subadditivity はあくまで decouple した  $\rho_{A_1 A_2 B_1 B_2}$  に関する不等式であり、strong superadditivity が成り立つ量子系の存在を否定しないことに注意。

このように、一般の量子系では成り立つとは限らないが、古典時空に対応する holographic CFTs では常に成り立つような性質が、(ホログラフィック) エンタングルメントエントロピーに関して知られている [28, 29]。その一つとして、4.2.2 節で議論した holographic CFTs における相互情報量の monogamy (4.2.17) がある。ここで一般の 2 体相関測度  $E_{\#}(A : B)$  に対して、次の不等式

$$E_{\#}(A : BC) \geq E_{\#}(A : B) + E_{\#}(A : C), \tag{7.4.2}$$

が満たされるとき、 $E_{\#}$  は monogamous であると言う [146]。Monogamy は相関の量子性を表しており、本来はエンタングルメント測度に期待される性質である。すなわち、全体の相関  $E_{\#}(A : BC)$

を固定した上で、 $A$  と  $B$  が可能な最大の相関を持ったと仮定しよう。このとき monogamy から

$$E_{\#}(A : BC) = E_{\#}(A : B) \Rightarrow E_{\#}(A : C) = 0, \quad (7.4.3)$$

となり、 $A$ ,  $B$  は他の系と相関を持たないことが言える。これが“一夫一妻制” (monogamy) の名前の由来である。このような相関の排他性は性質は古典系には見られないものである<sup>\*24</sup>。従って、相互情報量に基づいて言えば、holographic CFTs の量子状態に含まれている相関は純粋に量子的な相関が大部分を占めていると解釈できる<sup>\*25</sup>。これらは holographic CFTs の code subspaces に対して、情報論的な特徴付け (constrains) を与えると見做すことができる<sup>\*26</sup>。

ここで strong superadditivity に戻ると、これもまたある種の (monogamy ほどは強くない) 量子性を表す不等式である。すなわち、一般に非負の相関測度  $E_{\#}$  が monogamy を満たすならば、自動的に strong superadditivity を満たすことに注意する。このことは式 (7.4.2) を繰り返し用いて

$$E_{\#}(A_1 A_2 : B_1 B_2) \geq E_{\#}(A_1 A_2 : B_1) + E_{\#}(A_1 A_2 : B_2) \geq E_{\#}(A_1 : B_1) + E_{\#}(A_2 : B_2), \quad (7.4.4)$$

と示せる。また distillable entanglement と呼ばれる entanglement measure は、strong superadditivity を満たすことが知られている [138]。従って、 $E_P$  の strong superadditivity は、ある種の相関の量子性として holographic CFTs に新たな特徴付けを与えることが期待される。

<sup>\*24</sup> 尚、エンタングルメント測度  $E_{\#}$  について、 $E_{\#}$  が monogamy を満たさない場合でも  $(E_{\#})^{\alpha}$  ( $\alpha > 1$ ) が monogamy を満たすことがしばしば起こる。この観察に基づいて、monogamy に関するより直感的となるような定義の拡張が最近 [147] で与えられた。

<sup>\*25</sup>  $E_P$  および  $E_W$  は monogamy を満たさず、特に純粋状態に関しては polygamy と呼ばれる (7.4.2) の不等号を逆にしたものが常に成り立つことが (P1), (P7) (あるいは (W1), (W7)) から容易に示せる。

<sup>\*26</sup> 前節で議論した時空の purification を拡張して extension まで認めると、squashed entanglement と呼ばれる量子相関測度を用いて、holographic CFTs における相互情報量の monogamy を説明することもできる。

## 第 8 章

# まとめと今後の展望

本論文では、量子情報理論における数々の手法を応用した AdS/CFT 対応の解析について述べてきた。ここでは全体をまとめながら、今後の方向性について検討を加える。

本論文の前半では、AdS/CFT 対応と量子情報理論、およびそれら 2 つを結びつける基礎となるホログラフィックエンタングルメントエントロピーの公式について議論した。この公式によれば、holographic CFTs におけるエンタングルメントエントロピーは、AdS 時空中のある種の極小曲面の面積として表される。すなわち、AdS 時空中における幾何学の構造は、共形場理論の量子状態における相関構造に書き込まれており、素朴には、boundary におけるエンタングルメントエントロピーの情報から bulk の時空を復元できることが期待される [10, 11]。これを実行する具体的な方法は、tensor network による AdS 空間の記述をはじめとして様々な角度から検討されている [12, 148, 13, 15, 16, 137]。このメカニズムを理解することは、将来的に AdS 時空以外の背景時空中のホログラフィー原理を理解するために重要であると考えられる。

第 4 章では、静的な時空に対する Ryu-Takayanagi 公式に関して、Euclidean AdS 時空のレプリカ多様体による証明を議論した。その証明の具体的な手続きからは、エンタングルメントエントロピーに対する量子補正がどのように入るかが明らかになり、特に  $O(N^0)$  のオーダーにおける量子補正は、bulk の背景時空中で量子化された場に対するエンタングルメントエントロピーから生じることを見た。この結果に基づいて、任意のオーダーの量子補正や超弦理論の効果から生じる高階微分の重力項を含めた場合のホログラフィックエンタングルメントエントロピーの一般公式が提案されている [22, 20, 24]。これはゲージ自由度  $N$  と  $t'$  Hooft coupling  $\lambda$  を有限に取った場合の AdS/CFT 対応に踏み込む議論であり、これを検証することは低エネルギー領域から離れた量子的な時空に関する情報を探る上で重要だと考えられる。

第 5 章では、著者らの研究 [1] に基づいて、Lorentz boost を加えた部分系に対するエンタングル

メントエントロピーの HRT 公式を用いた導出と、相互情報量に対する応用について議論した。さらに AdS/CFT 対応の 1 パラメータ拡張である Lifshitz holography に関して、同様の解析からゲージ理論側の Cauchy 面とその局所性に対する制限を加えた。これに関連して、Lifshitz holography では、entanglement wedge を AdS 時空と同じ方法で定義すると caustics が発生し、entanglement wedge を閉じた部分空間とするためには新たな処方が必要になることが知られている [31]。この事情を理解して Lifshitz holography の妥当性を検証することは、ホログラフィー原理の適用範囲に示唆を与えることが推察される。

本論文の後半では、AdS 時空の entanglement wedge と holographic CFTs の部分系が等価な情報を持っていることを主張する subregion/subregion duality について議論した。これを正当化する根拠として、それぞれの部分系上の量子状態の空間に関する相対エントロピーが  $O(N^0)$  で一致することを確認した。また演算子に基づく根拠として、量子誤り訂正符号を援用した entanglement wedge のバルク再構成定理について述べた。これらの双対性は、holographic CFTs におけるある Cauchy 面上（或いは domain of dependence 内）の議論によって示されていたことに注意する。ここでさらに Hamiltonian による量子状態の時間発展という観点を含めると、boundary の量子状態の時間変化に伴って、bulk の時空が dynamical に再構成されていく様子が想像できる。実際、これに関連して、両サイドの共形場理論が相互作用を持つように deform した Hamiltonian を用いた |TFD) の時間発展を考えると、bulk の時空が traversable wormhole に対応することが示されている [60]。このような時間依存する量子状態による時空の再構成は、boundary の自由度から bulk に一般相対性理論を含んだ重力理論が現れるメカニズムに深く関わっていると推察される。

第 7 章では、ホログラフィックエンタングルメントエントロピー公式の帰結である「holographic CFTs 上の相関の情報は、時空の幾何学に関係している」という洞察を発展させて、entanglement wedge の最小断面積  $E_W$  が entanglement of purification  $E_P$  と双対関係にあるという予想を与えた。これを支持する複数の証拠を挙げ、さらに一般の purification の重力対応に関して検討を加えた。Holographic CFTs において  $E_P$  を計算して、既に得られている  $E_W$  の一致を確認することは今後の重要課題である。 $E_P$  の定義には無数の量子状態に関する最小化操作が含まれており、この事情は有限次元系においてさえ計算の実行を困難にしている。そこで解析解を得るためには、エンタングルメントエントロピーに対するレプリカ法のような、新規の手段を開発する必要があると考えられる。また  $E_P$  の定義に現れる purification を場の理論において理解することは、それ自体が興味深い問題である。特に共形場理論など性質の良い場の理論においては、ある条件を満たす多様体上の経路積分によって表す方法が有効になると期待される [14, 15, 16]。またこの予想の完全な証



明を与えるには、レプリカ法に対応する bulk のレプリカ多様体のように、purification の重力双対を明らかにすることが重要だと考えられる。本論文で見たように、entanglement wedge に基づく subregion/subregion duality は数々の状況証拠を持っているが、その一方で双対性を成り立たせている機構は未だ分かっていない。 $E_P = E_W$  予想の証明は、holographic CFTs と AdS 時空とのそれぞれの部分系がどのようなメカニズムで対応するかを直接明らかにし、AdS/CFT 対応のメカニズムの一端を解明することが期待される。

また混合状態に対する相関測度には、entanglement measures と呼ばれる量子相関のみを測る情報量が数多く存在する [44]。幾何学的な双対性を持つ entanglement measure を検証することは、AdS/CFT 対応における量子もつれと時空の関係性に新たな知見を齎すと考えられる。また本論文では専ら 2 体相関について議論したが、3 つ以上の調子系の間にはたらく multipartite entanglement の存在が知られている。これらは 2 体間量子もつれの和には還元できない異種の相関であり、この情報もまた AdS 時空に書き込まれていることが推測される。本論文では主に様々な情報量に焦点を当てたが、この他に量子情報理論では、量子状態に対する数多くの量子操作が存在する。AdS/CFT 対応の文脈では、例えば local projection や swapping などの操作の場の理論における表現が議論されている [65]。特に量子もつれの互換性を論じる上で重要な LOCC 操作が、holographic CFTs や AdS 時空においてどのように表せるかは興味深い問題である。

# 謝辞

本修士論文の執筆にあたり、修士課程の間に様々な方にお世話になりましたので、ここで感謝の意を述べたいと思います。

まずは本修士論文の元となった研究の共同研究者であり、常日頃の議論に加えて研究上の様々な場面で親身にご指導頂いた、基礎物理学研究所の高柳匡教授にこの場を借りて心から感謝を申し上げます。またこの2年間に共同研究者として幾度となく議論を重ねさせて頂いた沖縄科学技術大学院大学の宇賀神知紀氏、基礎物理学研究所のBhattacharyya Arpan氏、宮地真路氏、楠亀裕哉君に御礼を申し上げたいと思います。また研究初めの頃に量子情報理論に関する講義をして頂いた渡辺優助教に深く感謝致します。本研究の内容についてセミナーの場で闊達に議論して頂き、貴重なご指摘を頂いた素粒子論研究室の方々に深謝申し上げます。素粒子論研究室の吉田健太郎助教には、研究上の日々の相談に乗って頂いたこと厚くお礼申し上げます。また本論文の研究を始める契機となったEntanglement Working Groupのメンバーの方々に感謝したいと思います。

