

# T-双対性についてのノート

今村 洋介

2016年1月5日

## 概要

超重力理論やブレーンに対する T-双対性についてまとめたものです。NS5-ブレーンを含む双対性について特に詳しく説明しています。以前ホームページに公開していましたが、ソースファイルが失われてしまったために、改めてその前半部分を打ち直したものです。いくつも間違いがあったので修正しましたが、まだかなりいい加減な部分がありますのでそのつもりで利用してください。レビューであり、オリジナルな部分はありませんが、文献リストは不完全です。不完全な部分は、後半も含め、おいおい付け足していこうと思います。

## 目次

<b>1</b>	<b>基本的事項</b>	<b>2</b>
1.1	Buscher 則	4
1.2	超重力理論の T-双対性	6
1.3	D-ブレーンの作用とその T-双対性	9
<b>2</b>	<b>Taub-NUT 空間</b>	<b>12</b>
2.1	Kaluza-Klein monopole	12
2.2	特異点	15
2.3	ケーラー形式	17
2.4	複素座標	19
2.5	モーメントマップとケーラーポテンシャル	24
2.6	ブローアップ	26
2.7	零モード	28
2.8	BPS 曲面	31
<b>3</b>	<b>NS5-brane の T-双対性</b>	<b>33</b>
3.1	NS5-brane 解	33
3.2	巻きついた NS5-ブレーン	35
3.3	巻きついていない NS5-ブレーン	35
3.4	中心電荷	37
3.5	NS5-ブレーン上の場	42

<b>4 Geometric engineering</b>	<b>46</b>
4.1 Hanany-Witten 系 . . . . .	47
4.2 $A_1$ 型特異点によるゲージ理論の構成 . . . . .	51
4.3 超ポテンシャルの導入 . . . . .	52
4.4 Glueball superpotential . . . . .	58
4.5 曲がった NS5-ブレーンと Calabi-Yau . . . . .	59
4.6 Gukov-Vafa-Witten ポテンシャル . . . . .	63

## 1 基本的事項

T-双対性は二つのコンパクト化された弦理論の間の双対性である。もっとも簡単な  $S^1$  コンパクト化の場合について、いくつかのオブジェクトの間の関係をまとめておこう。

もっとも古くから知られているのは Kaluza-Klein モードと弦の巻き付きモードの関係である。

$$\text{Kaluza-Klein modes} \leftrightarrow \text{Winding modes.} \quad (1)$$

Kaluza-Klein モードは、 $S^1$  コンパクト化された内部空間方向の運動量を持つモードの事である。 $S^1$  の半径が  $R$  であるとき、粒子の波動関数  $\psi(x)$  には境界条件  $\psi(x+2\pi R) = \psi(x)$  が課される。この境界条件により、並進演算子（運動量演算子） $\hat{p} = -i\partial_x$  の固有値は次のように離散的な値をとる。

$$p = \frac{1}{R}m, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

運動量がこの値をとるということは、エネルギーが少なくとも

$$E = \frac{|m|}{R} \quad (3)$$

になることを意味している。弦理論の場合に特徴的なのは、Kaluza-Klein モードだけではなく、弦の巻きつきモードも離散的なスペクトルを生成する点である。弦の張力を

$$T_{\text{str}} = \frac{1}{2\pi l_s^2} \quad (4)$$

としよう。半径が  $R$  の  $S^1$  に  $w$  回巻きつくと、そのエネルギーは最低でも

$$E = \frac{1}{2\pi l_s^2} \times 2\pi |w|R = \frac{|w|R}{l_s^2}, \quad w \in \mathbb{Z} \quad (5)$$

となる。

量子化された弦の質量スペクトルは Kaluza-Klein 運動量の寄与 (3)、巻きつきの寄与 (5)、そして弦の振動の寄与を組み合わせることによって次のように与えられる。

$$M^2 = \left(\frac{m}{R}\right)^2 + \left(\frac{Rw}{l_s}\right)^2 + \frac{2}{l_s^2}N. \quad (6)$$

$N$  は弦の励起を表す個数演算子であり非負整数の固有値を与える。(ボゾンの弦のようにタキオン状態を含む場合には負にもなり得るが、ここではそのような場合は考えない。)

(1) にあるように、T-duality 変換は巻きつきモードと Kaluza-Klein モードを入れ替える。このとき (3) と (5) が与えるスペクトルが入れ替わるためには、半径  $R$  を次の式によって決まる  $R'$  に置き換えればよい。

$$RR' = l_s^2. \quad (7)$$

内部空間のサイズがこのような関係にある二つの  $S^1$  コンパクト化された弦理論の等価性は、量子化された弦のスペクトル (6) だけでなく、弦の相互作用や、そのほかのブレーンを含めた場合でも成り立つと考えられている。

弦の世界面上の理論の立場からも見てみよう。コンパクト化された方向を表す世界面上のボゾン場を  $X(\sigma, \tau)$  とすると、T-双対性は次の変換として表される。

$$\partial_+ X \rightarrow \partial_+ X, \quad \partial_- X \rightarrow -\partial_- X. \quad (8)$$

ただし、光円錐座標  $\sigma^\pm = \tau \pm \sigma$  を導入した。これは閉弦の右回りモードのみパリティ変換を行うことを表しており、超弦の場合は対応する超対称電荷のカイラリティが反転する。このため T-duality 変換は IIA 型と IIB 型を入れ替える。 $\tau$  微分および  $\sigma$  微分を用いれば、(8) は次のように  $\tau$  微分と  $\sigma$  微分の入れ替えとして表される。

$$\partial_\tau X \rightarrow \partial_\sigma X, \quad \partial_\sigma X \rightarrow \partial_\tau X. \quad (9)$$

この変換は、開弦の端点における二種類の境界条件、Dirichlet 境界条件と Neumann 境界条件を入れ替えるので、D-brane は T-duality 変換のもとで次のように変換される。

$$\text{Wrapped } Dp\text{-branes} \leftrightarrow \text{Unwrapped } D(p-1)\text{-branes}. \quad (10)$$

D-brane のほかに、II 型超弦理論には NS5-brane と呼ばれるブレーンが存在する。これは巻きついている場合と巻きついていない場合に以下のように変換される。

$$\text{Wrapped NS5-branes} \leftrightarrow \text{Unwrapped NS5-branes}, \quad (11)$$

$$\text{Unwrapped NS5-branes} \leftrightarrow \text{Kaluza-Klein monopoles}. \quad (12)$$

これらの変換は超対称ゲージ理論を実現するブレーン系について調べるうえで有用である。詳細についてはあとで述べる。

この節を終る前に、単位系について触れておく。このノートでは弦の張力が定数であるような計量を用いる。すなわち、弦の作用のボゾン部分が次のように与えられ、 $l_s$  が定数であるような計量を取る。これは弦計量 (string metric) と呼ばれる。

$$S_{\text{str}} = -\frac{1}{2\pi l_s^2} \int d^2\sigma \sqrt{-\det G}, \quad G_{\alpha\beta} = \frac{\partial X^M}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial X^N}{\partial \sigma^\beta} G_{MN}. \quad (13)$$

さらに長さの単位を次のように決める。

$$2\pi l_s = 1. \quad (14)$$

この単位系の利点は、ブレーンの張力が以下のように簡単な形になることである。

$$T_{\text{str}} = \frac{1}{2\pi l_s^2} = 2\pi, \quad T_{Dp} = \frac{1}{(2\pi)^p l_s^{p+1} g_{\text{str}}} = \frac{2\pi}{g_{\text{str}}}, \quad T_{\text{NS5}} = \frac{1}{(2\pi)^5 l_s^6 g_{\text{str}}} = \frac{2\pi}{g_{\text{str}}^2}. \quad (15)$$

(14) の単位系では T-双対性の半径の関係式 (7) に  $RR' = 1/(2\pi)^2$  のように余計な  $2\pi$  が現れてしまうが、半径の変わりに周の長さ  $L = 2\pi R$  および  $L' = 2\pi R'$  を用いれば次のようにきれいな形になる。

$$LL' = 1. \quad (16)$$

そこで以下ではコンパクト化のサイズを表すときに主に半径ではなく周長を用いることにする。

## 1.1 Buscher 則

T-duality のもとでの世界面上の場の変換 (8) または (9) は、世界面上の電磁双対変換

$$\partial_\alpha X \rightarrow \eta_{\alpha\beta} \epsilon^{\beta\gamma} \partial_\gamma X \quad (17)$$

と解釈することができる。ただし

$$-\eta_{\tau\tau} = \eta_{\sigma\sigma} = \epsilon_{\tau\sigma} = -\epsilon^{\tau\sigma} = 1 \quad (18)$$

のように世界面上の計量、反対称テンソルを定義する。§1 では弦を量子化したときに現れるスペクトルの不変性から T-duality におけるコンパクト化のサイズの関係を導出したが、弦を量子化することが難しいような曲がった背景に対しても、(18) のような双対変換として背景の場に対する T-duality の公式を導くことができる [1]。

10 次元時空の座標を  $X^M = (X^i, X^9 \equiv Y)$  とする。この時空を運動する弦の作用は non-linear sigma model (NLSM) で記述することができ、そのボゾン部分は次のように与えられる。

$$S[X^i, \partial_\alpha X^i, \partial_\alpha Y] = \int d^2\sigma \left( -\frac{T_{\text{str}}}{2} G_{MN} \partial_\alpha X^M \partial^\alpha X^N + \frac{2\pi}{2} B_{MN} \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^M \partial_\beta X^N \right). \quad (19)$$

$G_{MN}$  および  $B_{MN}$  は  $X^i$  の関数であり、背景時空の計量及び反対称テンソル場を表す。作用  $S$  の引数にも示されているように、この作用は  $Y$  を微分の形だけで含み、微分の無い  $Y$  は現れないと仮定しよう。これは  $G_{MN}$  および  $B_{MN}$  が  $Y$  に依存しないことを意味する。さらに  $Y$  方向が周期 1 でコンパクト化されている場合、すなわち  $Y \sim Y + 1$  の同一視がなされている場合を考える。このとき、弦の巻きつき数  $w_y$  は次のように与えられる。

$$w_y = \oint \partial_\sigma Y d\sigma \in \mathbb{Z}. \quad (20)$$

積分は閉弦を一周するように行う。

世界面上の場  $Y$  に対する双対変換を行うために、まず作用 (19) を次のように書き換える。

$$S' = S[X^i, \partial_\alpha X^i, F_\alpha] + 2\pi \int d^2\sigma \epsilon^{\alpha\beta} (\partial_\alpha Z) F_\beta. \quad (21)$$

右辺第 1 項は (19) に含まれる  $\partial_\alpha Y$  を補助場  $F_\alpha$  で置き換えたものである。第二項に含まれる場  $Z$  が  $Y$  に対する双対場である。以下で見るように、 $Z$  も周期 1 でコンパクト化されているとすれば、この作用が与える理論は (19) と等価になる。

(21) が実際に (19) と等価であることを示しておこう。\$Z\$ に対する運動方程式は \$\epsilon^{\alpha\beta}\partial\_\alpha F\_\beta = 0\$ を与える。これは局所的には \$F\_\alpha\$ が全微分として与えられることを意味するから、\$F\_\alpha = \partial\_\alpha Y\$ と置くことができる。(21) にこの解を代入すれば元の作用 (19) が得られる。\$Y\$ の境界条件 (周期性) は \$Z\$ 方向の Kaluza-Klein 運動量の量子化条件によって与えられる。実は (20) で定義される \$Y\$ 空間での巻き付き数は \$Z\$ のゼロモードに対する正準運動量 \$p\_z\$ にほかならない。

$$p_z = \int d\sigma \frac{\delta S}{\delta \partial_\tau Z} = 2\pi \int d\sigma \partial_\sigma Y = 2\pi w_y. \quad (22)$$

\$Z\$ の周期は 1 にとってあるから、Kaluza-Klein 運動量の量子化条件は \$p\_z = 2\pi m\_z\$ (\$m\_z \in \mathbb{Z}\$) である。これは (20) で定義される巻き付き数が整数であること、そして \$Y\$ 空間のコンパクト化の周期が 1 であることを意味している。こうして (21) と (19) が場の周期性まで含めて等価であることが示された。

双対場 \$Z\$ を用いたラグランジアンは \$F\_\alpha\$ に対する運動方程式を解いて \$S'\$ に代入することで得られる。

$$\tilde{S}[X^i, \partial_\alpha X^i, \partial_\alpha Z] = \int d^2\sigma \left( -\frac{T_{\text{str}}}{2} G'_{MN} \partial_\alpha X'^M \partial^\alpha X'^N + \frac{2\pi}{2} B'_{MN} \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X'^M \partial_\beta X'^N \right). \quad (23)$$

ただし、\$X'^M\$ は、始め 9 成分は \$X^M\$ と同じで、\$X^9 = Y\$ が \$X'^9 = Z\$ に置き換えられたものを表す。また、\$G'\_{MN}\$ と \$B'\_{MN}\$ は以下のように与えられる。

$$G'_{ij} = G_{ij} - \frac{G_{i9}G_{j9}}{G_{99}}, \quad G'_{i9} = \frac{B_{i9}}{G_{99}}, \quad G'_{99} = \frac{1}{G_{99}}, \quad (24)$$

$$B'_{ij} = B_{ij} - \frac{B_{i9}G_{j9} - G_{i9}B_{j9}}{G_{99}}, \quad B'_{i9} = \frac{G_{i9}}{G_{99}}. \quad (25)$$

これが計量と反対称テンソル場に対する T-duality 変換公式であり、Buscher 則と呼ばれる [1]。\$G\_{99}\$ に対する変換則は、\$\mathbf{S}^1\$ のサイズに対する関係式 (16) を再現している。

計量と反対称テンソル場を加えたテンソル場

$$C_{MN} = G_{MN} + B_{MN} \quad (26)$$

を定義しておく、上記の変換則は次のようにやや簡単な形にまとめることができる。

$$C'_{ij} = C_{ij} - \frac{C_{i9}C_{j9}}{C_{99}}, \quad C'_{9j} = -\frac{C_{9j}}{C_{99}}, \quad C'_{i9} = \frac{C_{i9}}{C_{99}}, \quad C'_{99} = \frac{1}{C_{99}}. \quad (27)$$

この変換は二回繰り返すと元に戻る。従って (27) の逆変換は単に \$C\_{MN}\$ と \$C'\_{MN}\$ を入れ替えることによって得られる。

計量と反対称テンソル場を次のような形で書いておくのも便利である。

$$ds^2 = ds_9^2 + G_{99}(dy + V)^2, \quad B_2 = b_2 + W \wedge (dy + V). \quad (28)$$

右辺に現れる \$ds\_9^2\$、\$G\_{99}\$、\$V\$、\$b\_2\$、\$W\$ などは \$\mathbf{S}^1\$ コンパクト化を行った後の 9 次元有効理論に現れる場である。T-duality 変換後の計量および反対称テンソル場はこれらの場を用いて次のように与えられる。

$$ds'^2 = ds_9^2 + \frac{1}{G_{99}}(dz + W)^2, \quad B'_2 = b_2 + V \wedge dz. \quad (29)$$

(28) と (29) を比較するとほぼ対称であるが  $B$  場の形が一見異なることに注意しよう。(28) では  $B$  場の中で  $dy$  が  $V$  を伴って現れているのに対して (29) では  $dz$  は  $W$  を伴っていない。しかしこの非対称性は見かけ上のもので、 $b_2$  を  $b_2 + V \wedge W$  で置き換えれば、(28) の  $B$  場の中の  $dy + V$  が  $dy$  になり、(29) の  $B$  場に含まれる  $dz$  が  $dz + W$  になる。

さらに [1] では世界面上の量子効果 (つまり、 $\alpha'$  展開の高次項) についても議論することによりディラトン場が次のように変換されるべきことを導いている。

$$\frac{1}{e^{2\phi'}} = \frac{G_{99}}{e^{2\phi}}. \quad (30)$$

この関係式は、以下で見るように超重力理論の間の T-duality から得ることができる。

## 1.2 超重力理論の T-双対性

§1.1 で得たものと同じ結果を、超重力理論のコンパクト化を行うことによっても得ることができる [2]。IIA および IIB 型超重力理論のボゾン部分は NS-NS セクターと R-R セクターに分けられる。IIA 型と IIB 型の違いは R-R セクターにあり、NS-NS セクターはまったく同じ構造をしている。

$$\mathcal{L}_{\text{NS}}^{\text{IIA}} = \frac{2\pi e^A}{e^{2\phi^A}} \left[ R^A + 4(\partial_\mu \phi^A)^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!} (H_{\mu\nu\rho}^A)^2 \right], \quad (31)$$

$$\mathcal{L}_{\text{NS}}^{\text{IIB}} = \frac{2\pi e^B}{e^{2\phi^B}} \left[ R^B + 4(\partial_\mu \phi^B)^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!} (H_{\mu\nu\rho}^B)^2 \right]. \quad (32)$$

IIA 型理論の場と IIB 型理論の場を区別するために添え字  $A$  または  $B$  をつけた。 $e^A$  および  $e^B$  は IIA 型および IIB 型それぞれの多脚場の行列式  $\det e_\mu^m$  を表している。反対称テンソル場  $H_3$  はビアンキ恒等式  $dH_3 = 0$  を満足し、ポテンシャル  $B_2$  を用いて次のように与えられる。

$$H_3 = dB_2. \quad (33)$$

ここでは  $H_3$  の積分として定義されるチャージが整数に量子化される規格化を採用している。

さて、IIA 型の超重力理論と IIB 型の超重力理論を  $S^1$  でコンパクト化して比較してみよう。まず IIA 型超重力理論の  $S^1$  コンパクト化を考える。ここでは  $y \equiv x^9$  方向を周期 1 でコンパクト化することとし、コンパクト化のサイズは計量の成分  $g_{99}^A$  が担っているとする。さらに、全ての場が  $y$  に依存しないとする。(後に IIB 型理論のコンパクト化を考える際にはコンパクト化される座標に別の文字  $z \equiv x^9$  を用いることにする。) この仮定は前節で用いた仮定と同じである。(28) に倣って計量は次のように置こう。

$$ds_A^2 = g_{\mu\nu}^{(9)} dx^\mu dx^\nu + e^{2\sigma} \widetilde{dy}^2, \quad \widetilde{dy} = dy + V_1. \quad (34)$$

ここで  $S^1$  のサイズを表すスカラー場  $\sigma$  を  $e^{2\sigma} = g_{99}^A$  によって導入した。 $y$  座標の周期が 1 であるから、コンパクト化のプロパーな周期は  $L_A = (2\pi l_s) e^\sigma$  と与えられる。 $V_1$  は  $y$  座標の原点の取替えの自由度に対応する  $U(1)$  ゲージ場であり、座標変換  $y \rightarrow y' = y + a(x^\mu)$  のもとで次のようにゲージ変換される。

$$V_1' = V_1 - da. \quad (35)$$

(34) で定義されている 1-形式  $\widetilde{dy}$  はこのゲージ変換のもとで不変な共変微分である。1-形式  $\widetilde{dy}$  は  $dy$  とは異なり、その外微分が 0 ではないことに注意すること。

$$d(\widetilde{dy}) = dV_1 =: f_2. \quad (36)$$

反対称テンソル場についても (28) に倣って次のように分解しよう。

$$H_3^A = h_3 + h_2 \wedge \widetilde{dy}, \quad B_2^A = b_2 + W_1 \wedge \widetilde{dy}. \quad (37)$$

ここで  $\widetilde{dy}$  の代わりに  $dy$  を用いることもできるが、(37) のように  $\widetilde{dy}$  を用いることによって (37) において定義された場  $h_3$ 、 $h_2$ 、 $b_2$ 、 $W_1$  はゲージ変換 (35) のもとで不変になる。ポテンシャル  $b_2$  と  $W_1$  および場の強さ  $h_3$  および  $h_2$  の関係は (37) を (33) に代入し、(36) を用いることで次のように得られる。

$$h_3 = db_2 - W_1 \wedge dV_1, \quad h_2 = dW_1. \quad (38)$$

9 次元の有効ラグランジアンを書く前に、ディラトン場  $\phi^A$  の代わりに 9 次元でのディラトン場  $\varphi$  を次のように定義しておくのがよい。

$$\phi^A = \varphi + \frac{1}{2}\sigma. \quad (39)$$

全ての場は  $S^1$  座標  $y$  に依存しないものとしてこれらを (31) に代入すると、9 次元での有効ラグランジアンは次のように得られる。

$$\mathcal{L}_{\text{NS}}^{9\text{dim}} = \frac{2\pi e^{(9)}}{e^{2\varphi}} \left[ R^{(9)} + 4(\partial_\mu \varphi)^2 - (\partial_\mu \sigma)^2 - \frac{e^{2\sigma}}{4} f_{\mu\nu}^2 - \frac{e^{-2\sigma}}{4} h_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!} h_{\mu\nu\rho}^2 \right]. \quad (40)$$

実は、これと全く同じ 9 次元の理論の作用が IIB 型超重力理論の NS-NS 場の作用 (32) を次のようにコンパクト化することによっても得ることができる。

$$ds_B^2 = g_{\mu\nu}^{(9)} dx^\mu dx^\nu + e^{-2\sigma} \widetilde{dz}^2, \quad \widetilde{dz} = dx^9 + W_1, \quad (41)$$

$$H_3^B = h_3 + f_2 \wedge \widetilde{dz}, \quad B_2^B = b_2 + V_1 \wedge dz, \quad (42)$$

$$\phi^B = \varphi - \frac{1}{2}\sigma. \quad (43)$$

計量と反対称テンソル場の形は以前に世界面上の双対変換によって得られた結果 (29) と一致している。また、ディラトン場については (39) と (43) を組み合わせることで (30) に対応する次の式が得られる。

$$\frac{1}{e^{2\phi^B}} = \frac{g_{99}^A}{e^{2\phi^A}}. \quad (44)$$

次に、R-R 場の関係について考えよう。IIB 型超重力理論の R-R 場には自己双対条件に従う 5-形式場  $G_5^B$  が含まれるため、作用を用いた議論を厳密に行うことは難しい。そこで運動方程式を用いて議論しよう。

IIA 型超重力理論に含まれる R-R 場の場の強さは、ランクが偶数である反対称テンソル場である。また、IIB 型超重力理論の R-R 場の場の強さはランクが奇数である。これらを外微分形式で表して形式的な和を取ったものを  $G_{\text{even}}^A$  および  $G_{\text{odd}}^B$  と置く。

$$G_{\text{even}}^A = G_0^A + G_2^A + G_4^A + G_6^A + G_8^A + G_{10}^A, \quad G_{\text{odd}}^B = G_1^B + G_3^B + G_5^B + G_7^B + G_9^B. \quad (45)$$

これらはどちらも互いに双対関係にある場を含んでいるが、このように形式的な和をとることで次の自己双対条件として表すことができる。

$$*^{10}G_{\text{even}}^A + \mathcal{T}G_{\text{even}}^A, \quad *^{10}G_{\text{odd}}^B + \mathcal{T}G_{\text{odd}}^B. \quad (46)$$

ただし  $\mathcal{T}$  は外微分形式の転置を表す記号であり、

$$\mathcal{T}(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n}) = dx^{i_n} \wedge \cdots \wedge dx^{i_1} \quad (47)$$

によって定義される。R-R 場の運動方程式とビアンキ恒等式は次のように IIA 型、IIB 型それぞれ一つの式にまとめることができる。

$$dG_{\text{even}}^A = H_3^A \wedge G_{\text{even}}^A, \quad dG_{\text{odd}}^B = H_3^B \wedge G_{\text{odd}}^B. \quad (48)$$

以下ではこれらを単に運動方程式と呼ぶことにする。

これら二つの運動方程式がコンパクト化の結果 9 次元の同じ運動方程式を与えることを示そう。まず IIA 型超重力理論の  $S^1$  コンパクト化を考える。 $y \equiv x^9$  方向でコンパクト化を行うにあたり、R-R 場の強さを次のように分解しよう。

$$G_{\text{even}}^A = g_{\text{even}} + g_{\text{odd}} \wedge \widetilde{dy}. \quad (49)$$

$\widetilde{dy}$  は (34) で定義されている。

IIA 型理論における自己双対条件 (46) と運動方程式 (48) を  $g_{\text{even}}$  と  $g_{\text{odd}}$  で書き換えてみよう。 $G_{\text{even}}^A$  に対する 10 次元での Hodge 双対は 9 次元において次のように分解される。

$$*^{10}G_{\text{even}}^A = e^{-\sigma} *^9 g_{\text{odd}} + e^{\sigma} (*^9 g_{\text{even}}) \wedge \widetilde{dy}. \quad (50)$$

$\sigma$  は (34) で定義された、 $y$  方向の計量を与えるスカラー場である。これを用いて  $G_{\text{even}}^A$  に対する自己双対条件 (46) を 9 次元の場に対する関係式に読み替えると、次の式を得る。

$$e^{-\sigma} *^9 g_{\text{odd}} = -\mathcal{T}g_{\text{even}}, \quad e^{\sigma} *^9 g_{\text{even}} = \mathcal{T}g_{\text{odd}}. \quad (51)$$

9 次元で二回 Hodge 双対を取るとマイナス符号が現れることに注意すれば、これら二つが同じものであることがわかる。

次に (48) に与えられた  $G_{\text{even}}^A$  に対する運動方程式に展開式 (49) を代入し、 $\widetilde{dy}$  を服含む部分と含まない部分とに分けると、独立な二つの式を得ることができる。

$$dg_{\text{even}} = h_3 \wedge g_{\text{even}} + f_2 \wedge g_{\text{odd}}, \quad dg_{\text{odd}} = h_3 \wedge g_{\text{odd}} + h_2 \wedge g_{\text{even}}. \quad (52)$$

以上は IIA 型超重力理論のコンパクト化の話であったが、実は IIB 型の R-R 場  $G_{\text{odd}}^B$  が

$$G_{\text{odd}}^B = -g_{\text{odd}} + g_{\text{even}} \wedge \widetilde{dz} \quad (53)$$