渡邊賢人氏の主催する自主ゼミで Fernandez Melgarejo Jose Juan氏、Park Minkyu氏、松本信行君と共にエンタングルメントと時空に関する議論をしたことは、本分野に踏み入る切っ掛けとなりました。参加者の皆様に感謝いたします。渡邊陽太氏にお誘い頂いた重力理論の自主ゼミで様々な議論を交わして頂いた宇宙論グループの方々に、この場でお礼申し上げます。そして素粒子論グループの寺嶋靖治氏、横山修一氏、理学研究科の先輩である Choi Jaewang氏、宮本貴也氏、京野秀紀氏、坂本純一氏、清水数馬氏、同期の石原陽平君、大畠隆弘君、奥村傑君、久保尚敬君、杉田強君、八角繁男君、濱田佑君には、研究の他に日頃の議論や生活面でもお世話になっていることの感謝を表したいと思います。また高校時代からの良き友人であり、物理学を学び始めた頃から親身になって相談に乗ってくれている太田卓見君に感謝します。

最後に、いつもお世話になっている基礎物理学研究所の方々と、修士の生活を支えてくれた家族と友人に心からお礼を申し上げます。

## 第9章

# 付録

### Notations

本論文では、特に断らない場合、自然単位系:

$$\hbar = c = k_B = 1,$$

を用いる。

以下に一般相対性理論に関する conventions を列挙する。これらの定義は、文献によって正負号の分だけ異なるため注意が必要である。

Signature:

$$g_{\mu\nu} = (-, +, \dots, +).$$

Riemann tensor:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\omega_\alpha \equiv R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta \omega_\beta, \quad R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta = \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\beta - \partial_\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\beta + \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\beta - \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\beta.$$

Ricci tensor:

$$R_{\mu\alpha} := g^{\nu\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\mu\lambda\nu}{}^\lambda.$$

Stress-Energy momentum tensor:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{matter}}}{\delta g_{\mu\nu}}, \quad \left( T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{matter}}}{\delta g^{\mu\nu}} \right).$$

Actions:

$$I_{\text{EH}} = \frac{1}{16\pi G_N} \int_M d^D x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda), \quad I_{\text{scalar}} = -\frac{1}{2} \int d^D x \sqrt{-g} (\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + m^2 \phi^2).$$

Einstein equation:

$$G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \Lambda \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \Lambda = 8\pi G_N T_{\mu\nu}.$$

Euclidean time:

$it = \tau_E$ .

Euclidean path integral:

$$Z = \int \phi e^{iI[\phi]} \rightarrow \int \phi e^{-I_E[\phi]}, \quad g_{\mu\nu}^E = (+, +, \dots, +).$$

Euclidean Actions:

$$I_{\text{EH}}^{(\text{Euclidean})} = -\frac{1}{16\pi G_N} \int_M d^D x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda), \quad I_{\text{scalar}}^{(\text{Euclidean})} = \frac{1}{2} \int d^D x \sqrt{g} (\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + m^2 \phi^2).$$

Gibbons-Hawking-York term:

$$I_{\text{EH}}^{(\text{Euclidean})} + I_{\text{GHY}}^{(\text{Euclidean})} = -\frac{1}{16\pi G_N} \int_M d^D x \sqrt{g} (R - 2\Lambda) - \frac{1}{8\pi G_N} \int_{\partial M} d^{D-1} x (K - K_0) \sqrt{h}.$$

Projection, normal:

$$h_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu - \varepsilon n_\mu n^\nu, \quad n_\mu n^\mu \equiv \varepsilon = \begin{cases} -1 & (n_\mu \text{ timelike}) \\ 1 & (n_\mu \text{ spacelike}) \end{cases},$$

Extrinsic curvature:

$$K_{\alpha\beta} = h_\alpha^\lambda h_\beta^\eta \nabla_\lambda n_\eta, \quad n_\mu \text{ for GHY is } \textit{outward - pointing}.$$

## 9.1 Schwarzschild ブラックホールエントロピーの導出

ブラックホールエントロピーの公式 (2.1.7) を Euclidean 経路積分を用いて導出する。重力理論の分配関数<sup>\*1</sup> は古典近似の範囲で

$$Z = \int Dg e^{-I_E[g]} \sim e^{-I_E[g_{\text{cl}}]} \quad (9.1.1)$$

と表せる。ここで物質場を含まない重力理論の Euclidean 作用は、一般に

$$\begin{aligned} I_E &= I_{\text{EH}} + I_{\text{GHY}} + I_{\text{counter term}} \\ &= -\frac{1}{16\pi G_N} \int_M d^D x \sqrt{g} (R - 2\Lambda) - \frac{1}{8\pi G_N} \int_{\partial M} d^{D-1} y \sqrt{\gamma} (K - K_0), \end{aligned} \quad (9.1.2)$$

と書ける。 $M$ ,  $g_{\mu\nu}$  は考えている  $D$  次元時空およびその計量、 $\partial M$ ,  $\gamma_{\mu\nu}$  は  $M$  の  $D-1$  次元境界面および誘導計量である。境界がある場合、Einstein-Hilbert 作用の変分  $\delta I_{\text{EH}}$  には bulk の Einstein 方程式に対応する項の他に boundary 上の変分 ( $\delta g|_{\partial M}$ ,  $\partial \delta g|_{\partial M}$ ) に比例した項が現れる。Diriclet 条件  $\delta g|_{\partial M} = 0$  を課したとき、 $\partial \delta g|_{\partial M}$  の項を相殺するために Gibbons-Hawking-York 項  $I_{\text{GHY}}$  を

<sup>\*1</sup> 重力理論における  $I_E$  は物質場の作用と異なり一般に positive definite とは限らず、Euclidean 経路積分の妥当性は明らかでないが、ここではその点を保留して取り扱う。

導入した。また  $K$  は、 $\partial M$  上の射影

$$h_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu - n_\mu n^\nu, \quad n_\mu n^\mu \equiv 1, \quad (9.1.3)$$

を用いて定義された extrinsic curvature

$$K_{\mu\nu} := h_\mu^\lambda h_\nu^\eta \nabla_\lambda n_\eta, \quad (9.1.4)$$

のトレース (mean curvature)

$$K := g^{\mu\nu} K_{\mu\nu} = \nabla_\mu n^\mu, \quad (9.1.5)$$

である。ただし  $n_\mu$  は outward-pointing unit normal である\*2。 $I_{\text{counter term}}$  は、作用積分に現れる体積無限大の効果 (IR 発散) を差し引くために導入された、基準となる時空  $M_0$  における境界項である。このような操作をホログラフィック繰り込みと呼ぶ。

具体例として、Schwarzschild ブラックホールのエントロピーを導出しよう。虚時間  $\tau = it$  によって Euclid 化した Schwarzschild ブラックホールの計量は、

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) d\tau^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (9.1.6)$$

で与えられる。パラメータの範囲は

$$0 \leq \tau < \beta, \quad (9.1.7)$$

$$(r_H \equiv) 2G_N M \leq r < \infty, \quad (9.1.8)$$

$$0 \leq \theta < \pi, \quad (9.1.9)$$

$$0 \leq \phi < 2\pi \quad (9.1.10)$$

である。特に Euclidean 時間方向  $\tau \cong \tau + \beta$  が周期化されていることに注意する。温度と事象の地平面の位置については、古典解が smooth な時空であること、すなわち conical singularity が生じない要請から

$$\beta = 16\pi G_N M = 8\pi r_H, \quad (9.1.11)$$

と関係性が決まる。

この古典解において、発散を正則化するために IR cutoff を  $r = r_\infty (\rightarrow \infty)$  と置いて作用を計算する。まず Schwarzschild 時空は bulk において平坦であり、 $R = \Lambda = 0$  である。従って  $I_{\text{EH}} = 0$  とな

---

\*2  $K_{\mu\nu}$  の定義は  $n_\mu$  の向きに依存して正負が逆転する点に注意。ここでは  $\mathbb{R}^2$  上の領域  $M = \{(x_1, x_2) | x_1^2 + x_2^2 \leq l^2\}$  に対して円周  $\partial M = S^1$  を取ったとき  $K > 0$  となるように convention を取っている。

り、古典作用への寄与は境界  $r = r_\infty$  上の項のみから生じる。 $K$  を計算するために outward-pointing normal vector を求める。今  $\partial M$  は超曲面  $r = r_\infty(\text{const.})$  で与えられており、

$$n_\mu \propto \partial_\mu r = \delta_\mu^r, \quad 1 = n^\mu n_\mu = g^{rr} n_r^2, \quad (9.1.12)$$

からこれは

$$\mathbf{n} = \sqrt{g^{rr}} \partial_r = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \partial_r, \quad (9.1.13)$$

と求まる。従って mean curvature は

$$\begin{aligned} K &= \nabla_\mu n^\mu \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} n^\mu) \\ &\sim \frac{2}{r_\infty} - \frac{GM}{r_\infty^2} + O\left(\frac{1}{r_\infty^3}\right), \quad (r_\infty \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (9.1.14)$$

となる。よって

$$\begin{aligned} I_{\text{GHY}} &= -\frac{1}{8\pi G_N} \int_{r=r_\infty} d^{D-1} y \sqrt{\gamma} K \\ &= -\frac{1}{8\pi G_N} \int_0^\beta d\tau \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi r_\infty^2 \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_\infty}} \left(\frac{2}{r_\infty} - \frac{GM}{r_\infty^2}\right) \\ &= -\frac{2r_\infty - 3G_N M}{2G_N T} + O\left(\frac{1}{r_\infty}\right), \end{aligned} \quad (9.1.15)$$

を得る。ここで  $O(r_\infty)$  の発散項を差し引く counter term を求める。この場合、基準として  $\partial M$  を平坦時空に埋め込んだときの mean curvature を採用する。すなわち、induced metric

$$ds^2|_{\partial M} = \left(1 - \frac{2GM}{r_\infty}\right) d\tau^2 + r_\infty^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (9.1.16)$$

を再現するように平坦時空  $M_0$  上に埋め込むと

$$ds^2|_{M_0} = \left(1 - \frac{2GM}{r_\infty}\right) d\tau^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (9.1.17)$$

を得る。同様に mean curvature を計算すると、

$$\mathbf{n}_0 = \partial_r, \quad (9.1.18)$$

から

$$K_0 = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2) = \frac{2}{r_\infty}, \quad (9.1.19)$$

となり、

$$\begin{aligned} I_{counter} &= \frac{1}{8\pi G_N} \int_0^\beta d\tau \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi r_\infty^2 \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_\infty} \frac{2}{r_\infty}} \\ &= \frac{2r_\infty - 2G_N M}{2G_N T} + O\left(\frac{1}{r_\infty}\right), \end{aligned} \quad (9.1.20)$$

を得る。従って古典作用は

$$I_E = -\frac{2r_\infty - 3G_N M}{2G_N T} + \frac{2r_\infty - 2G_N M}{2G_N T} = \frac{\beta^2}{16\pi G_N}, \quad (9.1.21)$$

となる。ここから  $S = (1 - \beta\partial_\beta) \log Z(\beta)$  に従ってエントロピーを計算すると

$$S = (1 - \beta\partial_\beta)(-I_E) = \frac{4\pi r_H^2}{4G_N} = \frac{\mathcal{A}_{horizon}}{4G_N}. \quad (9.1.22)$$

となって、Schwarzschild ブラックホールに対する Bekenstein-Hawking の公式を得る。

## 9.2 量子情報理論に関する補題

本節では、本文中で用いた量子情報理論に関する補題の証明を与える。以下に現れる用語の定義は [149, 69] などを参照。

### 9.2.1 相互情報量による共分散の上限

相互情報量と相関関数の関係性を与える不等式 [112]

$$I(A : B) \geq \frac{1}{2} \frac{C_{\rho_{AB}}[\mathcal{O}_A, \mathcal{O}_B]^2}{\|\mathcal{O}_A\|^2 \|\mathcal{O}_B\|^2}, \quad (9.2.1)$$

を証明する。ここでは簡単のために有限次元 Hilbert 空間を扱う。また行列のトレースノルム (trace norm) を

$$\|A\|_1 := \text{Tr}[\sqrt{A^\dagger A}]. \quad (9.2.2)$$

で定義する。これは行列  $A$  の特異値の和である。本論文で扱うように、 $A$  がユニタリ対角化可能 (正規行列) の場合、特異値は  $A$  の固有値の絶対値に等しい。このことはトレースノルムの一般的な性質  $\|A\|_1 = \|U^\dagger A V\|_1$  から明らかである。

補題 2. 量子 Pinsker-Csiszár 不等式

$$S(\rho||\sigma) \geq \frac{1}{2} \|\rho - \sigma\|_1^2. \quad (9.2.3)$$

*Proof.* まず演算子  $\sigma - \rho$  の固有値正の domain に対する射影を  $P$  で表す。また  $Q = I - P$  と定義する。 $u = \text{Tr}\rho P$ ,  $v = \text{Tr}\sigma P$  と書くと、トレースノルムは

$$\|\sigma - \rho\|_1 = \text{Tr}(\sigma - \rho)P - \text{Tr}(\sigma - \rho)Q = 2\text{Tr}(\sigma - \rho)P = 2(v - u) \geq 0, \quad (9.2.4)$$

と表せる。この結果と定義から  $0 \leq u \leq v \leq 1$  である。

Binary projection  $\{P, I - P\}$  で生成される  $\rho$  の restriction

$$\rho \rightarrow \rho|_P = \begin{pmatrix} \text{Tr}(\rho P) & 0 \\ 0 & \text{Tr}(\rho(I - P)) \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_2, \quad (9.2.5)$$

に対して、量子相対エントロピーの CPTP 単調性<sup>\*3</sup> から

$$\begin{aligned} S(\rho||\sigma) &\geq S(\rho|_P||\sigma|_P) \\ &= u \log \frac{u}{v} + (1 - u) \log \frac{1 - u}{1 - v} \\ &\geq 2(u - v)^2 \\ &= 2\|\sigma - \rho\|_1^2 \end{aligned} \quad (9.2.6)$$

$$= 2\|\rho - \sigma\|_1^2, \quad (9.2.7)$$

となり、式 (9.2.3) を得る [150]。ただし途中で任意の  $0 \leq u \leq v \leq 1$  に対する不等式

$$u \log \frac{u}{v} + (1 - u) \log \frac{1 - u}{1 - v} \geq 2(u - v)^2, \quad (9.2.8)$$

および  $\| -A \|_1 = \|A\|_1$  を用いた。また一般に POVM  $\{M_k^\dagger M_k\}$ ,  $\sum_{k=1}^n M_k^\dagger M_k = I$  に関する測定

<sup>\*3</sup> 量子情報理論において、量子状態  $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$  の任意の変化は、完全正値トレース保存写像 (completely positive trace preserving map, CPTP map) 写像と呼ばれる  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  から別の状態空間  $\mathcal{S}(\mathcal{H}')$  への写像として与えられる。詳しくは [69] などを参照。



結果への restriction  $R(\rho) : \mathcal{H}_d \rightarrow \mathcal{H}_n$  が CPTP 写像であることは

$$\begin{aligned} \rho \rightarrow R(\rho) &= \begin{pmatrix} p_1 & & & \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \text{Tr}(M_k^\dagger \rho M_k) |k\rangle \langle k| \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^n |k\rangle \langle i| M_k^\dagger \rho M_k |i\rangle \langle k| \\ &= \sum_{i,k} \tilde{M}_{(ik)}^\dagger \rho \tilde{M}_{(ik)}, \quad \left( \sum_{i,k} \tilde{M}_{(ik)}^\dagger \tilde{M}_{(ik)} = I \right), \end{aligned}$$

と  $d \times n$  個の Kraus 演算子  $\tilde{M}_{(ik)} := M_k |i\rangle \langle k|$  を用いて表せることから分かる。  $\square$

補題 3.

$$|\text{Tr} AB| \leq \|A\|_1 \|B\|. \quad (9.2.9)$$

*Proof.*  $\sqrt{AA^\dagger}$  の固有値および固有ベクトルをそれぞれ  $\alpha_i, |i\rangle$  で表す。三角不等式および Schwarz の不等式から

$$\begin{aligned} |\text{Tr} AB| &= \left| \sum_i \langle i| AB |i\rangle \right| \\ &\leq \sum_i |\langle i| AB |i\rangle| \\ &\leq \sum_i \|A^\dagger |i\rangle\| \|B |i\rangle\| \\ &\leq \|B\| \sum_i \|A^\dagger |i\rangle\| \\ &= \|B\| \sum_i \|\sqrt{AA^\dagger} |i\rangle\| \end{aligned} \quad (9.2.10)$$

$$= \|A^\dagger\|_1 \|B\| \quad (9.2.11)$$

$$= \|A\|_1 \|B\|, \quad (9.2.12)$$

を得る。ここで  $\|A |i\rangle\|^2 = \langle i| A^\dagger A |i\rangle = \langle i| \sqrt{A^\dagger A} \sqrt{A^\dagger A} |i\rangle = \|\sqrt{A^\dagger A} |i\rangle\|$  を用いた。最後に  $\|A^\dagger\|_1 = \|A\|_1$  を用いて、補題の式を得る。  $\square$

以上の補題2と補題3から、相互情報量は

$$\begin{aligned}
I(A : B) &= S(\rho_{AB} || \rho_A \otimes \rho_B) \\
&\geq \frac{1}{2} ||\rho_{AB} - \rho_A \otimes \rho_B||_1^2 \\
&\geq \frac{1}{2} \left( \frac{\text{Tr}[(\rho_{AB} - \rho_A \otimes \rho_B)\mathcal{O}_A \otimes \mathcal{O}_B]}{||\mathcal{O}_A \otimes \mathcal{O}_B||} \right)^2 \\
&= \frac{1}{2} \frac{C_{\rho_{AB}}[\mathcal{O}_A, \mathcal{O}_B]^2}{||\mathcal{O}_A||^2 ||\mathcal{O}_B||^2}, \tag{9.2.13}
\end{aligned}$$

と共分散を上から制限する。

## 9.2.2 バルク再構成定理の証明に用いる補題

以下に現れる記号の定義は本文6.3節を参照。

**補題4.** Hilbert空間  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_{A^c}$ 、およびその部分空間  $\mathcal{H}_{\text{code}} \subset \mathcal{H}$  を考える。 $\mathcal{H}_{\text{code}}$  上の任意の Hermitian 演算子  $O$  について、次の2つの命題は同値である [39]。

1. 任意の code subspace の元  $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_{\text{code}}$  および  $\mathcal{H}_{A^c}$  上の任意の演算子  $X_{A^c}$  について

$$\langle \phi | [O, X_{A^c}] | \phi \rangle = 0, \tag{9.2.14}$$

が成り立つ。

2.  $\mathcal{H}_A$  上のある演算子  $O_A$  が存在して、

$$O|\phi\rangle = O_A|\phi\rangle, \quad \forall |\phi\rangle \in \mathcal{H}_{\text{code}}, \tag{9.2.15}$$

が成り立つ。

*Proof.* 命題2. から命題1. は、 $O_A$  の Hermitian 性および  $[O_A, X_{A^c}] = 0$  から直ちに従う。以下では命題1. から命題2. を示す。

$\mathcal{H}_{\text{code}}$  を張る  $\mathcal{H}$  の基底を  $\{|\tilde{i}\rangle_{AA^c}\}_{i=1}^d$ , ( $d := \dim \mathcal{H}_{\text{code}}$ ) で表す。Hilbert空間  $\mathcal{H}_{\text{code}}$  に補助系  $\mathcal{H}_R$  を付け足した最大エンタングル状態

$$|\Phi\rangle := \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=1}^d |i\rangle_R \otimes |\tilde{i}\rangle_{AA^c}, \tag{9.2.16}$$

を考える。補助系としては、具体的には code subspace と同一の系  $\mathcal{H}_R \cong \mathcal{H}_{\text{code}}$  を選ばばよい。これと最大エンタングル状態 (9.2.16) の  $R$  と  $AA^c$  に関する対称性から明らかなように、 $\mathcal{H}_{\text{code}}$  上の

任意の演算子  $O \equiv O_{AA^c}$  には  $|\Phi\rangle$  に対して同一の作用を及ぼす  $\mathcal{H}_R$  上の演算子  $O_R$  が存在する。

$$O_R \otimes I_{AA^c} |\Phi\rangle = I_R \otimes O_{AA^c} |\Phi\rangle. \quad (9.2.17)$$

実際、 $O_R := O^T$  がこの関係を満たすことは容易に確かめられる。

さらに  $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_{A^c}$  の基底を用いて

$$|\tilde{i}\rangle_{AA^c} = \sum_{\alpha=1}^{d_A} \sum_{\xi=1}^{d_{A^c}} C_{\xi\alpha}^i |\alpha\rangle_A \otimes |\xi\rangle_{A^c}, \quad d_{A,A^c} := \dim(\mathcal{H}_{A,A^c}), \quad (9.2.18)$$

と頭を書く、 $|\Phi\rangle$  は

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=1}^d \sum_{\alpha=1}^{d_A} \sum_{\xi=1}^{d_{A^c}} C_{\xi\alpha}^i |i\rangle_R \otimes |\alpha\rangle_A \otimes |\xi\rangle_{A^c} \quad (9.2.19)$$

$$\equiv \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{a,\alpha} C_{\alpha a} |a\rangle_{RA^c} \otimes |\alpha\rangle_A, \quad (9.2.20)$$

と書ける。ここで簡便のために添字を  $a = (i, \xi)$  と略記した。このとき  $|\Phi\rangle$  の  $\mathcal{H}_A$  における状態は

$$\begin{aligned} \rho_A &:= \text{Tr}_{RA^c} |\Phi\rangle \langle \Phi| \\ &= \frac{1}{d} \sum_{a,\alpha} \sum_{b,\beta} \delta_{ab} C_{\alpha a} C_{\beta b}^* |\alpha\rangle \langle \beta|_A \\ &= \frac{1}{d} \sum_{\alpha,\beta} \sum_a C_{\alpha a} C_{\beta a}^* |\alpha\rangle \langle \beta|_A \\ &\equiv CC^\dagger, \end{aligned} \quad (9.2.21)$$