と与えられると仮定して IIB 型理論の運動方程式 (48) および自己双対条件 (46) に代入しても同じ関係式 (51) と (52) を得ることができる。すなわち R-R セクターについても  $S^1$  コンパクト化された二つの理論は等価であり、場  $G_{\text{even}}^A$  と  $G_{\text{odd}}^B$  の関係は 9 次元の場  $g_{\text{even}}$  と  $g_{\text{odd}}$  を通して (49) と (53) によって与えられる。



R-R ポテンシャルについても見ておこう。ここでは  $G_0^A = 0$  の場合のみを考えることにする。 $(G_0^A \neq 0$  である場合には、T-duality 変換を行うと  $x^9$  座標に依存する場の配位が現れる。ここでは全ての場が  $x^9$  座標に依存しない場合のみを考えることにする。) このとき (48) を満足する場の強さは、ポテンシャルを用いて次のように書くことができる。

$$G_{\text{even}}^A = e^{B_2^A} \wedge dC_{\text{odd}}^A, \quad G_{\text{odd}}^B = e^{B_2^B} \wedge dC_{\text{even}}^B. \quad (54)$$

このようにして定義される IIA 理論の  $C_{\text{odd}}^A$  と IIB 理論の  $C_{\text{even}}^B$  は 9 次元のポテンシャル  $c_{\text{even}}$  と  $c_{\text{odd}}$  を通して次のように関係している。

$$C_{\text{odd}}^A = c_{\text{odd}} + c_{\text{even}} \wedge dy, \quad C_{\text{even}}^B = -c_{\text{even}} + c_{\text{odd}} \wedge dz. \quad (55)$$

ここでは  $\widetilde{dy}$  や  $\widetilde{dz}$  ではなく  $dy$  と  $dz$  を用いていることに注意。(54) に対して  $B_2$  の展開式 (37) と (42)、そして R-R ポテンシャルの展開式 (55) を代入すると、場の強さがどちらも (49) や (53) のように分解されることがわかる。ただし、9 次元での場の強さは次のように与えられる。

$$g_{\text{even}} = e^{b_2} \wedge (dc_{\text{odd}} - dc_{\text{even}} \wedge V_1), \quad g_{\text{odd}} = e^{b_2 - V_1 \wedge W_1} \wedge (dc_{\text{even}} + dc_{\text{odd}} \wedge W_1). \quad (56)$$

以上で NS-NS 場、R-R 場両方について T-dual 変換則を得ることができた。(ここまでの議論では NS-NS 場の運動方程式に現れる R-R 場を考慮していないので完全な証明にはなっていないが、それらを考慮しても理論の等価性を実際に示すことができる。これについてはここでは省略する。)

### 1.3 D-ブレーンの作用とその T-双対性

§1.2 において、超重力理論に含まれるボゾン場に対する T-duality 変換則を与えた。ここではその変換則に従って変換されるような背景に置かれた D-ブレーンがどのように変換されるかを、D-ブレーンの低エネルギー有効作用を用いて議論する。

IIA 型超重力理論の  $D(2n-2)$  ブレーンと IIB 型超重力理論の  $D(2n-1)$  ブレーンの関係について考えることにしよう。超重力理論の作用が NS-NS 場の部分と R-R 場の部分に分けられたように、D-ブレーンの作用も二つの部分に分けて考えるのが便利である。まず一つ目は NS-NS 場との結合を表す Born-Infeld 作用である。

$$\frac{S_{\text{BI}}^A}{2\pi} = - \int d^{2n-1} \sigma \frac{1}{e^{\phi^A}} \sqrt{-\det[C_{ij}^{A*} + F_{ij}^A]}, \quad \frac{S_{\text{BI}}^B}{2\pi} = - \int d^{2n} \sigma \frac{1}{e^{\phi^B}} \sqrt{-\det[C_{ij}^{B*} + F_{ij}^B]}. \quad (57)$$

ただし  $C_{MN} = g_{MN} + B_{MN}$  は (26) で定義されたものである。 $C_{ij}^*$  は  $C_{MN}$  のブレーン上への引き戻しを表す。超重力理論の NS-NS セクターが IIA 型と IIB 型で同じ形をしていたのに対応して、Born-Infeld 作用は IIA 型超重力理論においても IIB 型超重力理論においても形が変わらない。

一方、R-R 場との結合を表す Chern-Simons 項は次のように与えられる。

$$S_{\text{CS}}^{\text{IIA}} = 2\pi \int_{2n-1} C_{\text{odd}}^A e^{-F_2^A}, \quad S_{\text{CS}}^{\text{IIB}} = 2\pi \int_{2n} C_{\text{even}}^B e^{-F_2^B}. \quad (58)$$

こちらも形はほとんど同じであるが、反対称テンソル  $C$  のランクが IIA 型では奇数、IIB 型では偶数である。

以下ではこれらが実際に T-双対変換と矛盾しないことを示そう。(10) に与えたように T-duality 変換はコンパクト化された方向に巻きついた D-ブレーンと巻きついていない D-ブレーンを入れ替える。ここでは IIA 型理論側で巻きついていない D-ブレーンが IIB 型理論側の巻きついたブレーンに変換される場合を考える。(図 1)

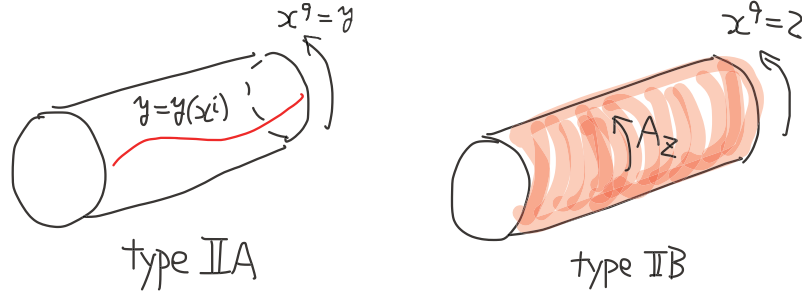


図 1: IIA 型理論の巻きついていない D-ブレーンは T-duality によって IIB 型理論の巻きついた D-ブレーンへと移される。それに伴い  $S^1$  方向の位置を表すスカラー場は Wilson line へと移される。

IIA 型理論側でのコンパクト化された座標を  $y = x^9$  としよう。この方向にまきついていないブレーンの  $S^1$  上の位置は、この  $y$  座標をブレーン上の座標の関数として与えることで決まる。すなわち IIA 型理論の側では  $y$  座標をブレーン上のスカラー場とみなすことができる。

IIB 側のまきついたブレーンにおいて、対応する自由度はコンパクト化された方向の Wilson line、すなわちゲージポテンシャル  $A_9$  の値である。つまり、ブレーン上の場の T-双対性による変換は次のように与えられる。

$$A_\mu^B = A_\mu^A, \quad A_9^B = y. \quad (59)$$

あるいはこの式は次のように書くこともできる。

$$A_1^B = A_1^A + y dz. \quad (60)$$

ここで、IIB 型理論側の  $S^1$  座標として  $z$  を用いた。このような対応関係のもとで作用が等価になることを以下で示す。

まず、Born-Infeld 作用 (57) からはじめよう。IIA 型超重力理論において  $y$  方向にまきついていない D ブレーンの  $C_{MN}$  のブレーン上への引き戻し  $C_{ij}^*$  は次のように与えられる。

$$C_{ij}^* = C_{ij} + C_{i9} \frac{\partial y}{\partial x^i} + C_{9i} \frac{\partial y}{\partial x^j} + C_{99} \frac{\partial y}{\partial x^i} \frac{\partial y}{\partial x^j}. \quad (61)$$

ただし、背景時空の座標として、ブレーンの広がっている方向に対して  $\sigma^i = x^i$  となるような座標を取っていると仮定した。背景の場  $C_{MN} = G_{MN} + B_{MN}$  に対して  $y$  方向への T-双対変換はすでに (27) に与えられている。ここでは (27) の逆変換を用いるほうが便利

であるが、逆変換はもとの変換と全く同じ形をしている。(61) と (27) を組み合わせれば、(57) の行列式の中身を次のように書き換えることができる。

$$C_{ij}^{A*} + F_{ij}^A = C_{ij}^B + F_{ij}^A - \frac{1}{C_{99}^B} (C_{i9}^B + \partial_i y)(C_{9j}^B - \partial_j y). \quad (62)$$

この式の両辺はサイズが  $2n-1$  の正方行列である。この両辺の行列式を取ろう。実は、右辺の行列式はサイズが  $2n$  の正方行列の行列式として表すことができる。

$$\det(C_{ij}^{A*} + F_{ij}^A) = \frac{1}{C_{99}^B} \det \begin{pmatrix} C_{ij}^B + F_{ij}^A & C_{i9}^B + \partial_i y \\ C_{9j}^B - \partial_j y & C_{99}^B \end{pmatrix}. \quad (63)$$

さらに (59) または (60) より IIB 型理論における巻きついた  $2n-1$  ブレーン上のゲージ場の強さが次のように与えられる。

$$F_2^B = F_2^A + dy \wedge dz. \quad (64)$$

あるいは成分で書けば

$$F_{ij}^B = F_{ij}^A, \quad F_{i9}^B = -F_{9i}^B = \partial_i y \quad (65)$$

である。これらのゲージ場に対する関係式と、(44) に与えられているディラトン場の間の関係式を用いると (63) の関係式が次のように書ける。

$$\frac{1}{e^{\phi^A}} \sqrt{-\det(C_{ij}^{A*} + F_{ij}^A)} = \frac{1}{e^{\phi^B}} \sqrt{-\det(C_{\mu\nu}^B + F_{\mu\nu}^B)}. \quad (66)$$

これにより IIA 型 D-ブレーンの Born-Infeld 作用と IIB 型 D-ブレーンの Born-Infeld 作用が、 $x^9$  座標に依存する Kaluza-Klein モードを無視する限りにおいて互いに T-duality 変換を通して等価であることが示された。

次に、Chern-Simons 項 (58) について考えよう。今度は IIB 型理論の作用から出発して (55) および (64) を代入すれば、次の式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{S_{CS}^{\text{IIB}}}{2\pi} &= \int_{2n} (-c_{\text{even}} + c_{\text{odd}} \wedge dz) \wedge e^{-F_2^A - dy \wedge dz} \\ &= \int_{2n} (c_{\text{even}} \wedge dy + c_{\text{odd}}) \wedge dz \wedge e^{-F_2^A}. \end{aligned} \quad (67)$$

二行目を得るのに、IIB 型理論のブレーンが  $z$  方向に巻きついており、 $dz$  を含まない項は積分に寄与しないことを用いた。 $dz$  方向の積分を実行すれば次のように IIA 型理論の D-brane の Chern-Simons 項を得る。

$$\int_{2n-1} (c_{\text{even}} \wedge dy + c_{\text{odd}}) \wedge e^{-F_2^A} = \int_{2n-1} C_{\text{odd}}^A \wedge e^{-F_2^A} = \frac{S_{CS}^{\text{IIA}}}{2\pi}. \quad (68)$$

従って Chern-Simons 項についても、二つの作用は T-duality 変換で結びついている。

最後に、あとで用いるために D-brane 上のゲージ不変な場の強さ  $\mathcal{F}_2 = F_2 + B_2^*$  についても変換式を与えておこう。NS-NS 2-form 場の変換式は、(37) と (42) を組み合わせれば

$$B_2^B = B_2^A - W_1 \wedge \widetilde{dy} + V_1 \wedge dz \quad (69)$$

である。これと (64) を加えれば、次の式が得られる。

$$\mathcal{F}_2^B = \mathcal{F}_2^A + \widetilde{dy} \wedge \widetilde{dz}. \quad (70)$$

これは (64) と似ているが、 $dy$  や  $dz$  がゲージ不変な形で現れている。

## 2 Taub-NUT 空間

この節では、Taub-NUT 空間の幾つかの基本的な性質について述べる。Taub-NUT 空間は 4 次元のハイパーケーラー空間であるが、NS5-brane の T-dual として自然に現れ、弦理論の双対性を議論するうえで重要な役割を果たす。この T-dual の関係についてはこの節での結果を踏まえて次節で解説する。

### 2.1 Kaluza-Klein monopole

一般に重力を含む  $D$  次元理論を  $S^1$  コンパクト化すると、 $D-1$  次元の理論には  $U(1)$  のベクトル場が一つ現れる。このベクトル場を  $W$  とすると、計量の中に次のように含まれる。

$$ds_D^2 = ds_{D-1}^2 + g_{zz} \widetilde{dz}^2, \quad \widetilde{dz} = dz + W. \quad (71)$$

ここでは IIB 型理論の  $S^1$  コンパクト化で用いた記号を用いることにし、 $S^1$  方向の座標を  $z$ 、 $U(1)$  ベクトル場を  $W$  と表すことにする。このゲージ場は (35) でも述べたように、 $S^1$  方向への並進対称性に対応するものである。

ゲージ場  $W$  に対する電荷を持つ場が何であるかを見るために、コンパクト化する前の時空にスカラー場  $\phi$  が存在したとして、そのラグランジアンが

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \quad (72)$$

によって与えられると仮定しよう。ここでは特にコンパクト化される理論は特定せず、 $\phi$  も任意の場であるとする。ここではスカラー場として扱うが、テンソル場やフェルミオン場であっても同様の議論ができる。 $y$  方向に周期 1 でコンパクト化し、スカラー場を

$$\phi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi_n e^{2\pi i n z} \quad (73)$$

とフーリエ展開しよう。それぞれのモードの係数  $\phi_n$  は  $z$  依存性をもたない  $D-1$  次元の場であると解釈される。展開式 (73) を (72) に代入し、内部空間の座標  $z$  について積分すると、 $D-1$  次元理論のラグランジアンが次のように与えられる。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sqrt{g_{zz}} \sqrt{-g'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[ g'^{ij} D_i \phi_n D_j \phi_{-n} + \frac{1}{g_{zz}} q_n^2 \phi_n \phi_{-n} \right]. \quad (74)$$

ただし  $g'^{ij}$  は (71) で定義される  $D-1$  次元計量  $ds_{D-1}^2$  の成分  $g'_{ij}$  の逆行列、 $g'$  は  $g'_{ij}$  の行列式である。 $D_i$  は次のように定義される共変微分である。

$$D_i \phi_n = \partial_i \phi_n - i W_i q_n \phi_n. \quad (75)$$

$q_n$  は Kaluza-Klein 運動量  $p_z$  の値であり、次のように与えられる。

$$q_n = 2\pi n. \quad (76)$$

共変微分 (75) の形から、Kaluza-Klein モード  $\phi_n$  がゲージ場  $W_i$  と結合しており  $q_n$  がその電荷を与えていることがわかる。

次に、 $W_1$  に磁氣的に結合するオブジェクト、すなわちモノポールについて考えてみよう。 $W_1$  のようにコンパクト化によって現れた  $U(1)$  ゲージ場に対するモノポールは特に Kaluza-Klein モノポールと呼ばれる。モノポールの磁荷は次のようにゲージ場の強さの積分として定義することができる。

$$Q = \oint_{S^2} h_2. \quad (77)$$

ただし  $h_2$  は

$$h_2 = dW_1 \quad (78)$$

によって定義される  $U(1)$  ゲージ場の強さであり、 $S^2$  はモノポールを取り囲む球面を表す。 $S^2$  でモノポールが取り囲まれるということは、モノポールは余次元 3 のオブジェクトであることを意味している。たとえば 10 次元時空を  $S^1$  コンパクト化して得られる 9 次元理論の Kaluza-Klein モノポールは 5-brane である。

モノポールを  $D-1$  次元のゲージ場の配位として表したとき、そのゲージ場は  $D$  次元においては計量の成分であるから、何か幾何学的な構造を表しているはずである。そこで以下では  $D-1$  次元のモノポールと、それに対応する  $D$  次元時空の構造について考える。余次元方向に対して直交座標  $x^6, x^7, x^8$  を導入する。内部空間方向の座標としては  $z \equiv x^9$  を用いる。(ここでは時空の次元は特定していないが、後に 10 次元時空を考えることを想定して座標を設定している。) 以下では複数のモノポールが存在する状況も考えるが、一つのモノポールに注目する場合には、そのモノポールの位置を原点に取り、次の極座標  $(r, \theta, \phi)$  を定義するのが便利である。

$$(x^6, x^7, x^8) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta). \quad (79)$$

Kaluza-Klein モノポールはコンパクト化した内部空間を見ない  $D-1$  次元理論の立場ではディラックモノポールに他ならない。すなわち、次のゲージポテンシャルによって与えることができる。

$$W = \frac{Q}{4\pi} (1 - \cos \theta) d\phi. \quad (80)$$

モノポールは原点  $r = 0$  にあるとした。

モノポール配位 (80) は  $\theta = \pi$  において特異性を持ち、678 空間の原点から南極方向にディラック弦が伸びている。この特異性は物理的なものではなく、その位置はゲージ変換を行うことで変化する。例えば、

$$W' = W - \frac{Q}{2\pi} d\phi. \quad (81)$$

というゲージ変換を行えば、 $\theta = \pi$  にあった特異性は消失し、代わりに  $\theta = 0$  にディラック弦が現れる。これは (35) にあるように内部空間の座標の変換

$$z \rightarrow z' = z + \frac{Q}{2\pi} \phi \quad (82)$$

に対応している。(35) では IIA 型理論の記号を用いているので、ここで考えている IIB 型理論のものに読み替えた。)  $z$  座標の周期はここでは 1 に取っており、 $\phi$  座標の周期は

$2\pi$  である。(82) の座標変換がこれらの周期性に矛盾しないためには、 $Q$  が整数でなければならない。

$$Q \in \mathbb{Z}. \quad (83)$$

この量子化条件と Kaluza-Klein モードの電荷の量子化 (76) を比較すると、電荷と磁荷の積が常に  $2\pi$  の倍数になっており、ディラックの量子化条件が満足されていることがわかる。

磁荷密度  $\rho$  によって与えられる一般のモノポール解について考えよう。(もちろんディラックの量子化条件により  $\rho$  が連続的に広がることは許されず、あとで与えるようにデルタ関数の和の形になる。) ゲージ場の強さ  $h_2$  は次の式を満足しなければならない。

$$dh_2 = \widehat{*}_3 \rho. \quad (84)$$

これは Maxwell 方程式  $\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho$  に相当する式である。この式中の Hodge 双対  $\widehat{*}_3$  は平坦な 3 次元計量  $ds^2 = dx_6^2 + dx_7^2 + dx_8^2$  を用いて定義されたものである。(磁荷密度は 3 次元空間で積分することで磁荷を与えるから 3 形式として定義するのが自然であるが、 $\rho$  はその 3 形式のホッジ双対として定義されるものである。このときに用いる 678 空間上の計量は、もとの  $D$  次元時空の計量の 3 次元部分に同一である必要は無く、しばしば非自明なワイル変換によって関係するような計量を用いるのが便利である。ここではそのようにして得られる計量として平坦計量を取ることができるものと仮定する。そして磁荷密度の定義にはその平坦計量を用いることとする。) 単位磁荷を持つモノポールが座標  $\mathbf{r}_I$  にある場合には、 $\rho$  は次のように与えられる。

$$\rho = \sum_I \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_I). \quad (85)$$

(678 空間の位置ベクトルを  $\mathbf{r}$  とした。) 整数磁荷  $Q$  を持つモノポールの場合は  $Q$  個の  $\mathbf{r}_I$  の値が重なっているとして表すものとする。(もし正と負の磁荷を持つモノポールが混在すると、通常その系は不安定になるので以下では磁荷  $Q$  は常に正であると仮定する。)

Kaluza-Klein モノポールにおいて  $D$  次元計量 (71) の  $W_1$  以外の成分を決めるためには  $D$  次元の理論を何か仮定して運動方程式を解く必要がある。ここでは右辺が 0 のアインシュタイン方程式  $R_{MN} = 0$  が成り立つとしよう。このアインシュタイン方程式を満足する計量は次のように与えられる。

$$ds_D^2 = ds_{D-4}^2 + ds_{\text{TN}}^2. \quad (86)$$

$ds_{D-4}$  は  $D-4$  次元の平坦なミンコフスキー空間であり、Kaluza-Klein モノポールに平行な方向を表している。 $ds_{\text{TN}}^2$  は Kaluza-Klein モノポールの余次元の 3 つの方向とコンパクト化された  $S^1$  方向を含む 4 次元多様体の計量である。実はこの部分は Taub-NUT 空間と呼ばれる 4 次元空間の計量になっており、次のように与えられる。

$$ds_{\text{TN}}^2 = H dr^2 + H^{-1} \widetilde{dz}^2, \quad \widetilde{dz} = dz + W. \quad (87)$$

ただし、関数  $H$  は 3 次元ラプラス方程式

$$\widehat{\Delta}_3 H = -\rho \quad (88)$$

## 2.2 特異点

の解である。(計量 (87) の 678 方向の部分  $Hdr^2$  は (84) の下で仮定したように共形平坦になっている。) ここで用いられているラプラシアンは  $\hat{*}_3$  同様平坦な計量を用いて定義されているものである。磁荷密度が (85) によって与えられる場合には解は次のように与えられる。

$$H(\mathbf{r}) = \frac{1}{L_{\text{TN}}^2} + \frac{1}{4\pi} \sum_I \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_I|}. \quad (89)$$

$L_{\text{TN}}$  は任意定数である。(84) と (88) を比較すれば、調和関数  $H$  はゲージ場の強さ  $h_2$  とは次の関係にあることがわかる。

$$h_2 = -\hat{*}_3 dH. \quad (90)$$

つまり、678 空間上のゲージ場  $W_1$  とスカラー関数  $H$  は互いに電磁双対の関係にある。

## 2.2 特異点

計量が (87) によって与えられる Taub-NUT 多様体の構造について詳しく見てみよう。 $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}_I|$  であり、調和関数  $H$  が定数とみなせるようなところでは  $\mathbb{R}^3 \times S^1$  になっており、 $S^1$  の周長は  $L_{\text{TN}}$  である。

逆に、調和関数が発散する点  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_I$  の近傍での振る舞いを見てみよう。このような点は center と呼ばれる。ここではまず center が重なっていない場合、すなわちすべての  $\mathbf{r}_I$  が異なる場合を考える。ある一つの center に注目し、それが原点に来るように 678 座標を取ろう。また、(79) に従って極座標  $(r, \theta, \phi)$  も導入しておく。原点近傍での調和関数は次のように与えられる。

$$H = \frac{1}{4\pi r}. \quad (91)$$

$r$  が非常に小さいとして (89) から発散項だけを抜き出した。(90) を満足するモノポールゲージポテンシャルを次のように取る。

$$W_1 = -\frac{1}{4\pi} \cos \theta d\phi. \quad (92)$$

さらに  $S^1$  方向の座標  $z$  代わりに、次のように定義される  $\psi$  を導入しておくのが便利である。

$$\psi = 4\pi z. \quad (93)$$

この座標の周期は  $4\pi$  である。これらを代入すると、計量 (87) は次のようになる。

$$4\pi ds_{\text{TN}}^2 \stackrel{r \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{r} [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] + r(d\psi - \cos \theta d\phi)^2. \quad (94)$$

さらに座標変換  $r = \rho^2/2$  を行うと、(94) は次のように書き換えられる。

$$4\pi ds_{\text{TN}}^2 \stackrel{r \rightarrow 0}{\sim} d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_3^2. \quad (95)$$

$d\Omega_3^2$  は次のように定義される半径が 1 の  $S^3$  の計量である。

$$d\Omega_3^2 = \frac{1}{4} [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 + (d\psi - \cos \theta d\phi)^2]. \quad (96)$$

従って (95) は平坦な  $\mathbb{R}^4$  の計量であり、原点にいかなる特異性も持たない。このように、center がすべて異なる場合 (87) で与えられる Taub-NUT 空間はそれぞれの center も含め任意の点で滑らかな 4 次元の多様体である。

center が重なった場合を考える前に、(96) が実際に半径 1 の  $S^3$  になっていることを示しておこう。次のように 3 つの角度変数でパラメトライズされた複素 2 次元ベクトル  $u \in \mathbb{C}^2$  を定義する。

$$u = \exp\left(\frac{i\phi}{2}\tau_z\right) \exp\left(-\frac{i\theta}{2}\tau_y\right) \exp\left(\frac{i\psi}{2}\tau_z\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (97)$$

ただし  $\tau_m$  はパウリ行列である。この定義より、ベクトル  $u$  は

$$u^\dagger u = 1 \quad (98)$$

を満足するから、半径 1 の  $S^3$  上の点を与える。そして角度変数の範囲を次のように取っておけば  $S^3$  全体を張ることがわかる。

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi, \quad 0 \leq \psi < 4\pi. \quad (99)$$

$S^3$  上の計量を計算してみると、次のように (96) が得られる。

$$ds^2 = du^\dagger du = d\Omega_3^2. \quad (100)$$

(97) によって定義される座標は  $S^3$  を  $S^2$  上の  $S^1$  ファイバー束として表しているものであると解釈できる。実際  $S^3$  から  $S^2$  への写像を次のように定義することができる。

$$\pi : u \rightarrow \vec{n} = u^\dagger \vec{\tau} u = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta). \quad (101)$$

ただし  $\vec{\tau} = (\tau_x, \tau_y, \tau_z)$  である。座標  $\psi$  が  $u$  に対する位相変換  $u \rightarrow e^{i\alpha u}$  の自由度に対応しており、 $S^1$  ファイバー上の座標を与えている。このファイバー束は Hopf ファイバー束と呼ばれる。

さて、幾つかの center が重なった場合に何が起こるかを見てみよう。678 空間の原点に  $N$  個の center が重なった場合、調和関数  $H$  とモノポールポテンシャル  $W_1$  がともに  $N$  倍される。角度変数  $\psi$  の定義 (93) も次のように変更しておこう。

$$\psi = \frac{4\pi}{N} z. \quad (102)$$

このようにしておくと、計量の  $N$  依存性をくくりだすことができ、定数因子を除き (95) と同じ形の計量が得られる。

$$\frac{4\pi}{N} ds^2 \stackrel{r \rightarrow 0}{\sim} d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_3^2. \quad (103)$$