と表せる。ここで  $C : \mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_{A^c} \rightarrow \mathcal{H}_A$  は、その要素が  $C_{\alpha a} = \frac{1}{\sqrt{d}} \langle \alpha|C|a\rangle$  で定義される（非正方）演算子である。同様にして

$$\rho_{RA^c} = C^T C^*, \quad (9.2.22)$$

を得る。ここで部分空間  $\ker \rho_A \subset \mathcal{H}_A$  の任意の元  $|p\rangle_A$ （すなわち、固有値がゼロの固有ベクトルの張る部分空間）は、 $|\tilde{i}\rangle_{AA^c}$  と直交する  $\langle p, \xi|\tilde{i}\rangle = 0, \forall \xi$  ことに注意する\*4。すなわち、 $|\Phi\rangle$  は  $\ker \rho_A$  に属する成分を含んでいないため、 $\rho_A$  が可逆であると仮定しても一般性を失わない。そこで可逆な

\*4 このことは  $C$  の特異値分解を

$$U^\dagger C V = \Sigma = \begin{pmatrix} c_1 & & & 0 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & c_n & & & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (9.2.23)$$

$\rho_A$  を改めて  $\rho_A \equiv g$  と表すと、

$$CC^\dagger g^{-1} = g^{-1}CC^\dagger = I, \quad (9.2.25)$$

が成り立つ。さらに  $C$  と  $g$  を用いて  $\mathcal{H}_A$  上の演算子

$$O_A := COC^\dagger g^{-1}, \quad (9.2.26)$$

を定義する。ただし右辺の  $O$  は  $\mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_{A^c}$  上の演算子  $O_R^T \otimes I_{A^c}$  の意味である。

以上の準備の下、式 (9.2.17) および命題 1. からは

$$0 = \langle \phi | [I_R \otimes O_{AA^c}, \rho_{RA^c} \otimes I_A] | \phi \rangle = \langle \phi | [O_R \otimes I_{AA^c}, \rho_{RA^c} \otimes I_A] | \phi \rangle, \quad \forall |\phi\rangle \in \mathcal{H}_{\text{code}}, \quad (9.2.27)$$

が従う。ここで Hermitian 演算子  $A, B$  の交換子  $i[A, B]$  は Hermitian であることに注意すると、この式は演算子  $[O_R \otimes I_{AA^c}, \rho_{RA^c} \otimes I_A] = [O^T, C^T C^*]$  の  $\mathcal{H}_{\text{code}}$  上の固有値が全てゼロあることを意味する。従って

$$C^\dagger CO = OC^\dagger C \text{ on } \mathcal{H}_{\text{code}}, \quad (9.2.28)$$

を得る。この結果から、 $\mathcal{H}_{\text{code}}$  上で

$$\begin{aligned} O_A C &= COC^\dagger g^{-1} C \\ &= g^{-1} CC^\dagger COC^\dagger g^{-1} C \\ &= g^{-1} COC^\dagger CC^\dagger g^{-1} C \\ &= g^{-1} COC^\dagger C \\ &= g^{-1} CC^\dagger CO \\ &= CO \\ &= CO_R^T, \end{aligned} \quad (9.2.29)$$

が成り立つ。このことを用いると（最初に演算子  $O$  を  $\mathcal{H}_R$  上の演算子  $O_R$  へと map したことと同

---

と表したとき、 $\rho_A$  は  $\mathcal{H}_A$  における同じ基底で

$$U^\dagger \rho_A U = \Sigma \Sigma^\dagger = \begin{pmatrix} |c_1|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |c_n|^2 \end{pmatrix}, \quad (9.2.24)$$

となり、 $c_{\alpha'} = 0$  ならば  $C_{\alpha'a} = 0 \quad \forall a \in (i, \xi)$  が従うことから分かる。

じ要領で)、

$$\begin{aligned}
O_R |\Phi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{a,\alpha} C_{\alpha a} \left( \sum_b (O_R)_{ba} |b\rangle_{RA^c} \right) \otimes |\alpha\rangle_A \\
&= \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{b,\alpha} (CO_R^T)_{\alpha b} |b\rangle_{RA^c} \otimes |\alpha\rangle_A \\
&= \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{b,\alpha} \sum_{\beta} (O_A)_{\alpha\beta} C_{\beta b} |b\rangle_{RA^c} \otimes |\alpha\rangle_A \\
&= \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{b,\beta} C_{\beta b} |b\rangle_{RA^c} \otimes \left( \sum_{\alpha} (O_A)_{\alpha\beta} |\alpha\rangle_A \right) \\
&= O_A |\Phi\rangle,
\end{aligned} \tag{9.2.30}$$

を得る。従って式 (9.2.17) と合わせて

$$O |\Phi\rangle = O_A |\Phi\rangle, \tag{9.2.31}$$

を得る。

この式の両辺に  $\mathcal{H}_R$  上の Projection  $|i\rangle\langle i|_R$  を掛けることで、 $\mathcal{H}_{\text{code}}$  の任意の基底に対して

$$O |\tilde{i}\rangle_{AA^c} = O_A |\tilde{i}\rangle_{AA^c}, \tag{9.2.32}$$

が成り立つ。すなわち、 $O_A$  は命題 2. を満たす  $\mathcal{H}_A$  上の演算子である。  $\square$

### 9.2.3 Conditional entropy の joint subadditivity

**補題 5.** *Conditional entropy*  $S(A|B) = S_{AB} - S_B$  は、任意の量子系において、次の不等式 (*joint subadditivity*) を満たす。

$$S(AB|CD) \leq S(A|C) + S(B|D), \tag{9.2.33}$$

*Proof.* まず von Neumann エントロピーの strong subadditivity から

$$S_{ABC} + S_B \leq S_{AB} + S_{BC}, \tag{9.2.34}$$

が成り立つ。ここで  $C$  を改めて  $C \cup D$  と置いて、両辺に  $S_D$  を加えると

$$S_{ABCD} + S_B + S_D \leq S_{AB} + S_{BCD} + S_D, \tag{9.2.35}$$

となる。右辺に strong subadditivity を再び用いて

$$S_{ABCD} + S_B + S_D \leq S_{AB} + S_{BD} + S_{CD}, \quad (9.2.36)$$

となる。これを両辺整理することで (9.2.33) を得る [149]。□

## 9.3 エンタングルメント測度

ここでは代表的な混合状態に対する 2 体量子相関測度に関する性質をまとめる [2]。エンタングルメント測度に関する包括的なレビューは [151, 45, 138, 44] を参照 (尚、エンタングルメント測度の性質表は [152] も参照のこと)。また統一性を持たせるために、一部本文と重複する記述を許している。

### 9.3.1 エンタングルメント測度の一般論

一般の 2 体相関測度を  $E_{\#}(A : B) \equiv E_{\#}(\rho_{AB})$  で表す。混合状態に対するエンタングルメント測度には様々なものが提案されているが、まずはこれらの性質の一般論を述べる。

$E_{\#}$  が次の性質を満たすとき、本論文ではこれを (性質の良い) エンタングルメント測度 (bipartite entanglement measures) と呼ぶ\*5。

(A1)  $E_{\#}$  は非負の量であり、separable states  $\rho_{AB} \in \text{Sep}(\mathcal{H}_{AB})$  に対してゼロになる。

$$E_{\#} \geq 0. \quad (9.3.1)$$

$$\rho_{AB} \in \text{Sep}(\mathcal{H}_{AB}) \Rightarrow E_{\#}(\rho_{AB}) = 0. \quad (9.3.2)$$

これは separable states の定義から当然要求される性質である。一方、この逆の  $E_{\#}(\rho_{AB}) = 0 \Rightarrow \rho_{AB} \in \text{Sep}(\mathcal{H}_{AB})$  については、ここでは一旦要請しない。これらを両方満たして

$$E_{\#}(\rho_{AB}) = 0 \Leftrightarrow \rho_{AB} \in \text{Sep}(\mathcal{H}_{AB}) \quad (9.3.3)$$

が成り立つ  $E_{\#}$  は、separable states に関して faithful であるという\*6。例えば以下で定義する  $E_D$  は faithful ではない。

\*5 “良い性質” の公理系にはいくつかの流儀 (options) がある。Negativity など、以下の性質の全ては満たさないが量子もつれの測度として機能する情報量も存在する。

\*6 総相関測度の product states に関する faithfulness と混合されないように注意されたい。

(A2)  $E_{\#}$  は純粋状態に対してエンタングルメントエントロピーと一致する。

$$E_{\#}(A : B) = S_A = S_B \text{ when } \rho_{AB} \text{ is pure.} \quad (9.3.4)$$

この要請は、後述するエンタングルメントエントロピーの唯一性定理によって、純粋状態に対するエンタングルメント測度は本質的にはエンタングルメントエントロピーで与えられることの帰結である。

(A3)  $E_{\#}$  は LOCC に対して平均的に単調減少する。

$$\rho_{AB} \rightarrow \Lambda(\rho_{AB}) = \sum_i p_i \rho_{AB}^i \Rightarrow E_{\#}(\rho_{AB}) \geq \sum_i p_i E_{\#}(\rho_{AB}^i). \quad (9.3.5)$$

ここで LOCC (local operations and classical communications) とは、 $A$  系と  $B$  系におけるそれぞれの局所的な操作と、それらの間の古典通信（古典的な混合）のみを許すような量子操作（CPTP 写像）のことである。これは一般に Kraus 演算子を用いて次の形に表せる\*7。

$$\Lambda(\rho_{AB}) = \sum_i V_A^i \otimes W_B^i \rho_{AB} (V_A^i \otimes W_B^i)^\dagger. \quad (9.3.6)$$

このような一連の操作の結果、量子状態が確率混合  $\{p_i, \rho_{AB}^i\}$  となると、 $E_{\#}$  によって測った量子もつれの平均値は増大しないことを要求する。LOCC は量子もつれを特徴付けるために導入された操作であり、この要請はエンタングルメント測度の公理として最も本質的なものだと考えられている。

以下でエンタングルメント測度に関連する性質の定義を述べる。

・  $E_{\#}$  は次の条件を満たすとき、漸近的連続性 (asymptotic continuity) を持つという： $\rho_n, \sigma_n$  を  $d_n$  次元 Hilbert 空間上の量子状態としたとき、 $n \rightarrow \infty$  の極限で次が成り立つ。

$$\|\rho_n - \sigma_n\|_1 \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{E_{\#}(\rho_n) - E_{\#}(\sigma_n)}{\log d_n} \rightarrow 0. \quad (9.3.7)$$

これはエンタングルメント測度に関して、量子状態の間の距離に関する連続性を述べている。すなわち、これを満たす  $E_{\#}$  では、(トレースノルムによって測った) 2つの量子状態の距離が近いとき、量子もつれの大きさも同じ程度になる。 $\rho_n$  は典型的には  $\rho_n = \rho_{AB}^{\otimes n}$  のような量子状態が想定されている。このような漸近的なセットアップにおける情報量の振る舞いは、以下の議論でも度々現れる。

・ 漸近性に関して、任意の量子状態に対して  $E_{\#}$  から作られる次の量が定義できるとき、 $E_{\#}$  は

\*7 この形の CPTP 写像が常に LOCC であるとは限らない点に注意。この形で表せる一般の量子操作は separable operations と呼ばれている。すなわち、LOCC は separable operations の (同一でない) 部分集合である。

regularizable であるという。

$$E_{\#}^{\infty}(\rho_{AB}) := \frac{E_{\#}(\rho_{AB}^{\otimes n})}{n}. \quad (9.3.8)$$

・ $d$ 次元の最大エンタングルメント状態  $|\Phi_d^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=1}^d |i\rangle_A \otimes |i\rangle_B$  に対して、規格化条件  $E_{\#}(|\Phi_d^+\rangle) = \log d$  を満たすとき、 $E_{\#}$  は normalizable であるという\*8。

・ $E_{\#}$  が任意の量子状態  $\rho, \sigma$  と  $\lambda \in [0, 1]$  に対して  $E_{\#}(\lambda\rho + (1-\lambda)\sigma) \leq \lambda E_{\#}(\rho) + (1-\lambda)E_{\#}(\sigma)$  を満たすとき、 $E_{\#}$  は convex であるという\*9。

$E_{\#}$  の性質を表す不等式を以下のように定義する\*10。

(i) (Full) Additivity

$$E_{\#}(\rho_{A_1 B_1} \otimes \sigma_{A_2 B_2}) = E_{\#}(\rho_{A_1 B_1}) + E_{\#}(\sigma_{A_2 B_2}). \quad (9.3.9)$$

(ii) Subadditivity

$$E_{\#}(\rho_{A_1 B_1} \otimes \sigma_{A_2 B_2}) \leq E_{\#}(\rho_{A_1 B_1}) + E_{\#}(\sigma_{A_2 B_2}). \quad (9.3.10)$$

(iii) Superadditivity

$$E_{\#}(\rho_{A_1 B_1} \otimes \sigma_{A_2 B_2}) \geq E_{\#}(\rho_{A_1 B_1}) + E_{\#}(\sigma_{A_2 B_2}). \quad (9.3.11)$$

(iv) Strong superadditivity

$$E_{\#}(\rho_{A_1 A_2 B_1 B_2}) \geq E_{\#}(\rho_{A_1 B_1}) + E_{\#}(\rho_{A_2 B_2}). \quad (9.3.12)$$

(v) Monogamy

$$E_{\#}(\rho_{AB_1 B_2}) \geq E_{\#}(\rho_{AB_1}) + E_{\#}(\rho_{AB_2}). \quad (9.3.13)$$

上記のいずれも相関は  $A$  系列と  $B$  系列の間で測っている。 $E_{\#}$  が任意の量子状態に対して上記の不等式を満たすとき、例えば (i) ならば  $E_{\#}$  は (full) additive である、などという。 $E_{\#}$  が additive ならば、これは自動的に sub/superadditive である。また  $E_{\#}$  が monogamous であるならば自動的に strong superadditive である (7.4節参照)。例えば  $E_{sq}$  は additive であり、 $E_F, E_R$  は additive では

\*8 (A2) を課せば、この条件は自動的に満たされる。

\*9 ほとんどのエンタングルメント測度が convexity を満たしており、数学的な取り扱いの意味でも重要であるため、これを公理に含める場合もある。

\*10 von Neumann エントロピーに対して用いられる用語と混同されないように注意されたい。この場合は、(i) additive  $S(\rho \otimes \sigma) = S(\rho) + S(\sigma)$ 、(ii) subadditive  $S(\rho_{AB}) \leq S(\rho_A) + S(\rho_B)$ 、(iii) strong subadditive  $S_{ABC} + S_B \leq S_{AB} + S_{AC}$  である。



ないが subadditive である。尚、(i) において  $\rho = \sigma$  と置いた場合を extensivity (partial additivity, i.i.d. additivity) と呼ぶ。

これらの用語は、エンタングルメント測度に限らず相互情報量や entanglement of purification など一般の相関測度に対して用いられる。

以下では、(A1)-(A3) を満たすいくつかの代表的なエンタングルメント測度について紹介する。またトレース距離を  $D_{tr}(\rho, \sigma) := \|\rho - \sigma\|_1$ 、 $d$ 次元最大エンタングルド状態を  $\Phi_d^+$  で表す。

### 9.3.2 Distillable entanglement

$$E_D(\rho_{AB}) := \sup_r \left\{ r \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \inf_{\Lambda \in \text{LOCC}} D_{tr}(\Lambda(\rho_{AB}^{\otimes n}), \Phi_{2^{rn}}^+) \right] = 0 \right. \right\}. \quad (9.3.14)$$

Distillable entanglement  $E_D$  は、 $n$  個の量子状態  $\rho_{AB}^{\otimes n}$  から、LOCC のみを用いて、最大エンタングルド状態を可能な限り多く  $m$  個取り出したときの比率  $r = \frac{m}{n}$  を、漸近的な状況  $n \rightarrow \infty$  において測る情報量である。 $E_D$  の特徴としては、faithfulness を満たさないことが挙げられる。すなわち、 $E_D$  は entangled states に対して量子もつれを検出しない場合がある。また  $E_D$  は strong superadditivity を満たすことが知られている。この相関測度は、後に述べる意味で一般的なエンタングルメント測度  $E_{\#}$  の下限となる量である。また次の不等式 (hashing inequality) を満たす [153]。

$$E_D(A : B) \geq \max\{S_A - S_{AB}, S_B - S_{AB}\}. \quad (9.3.15)$$

$E_D$  は稀に entanglement concentration と呼ばれることもある。

### 9.3.3 Entanglement cost

$$E_C(\rho_{AB}) := \inf_r \left\{ r \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \inf_{\Lambda \in \text{LOCC}} D_{tr}(\rho_{AB}^{\otimes n}, \Lambda(\Phi_{2^{rn}}^+)) \right] = 0 \right. \right\}. \quad (9.3.16)$$

Entanglement cost  $E_C$  は、可能な限り少ない  $m$  個の最大エンタングルメント状態から、LOCC のみを用いて、 $n$  個の量子状態  $\rho_{AB}^{\otimes n}$  を作り出したときの比率  $r = \frac{m}{n}$  を、漸近的な状況  $n \rightarrow \infty$  において測る情報量である。 $E_C$  は faithfulness、convexity、subadditivity を満たすことが知られている。また monogamy は一般には満たさないことが分かっている。定義からして  $E_D$  の対であることから分かるように、この量は後に述べる意味で一般的なエンタングルメント測度  $E_{\#}$  の上限となる。さらに次に述べる entanglement of formation とは regularization の関係にある。

### 9.3.4 Entanglement of formation

$$E_F(\rho_{AB}) := \inf_{\rho_{AB} = \sum p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|_{AB}} \sum_i p_i S(\text{Tr}_B [|\psi_i\rangle\langle\psi_i|_{AB}]). \quad (9.3.17)$$

ここで最小化は  $\rho_{AB} = \sum p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|_{AB}$  を満たす任意の分解  $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$  について取る。この操作は一般に convex roof と呼ばれる。Entanglement of formation  $E_F$  は、次の関係式によって  $E_C$  と結び付いている。

$$E_C(\rho_{AB}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_F(\rho_{AB}^{\otimes n})}{n}. \quad (9.3.18)$$

$E_F$  は faithfulness、asymptotic continuity、convexity、subadditivity を満たす一方、additivity および monogamy を満たさないことが知られている<sup>\*11</sup>。また  $E_C$  より小さくなることはなく、さらには相互情報量を超える場合があるため、その意味で過剰な相関の見積もりを行う情報量といえる。稀に entanglement of creation と呼ばれることがある。またその Rényi 化についても議論されている [155]。

### 9.3.5 Relative entropy of entanglement

$$E_R(\rho_{AB}) := \min_{\sigma_{AB} \in \text{Sep}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)} S(\rho_{AB} || \sigma_{AB}). \quad (9.3.19)$$

$E_R$  は相対エントロピーを用いて定義されたエンタングルメント測度である。この情報量は定義から明らかに faithful であり、また asymptotic continuity、convexity、subadditivity を満たす。一方で、monogamy や additivity、strong superadditivity については満たさないことが知られている。またこのような方法によるエンタングルメント測度の定義の一般化として、(1) 相対エントロピーに代わる状態空間の距離化 ( $f$ -divergence など) を用いる方法 (2) 最小化を取る集合を PPT states などに変える方法、が挙げられる。

<sup>\*11</sup>  $E_F$  の additivity は様々な命題と同値であることが知られる重要な未解決問題であったが、2008年に否定的に解決された [154]。

### 9.3.6 Squashed entanglement

$$E_{sq}(\rho_{AB}) := \frac{1}{2} \inf_{\rho_{AB} = \text{Tr}_C \rho_{ABC}} I(A : B|C). \quad (9.3.20)$$

ここで  $I(A : B|C)$  は conditional mutual indormation

$$I(A : B|C) = S_{AC} + S_{BC} - S_C - S_{ABC} \geq 0, \quad (9.3.21)$$

である。最小化は  $\rho_{AB}$  に関する任意の extension について行う (extension の定義は 7.2.3節参照)。  $E_{sq}$  は asymptotic continuity、convexity に加えて、additivity および monogamy を満たす点が最大の特徴である。さらに faithful であることが 2011 年に [152] において示された。  $E_{sq}$  は現在知られている限り最も性質の良いエンタングルメント測度である。しかし、entanglement of purification と同様の事情で、計算の実行が困難であるという問題を抱えている。またこれについても Rényi 化した情報量が議論されている [155]。

#### 相関測度の大小関係

相互情報量  $I$ 、entanglement of purification  $E_P$  を含めたこれらの大小関係は次の通りである。

$$E_D \leq E_{sq} \leq E_C \leq E_F \leq E_P. \quad (9.3.22)$$

$$E_D \leq E_R \leq E_F. \quad (9.3.23)$$

$$E_{sq} \leq \frac{I}{2} \leq E_P. \quad (9.3.24)$$

$$E_R \leq I. \quad (9.3.25)$$

尚、  $E_C$  は  $I/2$  を超える場合があり、  $E_F$  は  $I$  を超える場合がある。また hashing inequality (式 (9.3.15)) からは

$$\frac{I(A : B)}{2} + \max \left\{ \frac{I(A : B)}{2} - S_A, \frac{I(A : B)}{2} - S_B \right\} \leq E_D(A : B) \leq E_{sq}(A : B) \leq \frac{I(A : B)}{2}, \quad (9.3.26)$$