動径座標  $\rho$  は前と同様に  $r = \rho^2/2$  によって定義した。この式は左辺に ( $\rho$  の再定義によって吸収することができる)  $1/N$  の因子が存在することを除いて (94) に一致し、平坦な 4 次元の計量を表している。しかし角度変数の定義 (102) のために、 $\psi$  の周期が  $4\pi$  ではな



く  $4\pi/N$  であるという重要な違いがある。このことは、この計量が表す空間が  $\mathbb{R}^4$  ではなくその orbifold  $\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_N$  であることを表している。

このことをよりはっきり見るために、 $\mathbb{R}^4$  上に複素座標  $(z_1, z_2) = (\rho u_1, \rho u_2^*)$  を導入しよう。  $u_i$  の片方を複素共役とした理由はあとで述べる。  $u = (u_1, u_2)$  は (97) で定義された  $\mathbb{C}^2$  上の単位ベクトルであり、 $\rho$  は動径座標である。こうして定義された  $z_i$  を用いれば計量は  $ds^2 \xrightarrow{r \rightarrow 0} (N/4\pi) dz_i dz_i^*$  となる。  $\psi$  の周期が  $4\pi/N$  であるということは、  $\psi \sim \psi + 4\pi k/N$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) のような同一視がなされていることを意味する。これは、座標  $z_i$  に対する次の同一視を与える。

$$(z_1, z_2) \sim (e^{2\pi i k/N} z_1, e^{-2\pi i k/N} z_2), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (104)$$

つまり、Taub-NUT 空間上で  $N$  個の center が重なった点の近傍は  $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_N$  型の orbifold 特異点として記述される。このような特異点はしばしば  $A_{N-1}$  型特異点と呼ばれる。

Taub-NUT 空間はハイパーケーラーである。従って 3 つの独立な複素構造が存在し、そのうちの一つを選べば残り二つの複素構造に対応するケーラー構造を複素に組んだものは調和 (2,0) 形式になる。このことはここで考えたような  $A_{N-1}$  型特異点においても同様である。実際、

$$\omega_{(2,0)} \propto dz_1 \wedge dz_2. \quad (105)$$

は  $\mathbb{Z}_N$  作用 (104) のもとで不変であり、 $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_N$  においても (2,0) 形式を与えている。  $z_i$  と  $u_i$  の関係に複素共役を持ち込んだのは、このように  $\mathbb{Z}_N$  不変な正則 2 形式を定義できるようにするためである。

### 2.3 ケーラー形式

Taub-NUT 空間は hyper Kähler 空間であり、3 つの複素構造が存在する。それらに対応する Kähler 形式を構成しよう。そのために、計量 (87) に対応して次の局所直交系を定義しておくのが便利である。

$$e^6 = H^{\frac{1}{2}} dx^6, \quad e^7 = H^{\frac{1}{2}} dx^7, \quad e^8 = H^{\frac{1}{2}} dx^8, \quad e^9 = H^{-\frac{1}{2}} \widetilde{dx}^9, \quad \widetilde{dx}^9 = dx^9 + W_1. \quad (106)$$

ケーラー形式の候補として、以下の 3 つの 2 形式を見てみよう。

$$\begin{aligned} k_6 &= e^6 \wedge e^9 - e^7 \wedge e^8 = dx^6 \wedge \widetilde{dx}^9 - H(\mathbf{r}) dx^7 \wedge dx^8, \\ k_7 &= e^7 \wedge e^9 - e^8 \wedge e^6 = dx^7 \wedge \widetilde{dx}^9 - H(\mathbf{r}) dx^8 \wedge dx^6, \\ k_8 &= e^8 \wedge e^9 - e^6 \wedge e^7 = dx^8 \wedge \widetilde{dx}^9 - H(\mathbf{r}) dx^6 \wedge dx^7. \end{aligned} \quad (107)$$

多脚場を用いた表式より、これらの成分行列が四元数の代数

$$(k_6)_{mn}^2 = -\delta_{mn}, \quad (k_6 k_7)_{mn} = -(k_7 k_6)_{mn} = (k_8)_{mn}, \quad \text{etc.} \quad (108)$$

を満足することがわかる。volume form  $\Omega$  とは次の関係にある。

$$\Omega = -\frac{1}{2} k_6 \wedge k_6 = -\frac{1}{2} k_7 \wedge k_7 = -\frac{1}{2} k_8 \wedge k_8 = e^6 \wedge e^7 \wedge e^8 \wedge e^9 = H(\mathbf{r}) dx^6 \wedge dx^7 \wedge dx^8 \wedge dx^9. \quad (109)$$

以上より  $k_m$  が概ハイパーケーラー構造を与えることがわかった。あとは  $k_m$  が調和形式であることを示せば十分である。 $k_m$  が closed であることは (90) を用いて示すことができる。たとえば

$$dk_6 = (-h_{78} + \partial_6 H) dx^6 \wedge dx^7 \wedge dx^8 \quad (110)$$

( $h_{78}$  は場の強さ  $h_2$  の成分) であるが、括弧の中は (90) のために 0 になる。

Taub-NUT 空間の計量 (87) を用いたときの Hodge dual は、ベース空間上の  $k$ -form 場  $A_k$  に対して次のように作用する。

$$*_4 A_k = (-1)^k H^{1-k} (\widehat{*}_3 A_k) \wedge \widetilde{dx}^9, \quad *_4 (A_k \wedge \widetilde{dx}^9) = H^{2-k} \widehat{*}_3 A_k. \quad (111)$$

これらを用いると、

$$*_4 k_m = -k_m \quad (112)$$

が示される。すなわち  $k_m$  はどれも反自己双対である。(あるいは、(107) における多脚場を用いた表式からもこのことは明らかである。)  $k_m$  が closed form でかつ反自己双対であるということは、これらが調和形式であることを意味している。以上で、 $k_m$  がハイパーケーラー構造を与えること、従って Taub-NUT 空間がハイパーケーラーであることが示された。

3 つのケーラー形式  $k_m$  は、Taub-NUT 空間の構造を決める情報を担っており、たとえば 2-サイクルで積分することによって center の位置を得ることができる。

$$x_I^m - x_0^m = \int_{S_I} k_2^m. \quad (113)$$

ただし  $S_I$  は図 2 にあるように  $I$  番目の center に「引っかかった」ディスクの位相をもつ 2-サイクルである。ディスクの境界としてはベース空間上の基準点  $x_0^m$  における  $S^1$  ファ

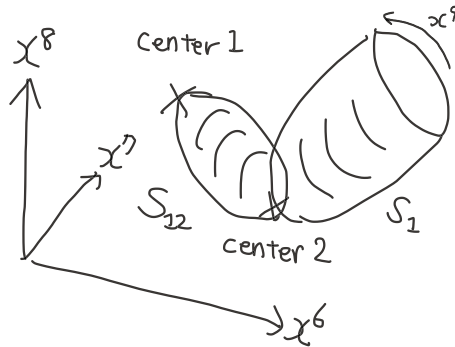


図 2: Taub-NUT 空間上の 2-サイクル

イバーを取る。 $S_I$  はベース空間上では基準点  $x_0^m$  から  $x_I^m$  まで伸びる曲線として与えられる。基準点  $x_0^m$  はすべての  $S_I$  に対して共通に取っておく。すると、二つの center に引っかかった  $S^2$  のサイクルは  $S_I$  の差として  $S_{IJ} := S_I - S_J$  のように与えることができる。 $S_{IJ}$  の上でケーラー形式を積分すれば二つの center の相対座標が得られる。

$$x_I^m - x_J^m = \int_{S_{IJ}} k_2^m. \quad (114)$$

あとで超対称性について議論する際に必要なので (107) に与えた 3 つのケーラー形式をスピノルの二次形式として与えておこう。

4 次元のハイパーケーラー空間はそのホロノミーが  $SU(2)$  である空間として定義することができる。局所回転群  $SO(4) \sim SU(2)_L \times SU(2)_R$  に含まれる二つの  $SU(2)$  のうち、 $SU(2)_L$  が  $\gamma^5$  の正固有値の空間に、 $SU(2)_R$  が  $\gamma^5$  の負固有値の空間に作用するものとする。ホロノミーの  $SU(2)$  がこれらのうちどちらであるかは、複素構造が自己双対か反自己双対であるかによって決まる。ここでは、あるテンソル  $T_{mn}$  が自己双対であるとは  $(1/2)\epsilon_{mnpq}T_{pq} = T_{mn}$  が成り立つこととして定義しよう。反自己双対であれば、この関係式の符号が逆になる。ここでは (112) にあるように反自己双対である場合を考えよう。カイラリティ行列  $\gamma_5$  と  $\epsilon$  テンソルの関係が次のように与えられていると仮定する。

$$\gamma_{mnpq} = \epsilon_{mnpq}\gamma_5. \quad (115)$$

この場合反自己双対テンソル  $T_{mn}$  は  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  の  $(\mathbf{3}, \mathbf{1})$  に属する。このことは、次の関係式から確認することができる。

$$(T_{mn}\gamma_{mn})\gamma_5 = -\frac{1}{2}T_{pq}\epsilon_{pqmn}\gamma_{mn}\gamma_5 = -\frac{1}{2}T_{pq}\gamma_{pqmn}\gamma_{mn} = T_{pq}\gamma_{pq} \quad (116)$$

$(\mathbf{3}, \mathbf{1})$  表現に属するケーラー形式が共変的に定数であり、これらにホロノミーが作用しないことから、ホロノミーは  $SU(2)_R$  であることが結論される。ホロノミーが  $SU(2)_R$  である多様体上には、正のカイラリティを持つ共変的に定数であるスピノルが二つ存在する。これらのうちの一つを  $\eta_1^a$  とし、 $(\eta_1^a)^*\eta_1^a = 1$  によって規格化しよう。 $\eta$  はボゾンのとして扱う。このときもう一つの定数スピノルは  $\eta_2^a = -\epsilon^{ab}(\eta_1^b)^*$  によって与えることができる。これら二つの定数スピノルは次の関係式を満足する。

$$\eta_m^a = \epsilon_{mn}\epsilon^{ab}(\eta_n^b)^*, \quad \eta_m^a\epsilon_{ab}\eta_n^b = \epsilon_{mn}, \quad (\eta_m^a)^*\eta_n^a = \delta_n^m, \quad \eta_m^a(\eta_m^b)^* = \delta_b^a. \quad (117)$$

$\eta$  の二次形式として、次の 3 つの定数テンソルを定義することができる。

$$k_{\mu\nu}^A(\sigma_A)^m{}_n = i\eta_m^\dagger\gamma_{\mu\nu}\eta_n. \quad (118)$$

ただし  $\sigma_A$  はパウリ行列であり、 $A = 6, 7, 8$  が  $x, y, z$  に対応するものとする。 $\eta$  のカイラリティが正であることと (115) を用いると、このように定義される反対称テンソルが反自己双対であることを示すことができる。また、フィルツ変換を用いることで四元数代数 (108) を示すことができる。従って、適当に  $\eta_1$  と  $\eta_2$  を選ぶことによって (118) に与えられた  $k^A$  が (107) に与えた 3 つの複素構造を与える。

## 2.4 複素座標

Taub-NUT 空間を代数多様体として表そう。そのためにまず次の複素座標を導入する。

$$w = x^6 + ix^7. \quad (119)$$

これに対応して、 $I$  番目の center の  $w$  座標を  $w_I = x_I^6 + ix_I^7$  によって定義しておく。

$w$  をある値に固定することで定義される 2 次元の部分空間についてみてみよう。この空間は  $x^8$  で座標付けされた  $\mathbb{R}$  上の各点に  $x^8$  に依存する半径を持つ  $S^1$  のファイバーが乗っているような空間を表している。各  $S^1$  は  $x^9$  によって座標付けされている。固定した  $w$  がどの  $w_I$  とも等しくなければ  $S^1$  のファイバーはつぶれることが無いから、この空間の位相はシリンダー、つまり  $S^1 \times \mathbb{R}$  である。これは  $x, y \in \mathbb{C}$  で張られる  $\mathbb{C}^2$  上の部分空間として次のように与えることができる。

$$xy = c. \quad (120)$$

ただし  $c$  は 0 でない定数である。(120) より、 $x$  と  $y$  はどちらも 0 ではない。また、0 でない  $x$  を与えれば  $y$  は一意的に定まる。従って (120) は原点を除いた複素平面であり、それは位相的にシリンダーに一致する。

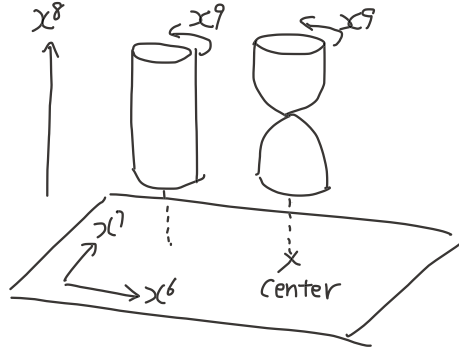


図 3:  $xy = c \neq 0$  によって与えられる複素 1 次元の空間はシリンダーの位相を持つ。 $xy = 0$  は原点を共有する二枚の複素平面を与える。

もし  $w$  が  $w_I$  のうちのどれか一つと等しければ、 $S^1$  のファイバーがどこか一点でつぶれる。(ここでは  $w_I$  はすべて異なると仮定しておこう。) この場合は二次元部分空間は次の式によって表すことができる。

$$xy = 0. \quad (121)$$

この解は  $x = 0$  または  $y = 0$  である。 $x = 0$  のとき  $y$  は任意であるから  $y$  平面とみなすことができる。また  $y = 0$  のとき  $x$  は任意であるから、 $x$  平面とみなすことができる。さらに  $x = y = 0$  という点は  $x$  平面上の原点でありかつ  $y$  平面上の原点である。従って (121) は原点が同一視された二枚の複素平面とみなすことができ、位相的に一箇所がくびれたシリンダーに等しい。

以上のことを組み合わせることによって Taub-NUT 空間を次のように与えることができる。

$$xy = \prod_I (w - w_I). \quad (122)$$

ここで導入した  $x$  および  $y$  という複素座標は関係式 (122) のために独立な座標ではなく、どちらも ( $w$  を固定して考えれば)  $x^8$  および  $x^9$  座標の関数として与えられるはずである。この節の残りの部分ではこの関係を具体的に求めよう。

複素座標を定めるには、3 つのケーラー構造 (107) の中から一つを選ぶ必要がある。すでに一つの複素座標として (119) を定義したが、これはケーラー形式として  $k_8$  を選ぶこ

とに対応する。この場合、残り二つのケーラー形式の線形結合として正則 2 形式が与えられる。すなわち、次のものは (2, 0) 形式であるはずである。

$$\omega_{(2,0)} = k_6 + ik_7 = -idw \wedge (-Hdx^8 + \widetilde{id}x^9). \quad (123)$$

ここで確かに  $dw$  が現れており、この 2-form が (2, 0)-form であることをうかがわせている。Taub-NUT 空間は複素 2 次元であるから、 $w$  意外にもう一つの複素座標を定義できれば十分である。この座標を  $\rho$  とし、(123) が次のように書けることを要請しよう。

$$\omega_{(2,0)} = -idw \wedge d\rho. \quad (124)$$

このためには、 $F$  を何らかの関数として次の式が成り立つ必要がある。

$$-Hdx^8 + \widetilde{id}x^9 = d\rho + Fdw. \quad (125)$$

これを (123) に代入すると、関数  $F$  を含む部分は消えて、確かに (124) が得られる。関数  $F$  を決めるには、(125) の積分可能性を要請する。すなわち (125) の両辺の外微分を取った式

$$-dH \wedge dx^8 + ih_2 = dF + Fdw \quad (126)$$

が成り立つことを要請する。この解を得るために、(90) を座標  $w$  を用いて書き換えると、

$$h_2 = -\widehat{*}_3 dH \quad \rightarrow \quad \partial_{w^*} H = -ih_{8w^*}, \quad \partial_w H = ih_{8w}, \quad \partial_8 H = 2ih_{ww^*} \quad (127)$$

となるが、これらを用いれば (126) の  $dw^* \wedge dx^8$  成分が成り立つことはすぐにわかる。 $dw \wedge dx^8$  成分と  $dw \wedge dw^*$  成分は次の関係式が成り立つことを要求する。

$$\partial_8 F = 2ih_{8w}, \quad \partial_{w^*} F = ih_{w^*w}. \quad (128)$$

ここで、 $h_2$  のポテンシャル  $W$  に対して次のゲージ条件を置こう。

$$W_8 = 0, \quad \partial_w W_{w^*} + \partial_{w^*} W_w = 0. \quad (129)$$

一つ目の条件  $W_8 = 0$  を 678 空間全体について課すと、二つ目の条件は一般には  $x^8 = \text{const}$  のような面上についてのみ課することができるが、center 以外では  $d\widehat{*}_3 h_2 = 0$  が成り立つことを用いれば center にぶつからない限り二つ目の条件を  $x^8$  方向にも延長できることが示される。このゲージにおいては (128) の二つの条件は次のように書き換えることができる。

$$\partial_8 F = 2i\partial_8 W_w, \quad \partial_{w^*} F = 2i\partial_{w^*} W_w. \quad (130)$$

これらの条件は  $F = 2iW_w$  と置くことで満足することができ、(125) が積分可能であることが示された。従って、次の式を積分することによって座標  $\rho$  を定義することができる。

$$\begin{aligned} d\rho &= -Hdx^8 + \widetilde{id}x^9 - 2iW_w dw \\ &= -Hdx^8 + id\widetilde{x}^9 + iW_{w^*} dw^* - iW_w dw. \end{aligned} \quad (131)$$

実際に (131) を積分することで  $\rho$  を計算してみよう。(131) の虚部は  $\text{Im } \rho = x^9 + \text{const}$  を与える。実部については  $H$  の定数部分（ここでは  $H_\infty$  と表す。）を除けばそれぞれの

モノポールの寄与の和であるから、モノポールそれぞれからの寄与の和として次のように与えられる。

$$\operatorname{Re} \rho = -H_\infty x^8 + \sum_I \rho_I. \quad (132)$$

$\rho_I$  は  $I$  番目のモノポールの寄与である。

$$\rho_I = \int \left( -\frac{1}{4\pi} \sum_I \frac{dx^8}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_I|} + iW_{w^*}^{(I)} dw^* - iW_w^{(I)} dw \right). \quad (133)$$

この積分を実行して  $\rho^I$  を求めよう。見やすくするために、モノポールの位置を原点 ( $w = x^8 = 0$ ) にあるとする。ゲージ条件 (129) を満足する 1-形式ポテンシャル  $W$  は次のように取ることができる。

$$W^{(I)} = \frac{c - \cos \theta}{4\pi} d\phi = \frac{1}{8\pi i} \left( c - \frac{x^8}{\sqrt{(x^8)^2 + ww^*}} \right) \left( \frac{dw}{w} - \frac{dw^*}{w^*} \right). \quad (134)$$

$c$  がゲージに依存する定数であり、北極方向と南極方向へ伸びるディラック弦の上のフラックスの量を決定する。積分経路は適当に起点を定め、そこから任意の経路で積分すればよいが、ここでは起点を  $x^8$  軸上に取り、まずそこから目的の  $x^8$  座標の点まで移動し、そこからさらに  $x^8$  を固定しながら  $w$  についての積分を行うことにする。

$$\rho_I = \int^{x^8} \left( -\frac{dx^8}{4\pi r} \right) \Big|_{w=0} + \int_0^w (iW_{w^*} dw^* - iW_w dw) \Big|_{x^8} \quad (135)$$

まず、 $w$  積分を計算しよう。

$$iW_{w^*} dw^* - iW_w dw = -\frac{1}{8\pi} \left( c - \frac{x^8}{\sqrt{(x^8)^2 + ww^*}} \right) d \log(ww^*) \quad (136)$$

であり、 $x^8$  を定数として (136) を積分すれば、積分定数を除き次のようになる。

$$\begin{aligned} & -\frac{c}{8\pi} \log(ww^*) - \frac{1}{8\pi} \log \frac{\sqrt{(x^8)^2 + ww^*} + x^8}{\sqrt{(x^8)^2 + ww^*} - x^8} \\ & = -\frac{c}{8\pi} \log(ww^*) + \frac{1}{8\pi} \operatorname{sign}(x^8) \left( -\log 4 + \log(ww^*) - \frac{1}{2}(ww^*) + \frac{3}{16}(ww^*)^2 + \dots \right) \end{aligned} \quad (137)$$

二行目は  $w = 0$  の周りでの展開である。この展開式からもわかるように、すべての  $x^8$  においてこの関数を (135) の積分の始点  $w = 0$  において有限にすることはできない。最大限できることは、正または負の  $x^8$  において  $w = 0$  における振る舞いがよくなるように定数  $c$  を選ぶことである。 $c = 1$  とおけば  $x^8 > 0$  の振る舞いが、 $c = -1$  とおけば  $x^8 < 0$  の振る舞いが良くなり、 $w = 0$  を始点とする積分はそれぞれ次のように与えられる。

$$\begin{aligned} (c = +1, x^8 > 0) \quad & \int_0^w (iW_{w^*} dw^* - iW_w dw) = -\frac{1}{4\pi} \log \frac{\sqrt{(x^8)^2 + ww^*} + x^8}{2x^8} \\ (c = -1, x^8 < 0) \quad & \int_0^w (iW_{w^*} dw^* - iW_w dw) = \frac{1}{4\pi} \log \frac{\sqrt{(x^8)^2 + ww^*} - x^8}{-2x^8} \end{aligned} \quad (138)$$

これらはどちらも  $x^8 = 0$  において発散している。(135) の  $dx^8$  積分項

$$\int^{x^8} \left( -\frac{dx^8}{4\pi r} \right) = -\frac{1}{4\pi} \text{sign}(x^8) \log |x^8| \quad (139)$$

は (138) の  $x^8 = 0$  における特異点を相殺し、 $w \neq 0$  であれば  $x^8 \in \mathbb{R}$  全体に拡張することができる。定数部分を式が簡単になるように適当に調整すれば、 $\rho_I$  は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \rho_I^{(c=+1)} &= -\frac{1}{4\pi} \log \left( \sqrt{(x^8)^2 + ww^*} + x^8 \right), \\ \rho_I^{(c=-1)} &= \frac{1}{4\pi} \log \left( \sqrt{(x^8)^2 + ww^*} - x^8 \right). \end{aligned} \quad (140)$$

$\rho_I^{(c=+1)}$  は center から南方向に伸びる半直線上で特異性を持ち、 $\rho_I^{(c=-1)}$  は逆に center から北方向に伸びる半直線上で特異性を持つ。(図 4)

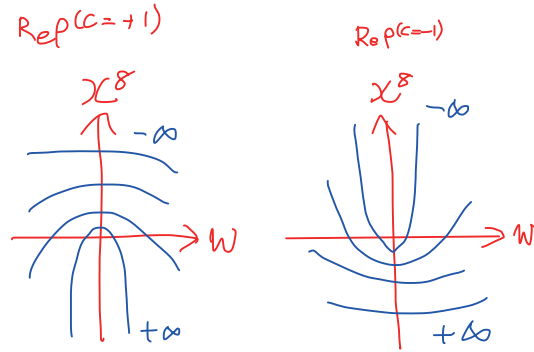


図 4: 複素座標  $\rho^{(c=\pm 1)}$

全てのモノポールの寄与をあわせれば、 $\rho$  座標を得ることができる。こうして得られる  $\rho$  はそれぞれのモノポールにおいて  $c_I = \pm 1$  をどのように選ぶかに依存している。 $\vec{c} = \{c_1, \dots, c_N\}$  を一つ定めることで定義される座標を  $\rho^{\vec{c}}$  によって表そう。

$$\text{Re } \rho^{\vec{c}} = -H_\infty x^8 + \sum_I \rho_I^{(c_I)}, \quad \text{Im } \rho^{\vec{c}} = x^9_{\vec{c}}. \quad (141)$$

虚部についても、 $x^9$  座標の取り方が  $W_1$  のゲージに依存することから、 $c_I$  の選び方に依存していることに注意。 $x^9$  座標の  $\vec{c}$  依存性を強調するために  $x^9_{\vec{c}}$  のように表した。 $\vec{c}$  の成分  $c_I$  は、それぞれの center から特異性を持つ半直線 (ディラック弦) が南北どちらに伸びているかを表している。

$\vec{c}$  の選び方を変えたときに、これらの座標がどのように変わるかを見てみよう。 $I$  番目の成分が  $c_I = \pm 1$  であり、それら以外が同じであるような  $\vec{c}$  によって与えられる二つの座標の間関係は、 $\rho_I$  の具体形 (138) と  $x^9$  座標に対するゲージ変換 (82) より次のようになる。

$$\rho^{(\dots, -1, \dots)} = \rho^{(\dots, +1, \dots)} + \frac{1}{2\pi} \log(w - w_I) \quad (142)$$

任意の  $\vec{c}$  に対する座標の関係は、(142) を繰り返し用いることで決めることができる。特に、全ての  $c_I$  が等しい二つの場合の座標の間関係は、つぎのようになる。

$$\rho^{(-1, \dots, -1)} = \rho^{(+1, \dots, +1)} + \frac{1}{2\pi} \sum_I \log(w - w_I). \quad (143)$$

どのように  $\vec{c}$  を選ぶかに依らず、 $x^9$  の周期性より  $\rho$  は次の周期性を持つ。

$$\rho \sim \rho + i. \quad (144)$$

この多価性をなくすために  $e^{\pm 2\pi\rho}$  を用いるのが便利である。特に、(143) に現れる二つの座標に対して座標  $x$  と  $y$  を次のように定義する。

$$x = e^{2\pi\rho^{(-1, \dots, -1)}}, \quad y = e^{-2\pi\rho^{(+1, \dots, +1)}}. \quad (145)$$

これら二つの座標は、center から南向き、または北向きに伸びる半直線上で 0 となる (図 5) ため、それらの半直線上の点を区別することができない。従って、多様体上の位置を完全に指定するためには、 $w$ 、 $x$ 、 $y$  を全て用いる必要がある。もちろん関係式 (143) があ

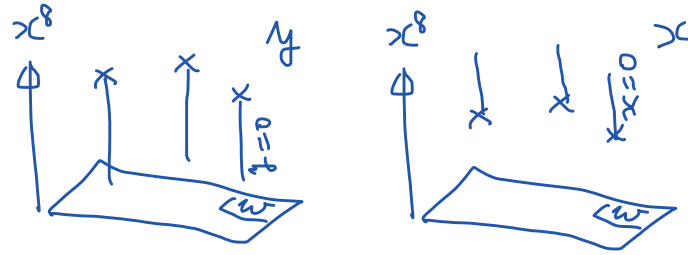


図 5: 複素座標  $x$  と  $y$

るため、 $x$  と  $y$  は独立ではない。(143) を  $x$  と  $y$  を用いて書き直せば、Taub-NUT 空間を代数多様体として表す式 (122) が得られる。

## 2.5 モーメントマップとケーラーポテンシャル

(87) の計量や (107) 中のケーラー形式  $k^8$  は (131) を用いて次のように書き換えられる。

$$ds_{\text{TN}}^2 = \frac{1}{H} \widetilde{d\rho} \widetilde{d\rho}^* + H dw dw^*. \quad (146)$$

$$k_8 = \frac{1}{2iH} \widetilde{d\rho} \wedge \widetilde{d\rho}^* + \frac{H}{2i} dw \wedge dw^*. \quad (147)$$

ただし (1,0) 形式  $\widetilde{d\rho}$  を次のように定義した。

$$\widetilde{d\rho} = d\rho + 2iW_w dw = -H dx^8 + i \widetilde{dx}^9 = H^{\frac{1}{2}} (-e^8 + ie^9). \quad (148)$$

さらに、正則 2 形式 (124) は次のように幾つかの形で表すことができる。

$$\omega_{(2,0)} = -i dw \wedge d\rho = \frac{1}{2\pi i} dw \wedge \frac{dx}{x} = \frac{i}{2\pi} \frac{dx \wedge dy}{\partial_w \prod_I (w - w_I)}. \quad (149)$$



Taub-NUT 空間の構造は、遠方でのサイクルの大きさと center の位置  $x_I^i$  を与えることで決まる。Taub-NUT 空間を表す代数方程式 (122) および正則 2 形式 (149) には、それらのパラメータのうち  $w_I$  だけが含まれている。このことは、パラメータのうち  $w_I$  は複素構造を与えるパラメータであり、これら以外のパラメータ  $x_I^8$  およびサイクルの漸近的な大きさ  $L_{\text{TN}}$  はケーラー構造を決めるものであるということを意味している。

ファイバー方向のシフトを生成するキリングベクトル

$$v = \frac{\partial}{\partial x^9} = i\partial_\rho - i\partial_{\rho^*} \quad (150)$$

に対して、次の式が成り立つ。

$$i_v k_8 = \frac{1}{2H}(\widetilde{d\rho} + \widetilde{d\rho^*}) = -dx^8, \quad i_v \omega_{(2,0)} = -dw. \quad (151)$$

よって、ベース空間の座標 ( $w = x^6 + ix^7$ ) と  $x^8$  は、3 つの複素構造に対応したモーメントマップを与えている。

ケーラーポテンシャル  $K$  は次の関係式を満足する実関数である。

$$\begin{aligned} \partial_\rho \partial_{\rho^*} K &= \frac{1}{2H}, & \partial_w \partial_{\rho^*} K &= \frac{i}{H} W_w, & \partial_\rho \partial_{w^*} K &= -\frac{i}{H} W_{w^*}, \\ \partial_w \partial_{w^*} K &= \frac{2}{H} W_w W_{w^*} + \frac{H}{2}. \end{aligned} \quad (152)$$

すでに Taub-NUT 空間がケーラーであることは確認したので、これらの関係式が積分可能であることは保障されている。従って右辺を  $(\rho, \rho^*, w, w^*)$  の関数として表し、二回積分することによって  $K$  を決めることができる。この計算の見通しを良くするには、(152) を  $x^8$  に対する次の関係式と見比べてみるのがよい。

$$\frac{\partial x^8}{\partial(\rho + \rho^*)} = -\frac{1}{2H}, \quad \frac{\partial x^8}{\partial w} = -\frac{i}{H} W_w, \quad \frac{\partial x^8}{\partial w^*} = \frac{i}{H} W_{w^*}. \quad (153)$$

比較の結果、 $K$  を次の関係式を満たす  $\rho + \rho^*$ 、 $w$ 、 $w^*$  の実関数であるとすれば、(152) のはじめ 3 つの式が成り立つことがわかる。

$$\frac{\partial K}{\partial(\rho + \rho^*)} = -x^8. \quad (154)$$

(154) を変数  $\rho + \rho^*$  から変数  $x^8$  へのルジャンドル変換とみなしてみよう。このルジャンドル変換のもとで関数  $K$  は次の関数  $\Phi$  に変換される。

$$\Phi(x^8, w, w^*) = K(\rho + \rho^*, w, w^*) + x^8(\rho + \rho^*) \quad (155)$$

次の式が成り立つ。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^8} = \rho + \rho^*, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial w} = \frac{\partial K}{\partial w}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial w^*} = \frac{\partial K}{\partial w^*}. \quad (156)$$

これらを用いれば、(152) の最後の式は次のように書きかえられる。

$$\frac{H}{2} = \partial_w \partial_{w^*} K - \frac{2}{H} W_w W_{w^*} = \left( \frac{\partial}{\partial w} \right)_{x^8} (\partial_{w^*} K) = \frac{\partial}{\partial w} \frac{\partial}{\partial w^*} \Phi. \quad (157)$$

従って、 $\Phi$  は

$$(4\partial_w\partial_{w^*} + \partial_8^2)\Phi = 0 \quad (158)$$

を満足するベース空間上の調和関数であり、計量を決める  $H$  とは次のように関係している。

$$H = 2\partial_w\partial_{w^*}\Phi = -\frac{1}{2}\partial_8^2\Phi. \quad (159)$$

つまり、ケーラーポテンシャル  $K$  を得るには調和関数  $H$  を  $x^8$  で二回積分して関数  $\Phi$  を求め、そこからルジャンドル変換を行えばよい。

ここで与えた、ルジャンドル変換を用いたケーラーポテンシャルの構成法は、ツイスターを用いたハイパーケーラー計量の構成法 [3, 4] に基づくものである。

## 2.6 ブローアップ

§2.4 では Taub-NUT 空間が代数多様体として次のように与えられることを示した。

$$F(x, y, w) \equiv xy - \prod_I (w - w_I) = 0. \quad (160)$$

§2.2 で述べたように、この多様体は複数個の center が重なったときに singular になる。その際、center が重なるというのは、3次元のベクトル  $(w_I, x_I^8)$  が一致することを意味する。しかし (160) にはこれらのパラメータのうち  $w_I$  のみしか現れていない。従って  $x_I^8$  が異なっており、実際には多様体の特異性を持たない場合でも  $w_I$  が重なると代数方程式 (160) は singular になる。この特異性は見かけ上のもので、 $x^8$  方向についての center のずれを表すことができるような新たな座標を導入することで除去することができる。この手続きはブローアップと呼ばれる。

まず (160) によって定義される複素代数多様体が singular になるのはどういふ場合かを見てみよう。もし、ある点の近傍で多様体が  $\mathbb{C}^2$  の構造をしており、 $x, y, w$  のうちの二つがその良い座標になっていれば、その点では regular、そうでなければ singular であるという。たとえば  $(x, y)$  という座標の組が regular であるための条件は  $x$  と  $y$  を指定したときにその近傍において (160) が  $w$  について一意的に解けること、すなわち  $\partial F/\partial w \neq 0$  であることである。他の二つの座標の組についても同様なことがいえるので、singular であるという条件は次のように与えることができる。

$$F = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0. \quad (161)$$

ここでは (160) で定義される多様体上の点について議論しているので、 $F = 0$  という条件は常に課される。(161) に  $F$  の具体形を代入すれば、次の式を得る。

$$x = y = \prod_I (w - w_I) = \frac{d}{dw} \prod_I (w - w_I) = 0. \quad (162)$$

$w$  を含む二つの多項式に対する条件式は、 $w_I$  がすべて異なれば解をもたない。すなわちその場合にはいたるところ regular である。それに対して  $w_I$  のうちの幾つかが重なると、 $w$  がその値になる点で singular になる。

$w_I$  のうちの  $N$  個が重なっている場合を考え、その値が  $w_I = 0$  になるように  $w$  座標を定義しよう。そのとき  $w = 0$  近傍では適当な変数のリスケールを行うことで (160) が次のように書ける。

$$xy = w^N. \quad (163)$$

$w = 0$  の近傍を考えているので  $\mathcal{O}(w^{N+1})$  の項は無視した。

§2.2 において  $N$  個の center が重なると  $A_{N-1}$  型の特異点が現れることを述べたが、(163) が実際に (104) で定義される  $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_N$  オービフォールドを記述していることは以下のようにわかる。 $z_1$  と  $z_2$  を orbifold の covering space  $\mathbb{C}^2$  上の複素座標であるとしよう。orbifold は  $(z_1, z_2)$  に対して同一視 (104) を行うことで定義できる。座標  $(z_1, z_2)$  が異なる値であっても、それらが  $\mathbb{Z}_N$  変換で移りあうならば  $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_N$  上では同一の点とみなされるから、 $(z_1, z_2)$  は orbifold 上の点と一対一対応しておらず、良い座標ではない。orbifold 上での良い座標として (104) のもとで不変である次の単項式を定義する。

$$x = z_1^N, \quad y = z_2^N, \quad w = z_1 z_2. \quad (164)$$

$\mathbb{Z}_N$  不変な  $z_1$  と  $z_2$  の任意の多項式は、これら 3 つの単項式の多項式として与えることができる。(163) はこれらの不変多項式の間関係式であるとみなすことができる。代数多様体として  $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_N$  の構造を持つとしても、計量まで含めてそのような構造を持つかは別の問題であることを注意しておこう。上でも述べたように、代数方程式 (160) は  $w$  方向、すなわち  $w$  方向の構造のみを与えているから、この式が singular になったとしても center が  $x^8$  方向に離れていれば多様体は singular ではない。この場合、定義方程式 (163) が singular になるのは  $x = y = w = 0$  という部分空間が多様体上の一点を与えないためである。このことをもう少し詳しく見てみよう。

3次元ベース空間上の直線  $w = 0$  上に  $N$  個の center が重ならず並んでいる場合を考え、それらのうち  $x^8$  が最小のものから順に  $I = 1, 2, \dots, N$  とラベルしよう。 $N$  個の center で  $N + 1$  個の部分に分割された  $x^8$  軸のそれぞれの部分を  $x^8$  が小さいほうから  $S_0, S_1, \dots, S_N$  としよう。つまり、 $S_k$  はベース空間上の直線  $w = 0$  のうち  $x_k^8 \leq x^8 \leq x_{k+1}^8$  の区間である。形式的に  $x_0^8 = -\infty$ 、 $x_{N+1}^8 = +\infty$  と定義しておく。 $S^1$  のファイバーまであわせて考えれば、 $S_0$  と  $S_N$  の位相はディスクであり、それ以外は  $S^2$  である。図 6 の

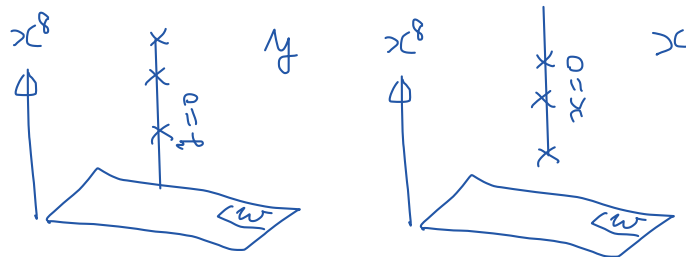


図 6:  $w$  平面上で center が重なったときの  $x$  座標と  $y$  座標。

ように、 $x$  および  $y$  座標はどちらも  $S_1 \cup \dots \cup S_{N-1}$  上で 0 になるからこれらの座標を用いて  $S_1 \cup \dots \cup S_{N-1}$  上の点を区別することはできない。

$S_k$  上の点を区別するためには、 $S_k$  上にディラック弦が生じないような次の座標を用い

る必要がある。

$$t_k = w^{-k}x, \quad t'_k = w^{k-N}y. \quad (165)$$

座標  $t_k$  は区間  $S_k$  内部では有限となり、それより下側では発散、上側では 0 になる。定義より

$$t_k t'_k = 1 \quad (166)$$

が成り立ち、 $t'_k$  については  $S_k$  より上側で発散し、下側では 0 になる。(図 7)  $(t_k, t'_k)$  は

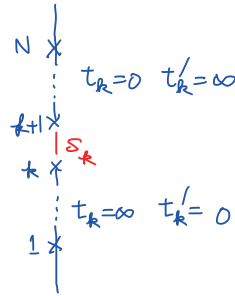


図 7:  $S_k$  上の座標

$S_k$  上の stereographic coordinates になっている。(165) のそれぞれの式は (163) を用いて次のように書き換えられる。

$$y t_k = w^{N-k}, \quad x t'_k = w^k. \quad (167)$$

これらはそれぞれ  $A_{N-k-1}$  型および  $A_{k-1}$  型の特異点を表している。つまり、(166) を満足する新しい座標を導入することにより、一つに縮退していた  $N$  個の center よりなる  $A_N$  型の特異点が  $S_k$  をはさむ  $A_{k-1}$  型特異点と  $A_{N-k-1}$  型特異点に分解されたのである。このように、新たな座標の導入によってある特異点をよりゆるい特異点に分解していくことをブローアップと呼ぶ。全ての球面  $S_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N-1$ ) の構造を見るためには、 $N-1$  個のそれぞれの球面に対して (165) のような座標を導入する必要がある。それらの座標の導入により、 $A_{N-1}$  型特異点を  $N$  個の  $A_0$  型の特異点（これはファイバー束の特異点ではあるが、多様体としては特異点ではない。）に分解することができる。

もとの特異点の構造は、ブローアップしたときに何個の  $S^2$  が現れ、それらがどのように交差しているかという情報として残される。実は  $A_{N-1}$  型特異点をブローアップして得られる  $N-1$  個の  $S^2$  の交差数を行列の形に表すと、 $A_{N-1}$  リー代数のカルタン行列の形になることがわかる。言い方を変えると、特異点近傍のコンパクト 2-サイクルで生成されるホモロジー群  $H_2$  はリー代数  $A_{N-1}$  のルート格子をなす。これが  $A_{N-1}$  型特異点という名の由来である。

## 2.7 零モード

Taub-NUT 空間には non-compact 2-cycle の Poincare dual として center 付近に局在化した 2-form の zero-mode が一つ存在している [5, 6]。その zero mode を具体的に与えておこう。

まずは計算を簡単にするために center が一つだけの場合を考える。その背景上で、2-形式場の規格化可能なゼロモード、すなわち規格化可能な調和 2 形式の個数が 1 つだけであると仮定しよう。すると、そのゼロモードは Taub-NUT 空間の対称性  $SU(2) \times U(1)$  のもとで不変でなければならない。このことから、2-form の形が次のように推測できる。

$$\eta = fh_2 + df \wedge \widetilde{dx}^9. \quad (168)$$

これが (少なくとも center 以外では) closed であることは実際に微分してみることで示される。ゼロモードが一つだけであるということは、そのゼロモードが自己双対、または反自己双対であることも要求する。 $*_4fh_2 = -fH^{-1}dH \wedge \widetilde{dx}^9$  を用いれば、self-dual または anti-self-dual であるための条件は  $dH/H = \pm df/f$  である。右辺の符号が正であれば anti-self-dual ( $*_4\eta = -\eta$ )、負であれば自己双対 ( $*_4\eta = \eta$ ) となる。この式は、 $f = cH^{\pm 1}$  と解くことができる。center で正則であるためには、center で  $f = 0$  になる必要がある。従って  $f = cH^{-1}$  と取らなければならない、このとき  $\eta$  は自己双対である。 $\eta$  の具体的な表式は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \eta &= -\frac{1}{L_B^2}(H^{-1}h_2 + dH^{-1} \wedge \widetilde{dx}^9) \\ &= \frac{-i}{2\pi r^3 L_B^2} \left[ \frac{1}{H^2}(w^*dw \wedge \widetilde{d\rho}^* - wdw^* \widetilde{d\rho}) + \frac{x^8}{H}dw \wedge dw^* - \frac{x^8}{H^3}\widetilde{d\rho} \wedge \widetilde{d\rho}^* \right]. \end{aligned} \quad (169)$$

二行目の表式より、 $\eta$  が (1,1)-form であることがわかる。あとで都合のいいように積分定数はコンパクト化の周期を用いて  $c = L_A^2 = 1/L_B^2$  とおいた。実際この規格化においては  $\eta$  のノルムが 1 になる。このことは以下のように示すことができる。まず、 $\eta$  が自己双対であることを用いて次のように書き換える。

$$\frac{1}{2} \int \sqrt{g}\eta_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu} = \int \eta \wedge \eta = \frac{2}{L_B^4} \int H^{-1}h_2 \wedge dH^{-1} \wedge \widetilde{dx}^9 = \frac{1}{L_B^4} \int h_2 \wedge dH^{-2} \wedge \widetilde{dx}^9. \quad (170)$$

さらに、 $x^9$  座標の周期が 1 であることや  $h_2$  を  $S^2$  上で積分すると 1 になることを用いれば

$$\frac{1}{2} \int \sqrt{g}\eta_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu} = \frac{1}{L_B^4} \int_{r=0}^{r=\infty} dH^{-2} = 1 \quad (171)$$

となる。さらにもう一つ重要な性質として、非コンパクト 2-サイクル  $S_1$  上での  $\eta$  の積分が 1 になる。(ただし  $S_1$  の境界を決める点  $x_0$  は無限遠にとる。)

$$\int_{S_1} \eta = -\frac{1}{L_B^2} \int_{S_1} dH^{-1} \wedge \widetilde{dx}^9 = -\frac{1}{L_B^2} \int_{r=\infty}^{r=0} dH^{-1} = 1. \quad (172)$$

この零モードは、ケーラー構造の変形に対応している。ここでは中心が一つだけの Taub-NUT を考えており、これまでその中心を原点に取っていたが、中心の位置を任意の点  $r_1 = (x_1^6, x_1^7, x_1^8)$  に置いてみよう。すると、ケーラー形式  $k_8$  のパラメータ  $x_1^8$  による微分は次のように零モードを与える。

$$\left( \frac{\partial k_8}{\partial x_1^8} \right)_{\rho,w} = \eta. \quad (173)$$

偏微分を計算する際には、複素構造を変化させないようにするため、複素座標  $\rho$  と  $w$  を固定しつつ center の位置  $x_1^8$  で微分する必要があるが、このとき座標  $x^8$  は固定されないことに注意しなければならない。

座標  $\rho$  と  $x^8$  の関係は (131) を積分することにより得られる。ここでは  $\rho$  と  $x^8$  の関係に興味があるので、 $w$  は固定して考える。すると、 $\rho$  を  $x^8$  軸方向の積分として次のように与えることができる。

$$\rho = \rho_0 - \int_{x_0^8}^{x^8} H dx^8. \quad (174)$$

ここで、積分の始点を  $x_0^8$  に取り、そこでの  $\rho$  の値を  $\rho_0$  とした。center の位置を変化させる際に、遠方での  $\rho$  と  $x^8$  の関係は変化しないようにする必要がある。このためには、 $x_0^8 \rightarrow \infty$  の極限を考えればよい。center の座標  $x_1^8$  を変化させたときに  $\rho$  と  $x^8$  の関係がどのように変化するかを見てみよう。(174) の両辺を  $x_1^8$  で微分すると、

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial x_1^8} \right)_{x^8} = - \int_{\infty}^{x^8} \left( \frac{\partial H}{\partial x_1^8} \right)_{x^8} dx^8 = \int_{\infty}^{x^8} \left( \frac{\partial H}{\partial x^8} \right)_{x_1^8} dx^8 = H(x^8) - H(\infty). \quad (175)$$

途中で  $H$  が  $x^8 - x_1^8$  という形でのみ  $x^8$  と  $x_1^8$  へ依存していることを用いた。これを (131) と組み合わせれば、 $x^8$  と  $x_1^8$  を変化させたときの  $\rho$  の変化が次のように与えられる。

$$d\rho = -H(x^8)dx^8 + [H(x^8) - H(\infty)]dx_1^8. \quad (176)$$

従って、 $\rho$  を固定しつつ  $x_1^8$  を微小量  $\epsilon$  だけ変化させるには、 $x^8$  を  $dx^8 = [1 - H(\infty)/H(x^8)]\epsilon$  だけ変化させなければならない。さらに  $k_8$  は  $x^8 - x_1^8$  の組み合わせにのみ依存するから、 $k_8$  の微分を計算する場合には  $x_1^8$  を固定しつつ  $x^8$  を  $-[H(\infty)/H(x^8)]\epsilon$  だけ変化させることと同じである。つまり次の式が得られる。

$$\left( \frac{\partial k_8}{\partial x_1^8} \right)_{\rho, w} = - \frac{H(\infty)}{H(x^8)} \left( \frac{\partial k_8}{\partial x^8} \right)_{x_1^8, w}. \quad (177)$$

$k_8$  の具体形 (147) を用いて右辺の微分を計算すれば、これが (169) に等しいことを確認できる。

同様に、複素構造の変化も  $\omega_{(2,0)} \rightarrow \omega'_{(2,0)} = \omega_{(2,0)} + \delta w_1 \eta$  のような正則 2 形式の変化として表すことができる。この変形を行った場合にはもとの正則座標はもはや正則座標ではなくなるので、再び (2,0) 形式に戻すために適当な座標変換が必要である。

center が複数個ある場合にも、それぞれの center の近傍に局在化した harmonic 2-form  $\eta_I$  を定義することができて、次の性質を満足する。

$$\int_{S_I} \eta_J = \int \eta_I \wedge \eta_J = \delta_{IJ}, \quad *_4 \eta_I = \eta_I. \quad (178)$$

$\eta_I$  の具体系を求めるには、(173) と同様にケーラー形式を center 座標  $x_I^8$  で微分すればよい。

## 2.8 BPS 曲面

## 2.8 BPS 曲面

Taub-NUT 空間上のある 2-サイクルに巻きついたブレーンについて考えよう。ブレーンの運動方程式は、その上のゲージ場などの励起を考えなければ、単にブレーンが極小曲面であることを要請する。すなわち、次の式によって与えられる面積  $A$  を極小にするような形状が実現される。

$$A = \int_{\Sigma} dA = \int_{\Sigma} \sqrt{\det G_{\alpha\beta}} d^2\sigma. \quad (179)$$

$G_{\alpha\beta}$  は  $\Sigma$  上の誘導計量であり、次のように定義される。

$$G_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha}x^m \partial_{\beta}x^n g_{mn}. \quad (180)$$

体積要素に現れる  $G_{\alpha\beta}$  の行列式は次のように書き換えることができる。

$$\det G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\gamma} \epsilon^{\beta\delta} G_{\alpha\beta} G_{\gamma\delta} = \frac{1}{2} S'^{mn} S'^{pq} g_{mp} g_{nq}. \quad (181)$$

ただし  $S'^{mn}$  は次のように定義される反対称テンソルである。

$$S'^{mn} = \epsilon^{\alpha\beta} \partial_{\alpha}x^m \partial_{\beta}x^n. \quad (182)$$

(181) と (182) に含まれる  $\epsilon^{\alpha\beta}$  はその成分が計量に依存しないテンソル密度として定義されていることに注意しよう。テンソル密度のかわりにテンソルである反対称テンソル  $\epsilon^{\alpha\beta}/\sqrt{G}$  を用いて  $S^{mn}$  を定義する。これは  $S'^{mn}$  と次の関係にある。

$$S^{mn} = \frac{S'^{mn}}{\sqrt{G}}. \quad (183)$$

$S^{mn}$  は  $\Sigma$  上で定義される 4 次元テンソルである。 $S^{mn}$  の定義は次のように表すこともできる。

$$S^{mn} dA = \int_{dA} dx^m \wedge dx^n. \quad (184)$$

ただし、 $dA$  は曲面上の微小面積要素である。 $S^{mn}$  は次のように規格化されている。

$$|S|^2 \equiv \frac{1}{2} S^{mn} S^{pq} g_{mp} g_{nq} = 1. \quad (185)$$

一般の反対称テンソル  $X^{mn}$  に対してもノルム  $|X|^2$  は同様に定義されるものとする。

$K$  を次の関係式を満足する反対称テンソルであるとする。

$$K_{mp} K^n_p = -g_{mn}. \quad (186)$$

すなわち、 $K$  を概複素構造とする。このとき  $S^{mn}$  のランクが 2 であることから、次の式が成り立つ。これは Wirtinger's inequality と呼ばれるものの一種である。

$$\frac{1}{2} K_{mn} S^{mn} \leq 1. \quad (187)$$

従って、面積について次の不等式を示すことができる。

$$A = \int dA \geq \frac{1}{2} \int K_{mn} S^{mn} dA = \frac{1}{2} \int K_{mn} dx^m \wedge dx^n = \int K_2. \quad (188)$$