を得る。ここで  $\max$  の中身は (I3) から常に負であることに注意。ここで最左辺は coherent information  $I_{A|B}^{coh} := S_B - S_{AB} = -S(A|B)$  と呼ばれ、様々なエンタングルメント測度に対して普遍的かつ tractable な下限を与える。

### 9.3.7 Remarks

エンタングルメントエントロピーの唯一性

純粋状態に関してはエンタングルメントエントロピーが本質的には一意的な尺度を与える [71]。これは次の事実から来ている（詳細は [138] を参照のこと）。

$E_{\#}$  が LOCC 単調性 (A3)、asymptotic continuity、regularizability、normalizability を満たすならば、次の関係が成り立つ。

$$E_D \leq E_{\#}^{\infty} \leq E_C. \quad (9.3.27)$$

さらに  $E_{\#}$  が extensivity を満たすならば、

$$E_D \leq E_{\#} \leq E_C, \quad (9.3.28)$$

が成り立つ。

ここで純粋状態に対して  $E_D(\rho_{AB}) = E_C(\rho_{AB}) = S_A$  であったことを思い出すと、以上の性質を満たす任意のエンタングルメント測度  $E_{\#}$  は、純粋状態に対して常にエンタングルメントエントロピーと一致することが分かる。

#### Regularization of $E_P$

$E_C$  のアナロジーとして、次の量を定義する [139]。

$$E_{LOq}(\rho_{AB}) := \inf_r \left\{ r \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \inf_{\Lambda \in LOq} D_{tr}(\rho_{AB}^{\otimes n}, \Lambda(\Phi_{2^{rn}}^+)) \right] = 0 \right. \right\}. \quad (9.3.29)$$

$E_{LOq}$  は量子状態  $\rho_{AB}^{\otimes n}$  の生成に用いる操作を local operations and asymptotically vanishing communication (LOq) と呼ばれる操作に変更したものである。LOq は、LOCC をさらに漸近的な状況  $n \rightarrow \infty$  において古典通信による寄与が無視できるような操作に限定したものである。ここから明らかに  $E_C \leq E_{LOq}$  が常に成り立ち、 $E_{LOq}$  は  $E_C$  と類似の操作論的な意味を持つ。 $E_{LOq}$  はエンタングルメント測度の性質を満たさず、 $I$  や  $E_P$  に近い情報量である点に注意する。 $E_{LOq}$  と  $E_P$  の間には次の関係が知られている。

$$E_{LOq}(\rho_{AB}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_P(\rho_{AB}^{\otimes n})}{n}. \quad (9.3.30)$$

また  $E_P$  は subadditive であるから、一般に  $E_{LOq} \leq E_P$  が成り立つ。特に、 $E_P$  が additivity を満たすような量子状態  $\rho_{AB}$  に対しては、これら 2 つの相関測度は一致する。

## 参考文献

- [1] Yuya Kusuki, Tadashi Takayanagi, and Koji Umemoto. Holographic Entanglement Entropy on Generic Time Slices. *JHEP*, 06:021, 2017, 1703.00915.
- [2] Tadashi Takayanagi and Koji Umemoto. Holographic Entanglement of Purification. *Nature Physics*, 14:573–577, 2018, 1708.09393.
- [3] Jacob D. Bekenstein. Black holes and entropy. *Phys. Rev. D*, 7:2333–2346, Apr 1973. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.7.2333>.
- [4] S. W. Hawking. Particle Creation by Black Holes. *Commun. Math. Phys.*, 43:199–220, 1975. [,167(1975)].
- [5] Gerard 't Hooft. Dimensional reduction in quantum gravity. *Conf. Proc.*, C930308:284–296, 1993, gr-qc/9310026.
- [6] Leonard Susskind. The World as a hologram. *J. Math. Phys.*, 36:6377–6396, 1995, hep-th/9409089.
- [7] Juan Martin Maldacena. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Int. J. Theor. Phys.*, 38:1113–1133, 1999, hep-th/9711200. [Adv. Theor. Math. Phys.2,231(1998)].
- [8] Shinsei Ryu and Tadashi Takayanagi. Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT. *Phys. Rev. Lett.*, 96:181602, 2006, hep-th/0603001.
- [9] Veronika E. Hubeny, Mukund Rangamani, and Tadashi Takayanagi. A Covariant holographic entanglement entropy proposal. *JHEP*, 07:062, 2007, 0705.0016.
- [10] Mark Van Raamsdonk. Comments on quantum gravity and entanglement. 2009, 0907.2939.
- [11] Mark Van Raamsdonk. Building up spacetime with quantum entanglement. *Gen. Rel. Grav.*, 42:2323–2329, 2010, 1005.3035. [Int. J. Mod. Phys.D19,2429(2010)].

- [12] Brian Swingle. Entanglement Renormalization and Holography. *Phys. Rev.*, D86:065007, 2012, 0905.1317.
- [13] Patrick Hayden, Sepehr Nezami, Xiao-Liang Qi, Nathaniel Thomas, Michael Walter, and Zhao Yang. Holographic duality from random tensor networks. *JHEP*, 11:009, 2016, 1601.01694.
- [14] Masamichi Miyaji, Tadashi Takayanagi, and Kento Watanabe. From path integrals to tensor networks for the AdS/CFT correspondence. *Phys. Rev.*, D95(6):066004, 2017, 1609.04645.
- [15] Pawel Caputa, Nilay Kundu, Masamichi Miyaji, Tadashi Takayanagi, and Kento Watanabe. Anti-de Sitter Space from Optimization of Path Integrals in Conformal Field Theories. *Phys. Rev. Lett.*, 119(7):071602, 2017, 1703.00456.
- [16] Pawel Caputa, Nilay Kundu, Masamichi Miyaji, Tadashi Takayanagi, and Kento Watanabe. Liouville Action as Path-Integral Complexity: From Continuous Tensor Networks to AdS/CFT. *JHEP*, 11:097, 2017, 1706.07056.
- [17] Juan Maldacena and Leonard Susskind. Cool horizons for entangled black holes. *Fortsch. Phys.*, 61:781–811, 2013, 1306.0533.
- [18] Aitor Lewkowycz and Juan Maldacena. Generalized gravitational entropy. *JHEP*, 08:090, 2013, 1304.4926.
- [19] Xi Dong, Aitor Lewkowycz, and Mukund Rangamani. Deriving covariant holographic entanglement. *JHEP*, 11:028, 2016, 1607.07506.
- [20] Xi Dong. Holographic Entanglement Entropy for General Higher Derivative Gravity. *JHEP*, 01:044, 2014, 1310.5713.
- [21] Thomas Faulkner, Aitor Lewkowycz, and Juan Maldacena. Quantum corrections to holographic entanglement entropy. *JHEP*, 11:074, 2013, 1307.2892.
- [22] Netta Engelhardt and Aron C. Wall. Quantum Extremal Surfaces: Holographic Entanglement Entropy beyond the Classical Regime. *JHEP*, 01:073, 2015, 1408.3203.
- [23] Ahmed Almheiri, Xi Dong, and Brian Swingle. Linearity of Holographic Entanglement Entropy. *JHEP*, 02:074, 2017, 1606.04537.
- [24] Xi Dong and Aitor Lewkowycz. Entropy, Extremality, Euclidean Variations, and the Equations of Motion. 2017, 1705.08453.

- [25] Nima Lashkari, Michael B. McDermott, and Mark Van Raamsdonk. Gravitational dynamics from entanglement 'thermodynamics'. *JHEP*, 04:195, 2014, 1308.3716.
- [26] Thomas Faulkner, Monica Guica, Thomas Hartman, Robert C. Myers, and Mark Van Raamsdonk. Gravitation from Entanglement in Holographic CFTs. *JHEP*, 03:051, 2014, 1312.7856.
- [27] Thomas Faulkner, Felix M. Haehl, Eliot Hijano, Onkar Parrikar, Charles Rabideau, and Mark Van Raamsdonk. Nonlinear Gravity from Entanglement in Conformal Field Theories. *JHEP*, 08:057, 2017, 1705.03026.
- [28] Patrick Hayden, Matthew Headrick, and Alexander Maloney. Holographic Mutual Information is Monogamous. *Phys. Rev.*, D87(4):046003, 2013, 1107.2940.
- [29] Ning Bao, Sepehr Nezami, Hiroshi Ooguri, Bogdan Stoica, James Sully, and Michael Walter. The Holographic Entropy Cone. *JHEP*, 09:130, 2015, 1505.07839.
- [30] Shamit Kachru, Xiao Liu, and Michael Mulligan. Gravity duals of Lifshitz-like fixed points. *Phys. Rev.*, D78:106005, 2008, 0808.1725.
- [31] Simon A. Gentle and Cynthia Keeler. On the reconstruction of Lifshitz spacetimes. *JHEP*, 03:195, 2016, 1512.04538.
- [32] Raphael Bousso, Stefan Leichenauer, and Vladimir Rosenhaus. Light-sheets and AdS/CFT. *Phys. Rev.*, D86:046009, 2012, 1203.6619.
- [33] Veronika E. Hubeny and Mukund Rangamani. Causal Holographic Information. *JHEP*, 06:114, 2012, 1204.1698.
- [34] Bartłomiej Czech, Joanna L. Karczmarek, Fernando Nogueira, and Mark Van Raamsdonk. The Gravity Dual of a Density Matrix. *Class. Quant. Grav.*, 29:155009, 2012, 1204.1330.
- [35] Aron C. Wall. Maximin Surfaces, and the Strong Subadditivity of the Covariant Holographic Entanglement Entropy. *Class. Quant. Grav.*, 31(22):225007, 2014, 1211.3494.
- [36] Veronika E. Hubeny. Covariant Residual Entropy. *JHEP*, 09:156, 2014, 1406.4611.
- [37] Matthew Headrick, Veronika E. Hubeny, Albion Lawrence, and Mukund Rangamani. Causality & holographic entanglement entropy. *JHEP*, 12:162, 2014, 1408.6300.
- [38] Daniel L. Jafferis, Aitor Lewkowycz, Juan Maldacena, and S. Josephine Suh. Relative entropy equals bulk relative entropy. *JHEP*, 06:004, 2016, 1512.06431.
- [39] Ahmed Almheiri, Xi Dong, and Daniel Harlow. Bulk Locality and Quantum Error Cor-