ここまでは  $K$  が (186) を満足することしか用いていない。

背景がケーラー多様体であり、 $K$  がケーラー形式  $k$  であるとしてみよう。 $k$  は閉形式であるから、(188) の右辺の積分は曲面のホモロジークラスにのみ依存する。このように、曲面の最小面積を定めるような閉形式（この場合は  $k$ ）は calibration form と呼ばれる。曲面のホモロジークラスだけに依存する (188) の右辺をここでは中心電荷と呼び、 $Z$  で表すことにしよう。すなわち、曲面  $\Sigma$  の中心電荷を次のように定義する。

$$Z = \int k_2. \quad (189)$$

この量は実数である。なぜ  $Z$  を中心電荷と呼ぶのかについては §3.4 で詳しく説明する。不等式 (188) は  $K$  として  $k$  をとった場合にも  $-k$  をとった場合にも成り立つので、中心電荷  $Z$  と面積  $A$  の間には次の不等式が成立する。

$$A \geq |Z|. \quad (190)$$

もし (190) の等号が成り立てば、その曲面は極小曲面であることが保障される。そのような曲面は calibrated submanifold と呼ばれる。(190) の等号が成り立つためには、曲面上の全ての点で (187) が成り立つ必要がある、すなわち次の式が成り立つ必要がある。

$$\frac{1}{2} k_{mn} S^{mn} = \pm 1. \quad (191)$$

これはケーラー形式  $k_2$  の曲面  $\Sigma$  への引き戻しが符号を除き  $\Sigma$  上の体積形式であることを意味している。すなわち

$$k_2|_{\Sigma} = \pm \omega_2. \quad (192)$$

$\Sigma$  上に複素座標  $z$  を定義し、背景時空についてもケーラー形式  $k_2$  に対する複素座標  $x^i$  と  $\bar{x}^{\bar{i}}$  を用いると、(192) は次のように書くことができる。

$$i\partial x^i \bar{\partial} x^{\bar{j}} g_{i\bar{j}} - i\bar{\partial} x^i \partial x^{\bar{j}} g_{i\bar{j}} = \sqrt{\det G} = \pm iG_{zz^*} \quad (193)$$

正符号を取れば、この式は  $\bar{\partial} x^i \partial x^{\bar{j}} g_{i\bar{j}} = 0$  を与えるが、計量が非退化であるからこの条件は  $\bar{\partial} x^i = 0$  であること、すなわち  $x^i$  が  $z$  の正則関数であることを意味する。((193) の右辺で負符号をとれば、 $x^i$  が  $z^*$  の関数であることが導かれる。)

Taub-NUT 空間や平坦な 4 次元空間を含む、4 次元ハイパーケーラー空間の場合、

$$k^{(m)} k^{(n)} = \epsilon_{mnp} k^{(p)} - \delta_{mn} \quad (194)$$

を満足する 3 つのケーラー形式  $k^{(m)}$  が存在するので、それぞれに対して中心電荷を定義できる。

$$Z_m = \int k_2^m. \quad (195)$$

任意の 3 次元単位ベクトル  $n_m$  に対し、 $n_m k^m$  をケーラー形式として用いることができ、そのケーラー形式に対して (190) が成り立つ。これは次の式が成り立つことを意味する。

$$A \geq \sqrt{\sum_m Z_m^2} \quad (196)$$



Taub-NUT 多様体の場合には (113) が示しているようにサイクル  $S_I$  の中心電荷は対応する center の座標を与える。つまり、

$$Z_m[S_I] = x_I^m - x_0^m = \int_{S_I} k^m. \quad (197)$$

また、 $|Z_m| = A$  を満足するような極小曲面は 678 空間上では直線として表される。(ただしこれは  $S^1$  ファイバーに巻きついた 2-サイクルの場合である。678 空間への射影が二次元的に広がっているような極小曲面も存在する。)

### 3 NS5-brane の T-双対性

この節では NS5-ブレーンと Kalzua-Klein モノポールの間の T-duality の関係について詳しく調べる。

#### 3.1 NS5-brane 解

NS-NS 2-形式場  $B_2$  に磁氣的に結合したオブジェクトを考えよう。その磁荷  $Q$  は次のように場の強さ  $H_3 = dB_2$  の積分として定義される。

$$Q = \oint_{S^3} H_3. \quad (198)$$

ただし積分はある 3 次元球面上 (一般にはより一般の 3 次元閉曲面でもよい。) で実行され、 $Q$  はその  $S^3$  の中を通り抜けるオブジェクトのチャージである。あるオブジェクトが「 $S^3$  の中を通り抜ける」ということが定義できるためには、そのオブジェクトが  $S^3$  で取り囲めるようなもの、すなわち余次元が 4 のものでなければならない。10 次元時空中ではそのようなオブジェクトは 5-ブレーンである。NS-NS 2-形式場  $B_2$  に磁氣的に結合した 5-ブレーンは NS5-ブレーンと呼ばれる。

磁氣的なカレントをゲージ場  $H_3$  のソースとして

$$J_4 = dH_3 \quad (199)$$

で定義すれば、電荷 (198) は次のように  $J_4$  の積分として与えることができる。

$$Q[\mathcal{M}] = \int_{\mathcal{M}} J_4. \quad (200)$$

ただし積分領域  $\mathcal{M}$  は (198) で用いた  $S^3$  を端とする 4 次元の空間である。

ブレーンの world volume が余次元 4 の部分多様体  $\mathcal{C}$  として与えられたとしよう。このとき (200) の電荷は二つの多様体  $\mathcal{M}$  と  $\mathcal{C}$  の交差数を与えている。カレント  $J_4$  は  $\mathcal{C}$  の上でのみ 0 でない  $\delta$  関数的な 4-form である。これを  $\delta_4(\mathcal{C})$  と書くことにしよう。定義より次の式が成り立つ。

$$\int_{\mathcal{M}} \delta_4(\mathcal{C}) = \langle \mathcal{M}, \mathcal{C} \rangle. \quad (201)$$

右辺は  $\mathcal{M}$  と  $\mathcal{C}$  の交差数をあらわしている。この式が任意の  $\mathcal{M}$  に対して成り立つことを要請することにより  $\delta_4(\mathcal{C})$  が定義されると考えることもできる。

式 (201) においてはブレーンを厚さのない膜のようなものとして扱っているが、ブレーンは電荷を持っているため、その周囲のゲージ場を誘起し、さらにそのゲージ場のエネルギーは時空を曲げる。この様子を超重力理論の運動方程式の解としてあらわすことができ、ブレーンの古典解と呼ばれる。

漸近的に平坦な 10 次元時空の 012345 方向に広がる NS5-ブレーンを考えよう。これはブレーンのカレントが次のように与えられることを意味する。

$$J_4 = \rho(x^i) dx^6 \wedge dx^7 \wedge dx^8 \wedge dx^9. \quad (202)$$

ただし  $\rho$  は  $x^i = (x^6, x^7, x^8, x^9)$  に依存するブレーン密度である。さらにブレーンを一枚ごとに  $I$  でラベルし、その 6789 空間での位置を  $x_I^i$  とすれば、 $\rho(x^i)$  は次のように与えられる。

$$\rho(x^i) = \sum_I \delta^4(x^i - x_I^i). \quad (203)$$

1 でない正の整数チャージを持つブレーンは  $x_I^i$  のうちの幾つかが重なっているものとしてあらわす。

古典解を与えるためにはまずブレーンの密度  $\rho(x^i)$  が与えられたときに次の方程式を解くことによって 6789 空間上の調和関数  $H(x^i)$  を求める。

$$\hat{\Delta}_4 H = -\rho(x^i). \quad (204)$$

ただし (204) 中のラプラシアン  $\hat{\Delta}_4$  は 6789 空間に平坦な計量  $ds^2 = dx^i dx^i$  が導入されているとしたときのものであり、 $\hat{\Delta}_4 = \partial_6^2 + \partial_7^2 + \partial_8^2 + \partial_9^2$  によって定義される。遠方である定数  $c$  に漸近すると仮定すれば解は次のように与えられる。

$$H = c + \sum_I \frac{1}{4\pi^2 |x^i - x_I^i|^2}. \quad (205)$$

調和関数が得られれば、アインシュタイン方程式やディラトン場の運動方程式の解は次のように与えられる。

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + H \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (\mu, \nu = 0, \dots, 5, \quad i, j = 6, 7, 8, 9), \quad (206)$$

$$e^\phi = g_{\text{str}} H^{\frac{1}{2}}. \quad (207)$$

$g_{\text{str}}$  は無限遠でのディラトン場の期待値を決める定数である。ここでは必ずしも調和関数  $H$  の漸近値  $c$  は 1 に取るわけではないので、一般には  $e^\phi$  の無限遠方での値が  $g_{\text{str}}$  であるわけではないことを注意しておこう。

ゲージ場  $H_3$  を決定するには (199) を解かなければならない。これはガウスの定理を用いれば簡単であるが、すでに調和関数  $H$  が得られている場合には (204) が  $d\hat{*}_4 dH = \hat{*}_4 \rho$  と書き換えられ、 $J_4 = \hat{*}_4 \rho$  であることから次のように与えることができる。

$$H_3 = \hat{*}_4 dH. \quad (208)$$

ただし  $\hat{*}_4$  は 6789 空間での計量が  $ds^2 = dx^i dx^i$  と与えられるとしたときのホッジ双対をあらわす。

### 3.2 巻きついた NS5-ブレーン

NS5-ブレーンが巻きついた  $S^1$  方向についての T-dual 変換を行うことを考えよう。まずは IIA 型超重力理論を考え、その古典解 (206)、(207)、(208) から出発する。NS5-brane に平行な方向のうち  $x^5$  が周期  $L_A$  の  $S^1$  にコンパクト化されているとしよう。§1.2 で与えた Buscher 則を用いるために、 $x^5$  座標をリスケールして周期性が  $x^5 \sim x^5 + 1$ 、計量が  $g_{55} = L_A^2$  になるように取っておく。すなわち IIA 側の計量は

$$ds^2 = ds_5^2 + L_A^2(dx^5)^2 + H\delta_{ij}dx^i dx^j \quad (209)$$

と与えられるとする。計量および  $B_2$  場の展開式 (34)、(37) と見比べると、9 次元での  $U(1)$  ゲージ場  $V$  と  $W$  がともに 0 であることがわかる。そのため計量と  $B_2$  はそれぞれ独立に変換される。IIB 型理論側の計量は

$$ds^2 = ds_5^2 + \frac{1}{L_A^2}(dx^5)^2 + H\delta_{ij}dx^i dx^j \quad (210)$$

となり、 $B_2$  場の式は変化せず (208) がそのまま成り立つ。ディラトンについては (44) に従って変換すればよいが、それはディラトン場についての解 (207) の中の結合定数パラメータを次のものに置き換える。

$$g_{\text{str}}^B = \frac{g_{\text{str}}^A}{L_A}. \quad (211)$$

以上のことから、 $S^1$  に巻きついた NS5-ブレーン解に対して T-双対性変換を施したものは、dual な  $S^1$  に巻きついた NS5-ブレーン解になることがわかる。

このことは以上のように具体的な古典解を扱わなくても、T-duality 変換が 9 次元のゲージ場  $h_3$  に作用しないことから明らかである。巻きついた NS5-ブレーンはこのゲージ場に対して磁気的なチャージを持つものとして特徴付けられるから、T-双対性変換の後にもやはり巻きついた NS5-ブレーンになるはずである。

### 3.3 巻きついていない NS5-ブレーン

次に、巻きついていない NS5-ブレーンについてみてみよう。再び §1.2 で与えた Buscher 則を用いる。そのために前節で与えた古典解をその垂直方向のうちの一つ、 $x^9$  方向についてコンパクト化する。§1.2 で与えた公式はコンパクト化の周期が 1 であるようにと

表 1: NS5-ブレーン系。[9] は 9 方向がコンパクト化されていることを表している。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	[9]
NS5	○	○	○	○	○	○				

た場合に適用できるものである。そこでここでも  $x^9$  方向の周期は 1 と取る。その代わりに  $S^1$  のサイズを調和関数の漸近的な値、すなわち定数項によってあらわすことにする。計量 (206) より、 $g_{99}$  の値は調和関数  $H$  の値に一致するから、その値を  $L^2$  にしておけば、 $H$  が定数になる漸近領域においてコンパクト化のプロパーな周期は  $L$  となる。

Buscher 則を用いる際に問題なのは、このルールは  $x^9$  依存性がないような背景時空に対してのみ用いることができるという点である。ここで考えているような  $x^9$  方向を垂直方向として持つような NS5-ブレーン解は明らかにこの条件を満足していない。そこでここでは  $x^9$  依存性を持つモードは全て無視して、定数モード部分だけに注目しよう。このような古典解は NS5-ブレーンの密度を  $x^9$  方向に均す (smear する) ことで得ることができる。つまり (203) で与えられるブレーン密度の代わりに  $x^9$  方向に平均化して得られる次のものを用いる。

$$\rho = \sum_I \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_I). \quad (212)$$

ただし、 $\mathbf{r} = (x^6, x^7, x^8)$  である。これは Taub-NUT 解を記述する際に用いた (85) の形に一致している。 $\mathbf{r}_I$  は  $I$  によってラベルされるそれぞれの NS5-ブレーンの 678 空間での座標を与える。

また、4次元空間上の微分方程式 (204) は3次元の微分方程式 (88) に落ち、その解は (89) によって与えられる。ここでは次のように置いておこう。

$$H(\mathbf{r}) = L_A^2 + \frac{1}{4\pi} \sum_I \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_I|}. \quad (213)$$

定数項  $L_A^2$  は上で述べたように IIA 型理論側のコンパクト化の周期が  $L_A$  になるように選んだ。

(34) と上記の計量を比較すれば、

$$ds_9^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + H dr^2, \quad e^{2\sigma} = H, \quad V_1 = 0 \quad (214)$$

を得る。 $V_1 = 0$  であるということは  $\widetilde{dx}^9 = dx^9$  であることを意味している。

NS5-ブレーンは  $x^9$  方向にまきついていないので、ゲージ場  $H_3$  については必ず  $dx^9$  を含む。(37) に従って次のように分解する。

$$H_3^A = h_2 \wedge dx^9, \quad B_2^A = W_1 \wedge dx^9. \quad (215)$$

これを (199) に代入すれば  $h_2$  が次の式を満足すべきことがわかる。

$$dh_2 = \rho(\mathbf{r}) dx^6 \wedge dx^7 \wedge dx^8. \quad (216)$$

この式は  $h_2$  が磁荷密度  $\rho(\mathbf{r})$  で与えられる3次元空間中のディラックモノポールによって生じる  $U(1)$  ゲージ場の場に強さに他ならないことを表している。また、(90) に与えた関係式  $h_2 = -\widehat{*}_3 dH$  は (208) より従う。

さてここで Buscher 則を適用して T-双対性変換を行おう。計量は (41) によって与えられる。すなわち

$$\begin{aligned} ds^2 &= ds_9^2 + e^{-2\sigma} (dx^9 + W_1)^2 \\ &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + ds_{\text{TN}}^2. \end{aligned} \quad (217)$$

二行目へ移る際に (214) を代入した。 $ds_{\text{TN}}^2$  は (87) に与えられている Taub-NUT 計量である。つまり、巻きついていない NS5-ブレーンは T-双対性変換によって Kaluza-Klein モ

ノポールに移る。678 空間におけるブレーンの位置は Taub-NUT 空間の center の位置に対応する。(表 2) 表中の記号  $\times$  は 9 方向のサイクルがブレーン上でつぶれることを意味している。<sup>1</sup>

表 2: 表 1 の T-dual 変換の結果得られる Kaluza-Klein monopole。[9] は 9 方向がコンパクト化されていることを表している。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	[9]
KKM	○	○	○	○	○	○				$\times$

(214) に与えられているように、 $V_1 = 0$  であることは T-双対性変換を行った後に  $B_2 = 0$  であることを意味する。さらにディラトン場に対しては

$$e^{\phi'} = e^{\phi - \sigma} = g_{\text{str}} \quad (218)$$

のように定数になる。

このように、巻きついていない NS5-ブレーンの古典解に対して T-双対性変換を行って得られる古典解において、非自明な振る舞いをする場合は計量のみである。つまり、NS5-ブレーンが完全に幾何学的なものに置き換えられる。ただし、ここでは NS5-ブレーンの  $x^9$  方向の位置に情報は平均化によって失われている。この情報は実は T-duality 変換を行った後には  $B_2$  場の情報に移されていることが §3.4 で示される。

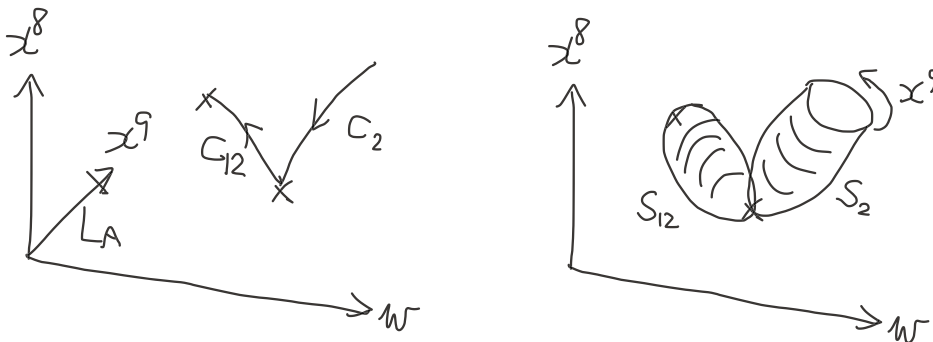


図 8:  $S^1$  方向にまきついていない NS5-ブレーンは T-双対性変換によって Taub-NUT 空間の center (Kaluza-Klein monopole) へ移される。ある基準点から  $I$  番目の NS5-brane へ伸びる曲線を  $C_I$ 、 $J$  番目の NS5-brane から  $I$  番目の NS5-brane へ伸びる曲線を  $C_{IJ} = C_I - C_J$  とする。それらに対応して Taub-NUT 上の 2-サイクル  $S_I$  および  $S_{IJ}$  を定義することができる。 $S_I$  の位相はディスク、 $S_{IJ}$  の位相は  $S^2$  である。

### 3.4 中心電荷

§2.8 において示されたように、ハイパーケーラー空間上の 2-サイクル  $\Sigma$  のホモロジークラスが与えられたとき、その上でケーラー形式  $k^A$  を積分することで面積の下限を与え

<sup>1</sup>この記号は横山修一氏の提案によるものである。

る量  $Z^A$  が得られた。この量を §2.8 において中心電荷と呼んだが、それは  $Z^A$  を  $\Sigma$  に巻きつけたブレーンの中心電荷として物理的に解釈できるからである。

超対称変換の交換関係は常に運動量演算子を与えるが、一般にはそれ以外に中心電荷を含む。超重力理論においてこの電荷は重力多重項に含まれる反対称テンソル場に結合している。ここではまず IIB 型超重力理論を考えよう。その場合、中心電荷に結合するゲージ場は  $B_2$  や  $C_{\text{even}}$  である。従って中心電荷をこれらのゲージ場とブレーンとの結合によって定義することができる。実際に反対称テンソル場の上で  $\xi_I$  および  $\xi'_I$  をパラメータとする超対称変換  $\delta$  と  $\delta'$  の交換関係を計算してみると、次のように (33) に与えられている  $H_3$  や (54) に与えられている  $G_{\text{odd}}$  を不変にするゲージ変換の形になる。

$$[\delta', \delta]B_2 = d\Lambda_1^{\text{NS}}, \quad [\delta', \delta]C_{\text{even}} = e^{-B_2}d\Lambda_{\text{odd}}. \quad (219)$$

計算を簡単にするために場の強さ  $H_3$  および  $G_{\text{odd}}$  が 0 である場合を考えた。ただしポテンシャルが 0 であることは仮定しない。ゲージ変換のパラメータ  $\Lambda_1^{\text{NS}}$  と  $\Lambda_{\text{odd}}$  は超対称変換パラメータ  $\xi_I$  と  $\xi'_I$  を用いて以下のように定義されている。

$$\Lambda_1^{\text{NS}} = \frac{1}{4}(\sigma_z)_{IJ}(\xi'_I \gamma_{[1]}\xi_J), \quad \Lambda_{2n-1} = \frac{1}{4e^\phi}(\sigma_x \sigma_z^{n+1})_{IJ}(\xi'_I \gamma_{[2n-1]}\xi_J). \quad (220)$$

ただし  $\gamma_{[n]}$  は次のように定義される  $n$ -形式である。

$$\gamma_{[n]} = \frac{1}{n!}\gamma_{i_1} \cdots \gamma_{i_n} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n}. \quad (221)$$

ハイパーケーラー空間上のサイクル  $\Sigma$  に巻きつけた基本的弦を考えよう。基本的弦は  $B_2$  場と結合するから、次のように中心電荷を定義することができる。

$$Z_{\text{F1}} \sim \frac{\partial S_{\text{brane}}}{\partial B_2}. \quad (222)$$

ここで、右辺の微分の意味について補足が必要であろう。右辺の微分を、ある特定の座標における場  $B_2(x)$  による微分と解釈すると、右辺は電荷密度を与える。電荷はそれを空間全体で積分したものである。従って電荷は  $B_2$  の定数モードによる微分と解釈しなければならない。一般の空間上では  $B_2$  の定数モードは定義できないが、そのような背景上では超対称性が敗れていて、中心電荷が定義できないことを意味している。もしある背景上で超対称性が破れていなければ、 $B_2$  に対する幾つかの定数モードが存在し、それらによる微分として中心電荷を定義することができる。

たとえば、3つのケーラー構造  $k^A$  が存在するようなハイパーケーラー空間上ではケーラー形式に比例する共変的定数モードによる変分  $\delta B_2 = \epsilon_A k^A$  を考えることにより3つの中心電荷が次のように定義できる。

$$Z_{\text{F1}}^A = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \epsilon^A} S_{\text{brane}}[C_{\text{even}}, B_2 + \epsilon_A k^A] \Big|_{\epsilon_A=0}. \quad (223)$$

実際これが (195) と一致することは、弦の作用が次のように与えられることから示される。

$$S_{\text{F1}} = S_{\text{NG}} + 2\pi \int B_2. \quad (224)$$

ただし  $S_{\text{NG}}$  は南部-後藤作用であり、 $B_2$  に依存しない。

特に背景時空として Taub-NUT を考え、サイクルが  $S_I$  である場合には

$$Z_{F1}^m[\text{F1 wrapped on } S_I] = x_I^m - x_0^m \quad (225)$$

が得られる。これは (197) に与えた式と全く同じであるが、ここではサイクル  $S_I$  に基本的弦の世界面という物理的解釈が与えられ、得られる電荷も物理的な中心電荷である。

同様な式は IIB 型理論において D1-ブレーンの中心電荷を考えることによって得られる。D-ブレーンの電荷に相当する中心電荷は D-ブレーンの作用を RR-ポテンシャルの定数モードで微分することで定義できる。ただしその際にはこれまで用いてきた  $C_{\text{odd}}$  や  $C_{\text{even}}$  ではなく、次のように定義される  $\hat{C}_{\text{odd}}^A$  や  $\hat{C}_{\text{even}}^B$  を用いる必要がある。

$$\hat{C}_{\text{odd}}^A = e^{B_2^A} \wedge C_{\text{odd}}^A, \quad \hat{C}_{\text{odd}}^B = e^{B_2^B} \wedge C_{\text{odd}}^B. \quad (226)$$

これまで用いてきた RR ポテンシャルは変換 (219) に  $B_2$  場を含んでいたが、ここで定義した新しいポテンシャルはパラメータ  $d\Lambda_{\text{odd}}$  に対する変換が  $[\delta', \delta]\hat{C} = d\Lambda$  となり、 $B_2$  場を含まない。したがって  $\hat{C}$  のほうを中心電荷に結合したゲージ場とみなすのが自然である。

背景がハイパーケーラーである場合を考えてみると、 $\hat{C}_2$  に結合する中心電荷  $Z_{D1}^A$  は次のように与えられる。

$$Z_{D1}^A = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \epsilon_A} S_{\text{brane}}[\hat{C}_2 + \epsilon_A k_2^A, B_2]_{\epsilon_A=0}. \quad (227)$$

実際 2-サイクルに巻きついた D1-ブレーンの場合にこれが (195) と一致することは、D-ブレーンの Chern-Simons 作用 (58) を  $\hat{C}$  を用いて書き換えた次の作用を用いて示すことができる。

$$S_{\text{CS}}^{IIA} = 2\pi \int_{2n-1} \hat{C}_{\text{odd}}^A e^{-\mathcal{F}_2^{IIA}}, \quad S_{\text{CS}}^{IIB} = 2\pi \int_{2n} \hat{C}_{\text{odd}}^B e^{-\mathcal{F}_2^{IIB}}. \quad (228)$$

ここで注意すべき点は、作用 (228) はブレーンの次元を固定したとしても  $\mathcal{F}_2 \neq 0$  である場合にはいくつもの RR-場を含むということである。これは、 $Z_{Dp}$  電荷を持つのが必ずしも Dp ブレーンだけではないことを意味している。たとえば、任意のブレーンに対して  $Z_{D1}$  電荷を (227) によって定義することができ、その値は一般に D1-ブレーン以外についても 0 ではない。 $Z_{F1}$  についても同様であり、基本的弦だけではなく、D-ブレーンも一般にはこの電荷を持つ。D-brane について  $Z_{F1}$  を得るには定義式 (223) の  $S_{\text{brane}}$  として D-ブレーンの作用を代入すればよい。ただしそのときには RR-場は (223) 中にも書かれているとおり  $\hat{C}$  ではなく  $C$  を用いなければならない。これは、基本的弦のチャージに対応する  $\Lambda_1^{\text{NS}}$  によるゲージ変換は  $C$  を不変に保つが  $\hat{C}$  は非自明に変換してしまうためである。

特に背景時空として Taub-NUT 空間を考え、サイクルが  $S_I$  である場合には、(227) で定義される中心電荷に対して

$$Z_{D1}^m[\text{D1 wrapped on } S_I] = x_I^m - x_0^m \quad (229)$$

が得られる。これは (197) に与えた式と同じであるが、(225) の場合と同様にサイクルと電荷に対して物理的な意味が与えられている。このように、電荷が物理的に解釈できるということは、それらが双対性のもとでどのように変換されるかを調べる際に重要である。

NS5-ブレーンと Taub-NUT 空間の T-duality における中心電荷の変換を理解するために、中心電荷の式をより具体的に書いてみよう。D1-ブレーンの中心電荷  $Z_{D1}$  を定義するためのゲージ場  $\widehat{C}_2$  の変分に対してケーラー形式の具体系 (107) を代入すると、

$$\delta\widehat{C}_2^B = \epsilon_m k_2^m = \epsilon_m dx^m \wedge \widetilde{dx}^9 - \frac{H}{2} \epsilon_{mnp} \epsilon_m dx^n \wedge dx^p \quad (230)$$

が得られる。ただし、 $m, n, p = 6, 7, 8$  である。さらに 2-サイクル  $\Sigma$  として  $x^9$  方向にまきついている  $S_I$  を採用すると、サイクル上の積分には  $dx^9$  を含むものだけが利くので (230) の第二項は不要であり、変分  $\delta\widehat{C}_{m9}^B = \epsilon_m$  を考えれば十分である。すなわち、中心電荷が次のように与えられる。

$$Z_{D1}^m = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial S_{D1}}{\partial \widehat{C}_{m9}}. \quad (231)$$

この中心電荷が  $x^9$  方向の T-双対性変換のもとでどのように変換されるかを考えよう。変換によって  $x^9$  方向にまきついた D1-ブレーンは巻きついていない D0-ブレーンに移り、それらの作用  $S_{D1}$  と  $S_{D0}$  は等しい。また、 $\widehat{C}$  の変換は次のように与えられる。

$$\widehat{C}_{\text{odd}}^A = \widehat{c}_{\text{odd}} + \widehat{c}_{\text{even}} \wedge \widetilde{dy}, \quad \widehat{C}_{\text{even}}^B = -\widehat{c}_{\text{even}} + \widehat{c}_{\text{odd}} \wedge \widetilde{dz}. \quad (232)$$

ただし 9 次元の場合  $\widehat{c}$  は、以前に用いた  $c$  と次の関係にある。

$$\widehat{c}_{\text{odd}} = e^{b_2} \wedge (c_{\text{odd}} - c_{\text{even}} \wedge V_1), \quad \widehat{c}_{\text{even}} = e^{b_2 - V_1 \wedge W_1} \wedge (c_{\text{even}} + c_{\text{odd}} \wedge W_1). \quad (233)$$

特に  $\widehat{C}_m^A = \widehat{C}_{mz}^B$  であるから、(231) は次のように IIA 型理論の言葉で書き換えることができる。

$$Z_{D1}^m = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial S_{D1}^B}{\partial \widehat{C}_{m9}^B} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial S_{D0}^A}{\partial \widehat{C}_m^A} = Z_{D0}^m. \quad (234)$$

この式の左辺は 2-サイクルに巻きついた D1-ブレーンの中心電荷であるが、右辺はある曲線を世界線として持つ D0-ブレーンの中心電荷と解釈される。たとえば、D1-ブレーンが図 8 に与えられた Taub-NUT 空間の 2-サイクル  $S_I$  に巻きついているとすると、対応する D0-ブレーンの世界線は NS5-ブレーンに端を持つ曲線  $C_I$  によって与えられる。そしてその中心電荷はその NS5-ブレーンの座標を与える。

$$Z_{D0}^m[\text{D0 along } C_I] = x_I^m - x_0^m. \quad (235)$$

すなわち、(234) は Taub-NUT 空間の center の位置が NS5-brane の位置に対応するということをブレーンのチャージを用いて表した式であるということができる。

同様の関係式を用いると、まだ与えていない情報、NS5-ブレーンの  $x^9$  座標が T-双対性のもとでどのように変換されるかについても明らかにすることができる。NS5-ブレーンの  $x^9$  方向の位置は (235) において  $m = 9$  ととることによって得ることができる。すなわち、 $S_{D0}^A$  を  $\widehat{C}_9^A$  の定数モードによって微分することで得ることができる。この R-R ポテンシャルが T-dual 変換のもとで  $\widehat{C}_9^A = -\widehat{C}_9^B$  のように変換されるので、IIB 型理論における対応するチャージは R-R スカラー場  $\widehat{C}^B$  に結合する D(-1)-ブレーンチャージである。(234) に相当する関係式は

$$Z_{D0}^9 = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial S_{D0}^A}{\partial \widehat{C}_9^A} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial S_{D1}^B}{\partial \widehat{C}^B} = Z_{D(-1)} \quad (236)$$



ここで、IIB 型理論の側で考えているブレーンは D(-1)-ブレーンではなく先ほどと同じ D1-ブレーンであることを注意しておこう。前にも述べたように、 $B_2 \neq 0$  の場合には D1-ブレーンであっても D(-1)-ブレーンチャージを持つことができ、これが T-duality を通して NS5-brane の  $x^9$  座標を与える。

$$x_I^9 - x_0^9 = Z_{D0}^9[\text{D0 along } C_I] = Z_{D(-1)}^9[\text{D1 wrapped on } S_I]. \quad (237)$$

ここで、D1-ブレーンの作用 (228) を用いれば

$$x_I^9 - x_0^9 = \int_{S_I} \mathcal{F}_2 = \int_{S_I} B_2 - \int_{-\partial S_I} A_1 \quad (238)$$

が得られる。

関係式 (238) は中心電荷を用いずとも、直接ブレーン上のゲージ場の T-双対性変換 (70) を用いることによっても示すことができる。すなわち

$$\int_{S_I} \mathcal{F}_2^B = \int_{S_I} (\mathcal{F}_2^A + \widetilde{dy} \wedge \widetilde{dz}) = \int_{S_I} \widetilde{dy} \wedge \widetilde{dz} = \int_{C_I} \widetilde{dy}. \quad (239)$$

最後の積分は座標系の傾きを補正して測った  $C_I$  の両端での  $y$  座標の差であり、直交座標を用いれば (238) の左辺に一致する。

(238) の右辺第二項は  $S_I$  の境界上での積分であるが、全ての  $I$  に対して共通であり、また、その点での  $A_9$  の値は T-dual 変換によって  $x_0^9$  座標に対応している。そこで  $x_0^9$  の位置を  $x^9$  座標の原点に取り直すことでこの項を 0 にしておく。このとき次の式が成り立つ。

$$x_I^9 - x_0^9 = \int_{S_I} B_2^B. \quad (240)$$

678 座標を与える (197) と 9 座標を与える (240) により、Taub-NUT 空間上の IIB 型理論の情報から IIA 型理論における NS5-ブレーンの完全な位置情報を得ることができる。

IIA 型理論側の NS5-ブレーンの座標  $x^6, x^7, x^8, x^9$  を複素に組むのがしばしば便利である。それらを IIB 型理論側の 2-形式場の積分として与えておこう。 $w = x^6 + ix^7$  については (123) の積分として与えられる。

$$w_I - w_0 = \int_{S_I} \omega_{(2,0)}. \quad (241)$$

$\omega_{(2,0)}$  の具体形 (149) を用いれば、 $x^9$  方向の積分が  $x = 0$  周りの留数積分になることを用いてこの関係式が示される。残る二つの NS5-ブレーン座標については次のように与えることができる。

$$(x_I^8 - x_0^8) + i(x_I^9 - x_0^9) = \int_{S_I} J_2. \quad (242)$$

ただし  $J_2$  は複素化されたケーラー形式と呼ばれるもので次のように定義される。

$$J_2 = k_2^8 + iB_2. \quad (243)$$

以前にも述べたように、Taub-NUT 空間を表す代数方程式 (122) は  $w_I$  のうちのいくつか为重なったときに特異になるが、対応するサイクル上でのケーラー形式  $k_2^8$  の積分が 0 で

無い場合には実際には多様体に特異性が現れない。これは、対応する center が  $x^8$  方向に離れているためである。T-dual をとってみると、これは NS5-brane が  $x^8$  方向に離れていることを意味する。弦理論においては NS5-brane が 678 座標において重なっていたとしても  $x^9$  座標が異なれば特異性は生じないと考えられる。これは、たとえ Taub-NUT 空間の center が重なって多様体としては特異点が現れたとしても、対応するサイクル上での  $B_2$  の積分が 0 で無い限り、弦理論としての特異性が生じないことを意味している。

### 3.5 NS5-ブレーン上の場

NS5-ブレーン上には 6 次元の  $\mathcal{N} = 2$  超対称性がある。そしてその超対称多重項が住んでいる。ここでは特に IIA 型理論の NS5-ブレーンについてみてみよう。ブレーンの向きは 012345 方向に広がっているものとする。IIA 型理論の NS5-brane 上に実現される超対称性はカイラルであり、しばしば  $\mathcal{N} = (2, 0)$  と表記される。(一方 IIB 型理論においては  $\mathcal{N} = (1, 1)$  超対称性の実現している。) ブレーン上にある超対称多重項はテンソル多重項である。これはスカラー場を 5 つと 2-形式場を一つ含む。この 2 形式場はその場の強さが反自己双対である。5 つのスカラー場のうち 4 つはブレーンの振動モードであり、それらの期待値が NS5-ブレーンの 6789 空間での位置を与える。残る一つのスカラー場を  $c$  としよう。これは D0-ブレーンの世界線端点に結合する 0-形式ゲージ場とみなすことができる。また、この場は NS5-ブレーンに端を持つ D4-ブレーンに磁氣的に結合している。つまり、NS5-ブレーン上に端を持つ D4-ブレーンの端を NS5-ブレーン上で取り囲む  $S^1$  上でスカラー場  $c$  の場の強さ  $dc$  を積分すると、NS5-ブレーン上に端を持つ D4-ブレーンの枚数を与える。

$$N_{D4} = \oint dc. \quad (244)$$

この式は、スカラー場  $c$  が一価ではなく、周期 1 の  $S^1$  上に値をとる場であることを意味している。 $M$  理論の観点からは NS5-ブレーンは  $x^{11}$  方向にまきついていない M5-ブレーンとみなされるが、 $c$  は M5-ブレーンの  $x^{11}$  座標を与える場である。

NS5-ブレーン上の 2-形式場を  $c_2$  とする。場の強さ  $h_3 = dc_2$  は上でも述べたように反自己双対であり、次の式を満足する。

$$*_6 h_3 = -h_3. \quad (245)$$

NS5-ブレーン上の振動モード  $x^6, x^7, x^8, x^9$  およびゲージ場  $c$  と  $c_2$  が T-dual 変換によって Kaluza-Klein モノポール側でどのように表されるかを考えてみよう。4 つの振動モードのうち、コンパクト化されていない 678 方向の座標  $x^m$  は T-双対変換によって Taub-NUT 多様体の center の座標になる。従って 678 方向への NS5-ブレーンの微小振動は center の位置の微小変化を表す計量の変形モードに対応するはずである。このことは (173) にあるように 3 つのケーラー形式の変形として次のように表される。

$$\delta k^A = \sum_I \delta x_I^A(x^\mu) \eta_I. \quad (246)$$

ただしここでは center の個数が一般の場合を考え、center を  $I$  でラベルした。 $\eta_I$  は (178) を満足する調和 2-形式である。

NS5-ブレーンの微小振動とケーラー構造の変形の対応を確認するために、それらの有効作用が一致することを示そう。Taub-NUT 空間上の IIB 型理論においては、IIB 型超重力理論の作用に (246) を代入して得られる  $\delta x_I^A(x^\mu)$  の汎関数が微小振動の有効作用である。IIB 型超重力理論のディラトンおよび重力の部分は次のように与えられる。

$$S = \int d^{10}x \frac{2\pi\sqrt{-g^{(10)}}}{e^{2\phi^B}} (R^{(10)} + 4(\partial_M\phi^B)^2). \quad (247)$$

変形させたいのは計量場だけであり、ディラトン場は定数として固定したいが、ここで用いている弦計量においては重力場とディラトン場の間には混合があるので、ディラトン場も含めた作用からはじめる。時空座標を Kaluza-Klein モノポールに沿った 6 次元部分  $x^\mu$  と Taub-NUT 空間方向  $x^m$  に分け、計量が  $ds^2 = g_{\mu\nu}(x^\mu)dx^\mu dx^\nu + g_{mn}(x^\mu, x^m)dx^m dx^n$  のように二つの部分  $g_{\mu\nu}$  と  $g_{mn}$  に分けることができるとしよう。しかも  $g_{\mu\nu}$  は  $x^m$  に依存しないと仮定する。また、内部空間の計量が

$$g_{mn} = g_{mn}(t^A(x^\mu), x^m) \quad (248)$$

のようにいくつかのパラメータ  $t^A(x^\mu)$  を通して  $x^\mu$  座標に依存しているとしよう。(247) に対してこの計量を代入し、スカラー場  $t^A$  と  $\phi$  の運動項を抜き出すと、次の結果を得る。

$$S = \int d^6x \frac{2\pi\sqrt{-g^{(6)}}}{e^{2\phi}} \left( 4V(\partial\phi)^2 - 4(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu V) - \frac{1}{2}G_{AB}(\partial_\mu t^A)(\partial^\mu t^B) \right). \quad (249)$$

$V$  は  $x^m$  方向の積分を実行することで現れる 4 次元空間の体積であり、パラメータ  $t^A$  の関数である。

$$V = \int d^4y \sqrt{g^{(4)}}. \quad (250)$$

$x^m$  方向はコンパクトではない場合に興味があるので、最終的には  $V = \infty$  となる極限を取る。 $G_{AB}$  はスカラー場  $t^A$  の運動項の係数行列であり、次のように内部空間上の積分として与えられる。

$$G_{AB} = \int d^4x \sqrt{g^{(4)}} \left( \frac{1}{2}g^{mp}g^{nq}(g_{mn,A})(g_{pq,B}) - \frac{1}{2}(g^{mn}g_{mn,A})(g^{pq}g_{pq,B}) \right). \quad (251)$$

ここまでは内部空間の変形の具体形については指定をしない、一般的な状況を考えてきた。これらの式をケーラー構造の変形に対して適用してみよう。ここでは計算を楽にするために 3 つのケーラー構造のうち  $k^8$  の変形を考えるが、他のケーラー構造（あるいは複素構造）の変形も同様に扱うことができる。ケーラー構造  $k^8$  が次のようにある基準から次のように変形されたとする。

$$\delta k^8(t^I) = t^I \eta_I. \quad (252)$$

あるいは、計量の変化として  $\delta g_{i\bar{j}} = it^I \eta_{i\bar{j}}^I$  と書くこともできる。 $\delta g_{mn}$  のトレース部分  $g^{mn}\delta g_{mn} = k^{mn}\eta_{mn}^I$  であるが、 $k_{mn}$  が反自己双対テンソル、 $\eta_{mn}^I$  が自己双対テンソルであるからこの積は 0 である。すなわち  $\delta g_{mn}$  はトレースレスであり、(251) の第二項は 0 になる。また同じく  $\delta g_{ab}$  がトレースレスであることから  $V$  はパラメータ  $t^I$  に依存しない。

い定数である。従って (249) にあるディラトン場とパラメータ場  $t^I$  の混合項は 0 になる。さらに零モード  $\eta_I$  の規格化条件 (178) を用いると、係数行列が次のように決まる。

$$G_{IJ} = \delta_{IJ}. \quad (253)$$

従って  $t^I$  の作用が次のように得られる。

$$S = -\frac{2\pi}{2(g_{\text{str}}^B)^2} \int d^6x (\partial_\mu t^I) (\partial^\mu t^I) = -\frac{2\pi}{2(g_{\text{str}}^A)^2} \int d^6x (\partial_\mu t^I) (\partial^\mu t^I) g_{88}^A \quad (254)$$

最後の式変形で T-双対変換における関係式  $1/(g_{\text{str}}^B)^2 = L_A^2/(g_{\text{str}}^A)^2 = g_{88}^A/(g_{\text{str}}^A)^2$  を用いた。(254) は張力が  $2\pi/(g_{\text{str}}^A)^2$  であるブレーンの振動モードの作用であり、確かに IIA 型理論における NS5-ブレーンの微小振動  $\delta x_I^8 = t_I$  の作用に一致する。

次に、IIA 型 NS5-ブレーンの 9 方向の振動モードについてみてみよう。NS5-ブレーンを  $x^9$  方向へ移動させてもその T-双対である Taub-NUT 空間の形は変形せず、 $x^9$  座標の情報は  $B_2$  場の変化として現れるから、 $x^9$  の微小振動は Taub-NUT 空間の center の周りに局在した  $B_2$  場の零モードの微小振動と同定される。この  $B_2$  場の変形を次のように与えよう。

$$B_2^B = \sum_I f^I(x^\mu) \eta_I. \quad (255)$$

$f^I$  は  $x^\mu$  ( $\mu = 012345$ ) の関数であり、零モードの集団座標である。(172) を用いれば  $f_I = \int_{S_I} B_2$  が得られるが、これを (240) と比較すれば  $f_I$  がそのまま  $I$  番目の NS5-ブレーンの  $x_I^9$  座標と同定されることがわかる。 $f_I$  に対する有効作用を得るために、IIB 型超重力理論における  $B_2$  場の運動項に (255) を代入すると、

$$\begin{aligned} S_{\text{IIB}} &= -\frac{1}{12} \frac{2\pi}{e^{2\phi^B}} \int d^{10}x \sqrt{-g^{(10)}} (H_3^B)^2 \\ &= -\frac{1}{4} \frac{2\pi}{e^{2\phi^B}} \int d^{10}x \sqrt{-g^{(10)}} \partial_\mu f^I \partial^\mu f^J \eta_{Imn} \eta_J^{mn} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{2\pi}{e^{2\phi^B}} \int d^6x \sqrt{-g^{(6)}} \partial_\mu f^I \partial^\mu f^J. \end{aligned} \quad (256)$$

ここで  $1/e^{2\phi^B} = L_A^2/e^{2\phi^A} = g_{99}^A/e^{2\phi^A}$  を用いると、

$$S_{\text{IIB}} = -\frac{1}{2} \frac{2\pi}{e^{2\phi^A}} \int d^6x \sqrt{-g^{(6)}} \partial_\mu f^I \partial^\mu f^J g_{99}^A. \quad (257)$$

が得られ、張力  $2\pi/e^{2\phi^A}$  の IIA 型 NS5-ブレーンの  $x^9$  方向の振動モードを表す作用が得られる。

次に、IIB 型超重力理論における自己双対 4 形式場  $C_4$  の次の零モードについてみてみよう。

$$C_4 = \sum_I c_2^I(x^\mu) \wedge \eta_I. \quad (258)$$

集団座標  $c_2^I$  は  $I$  番目の NS5-ブレーン上の 2 形式場と同定すべきものである。実際  $C_4$  に課される反自己双対条件  $*_{10}G_5 = -G_5$  と (178) にある  $\eta_I$  の自己双対性より、 $h_3 = dc_2$  に対する反自己双対条件 (245) が得られる。先ほどと同様に IIB 型超重力理論の作用に代

入して整理すると、次の有効作用を得る。(正確には自己双対性のためにこのような単純な作用で書くことはできないが、その点についてここでは考えないことにする。)

$$S_{\text{IIB}} = -\frac{2\pi}{2 \cdot 5!} \int d^{10}x \sqrt{-g^{(10)}} (G_5^B)^2 = -\frac{2\pi}{12} \int d^6x \sqrt{-g^{(6)}} (h_3^I)^2. \quad (259)$$

これを IIA 型 NS5-ブレーン上の反対称テンソル場  $c_2$  の作用と比較してみよう。 $c_2$  の自己双対性とディラックの量子化条件より、 $c_2$  の運動項の係数は一意的に決定される。(259) を見てみると、作用の係数はディラトン場を含まない定数になっており、しかもその値は自己双対性とディラックの量子化条件から定まる値に一致している。

最後に RR 2 形式場の零モードについて考えよう。 $C_2$  の次の変形モードを考える。

$$C_2 = \sum_I c^I(x^\mu) \wedge \eta_I. \quad (260)$$

集団座標  $c^I$  は NS5-ブレーン上の 0-形式ゲージ場と同定されるものである。IIB 型超重力理論の作用に代入して有効作用を計算すると、

$$S_{\text{IIB}} = -\frac{2\pi}{12} \int d^{10}x \sqrt{-g^{(10)}} (G_3^B)^2 = -\frac{2\pi}{2(g_{\text{str}}^A)^2} \int d^6x \sqrt{-g^{(6)}} (\partial_\mu c^I)^2 g_{11,11}^M \quad (261)$$

最後の式へ移る際には、IIA 型理論の NS5-ブレーンが M 理論における M5-ブレーンに対応することを念頭におき、 $1 = g_{11,11}^M / (g_{\text{str}}^A)^2$  を挿入した。こうすると  $c$  の振動モードが M5-ブレーンの  $x^{11}$  方向の振動であることが明らかに見て取れる。

また、(260) はサイクル  $S_I$  に巻きついた D1-ブレーンと次のように結合する。

$$S_{\text{D1}} = 2\pi \int C_2 = 2\pi c_2^I |_{\partial C_I}. \quad (262)$$

ただし  $\partial C_I$  は曲線  $C_I$  の端点のうち、NS5-ブレーン上にある方を表す。(  $C_I$  はある基準点と NS5-ブレーンを結ぶ 678 空間上の曲線である。) これは IIA 型理論における D0-ブレーンと NS5-ブレーン上の  $c$  場の結合を再現している。

こうして、(197)、(240) に加えて NS5-ブレーン上のスカラー場  $c$ 、言い換えると M5-ブレーンの  $x^{11}$  座標を、Kaluza-Klein モノポールにおける場を用いて与える公式が次のように得られた。

$$x_I^{11} - x_0^{11} = c_I - c_0 = \int_{S_I} C_2. \quad (263)$$

ただし、一般には  $C_2$  が規格化可能モード (260) 以外の成分を含むことを考慮して定数項  $c_0$  を含めておいた。

こうして、それぞれの center に局在化した超重力理論のモードが NS5-ブレーン上の場を与えることが確かめられた。

NS5-ブレーン上に存在するゲージ場  $c_0, c_2, c_4$  ( $c_4$  は  $c_0$  の双対場である。) は II 型超重力理論の R-R 場  $C$  とよく似た構造をしている。実際、IIA 型 NS5-ブレーン上のゲージ場は T-dual を通して Taub-NUT 上の R-R 場の零モードとして次のように関係させることができる。

$$C_{\text{even}} = c_{\text{even}}^I \wedge \eta_2^I. \quad (264)$$

NS5-ブレーンと D-ブレーンよりなる系を用いてゲージ理論を構成する際には、これらの場が NS5-ブレーンに端を持つ D-ブレーン上のゲージ場とどのように結合しているかが重要になる。NS5-ブレーン上に端を持つ  $C_I$  に沿った D-ブレーンは、T-dual 変換を通してサイクル  $S_I$  に巻きついた D-ブレーンに対応する。ここでは IIB 型理論の背景時空が  $\mathcal{M} \times \text{Taub-NUT}$ 、それと T-dual な IIA 型理論の背景時空が  $\mathcal{M} \times S^1$  であり、 $\mathcal{M}$  方向には D-ブレーンは共通の部分空間  $\Sigma$  上に延びているものとする。また、(264) 中の  $C_{\text{even}}$  と  $c_{\text{even}}$  やブレーン上のゲージ場などは  $\mathcal{M}$  方向にだけ値をもつものとする。この場合、IIA 型のブレーン上のゲージ場  $F_2^A$  と IIB 型のもの  $F_2^B$  は単純に同一視することができる。従って、 $S_I$  に巻きついた D-ブレーンの Chern-Simons 項 (58) より得られる相互作用

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{\Sigma \times S_I} c_{\text{even}}^I \wedge \eta_2^I \wedge e^{-F_2} \\ &= 2\pi \int_{\Sigma \times \partial C_I} c_{\text{even}}^I \wedge e^{-F_2} \end{aligned} \quad (265)$$

をそのまま IIA 型理論における NS5-ブレーン上の場と D-ブレーン上の場の相互作用を表す作用であるとみなすことができる。

もし NS5-ブレーンが複数あり、それらが重なった場合には、それぞれのブレーン上に存在する場以外にも、余分な自由度が現れる。たとえば IIB 型 NS5-ブレーンの上にはそれぞれ  $U(1)$  ベクトル多重項が存在しているが、それらが  $N$  枚重なった場合には、それらのブレーンをつなぐ D1-ブレーンが零質量になり、 $U(1)^N$  ゲージ対称性が  $U(N)$  へと拡大する。このような NS5-ブレーンの配位を T-dual 変換すると、Taub-NUT 空間の  $N$  個の center が重なったものが現れる。このとき §2.6 でも見たように 2-サイクルがつぶれるが、それらのサイクルに巻きついた D2-ブレーンの質量が 0 になることによって対称性が拡大すると解釈される。

これに対し Taub-NUT 空間上の IIA 型理論を考えると、2 サイクルに巻きついた D3-ブレーンから弦状のオブジェクトが現れるが、これはサイクルがつぶれる極限で張力が 0 になる。この弦を含む理論はしばしば little string theory と呼ばれる。

## 4 Geometric engineering

ここでは §3 で与えた NS5-ブレーンと Taub-NUT 空間の関係を用いて、 $\mathcal{N} = 1$  超対称ゲージ理論を実現する NS5-D4 系の T-dual 変換について議論する。ブレーンを用いたゲージ理論の解析についてのレビューとしては [7] がある。また、T-duality 変換による Geometric engineering と NS5-ブレーン系の関係については、多数の参考文献とともに [8] において詳しく述べられている。 $\mathcal{N} = 1$  超対称性を実現するには、並行ではない NS5-ブレーンを扱う必要があるが、前節で得られた公式は平坦で互いに平行な NS5-ブレーンに対するものである。従って、ここで与える結果のいくつかは NS5-ブレーンが平行に近い場合に成り立つ近似的なものであることを前もって注意しておく。