- rection in AdS/CFT. *JHEP*, 04:163, 2015, 1411.7041.
- [40] Fernando Pastawski, Beni Yoshida, Daniel Harlow, and John Preskill. Holographic quantum error-correcting codes: Toy models for the bulk/boundary correspondence. *JHEP*, 06:149, 2015, 1503.06237.
- [41] Xi Dong, Daniel Harlow, and Aron C. Wall. Reconstruction of Bulk Operators within the Entanglement Wedge in Gauge-Gravity Duality. *Phys. Rev. Lett.*, 117(2):021601, 2016, 1601.05416.
- [42] Alex Hamilton, Daniel N. Kabat, Gilad Lifschytz, and David A. Lowe. Holographic representation of local bulk operators. *Phys. Rev.*, D74:066009, 2006, hep-th/0606141.
- [43] Alex Hamilton, Daniel N. Kabat, Gilad Lifschytz, and David A. Lowe. Local bulk operators in AdS/CFT: A Holographic description of the black hole interior. *Phys. Rev.*, D75:106001, 2007, hep-th/0612053. [Erratum: *Phys. Rev.* D75,129902(2007)].
- [44] Ryszard Horodecki, Paweł Horodecki, Michał Horodecki, and Karol Horodecki. Quantum entanglement. *Rev. Mod. Phys.*, 81:865–942, Jun 2009. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.81.865>.
- [45] Ingemar Bengtsson and Karol Zyczkowski. *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement*. Cambridge University Press, 2006.
- [46] 菅原 祐二 江口 徹. 共形場理論. 岩波書店, 2015.
- [47] David Simmons-Duffin. The Conformal Bootstrap. In *Proceedings, Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics: New Frontiers in Fields and Strings (TASI 2015): Boulder, CO, USA, June 1-26, 2015*, pages 1–74, 2017, 1602.07982. URL <https://inspirehep.net/record/1424282/files/arXiv:1602.07982.pdf>.
- [48] Slava Rychkov. *EPFL Lectures on Conformal Field Theory in  $D=3$  Dimensions*. SpringerBriefs in Physics. 2016, 1601.05000. ISBN 9783319436258, 9783319436265. URL <http://inspirehep.net/record/1415968/files/arXiv:1601.05000.pdf>.
- [49] Elias Kiritsis. *String theory in a nutshell*. 2007.
- [50] J. Polchinski. *String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string*. Cambridge University Press, 2007. ISBN 9780511252273, 9780521672276, 9780521633031.
- [51] J. Polchinski. *String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond*. Cambridge University Press, 2007. ISBN 9780511252280, 9780521633048, 9780521672283.



- [52] Ofer Aharony, Steven S. Gubser, Juan Martin Maldacena, Hiroshi Ooguri, and Yaron Oz. Large N field theories, string theory and gravity. *Phys. Rept.*, 323:183–386, 2000, hep-th/9905111.
- [53] Ofer Aharony, Oren Bergman, Daniel Louis Jafferis, and Juan Maldacena. N=6 superconformal Chern-Simons-matter theories, M2-branes and their gravity duals. *JHEP*, 10:091, 2008, 0806.1218.
- [54] Edward Witten. Anti-de Sitter space and holography. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2:253–291, 1998, hep-th/9802150.
- [55] Vijay Balasubramanian, Per Kraus, and Albion E. Lawrence. Bulk versus boundary dynamics in anti-de Sitter space-time. *Phys. Rev.*, D59:046003, 1999, hep-th/9805171.
- [56] S. S. Gubser, Igor R. Klebanov, and Alexander M. Polyakov. Gauge theory correlators from noncritical string theory. *Phys. Lett.*, B428:105–114, 1998, hep-th/9802109.
- [57] Leonard Susskind and Edward Witten. The Holographic bound in anti-de Sitter space. 1998, hep-th/9805114.
- [58] Mark Van Raamsdonk. Lectures on Gravity and Entanglement. In *Proceedings, Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics: New Frontiers in Fields and Strings (TASI 2015): Boulder, CO, USA, June 1-26, 2015*, pages 297–351, 2017, 1609.00026. URL <http://inspirehep.net/record/1484863/files/arXiv:1609.00026.pdf>.
- [59] Juan Martin Maldacena. Eternal black holes in anti-de Sitter. *JHEP*, 04:021, 2003, hep-th/0106112.
- [60] Ping Gao, Daniel Louis Jafferis, and Aron Wall. Traversable Wormholes via a Double Trace Deformation. *JHEP*, 12:151, 2017, 1608.05687.
- [61] Masahiro Nozaki, Tokiro Numasawa, and Tadashi Takayanagi. Holographic Local Quenches and Entanglement Density. *JHEP*, 05:080, 2013, 1302.5703.
- [62] Tadashi Takayanagi. Holographic Dual of BCFT. *Phys. Rev. Lett.*, 107:101602, 2011, 1105.5165.
- [63] Mitsutoshi Fujita, Tadashi Takayanagi, and Erik Tonni. Aspects of AdS/BCFT. *JHEP*, 11:043, 2011, 1108.5152.
- [64] Thomas Hartman and Juan Maldacena. Time Evolution of Entanglement Entropy from

- Black Hole Interiors. *JHEP*, 05:014, 2013, 1303.1080.
- [65] Tokiro Numasawa, Noburo Shiba, Tadashi Takayanagi, and Kento Watanabe. EPR Pairs, Local Projections and Quantum Teleportation in Holography. *JHEP*, 08:077, 2016, 1604.01772.
- [66] Monica Guica, Thomas Hartman, Wei Song, and Andrew Strominger. The Kerr/CFT Correspondence. *Phys. Rev.*, D80:124008, 2009, 0809.4266.
- [67] Andrew Strominger. The dS / CFT correspondence. *JHEP*, 10:034, 2001, hep-th/0106113.
- [68] Albert Einstein, Boris Podolsky, and Nathan Rosen. Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47:777–780, 1935.
- [69] Masahito Hayashi, Satoshi Ishizaka, Akinori Kawachi, Gen Kimura, and Tomohiro Ogawa. *Introduction to Quantum Information Science*. Springer, 2014.
- [70] Matthias Christandl and Andreas Winter. “squashed entanglement” : An additive entanglement measure. *Journal of Mathematical Physics*, 45(3):829–840, 2004, <https://doi.org/10.1063/1.1643788>. URL <https://doi.org/10.1063/1.1643788>.
- [71] Matthew J Donald, Michał Horodecki, and Oliver Rudolph. The uniqueness theorem for entanglement measures. *Journal of Mathematical Physics*, 43(9):4252–4272, 2002, quant-ph/0105017.
- [72] Fumio Hiai and Dénes Petz. The proper formula for relative entropy and its asymptotics in quantum probability. *Communications in Mathematical Physics*, 143(1):99–114, Dec 1991. ISSN 1432-0916. URL <https://doi.org/10.1007/BF02100287>.
- [73] Tomohiro Ogawa and Hiroshi Nagaoka. Strong converse and stein’s lemma in quantum hypothesis testing. *IEEE Trans. Information Theory*, 46(7):2428–2433, 2000, quant-ph/9906090.
- [74] V. Vedral, M. B. Plenio, M. A. Rippin, and P. L. Knight. Quantifying entanglement. *Phys. Rev. Lett.*, 78:2275–2279, Mar 1997, quant-ph/9702027. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.78.2275>.
- [75] J Eisert, K Audenaert, and M B Plenio. Remarks on entanglement measures and non-local state distinguishability. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 36(20):5605, 2003. URL <http://stacks.iop.org/0305-4470/36/i=20/a=316>.
- [76] 高柳匡. ホログラフィー原理と量子エンタングルメント. サイエンス社, 2014.

- [77] Mukund Rangamani and Tadashi Takayanagi. Holographic Entanglement Entropy. *Lect. Notes Phys.*, 931:pp.1–246, 2017, 1609.01287.
- [78] Shinsei Ryu and Tadashi Takayanagi. Aspects of Holographic Entanglement Entropy. *JHEP*, 08:045, 2006, hep-th/0605073.
- [79] Tatsuma Nishioka, Shinsei Ryu, and Tadashi Takayanagi. Holographic Entanglement Entropy: An Overview. *J. Phys.*, A42:504008, 2009, 0905.0932.
- [80] Curtis G. Callan, Jr. and Frank Wilczek. On geometric entropy. *Phys. Lett.*, B333:55–61, 1994, hep-th/9401072.
- [81] Pasquale Calabrese and John L. Cardy. Entanglement entropy and quantum field theory. *J. Stat. Mech.*, 0406:P06002, 2004, hep-th/0405152.
- [82] Luca Bombelli, Rabinder K. Koul, Joohan Lee, and Rafael D. Sorkin. A Quantum Source of Entropy for Black Holes. *Phys. Rev.*, D34:373–383, 1986.
- [83] Mark Srednicki. Entropy and area. *Phys. Rev. Lett.*, 71:666–669, 1993, hep-th/9303048.
- [84] Horacio Casini, Marina Huerta, and Jose Alejandro Rosabal. Remarks on entanglement entropy for gauge fields. *Phys. Rev.*, D89(8):085012, 2014, 1312.1183.
- [85] R. Haag. *Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras*. Theoretical and Mathematical Physics. Springer Berlin Heidelberg, 1996. ISBN 9783540614517. URL <https://books.google.co.jp/books?id=VdyJQgAACAAJ>.
- [86] Sinya Aoki, Takumi Iritani, Masahiro Nozaki, Tokiro Numasawa, Noburo Shiba, and Hal Tasaki. On the definition of entanglement entropy in lattice gauge theories. *JHEP*, 06:187, 2015, 1502.04267.
- [87] Sinya Aoki, Norihiro Iizuka, Kotaro Tamaoka, and Tsuyoshi Yokoya. Entanglement Entropy for 2D Gauge Theories with Matters. *Phys. Rev.*, D96(4):045020, 2017, 1705.01549.
- [88] Sudip Ghosh, Ronak M Soni, and Sandip P. Trivedi. On The Entanglement Entropy For Gauge Theories. *JHEP*, 09:069, 2015, 1501.02593.
- [89] Ronak M Soni and Sandip P. Trivedi. Aspects of Entanglement Entropy for Gauge Theories. *JHEP*, 01:136, 2016, 1510.07455.
- [90] J. L. Cardy, O. A. Castro-Alvaredo, and B. Doyon. Form factors of branch-point twist fields in quantum integrable models and entanglement entropy. *J. Statist. Phys.*, 130:129–168, 2008, 0706.3384.