### 4.1 Hanany-Witten 系

IIA 型理論において平行な二枚の NS5-ブレーンを  $NS5_1$  および  $NS5_2$  とし、さらにそれらに端を持つ  $N$  枚の D4-ブレーンを含む系を考えよう。それぞれのブレーンの向きは表 3 のようにとる。この系は IIA 型理論の超対称性を  $1/4$  に破る。従って 4 次元で言う

表 3:  $\mathcal{N} = 2$  ゲージ理論を実現するブレーン系。9 方向はコンパクト化されている。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	[9]
$NS5_{1,2}$	○	○	○	○	○	○				
$D4 \times N$	○	○	○	○						○

$\mathcal{N} = 2$  の超対称性を持つ。このような、あるブレーンとそこに端を持つ別のブレーンを用いたゲージ理論の構成は Hanany と Witten[9] によって 3 次元のゲージ理論の解析に初めて用いられ、Hanany-Witten 型のブレーン系と呼ばれる。ここで用いられる D4-ブレーンと NS5-ブレーンの系は Witten[10] によって 4 次元  $\mathcal{N} = 2$  ゲージ理論を解析するために提案されたものである。(図 9)

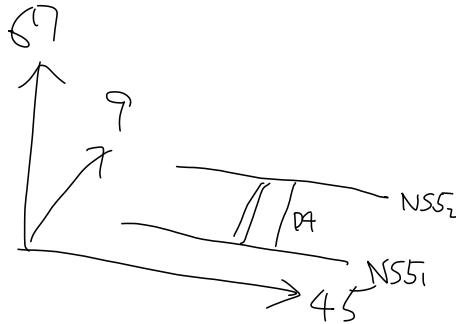


図 9: Hanany-Witten 系

もし NS5-ブレーンが無ければ、D4-ブレーン上に存在するのは (4 次元でいうところの)  $\mathcal{N} = 4$  ベクトル多重項であり、次の場を含む。

$$A_\mu(x^\mu, x^9), \quad A_9(x^\mu, x^9), \quad \phi_i(x^\mu, x^9), \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad i = 4, 5, 6, 7, 8. \quad (266)$$

D4 ブレーンの枚数が  $N$  のとき、全ての場合は  $U(N)$  の随伴表現に属する。NS5-ブレーンの存在は超対称性を  $\mathcal{N} = 2$  に破り、その結果 (266) は  $\mathcal{N} = 2$  のベクトル多重項とハイパー多重項に分かれる。

$$\text{vector mult. : } A_\mu(x^\mu, x^9), \quad \phi_4(x^\mu, x^9), \quad \phi_5(x^\mu, x^9), \quad (267)$$

$$\text{hyper mult. : } \phi_6(x^\mu, x^9), \quad \phi_7(x^\mu, x^9), \quad \phi_8(x^\mu, x^9), \quad A_9(x^\mu, x^9). \quad (268)$$

さらに、D4-ブレーンが NS5-ブレーンに端を持つことにより、低エネルギーにおいてハイパー多重項は励起することができなくなり、ベクトル多重項のうちの  $x^9$  依存性を持たないモードだけが残る。従って D4-ブレーン上で実現されるゲージ理論は  $\mathcal{N} = 2$  pure  $U(N)$

Yang-Mills 理論である。この  $\mathcal{N} = 2$  ベクトル多重項は  $\mathcal{N} = 1$  超場形式を用いて  $A_\mu$  を含むベクトル超場  $V$  と  $\phi = \phi_4 + i\phi_5$  を含むカイラル超場  $\Phi$  により記述することができる。

ボゾン場の運動項は次のように与えられる。

$$S = \int d^4x \left[ \frac{(2\pi)^2}{g_{\text{YM}}^2} \text{tr} \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^\dagger \right) - V(\phi) \right] + \frac{\theta}{2} \int \text{tr}(F \wedge F). \quad (269)$$

ここではゲージ場に対してはフラックスが整数に量子化される規格化を用いており、その超対称パートナーであるスカラー場に対しても  $A_\mu$  との超対称変換の係数が単純になるような規格化を用いている。これはしばしば用いられる荷電粒子とゲージ場の結合が整数に量子化される規格化とは異なることに注意しよう。電荷との結合を整数にするように規格化されたゲージ場を  $A'$  とすれば、ここで用いているゲージ場とは  $A' = 2\pi A$  のように関係している。ポテンシャルは次のように与えられる。

$$V \propto -\text{tr}[\phi, \phi^\dagger]^2 \quad (270)$$

最低エネルギー状態は  $[\phi, \phi^\dagger] = 0$  によって与えられる。このとき適当なゲージ変換によって  $\phi$  を対角化することができる。  $N$  個の D4-ブレーンそれぞれの  $u$  座標は  $N \times N$  スカラー場  $\phi$  の対角成分と解釈することができる。すなわち

$$\phi = \frac{1}{(2\pi l_s)^2} \text{diag}(u_1, u_2, \dots, u_N). \quad (271)$$

場の理論の低エネルギーでの振舞いはブレーンの低エネルギー有効理論として再現することができる。二枚の NS5-ブレーンの  $x^9$  座標を  $x_{1,2}^9$  とおき、NS5-ブレーン上のスカラーゲージ場 (M5-ブレーンの  $x^{11}$  座標) に対しても  $c_{1,2}$  とおく。また、これらの差を

$$\Delta x^9 = x_2^9 - x_1^9, \quad \Delta c = c_2 - c_1 = \frac{x_2^{11} - x_1^{11}}{L_{11}} \quad (272)$$

のように定義しておく。(ここではコンパクト化の周期ではなく計量が 1 になるような座標を用いているので、 $x^{11}$  の周期は  $L_{11}$  である。これは前節までとは異なることに注意。) これら以外のスカラー場に対しては

$$x_{1,2}^6 = x_{1,2}^7 = x_{1,2}^8 = 0 \quad (273)$$

とおいておく。

次の複素座標を定義するのが便利である。

$$u = x^4 + ix^5, \quad w = x^6 + ix^7, \quad s = \frac{x^{11} + ix^9}{L_{11}}. \quad (274)$$

(複素座標  $w$  はここでは必要ないが、超ポテンシャルを導入して  $\mathcal{N} = 1$  理論の議論をする際にはこの複素座標を定義しておくのがよい。) ここではコンパクト化されている  $x^9$  座標は計量が 1 になるように定義されている。

ゲージ理論のラグランジアンはまず D4-ブレーンが一枚の場合の D4-ブレーン有効作用から  $U(1)$  ゲージ理論の作用を求め、その後  $U(N)$  ゲージ理論に一般化することで得るこ



とができる。D4-ブレーンの Born-Infeld 作用 (57) を用いれば、4次元の有効作用は次のように与えられる。

$$S = 2\pi \int d^4x \left[ -\frac{\Delta x^9}{(2\pi l_s)^5 g_{\text{str}}} + \frac{\Delta x^9}{(2\pi l_s) g_{\text{str}}} \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^\dagger \right) + \dots \right] \quad (275)$$

また D4-ブレーンの境界上での NS5-ブレーン上のゲージ場  $c$  との結合 (265) から、次のトポロジカル項が現れる。

$$S = \frac{2\pi}{2} \int_{\partial D4} c F \wedge F = \frac{2\pi}{2} \int \Delta c F \wedge F. \quad (276)$$

(275) の第1項はブレーンの張力の寄与であるが、定数項なので無視することができる。第二項はゲージ場及び複素スカラー場の寄与である。場の規格化について注意しておこう。ここで用いているゲージ場  $A$  はフラックス  $\int F$  が整数になるように規格化されている。また、複素スカラー場  $\phi$  は D4-ブレーンの 45 方向への運動モードを表し、D4-ブレーンの座標と次の関係にある。

$$\phi = \frac{1}{(2\pi l_s)^2} (x^4 + i x^5). \quad (277)$$

ゲージ場の運動項の係数や (276) の係数を (269) と比較してゲージ結合定数やインスタントン角を読み取ると次のようになる。

$$\frac{2\pi}{g_{\text{YM}}^2} = \frac{\Delta x^9}{(2\pi l_s) g_{\text{str}}}, \quad \frac{\theta}{2\pi} = \Delta c. \quad (278)$$

複素化された結合定数は次のように与えられる。

$$\tau_{\text{gauge}} = \frac{\theta}{2\pi} + \frac{2\pi i}{g_{\text{YM}}^2} = \frac{\Delta x^{11} + i \Delta x^9}{L_{11}} = \Delta s \equiv s_2 - s_1. \quad (279)$$

途中で  $L_{11} = 2\pi l_s g_{\text{str}}$  を用いた。不要なモードを分離してゲージ理論を得るためには、この値を固定しながら  $l_s \rightarrow 0$  の極限を取ればよい。

こうして、ブレーンの有効作用として  $\mathcal{N} = 2$  ゲージ理論の作用 (269) が再現できることが示された。しかし (269) は古典的作用であるから、これだけでは弦理論を用いる有難味はない。知りたいのはゲージ理論が量子効果によってどのように変形されるかである。この効果は D4-ブレーンの張力によって NS5-ブレーンが変形される効果を取り入れることによって再現することができる。さらには D4-ブレーンと NS5-ブレーンを M 理論における M5-ブレーンとして表現することにより、非摂動的な効果まで含めた Seiberg-Witten 解を再現することができる。Witten [10] によって提案されたそのような解析手法は現在 MQCD と呼ばれている。

NS5-brane に対して D4-ブレーンが与える影響の一つは、D4-brane の端点を持つチャージによってスカラー場  $c$  が誘起されることである。D4-brane の位置を  $u_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) としよう。このとき、NS5<sub>1</sub> および NS5<sub>2</sub> 上の  $c$  に対して D4-brane 端点が逆符号のチャージで結合することから、D4-ブレーンの各端点周りの積分に対して次の式が成り立つ。

$$\oint dc = \pm 1. \quad (280)$$

符号は二枚の NS5-ブレーンで逆になる。これは複素座標  $s$  が次のような振る舞いをすることを意味する。

$$s = \pm \frac{1}{2\pi i} \log \left( \prod_{i=1}^N \frac{u - u_i}{\Lambda} \right). \quad (281)$$

ここから  $x^9$  を読み取れば、

$$\frac{x^9}{L_{11}} = \text{Im } s = \mp \frac{1}{2\pi} \log \left| \prod_{i=1}^N \frac{u - u_i}{\Lambda} \right|. \quad (282)$$

(278) を用いて二枚の NS5-ブレーンの間隔を有効結合定数と解釈すると、

$$\frac{2\pi}{g_{\text{YM}}^2} = \frac{2}{2\pi} \log \left| \prod_{i=1}^N \frac{u - u_i}{\Lambda} \right| \underset{u \gg u_i}{\approx} \frac{2N}{2\pi} \log \left| \frac{u}{\Lambda} \right|. \quad (283)$$

$u$  を繰り込み点と解釈すれば、 $u$  が大きいところの漸近形は 1-loop の量子補正による結合定数の run を再現しており、定数  $\Lambda$  がダイナミカルスケールを与えていることがわかる。

NS5-ブレーンの形状を与える (281) の漸近形がゲージ理論の摂動論的な振る舞いをうまく再現することを見たが、 $u$  が  $u_i$  と同程度である場合には、(281) は正しく Hanany-Witten 形を表現していない。(281) において  $u$  が  $u_i$  のどれかに近づく極限を見てみると、 $x^9$  が  $\pm\infty$  に発散する。これは NS5-brane が棘のような構造をしていることを意味するが、この棘が NS5-ブレーンに端を持つ D4-brane と解釈できる。(281) においてはこの棘はそれぞれのブレーンから無限に伸びており、二つの NS5-ブレーンをつなぐ有限の長さの D4-ブレーンとはことなる形状をしている。

正しく Hanany-Witten 系を表すには、(281) の式の  $u$  が大きいところの構造を変えないように少しだけ修正するだけでよい。そのために、 $s$  の周期性  $s \sim s + 1$  を踏まえて次の座標を導入しておくのが便利である。

$$t = e^{2\pi i s}. \quad (284)$$

$t$  を用いて (281) を書き換えると、次のようになる。

$$t = \Lambda^{-N} f(u) \quad \text{or} \quad \frac{1}{t} = \Lambda^{-N} f(u), \quad f(u) := \prod_{i=1}^N (u - u_i) \quad (285)$$

これを次のように一つにまとめることで、 $u = u_i$  付近でも正しく Hanany-Witten 系を表す式が得られる。

$$t + \frac{1}{t} = \Lambda^{-N} f(u). \quad (286)$$

これは M 理論の観点からは  $u$ - $s$  空間中の 1 枚の滑らかな面に巻きついた M5-ブレーンを与える式であると解釈できる。この曲面は Seiberg-Witten curve と呼ばれる。

(286) によって与えられる M5-ブレーンの形状はもともと D4-ブレーンの位置を表していた  $u_i$  に依存する。M5-ブレーンの作用から集団座標  $u_i$  に対する有効作用を得ることができるが、これが  $\mathcal{N} = 2$  超対称 Yang-Mills 理論の有効作用 (Seiberg-Witten 解) を与える。

4.2  $A_1$  型特異点によるゲージ理論の構成

これまでに議論してきた NS5-ブレーンの系を  $x^9$  方向に周期  $L_9$  でコンパクト化し、その方向に T-dual 変換を行おう。そうすることで NS5-brane がなくなり、Taub-NUT 空間上の D-ブレーンの系が得られる。

IIA 型理論では、NS5-ブレーンの間に張った D4-ブレーン上の理論としてゲージ理論が得られた。D4-ブレーンが端を持つ二枚の NS5-ブレーンを  $I$  と  $J$ 、それらをつなぐ直線を  $C_{IJ}$  としよう。 $C_{IJ}$  上の D4-ブレーンは T-dual 変換によってサイクル  $S_{IJ}$  に巻きついた D5-ブレーンへと変換される。(図 10) IIB 型の立場では量子効果を考慮する前のゲ

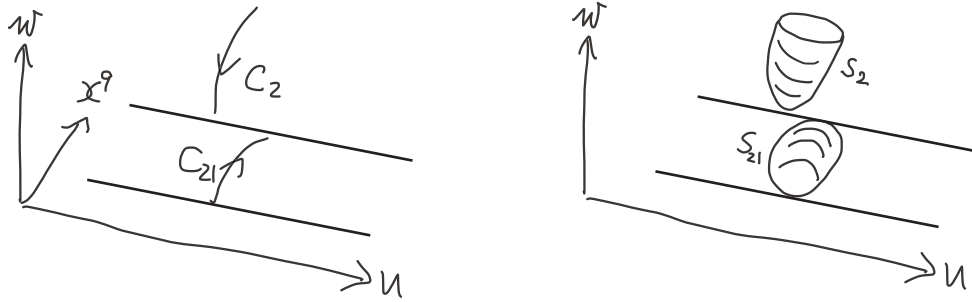


図 10: NS5-ブレーンに端を持つ曲線は T-dual 変換によって 2-サイクルに移される。

ジ理論は D5-ブレーン上の理論として与えられる。

ゲージ理論のパラメータは IIA 型理論における Hanany-Witten 系では (278) のように NS5-ブレーンの相対的な位置によって与えられた。これらのパラメータを IIB 型理論の言葉で書き換えてみよう。(240) および (263) より、NS5-ブレーンの相対座標は次のように与えられる。

$$x_I^9 - x_J^9 = L_A \int_{S_{IJ}} B_2, \quad x_I^{11} - x_J^{11} = L_{11} \int_{S_{IJ}} C_2. \quad (287)$$

ただし  $S_{IJ} = S_I - S_J$  は  $S^2$  の位相を持つ面である。 $x^9$  の式の右辺に (240) にはなかった  $L_A$  という因子が現れているのは、以前とは座標の取り方が異なるためである。以前用いていた座標系では、コンパクト化の半径が周期 1 であり、プロパーな周期の情報は計量が担っていた。たとえば計量 (206) と調和関数 (213) を見てみると、NS5 側、すなわち IIA 理論の計量の漸近形は

$$ds_A^2 = L_A^2(dx_6^2 + dx_7^2 + dx_8^2 + dx_9^2) \quad (288)$$

であった。しかしここでは計量が 1 となるような座標系を用いている。

これらの式を用いると、

$$\frac{2\pi}{g_{\text{YM}}^2} = \frac{1}{g_{\text{str}}^B} \int_{S_{IJ}} B_2, \quad \frac{\theta}{2\pi} = \int_{S_{IJ}} C_2. \quad (289)$$

ただし、 $L_A/(2\pi l_s g_{\text{str}}) = L_A/L_{11} = 1/g_{\text{str}}^B$  を用いた。これらを複素に組めば、次のようになる。

$$\tau_{\text{gauge}} = s_I - s_J = \oint_{S_{IJ}} (C_2 + \tau_{\text{str}} B_2) \quad (290)$$

ここでは計算を簡単にするためにアクシオンは 0 であると仮定している。 $x^8 + ix^9$  のように複素座標を組んだ場合には複素化されたケーラー形式の積分で与えられたが、ここでは  $x^8$  の代わりに  $x^{11}$  と組み合わせられているため、 $B$  場はケーラー形式ではなく RR 場  $C_2$  と組み合わせられている。

上では (289) を T-duality 変換を用いて求めたが、直接  $S^2$  に巻きついた D5-ブレーン上のゲージ理論の作用から読み取ることもできる。まず、Born-Infeld 作用 (57) から出発しよう。worldvolume が  $\mathbb{R}^4 \times S^2$  に成っていると仮定し、 $\mathbb{R}^4$  方向のゲージ場と  $S^2$  方向の  $B$  場に注目すると、次のように二つの因子の積として書ける。

$$S = -\frac{2\pi}{g_{\text{str}}} \int_{\mathbb{R}^4} \sqrt{-\det(G_{\mu\nu} + F_{\mu\nu})} \oint_{S^2} dA \sqrt{\det(G_{ij} + B_{ij})}. \quad (291)$$

後ろの因子が  $S^2$  上の積分を表しており、decoupling 極限で  $S^2$  のサイズが 0 になり、計量の寄与が無視できることを用いれば次のように書き換えることができる。

$$\oint_{S^2} dA \sqrt{\det(G_{ij} + B_{ij})} = \oint_{S^2} B_2 = b. \quad (292)$$

また、一つ目の因子は  $F$  のべきで展開することでゲージ場の運動項が得られる。その部分を抜き出し、(292) を代入すると、作用全体から次の運動項が得られる。

$$S = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left( -\frac{1}{4} \frac{2\pi b}{g_{\text{str}}} F_{\mu\nu}^2 \right). \quad (293)$$

これより、(290) の  $B$  場の寄与が得られる。一方 Chern-Simons (58) 項からは

$$S = \frac{2\pi}{2} \int C_2 \wedge F_2 \wedge F_2 \quad (294)$$

が得られる。ここで  $C_2$  が  $S^2$  方向に

$$c = \oint_{S^2} C_2 \quad (295)$$

という値を持っていると仮定すると、4次元ゲージ理論の作用に次の項が付け加わる。

$$S = \frac{2\pi c}{2} \int F_2 \wedge F_2. \quad (296)$$

これは (290) の  $C_2$  場の寄与に他ならない。

### 4.3 超ポテンシャルの導入

ブレーンを用いた解析は  $\mathcal{N} = 1$  ゲージ理論に対しても有効である。ここでは先ほど用いた Hanany-Witten 系の NS5-brane を変形して超対称性を半分破ることで得られる  $\mathcal{N} = 1$  理論についてみてみよう。ゲージ理論の立場ではこれはカイラル超場  $\phi$  に対する超ポテンシャル  $W = \text{tr} W(\phi)$  を導入することに対応する。ラグランジアン中には次の項が現れる。

$$\mathcal{L} = 2\pi \text{tr} \left( \frac{1}{2} F W'(\phi) + \frac{1}{2} F^\dagger W'(\phi)^\dagger \right). \quad (297)$$

$\mathcal{N} = 2$  理論においては  $\phi$  の固有値（すなわち D4-ブレーンの位置）は任意であり、それらによって指定される無限個の真空が存在した。超ポテンシャルの導入により、それらのうちのほとんどは持ち上がり、(古典的には)  $\phi$  の固有値は  $W'(\phi) = 0$  の点に集まって安定な配位をなす。もしそのような点が複数あれば、 $N$  個の固有値はそれらの 0 点に対して任意に配分することができ、それぞれが独立な真空を与える。

$W'(u) = 0$  を満足するような  $u$  を  $u_k$  と書くことにしよう。そしてそれぞれの 0 点に集まった固有値 (D4-ブレーン) の数を  $N_k$  とする。その場合、ゲージ群  $U(N)$  は次のように破れる。

$$U(N) \rightarrow \prod_k U(N_k). \quad (298)$$

さらに  $U(1)$  部分は低エネルギーでは decouple するため、実際のゲージ群は  $U$  ではなく  $SU$  になる。

ブレーン系において、超ポテンシャルの導入は NS5-ブレーンの変形として実現できる。そのためには NS5-ブレーンを  $w = x^6 + ix^7$  方向に変形し、NS5-ブレーンの位置が  $u$  座標に依存するようにすればよい。すなわち NS5<sub>1,2</sub>-ブレーンを  $w = w_{1,2}(u)$  のように変形する。 $\mathcal{N} = 2$  理論の場合と同様に、ゲージ理論の量子効果は D4-ブレーンの影響による NS5-ブレーンの変形として現れるが、まずはそれを無視して古典的な作用を再現することを考えよう。二枚のブレーンの相対座標を  $\Delta w = w_2 - w_1$  とする。 $uw$  空間、すなわち 4567 空間上の二枚の NS5-ブレーンの形状は

$$(w - w_1(u))(w - w_2(u)) = 0 \quad (299)$$

という一つの式によって与えることができ、これは一枚の singular なリーマン面とみなすことができる。この変形により、二枚の NS5-ブレーンの間に張った D4-ブレーンの長さ

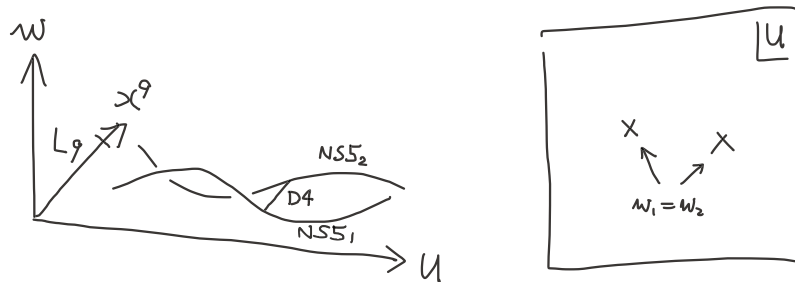


図 11: 二枚の NS5-ブレーンの間に張った D4-ブレーンが安定に存在できる点は  $u$  平面上では関数  $w_1(u) - w_2(u)$  の 0 点として与えられる。

は  $\Delta x^9$  から

$$L = \sqrt{\Delta x_9^2 + |\Delta w(u)|^2} = \Delta x_9 + \frac{|\Delta w|^2}{2\Delta x_9} + \dots \quad (300)$$

のように変化する。この変化によって (275) の第 1 項の寄与が変化する。その変化分は次のポテンシャル項を与える。

$$S_{\text{pot}} = 2\pi \int d^4x \left[ -\frac{1}{(2\pi l_s)^5 g_{\text{str}}} \frac{|\Delta w|^2}{2\Delta x_9} \right]. \quad (301)$$

複素場  $\phi$  が属するカイラル多重項の補助場  $F$  の作用は、(275) と同様の係数を持つ。そこに超ポテンシャルから現れる項を加えると次のようになる。

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int d^4x \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta x^9}{(2\pi l_s) g_{\text{str}}} F^* F + F^* W' + F W'^* \right) \\ &= 2\pi \int d^4x \frac{1}{2} \left( -\frac{(2\pi l_s) g_{\text{str}}}{\Delta x^9} W'^* W' \right). \end{aligned} \quad (302)$$

二行目は補助場を消去することで得られるポテンシャルである。(301) と (302) を比較することにより、超ポテンシャルの微分と  $\Delta w$  の間の関係が次のように得られる。

$$W'(\phi) = \frac{\Delta w(u)}{(2\pi l_s)^3 g_{\text{str}}} \quad (303)$$

ポテンシャルを持つゲージ理論を得るには、 $l_s \rightarrow 0$  の極限をとる際にこの  $W'$  を固定しておく必要がある。すなわち、分離極限では  $w(u)$  は  $\Delta x_9$  に比べて無限に小さくなる。従って、 $\Delta x_9$  から  $L$  への変化はゲージ結合定数を与える式 (279) には影響を与えない。また、(303) の右辺に  $\Delta x_9$  が含まれないことは重要な意味を持つ。 $\mathcal{N} = 2$  ゲージ理論の議論をしたときに見たように、D4-ブレーンの張力の効果を取り入れると  $\Delta x^9$  はもはや定数ではなくなり、繰り込み点のとり方に依存する。(303) の関係式は超ポテンシャルがその影響を受けないことを意味しており、超ポテンシャルの非繰り込み定理とつじつまが合っている。

場  $\Phi$  を含まない  $\mathcal{N} = 1$  超対称 Yang-Mills 理論を考えれば、場  $\phi$  に無限大の質量を与えるように関数  $w_i(u)$  を選べばよい。たとえば  $w_1(u) = 0$ 、 $w_2(u) = \mu u$  として  $\mu \rightarrow \infty$  の極限をとれば、 $\mathcal{N} = 1$  超対称 Yang-Mills 理論を得ることができる。このとき NS5<sub>1</sub> は  $u$  方向に、NS5<sub>2</sub> は  $w$  方向に広がった面となる。(表 4) このような、二つの直

表 4:  $\mathcal{N} = 1$  超対称 Yang-Mills 理論を実現する Hanany-Witten 系

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
NS5 <sub>1</sub>	○	○	○	○	○	○				
NS5 <sub>2</sub>	○	○	○	○			○	○		
D4× $\mathcal{N}$	○	○	○	○						○