- [91] Pasquale Calabrese, John Cardy, and Erik Tonni. Entanglement entropy of two disjoint intervals in conformal field theory. *J. Stat. Mech.*, 0911:P11001, 2009, 0905.2069.
- [92] Matthew Headrick. Entanglement Renyi entropies in holographic theories. *Phys. Rev.*, D82:126010, 2010, 1006.0047.
- [93] H. Casini and M. Huerta. Entanglement entropy in free quantum field theory. *J. Phys.*, A42:504007, 2009, 0905.2562.
- [94] Pasquale Calabrese, John Cardy, and Erik Tonni. Entanglement entropy of two disjoint intervals in conformal field theory II. *J. Stat. Mech.*, 1101:P01021, 2011, 1011.5482.
- [95] J. David Brown and M. Henneaux. Central Charges in the Canonical Realization of Asymptotic Symmetries: An Example from Three-Dimensional Gravity. *Commun. Math. Phys.*, 104:207–226, 1986.
- [96] Thomas Hartman. Entanglement Entropy at Large Central Charge. 2013, 1303.6955.
- [97] Noah Linden and Andreas Winter. A new inequality for the von neumann entropy. *Communications in Mathematical Physics*, 259(1):129–138, Oct 2005. ISSN 1432-0916. URL <https://doi.org/10.1007/s00220-005-1361-2>.
- [98] J. Cadney, N. Linden, and A. Winter. Infinitely many constrained inequalities for the von neumann entropy. *IEEE Transactions on Information Theory*, 58(6):3657–3663, June 2012. ISSN 0018-9448.
- [99] Veronika E. Hubeny, Henry Maxfield, Mukund Rangamani, and Erik Tonni. Holographic entanglement plateaux. *JHEP*, 08:092, 2013, 1306.4004.
- [100] Thomas Faulkner. Bulk Emergence and the RG Flow of Entanglement Entropy. *JHEP*, 05:033, 2015, 1412.5648.
- [101] Hong Liu and Mark Mezei. A Refinement of entanglement entropy and the number of degrees of freedom. *JHEP*, 04:162, 2013, 1202.2070.
- [102] Dmitri V. Fursaev. Proof of the holographic formula for entanglement entropy. *JHEP*, 09:018, 2006, hep-th/0606184.
- [103] Horacio Casini, Marina Huerta, and Robert C. Myers. Towards a derivation of holographic entanglement entropy. *JHEP*, 05:036, 2011, 1102.0440.
- [104] Felix M. Haehl, Thomas Hartman, Donald Marolf, Henry Maxfield, and Mukund Rangamani. Topological aspects of generalized gravitational entropy. *JHEP*, 05:023, 2015,

- 1412.7561.
- [105] A. Vilenkin. Gravitational Field of Vacuum Domain Walls and Strings. *Phys. Rev.*, D23: 852–857, 1981.
- [106] J. Richard Gott, III. Gravitational lensing effects of vacuum strings: Exact solutions. *Astrophys. J.*, 288:422–427, 1985.
- [107] Xi Dong. The Gravity Dual of Renyi Entropy. *Nature Commun.*, 7:12472, 2016, 1601.06788.
- [108] Robert M. Wald. Black hole entropy is the Noether charge. *Phys. Rev.*, D48(8):R3427–R3431, 1993, gr-qc/9307038.
- [109] Vivek Iyer and Robert M. Wald. Some properties of Noether charge and a proposal for dynamical black hole entropy. *Phys. Rev.*, D50:846–864, 1994, gr-qc/9403028.
- [110] Taylor Barrella, Xi Dong, Sean A. Hartnoll, and Victoria L. Martin. Holographic entanglement beyond classical gravity. *JHEP*, 09:109, 2013, 1306.4682.
- [111] Taiki Miyagawa, Noburo Shiba, and Tadashi Takayanagi. Double-Trace Deformations and Entanglement Entropy in AdS. *Fortsch. Phys.*, 64:92–105, 2016, 1511.07194.
- [112] Michael M. Wolf, Frank Verstraete, Matthew B. Hastings, and J. Ignacio Cirac. Area laws in quantum systems: Mutual information and correlations. *Phys. Rev. Lett.*, 100: 070502, Feb 2008, 0704.3906. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.100.070502>.
- [113] Cesar Agón and Thomas Faulkner. Quantum Corrections to Holographic Mutual Information. *JHEP*, 08:118, 2016, 1511.07462.
- [114] Bin Chen, Zhong-Ying Fan, Wen-Ming Li, and Cheng-Yong Zhang. Holographic Mutual Information of Two Disjoint Spheres. 2017, 1712.05131.
- [115] David D. Blanco and Horacio Casini. Entanglement entropy for non-coplanar regions in quantum field theory. *Class. Quant. Grav.*, 28:215015, 2011, 1103.4400.
- [116] Pawel Caputa, Yuya Kusuki, Tadashi Takayanagi, and Kento Watanabe. Evolution of Entanglement Entropy in Orbifold CFTs. *J. Phys.*, A50(24):244001, 2017, 1701.03110.
- [117] H. Casini and M. Huerta. A Finite entanglement entropy and the c-theorem. *Phys. Lett.*, B600:142–150, 2004, hep-th/0405111.
- [118] H. Casini and Marina Huerta. On the RG running of the entanglement entropy of a circle.

- Phys. Rev.*, D85:125016, 2012, 1202.5650.
- [119] Robert M Wald. *General relativity*. Chicago Univ. Press, Chicago, IL, 1984. URL <https://cds.cern.ch/record/106274>.
- [120] H. Casini. Geometric entropy, area, and strong subadditivity. *Class. Quant. Grav.*, 21:2351–2378, 2004, hep-th/0312238.
- [121] Marika Taylor. Lifshitz holography. *Class. Quant. Grav.*, 33(3):033001, 2016, 1512.03554.
- [122] Petr Horava. Quantum Gravity at a Lifshitz Point. *Phys. Rev.*, D79:084008, 2009, 0901.3775.
- [123] Carlos Hoyos and Peter Koroteev. On the Null Energy Condition and Causality in Lifshitz Holography. *Phys. Rev.*, D82:084002, 2010, 1007.1428. [Erratum: *Phys. Rev.*D82,109905(2010)].
- [124] Daniel L. Jafferis and S. Josephine Suh. The Gravity Duals of Modular Hamiltonians. *JHEP*, 09:068, 2016, 1412.8465.
- [125] J. J Bisognano and E. H. Wichmann. On the Duality Condition for a Hermitian Scalar Field. *J. Math. Phys.*, 16:985–1007, 1975.
- [126] J. J Bisognano and E. H. Wichmann. On the Duality Condition for Quantum Fields. *J. Math. Phys.*, 17:303–321, 1976.
- [127] H. J. Borchers and J. Yngvason. Modular groups of quantum fields in thermal states. *J. Math. Phys.*, 40:601–624, 1999, math-ph/9805013.
- [128] Nima Lashkari, Charles Rabideau, Philippe Sabella-Garnier, and Mark Van Raamsdonk. Inviolable energy conditions from entanglement inequalities. *JHEP*, 06:067, 2015, 1412.3514.
- [129] Gábor Sárosi and Tomonori Ugajin. Modular Hamiltonians of excited states, OPE blocks and emergent bulk fields. *JHEP*, 01:012, 2018, 1705.01486.
- [130] David D. Blanco, Horacio Casini, Ling-Yan Hung, and Robert C. Myers. Relative Entropy and Holography. *JHEP*, 08:060, 2013, 1305.3182.
- [131] Jordan Cotler, Patrick Hayden, Grant Salton, Brian Swingle, and Michael Walter. Entanglement Wedge Reconstruction via Universal Recovery Channels. 2017, 1704.05839.
- [132] Tom Banks, Michael R. Douglas, Gary T. Horowitz, and Emil J. Martinec. AdS dynamics from conformal field theory. 1998, hep-th/9808016.

- [133] Daniel Kabat and Gilad Lifschytz. Local bulk physics from intersecting modular Hamiltonians. *JHEP*, 06:120, 2017, 1703.06523.
- [134] Thomas Faulkner and Aitor Lewkowycz. Bulk locality from modular flow. *JHEP*, 07:151, 2017, 1704.05464.
- [135] W. K. Wootters and W. H. Zurek. A single quantum cannot be cloned. *Nature*, 299(5886):802–803, October 1982. URL <http://dx.doi.org/10.1038/299802a0>.
- [136] Masamichi Miyaji and Tadashi Takayanagi. Surface/State Correspondence as a Generalized Holography. *PTEP*, 2015(7):073B03, 2015, 1503.03542.
- [137] Michael Freedman and Matthew Headrick. Bit threads and holographic entanglement. *Commun. Math. Phys.*, 352(1):407–438, 2017, 1604.00354.
- [138] Matthias Christandl. The structure of bipartite quantum states. insights from group theory and cryptography. Technical report, 2006, quant-ph/0604183.
- [139] Barbara M Terhal, Michał Horodecki, Debbie W Leung, and David P DiVincenzo. The entanglement of purification. *Journal of Mathematical Physics*, 43(9):4286–4298, 2002, quant-ph/0202044.
- [140] Shrobona Bagchi and Arun Kumar Pati. Monogamy, polygamy, and other properties of entanglement of purification. *Phys. Rev. A*, 91:042323, Apr 2015, 1502.01272. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.91.042323>.
- [141] Ben Ibinson, Noah Linden, and Andreas Winter. Robustness of quantum markov chains. *Communications in Mathematical Physics*, 277(2):289–304, Jan 2008. ISSN 1432-0916. URL <https://doi.org/10.1007/s00220-007-0362-8>.
- [142] Jianxin Chen and Andreas Winter. Non-additivity of the entanglement of purification (beyond reasonable doubt). 2012/06/06 2012, 1206.1307. URL <http://arxiv.org/abs/1206.1307v1>.
- [143] Phuc Nguyen, Trithep Devakul, Matthew G. Halbasch, Michael P. Zaletel, and Brian Swingle. Entanglement of purification: from spin chains to holography. *JHEP*, 01:098, 2018, 1709.07424.
- [144] Johannes Hauschild, Eyal Leviatan, Jens H Bardarson, Ehud Altman, Michael P Zaletel, and Frank Pollmann. Finding purifications with minimal entanglement. 2017, 1711.01288.
- [145] Ning Bao and Illan F. Halpern. Holographic Inequalities and Entanglement of Purification.

- JHEP*, 03:006, 2018, 1710.07643.
- [146] Masato Koashi and Andreas Winter. Monogamy of quantum entanglement and other correlations. *Phys. Rev. A*, 69:022309, Feb 2004. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.69.022309>.
- [147] Gilad Gour and Yu Guo. Monogamy of entanglement without inequalities. 10 2017, 1710.03295.
- [148] Bartłomiej Czech, Lampros Lamprou, Samuel McCandlish, and James Sully. Integral Geometry and Holography. *JHEP*, 10:175, 2015, 1505.05515.
- [149] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 10th edition, 2011. ISBN 1107002176, 9781107002173.
- [150] Masanori Ohya and Denes Petz. *Quantum Entropy and Its Use*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1993.
- [151] Martin B. Plenio and Shashank Virmani. An introduction to entanglement measures. *Quantum Info. Comput.*, 7(1):1–51, January 2007. ISSN 1533-7146. URL <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=2011706.2011707>.
- [152] Fernando G. S. L. Brandão, Matthias Christandl, and Jon Yard. Faithful squashed entanglement. *Communications in Mathematical Physics*, 306(3):805, Aug 2011. ISSN 1432-0916. URL <https://doi.org/10.1007/s00220-011-1302-1>.
- [153] Igor Devetak and Andreas Winter. Distillation of secret key and entanglement from quantum states. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 461(2053):207–235, 2005, <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/461/2053/207.full.pdf>. ISSN 1364-5021. URL <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/461/2053/207>.
- [154] M. B. Hastings. Superadditivity of communication capacity using entangled inputs. *Nature Physics*, 5:255 EP –, Mar 2009. URL <http://dx.doi.org/10.1038/nphys1224>.
- [155] Kaushik P Seshadreesan, Mario Berta, and Mark M Wilde. Renyi squashed entanglement, discord, and relative entropy differences. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 48(39):395303, 2015. URL <http://stacks.iop.org/1751-8121/48/i=39/a=395303>.