行する NS5-ブレーン系ははじめに [11] において導入され、 $\mathcal{N} = 1$  ゲージ理論の Seiberg duality を説明するのに用いられた。([11] で用いられているブレーン系はここで考えているものよりも少し複雑であり、より多くのブレーンを含んでいる。) また同じブレーン系は [12] において  $\mathcal{N} = 1$  Yang-Mills 理論の低エネルギーでの振舞いを解析するのに用いられた。

古典的な超ポテンシャル  $W'(\phi)$  とブレーン形状の関係が得られたので、量子効果の解析に進もう。そのためには  $\mathcal{N} = 2$  理論の場合と同様に D4-ブレーンの張力による NS5-ブレーンの変形を考慮すればよい [12]。

$\mathcal{N} = 2$  理論の場合には、NS5-D4 系は  $u$ - $s$  空間に埋め込まれた滑らかな面として表された。今度は NS5-brane を  $w$  方向に変形したので、 $u$ - $w$ - $s$  空間内での曲面を考えることに

なる。いきなり複素 3 次元空間内の面を扱うのは面倒なので、 $s$  座標を無視した  $u-w$  空間内の曲面について考え、そのあとでその曲面上の関数として  $s$  座標を導入することにしよう。

まず、以下の式を簡単にするために D4-ブレーンを導入する前の NS5-ブレーンの形状を次のようにおこう。

$$w_1(u) = -w_0(u), \quad w_2(u) = w_0(u). \quad (304)$$

超ポテンシャルは次のように与えられる。

$$W' = \frac{2w_0(u)}{(2\pi l_s)^3 g_{\text{str}}^A}. \quad (305)$$

$uw$  空間、すなわち 4567 空間上でのこれら二枚の NS5-ブレーンの形状は次の一つの式で表すことができる。

$$w^2 = w_0(u)^2. \quad (306)$$

古典的超ポテンシャルが  $\phi$  の  $n+1$  次式であると仮定しよう。このとき  $w_0(u)$  は  $u$  の  $n$  次の多項式である。

NS5-ブレーンの  $x^9$  座標座標は、(306) で定義される曲面の上の関数として  $x^9 = x^9(u)$  のように与えることができる。ただし、一つの  $u$  に対して二枚の NS5-ブレーンがあるから、この関数は二価である。

さて、二枚の NS5-ブレーンをつなぐ D4-ブレーンを導入することを考えよう。この D4-ブレーンはその張力によって NS5-ブレーンの形状を変化させる。それにより (306) は次のように変化する。

$$w^2 = w_0(u)^2 + f_{n-1}(u). \quad (307)$$

このとき D4-ブレーンの張力による変形が NS5-ブレーンの遠方の形状を変化させず  $w = \pm w_0 + \mathcal{O}(u^{-1})$  となると仮定しよう。すると  $f_{n-1}(u)$  は (すでにその添え字が示すように) 高々  $n-1$  次の多項式でなければならない。実際  $u$  の大きいところで (307) を展開してみれば

$$w = \pm \sqrt{w_0^2 + f_{n-1}} = \pm \left( w_0 + \frac{f_{n-1}}{2w_0} + \dots \right) \quad (308)$$

となるから、 $u$  の大きいところで  $w$  が  $\pm w_0$  に漸近するためには  $f_{n-1}$  の次数は  $w_0$  の次数  $n$  よりも小さい必要がある。 $f_{n-1}$  の展開係数を次のように  $a_k$  とおく。

$$f_{n-1}(u) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k. \quad (309)$$

ここでの目標は、この多項式  $f_{n-1}$  を決定する方法を与えることである。この多項式はもともといくつかの点で接した二枚の面を表していた (306) を変形し、ブランチカットでつながった一枚のリーマン面を与える役割を果たす。そして、もともと二枚の面の交差する点に存在していた D4-ブレーンはブランチカットに置き換わる。

D4-ブレーンの張力は、NS5-ブレーンの  $uw$  空間上の形状だけではなく、 $x^9$  方向の形状も変化させる。これは関数  $x^9(u)$  によって与えられる。関数  $x^9(u)$  は  $u$  の関数としては

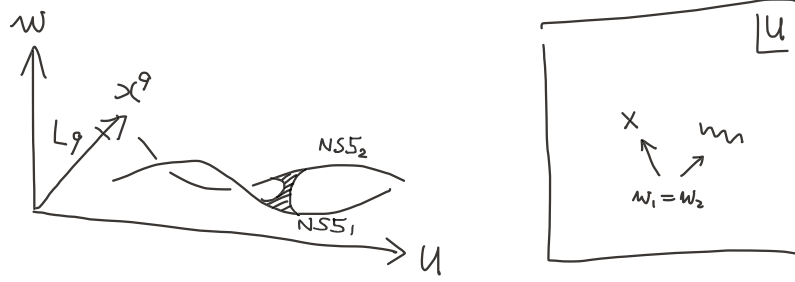


図 12: D4-ブレーンの張力を考慮すると、 $u$  平面上の  $W'$  の 0 点がブランチカットに置き換えられる。

二価であるが、リーマン面上では一価でなければならないので、次の量はサイクル  $\beta_i$  によらず同じになるはずである。

$$\int_{\beta_i} dx^9 = \Delta x^9. \quad (310)$$

ただし  $\beta_i$  は  $i$  番目の cut を通って表と裏（リーマン面の二枚のシート）の遠方の点をつなぐ積分経路である。この値は二枚の NS5-ブレーンの  $x^9$  方向の距離を与える。ただし  $\beta_i$  の端点を無限遠にとるとこの積分は発散してしまうので、有限のところ基準点を選ぶ必要がある。

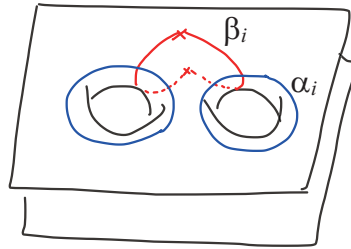


図 13: (a) サイクル  $\alpha_i$  と  $\beta_i$ 。  $\beta_i$  の端点の位置  $\Lambda$  は繰り込み点に対応する。

さらに D4-ブレーンの影響は NS5-ブレーン上のゲージ場にも及ぶ。すなわち D4-ブレーンの短点は NS5-ブレーン上の 0-form ゲージ場  $c$  に対して磁氣的に結合しているので、次の条件を満足するように運動方程式の解  $c(u)$  を決定する必要がある。

$$\oint_{\alpha_i} dc = N_i. \quad (311)$$

ただし  $\alpha_i$  は  $i$  番目の cut を一周する積分経路であり、 $N_i$  はその cut に対応する D4-ブレーンの枚数である。

(249) で定義された複素座標  $s$  を用いれば、これらの条件は次のように表すことができる。

$$\oint_{\alpha_i} ds = N_i, \quad \int_{\beta_i} ds = \tau + n_i. \quad (312)$$

(312) の第二式は (310) に対応しており、 $\beta_i$  の端点が共通であるから同じ値  $\tau$  を与えるべきことから得られるが、共通の値といっても  $s$  の実部には  $x^{11}$  の周期性による整数部



分の任意性がある。これを表すのが整数  $n_i$  である。 $\beta_i$  サイクルの定義を変更して  $\alpha_i$  を混ぜることでそれぞれの  $n_i$  を独立に  $N_i$  の倍数だけずらすことができるので、本質的に異なるのはそれぞれの  $i$  について  $n_i = 0, 1, \dots, N_i - 1$  の  $N_i$  個だけである。これらはそのカットの位置に存在した  $N_i$  枚の D4-ブレーン上で実現する  $SU(N_i)$  ゲージ理論の  $N_i$  個の真空に対応している。こうして、ブレーンの形状を求める問題は、(312) を満足するような differential  $ds$  がリーマン面上に存在するようにうまく  $f_{n-1}$  を調整せよという問題に帰着した。

(312) の第 1 式の和をとると、無限遠を回る積分路に対する式

$$\oint_{\infty} ds = -N \quad (313)$$

が得られるが、これは  $ds$  が無限遠に極を持つことを表している。このことは、 $\beta$  サイクルの端点を無限遠にとると (312) の第 1 式の積分が発散してしまう原因になっている。無限遠方の振る舞いを良くするには、この極をブランチカットで置き換えるような正則化を行えばよい。これは、(307) の  $w_0(u)$  を

$$w_{\text{mod}}(u) = w_0(u) + \frac{u^{n+1}}{M_{n+1}} \quad (314)$$

で置き換えることで実現できる。このとき  $u = \infty$  にあったリーマン面上の極は有限の大きさを持ったブランチカットに置き換わり滑らかなジーンズ  $n$  のリーマン面になる。(313) をそのブランチカット周りの積分と考えることにより  $ds$  を極を持たない正則 1 形式に置き換えることができる。また、サイクル  $\beta_i$  はもともとあった  $i$  番目のブランチカットと新たに現れた無限遠点を通り抜けるサイクルとみなすことができ、その上の積分は有限になる。(図 13) 以下ではこのような正則化がなされていると仮定しよう。

さて、条件 (312) を満足する  $ds$  が存在するという条件について考えてみよう。genus  $n$  のリーマン面の上の holomorphic 1-形式は  $n$  個存在しており、次のように与えられる。

$$\eta_k = \frac{u^k du}{w}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (315)$$

どのような  $f_{n-1}$  であってもこれらの線形結合を取ることによって条件 (312) の片方、たとえば  $\alpha_i$  サイクル積分に対する条件を満足することができる。しかしこの時点で  $ds$  は完全に決まってしまうから、残りの  $n$  個の条件は全て多項式  $f_{n-1}$  に対する条件を与える。これらの条件を全て用いれば、 $f_{n-1}$  の係数が一意的に決定される。

よく知られている事実として、正則 1 形式  $h$  の  $\alpha_i$  および  $\beta_i$  サイクル上の積分として定義された二つの量

$$A_i = \oint_{\alpha_i} h, \quad B_i = \oint_{\beta_i} h, \quad (316)$$

は、正則 1 形式の選び方に依存しない周期行列と呼ばれる対称行列  $\tau_{ij}$  を用いて

$$B_i = \tau_{ij} A_j \quad (317)$$

が成り立つ。

$\tau_{ij}$  は多項式  $f_{n-1}$  を与えた時点で一意に決まる。従って、積分 (312) が関係式 (317) を満足している必要がある。すなわち、 $f_{n-1}$  を決めるための条件は次のように書くことができる。

$$\tau + n_i = \tau_{ij}(\alpha_k)N_j. \quad (318)$$

これが  $f_{n-1}$  を決めるための式である。 $\tau_{ij}$  が多項式  $f_{n-1}$  の係数  $a_k$  に依存するということをあらわに書いた。

#### 4.4 Glueball superpotential

NS5-ブレーンの形状を決定するための関係式 (318) が成り立っていさえすれば、その curve 上で (312) を満足する 1-form  $ds$  を構成することができる。(318) には多項式  $f_{n-1}$  が周期行列  $\tau_{ij}$  を通して現れている。(318) を解きやすくするために、この周期行列を便利な形に書いておこう。そのために次の積分を考える。

$$S_i = \oint_{\alpha_i} wdu, \quad \Pi_i = \int_{\beta_i} wdu. \quad (319)$$

これらの積分の意味を明らかにするために古典的、すなわち  $f_{n-1} = 0$  の場合を考えてみよう。このとき  $w = \pm w_0$  であり、

$$dW = W'd\phi = \frac{1}{g_{\text{str}}^A} \Delta wdu \quad (320)$$

であることから、

$$S_i^{\text{cl}} = 0, \quad \Pi_i^{\text{cl}} = g_{\text{str}}^A [W(u_\infty) - W(u_i)] \quad (321)$$

が得られる。 $S_i$  は  $f_{n-1}$  の時には一般に 0 でない値をとるので、これはリーマン面上で  $i$  番目のカットの大きさを表すパラメータと解釈することができる。一方  $\Pi_i$  はカット  $i$  における超ポテンシャルと解釈できる。

(319) で積分されている 1-form  $wdu$  を多項式  $f_{n-1}$  の係数  $a_k$  で微分してみよう。(307) を  $a_k$  で微分して得られる式  $\partial_{a_k} w = u^k/(2w)$  を用いれば

$$\frac{\partial}{\partial a_k} wdu = \frac{u^k du}{2w} \quad (322)$$

が得られる。これはリーマン面上で holomorphic な 1-form であるから、 $\alpha_i$  および  $\beta_i$  サイクル上での積分を考えれば次の式が成り立つはずである。

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial a_k} = \tau_{ij} \frac{\partial S_i}{\partial a_k}. \quad (323)$$

あるいは、 $a_k$  が  $S_i$  や  $\Pi_i$  と同様に  $n$  個の成分を持つことから、この式は次のように書くこともできる。

$$\tau_{ij} = \frac{\partial \Pi_i}{\partial S_j}. \quad (324)$$

これを (318) に代入すると、次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial S_i} \sum_j [\Pi_j N_j - (\tau + n_j) S_j] = 0. \quad (325)$$

これは、次の超ポテンシャルから得られる  $F$  項条件の式とみなすことができる。

$$W_{\text{eff}}(S_i) = \frac{1}{g_{\text{str}}^A} \sum_i [(\tau + n_i)S_i - \Pi_i N_i]. \quad (326)$$

(325) を  $F$ -term 条件として得るだけであれば全体の係数は任意でよい。この係数は、古典的な値 (321) を代入したときに tree level の superpotential  $W$  に帰着するという条件から決める。実際 (326) に (321) を代入すると、次のように古典的な超ポテンシャルが得られる。

$$W_{\text{eff}}(S_i)|_{\text{classical}} = \sum_i W(u_i)N_i = \text{tr } W(\Phi). \quad (327)$$

さらに (326) の第 1 項はゲージ場の運動項と解釈することができる。すなわち、 $S_i$  は破れずに残ったゲージ群  $SU(N_i)$  の glueball superfield である。

$$\frac{1}{g_A} S_i \sim \mathcal{S}_i \equiv \text{tr}(W_i W_i) \quad (328)$$

$S_i$  をこのように定義したとき、超ポテンシャルを  $W \rightarrow W + \mathcal{S}_i$  のようにずらすことはインスタント角を  $2\pi$  ずらすことに対応し、物理的な意味をもたない。従って (326) の  $n_i$  依存項は無視することができる。

$$W_{\text{eff}} = \frac{1}{g_{\text{str}}^A} \sum_i [\tau S_i - \Pi_i N_i]. \quad (329)$$

(319) や (312) を代入すると、次の形に書くこともできる。[12]

$$\begin{aligned} W_{\text{eff}}(S_i) &= \frac{1}{g_{\text{str}}^A} \sum_i \left( \int_{\alpha_i} w du \int_{\beta_i} ds - \int_{\beta_i} w du \int_{\alpha_i} ds \right) \\ &= \frac{1}{g_{\text{str}}^A} \int_{\Sigma} w du \wedge ds = \frac{1}{g_{\text{str}}^A} \int_B dw \wedge du \wedge ds. \end{aligned} \quad (330)$$

二行目へ行く際に Riemann bilinear identity を用いた。 $\Sigma$  は  $u$ - $w$ - $s$  空間内の M5-ブレーンをあらわす曲面であり、 $B$  はその曲面を境界とする 3 次元面である。 $\Sigma$  はホモロジー的に非自明なサイクルに巻きついているので、 $\partial B = \Sigma$  となる  $B$  は存在しないが、 $\Sigma$  と同じホモロジークラスに属する曲面  $\Sigma_0$  を一つ選んでおき、 $\partial B = \Sigma - \Sigma_0$  によって  $B$  を定義することができる。 $\Sigma$  と  $\Sigma_0$  を二つの真空に対応する curve であるとみなせば、 $B$  はそれらの真空をつなぐ domain wall とみなすことができる。正確には、 $B$  に巻きついた M5-ブレーンが domain wall を与える。(330) はその M5 ブレーンによるエネルギーの増加を与える式である。(より正確には (330) が与えるのは M5-ブレーンの central charge であり、その絶対値は BPS bound を与える。) Witten は [12] においてこのような domain wall を用いた考察から (330) の超ポテンシャルを導いた。

#### 4.5 曲がった NS5-ブレーンと Calabi-Yau

$\mathcal{N} = 1$  ゲージ理論を与える Hanany-Witten 系を  $x^9$  方向に周期  $L_9$  でコンパクト化し、T-duality 変換を行うことで IIB 理論に移ってみよう。 $\mathcal{N} = 2$  の場合との違いは NS5-brane

の  $s$  および  $w$  座標が  $u$  に依存することであるが、その変化が緩やかであるとすればよい近似で  $u$  依存性がない場合の式を用いることができるであろう。

$\mathcal{N} = 1$  ゲージ理論の低エネルギーの様子を再現するためには複素座標  $u, w, s$  を (274) によって定義し、NS5-ブレーンの  $w$ - $s$  空間での位置が

$$w = w_I(u), \quad s = s_I(u) \quad (331)$$

のように  $I$  でラベルされる NS5-ブレーンごとに  $u$  の関数として与えられる場合を考える。前節までは NS5-ブレーンの枚数は 2 枚であったが、ここでは枚数は任意でよい。まずは多項式  $f_{n-1}$  を導入する前、すなわち D4-ブレーンによる変形を考える前の NS5-ブレーンを T-dual 変換することによってどのような時空が得られるかを見てみよう。

NS5-ブレーンの位置を用いて Taub-NUT geometry を与える式 (122) は次のように与えられる。

$$xy = P(u, w) \equiv \prod_I (w - w_I(u)). \quad (332)$$

今度はもはや 4 次元 Taub-NUT 空間と 2 次元  $u$  空間の直積ではなく、非自明な複素 3 次元多様体を与える。これは  $w$ - $u$ - $x^8$  空間上の  $S^1$  ファイバー束であり、 $P(u, w) = x^8 = 0$  がファイバーのつぶれる部分空間を与えている。実はこの複素 3 次元空間はカラビヤウ多様体である。このことは、 $\mathcal{N} = 1$  の超対称性が残ることからもわかる。

(332) によって与えられるカラビヤウ多様体のより詳しい構造を決めるためには、正則 3 形式  $\omega_{(3,0)}$  およびケーラー形式  $k_{CY}$  を与えればよい。Calabi-Yau 上の正則 3 形式は次のように与えられる。

$$\omega_{(3,0)} = du \wedge \omega_{(2,0)} = \frac{1}{2\pi i} \frac{du \wedge dw \wedge dx \wedge dy}{d(xy - P(u, w))} = \frac{1}{2\pi i} du \wedge dw \wedge \frac{dx}{x}. \quad (333)$$

また、ケーラー形式は、計量を  $ds_{CY}^2 = |du|^2 + ds_{TN}^2$  と与えるのと同程度の近似で

$$k_{CY} = k^8(u) - \frac{i}{2} du \wedge du^* \quad (334)$$

と与えることができる。ただし  $k^8(u)$  は  $w_I(u)$  が定数だとしたときの Taub-NUT 上のケーラー形式である。 $k^8$  が  $u$  に依存する場合、(334) は明らかに closed ではない。従って (334) は  $u$  依存性が十分緩やかな場合にのみ適用できる近似式である。

$\mathcal{N} = 2$  の場合と同じように、ここでは計量が 1 になるような座標系を用いていることを注意しておこう。ブレーンの相対座標を IIB 理論の場の積分で与える式は以下の通りである。

$$x_I^m - x_0^m = L_A \int_{S_I} k_2^m, \quad x_I^9 - x_0^9 = L_A \int_{S_I} B_2, \quad x_I^{11} - x_0^{11} = L_{11} \int_{S_I} C_2. \quad (335)$$

$w$  は以前にも与えたように Taub-NUT 上の正則 2 形式の積分として与えられる。

$$w_I^{\text{new}} - w_0^{\text{new}} = \int_{S_I} \omega_{(2,0)}^{\text{new}}. \quad (336)$$

ただし、正則 2 形式も座標のリスケールに対応して以前のものと定数倍だけ異なる。

$$\omega_{(2,0)}^{\text{new}} = L_A(k_2^1 + ik_2^2) = L_A \omega_{(2,0)}^{\text{old}} = \frac{1}{2\pi i} dw_{\text{new}} \wedge \frac{dx}{x}. \quad (337)$$

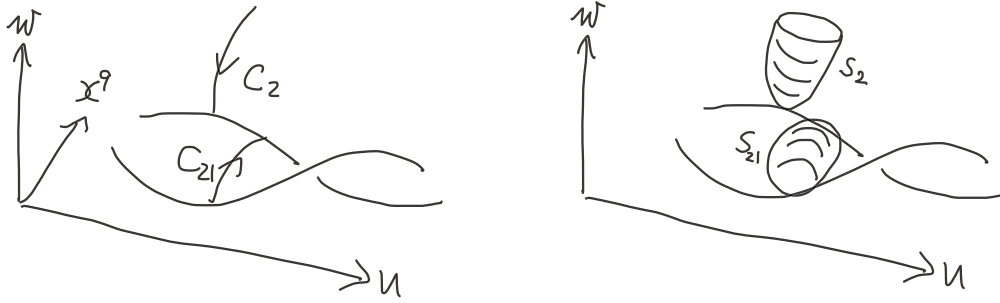


図 14: NS5-ブレーンに端を持つ曲線は T-dual 変換によって 2-サイクルに移される。

これらの式において、積分は T-dual 変換によって現れる 2-サイクル上で行う。(図 14)

D4-ブレーンの張力による NS5-ブレーンの変形を考える前には、二枚の NS5-ブレーンは  $u-w$  空間中で点で交差していた。D4-ブレーンの存在はこの近傍の様子を変化させる。まずは D4-ブレーンの影響を考えないときにこの交差の近傍の様子を詳しく見てみよう。NS5-ブレーンが交差する点では Calabi-Yau の定義方程式 (332) の右辺が重根をもつ。つまり  $w_I(u)$  のうちの二つが一致する。この二つを  $w_1(u)$  と  $w_2(u)$  とし、これらが  $u = w_0$  で一致するとしよう。  $w_0 = w_1(u_0) = w_2(u_0)$  とする。  $u = u_0$  の近傍の様子を見るために新たな座標  $w' = w - w_0$  および  $u' = u - u_0$  を導入する。定義方程式 (332) は

$$xy = c(w' - au')(w' - bu') \quad (338)$$

となる。(  $a, b, c$  は数係数である。) さらに右辺の二つの因子を新たな複素座標  $U$  と  $V$  とするような座標変換を行えば

$$xy - UV = 0 \quad (339)$$

となる。式 (161) と同様な判定式を用いて、  $x = y = U = V = 0$  の点は singular であることがわかる。この特異点は conifold singularity と呼ばれる。

NS5-ブレーンの D4-ブレーンの張力による変形は NS5-ブレーンの交点をブランチカットで置き換える。これは定義方程式 (332) の右辺に (307) と同様に多項式  $f_{n-1}$  を加えて変形することに対応しており、その結果 conifold 特異点近傍の様子 (339) は次のように変形される。

$$xy - UV = \epsilon. \quad (340)$$

定義方程式を変化させるこのような変形は deformation と呼ばれる。(これに対し、定義方程式を変形させずにケーラー構造を変化させることは resolution と呼ばれる。)

IIA 理論、あるいは M-理論のブレーン系の構造を調べるために、図 13 のようにブレーン上のサイクル  $\alpha_i$  と  $\beta_i$  を定義するのが便利であった。deform された Calabi-Yau においてもこれらに対応するサイクルを定義しておこう。Calabi-Yau 上では  $\alpha_i$  および  $\beta_i$  に対して、3-サイクル  $A_i$  および  $B_i$  を以下のように定義するのがよい。

まず、A-サイクルは以下のように定義する。NS5-ブレーン系で定義された曲線  $C_1$  の基準点をどこか一点に固定したまま、ブレーン上の端点を  $\alpha_i$ -サイクルにそってぐるっと一周させると、 $C_1$  はブレーン上に端をもつディスク上の曲面を掃く。(図 15 の (a)) この曲面は T-dual をとれば、すなわち、 $C_1$  の代わりに曲面  $S_1$  を用いたと思えば 3 次元閉曲面

を与え、その位相は  $S^3$  である。この 3-サイクルを  $A_i$  とする。 $\alpha_i$  サイクルは  $i$  番目のカットの周りを一周する閉曲線であるが、これを  $u$  平面の上で縮めていくと、カットの両端をつなぐ線分（つまりカットに重なった線）になる。この線分を  $\alpha'$  としておこう。便宜上カットと  $\alpha'$  を少しずらしておく、この線分はリーマン面の二枚のシートのうち表にある線と裏にある線が重なったものである。このカットによってつながる二枚のシートを  $I$  と  $J$  であるとすれば、 $I$  番目のシート上の  $\alpha$ -サイクルに沿って  $S_I$  の端点を動かすということは  $\alpha'$  サイクルにそって  $S_I$  と  $S_J$  を動かすことに相当する。これはつまり  $A_i$  サイクルが  $\alpha'$  に沿って  $S_{IJ}$  を動かしたときにできることを意味している。(図 15 の (b))

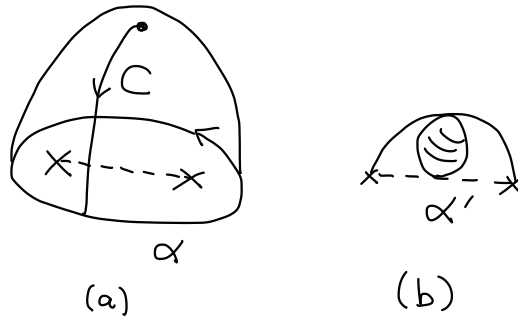


図 15: Calabi-Yau 上の  $A_i$  サイクル

次に  $B_i$  サイクルを定義するために、閉曲線  $C_I$  の端点を  $\beta_i$  サイクルにそって動かしてみよう。 $\beta_i$  サイクルはカットと交差しており、リーマン面の表のシートと裏のシートを通るので、それに応じて閉曲線は  $C_I$  から  $C_J$  へ名前を変える。この閉曲線の履く面は  $\beta_i$  サイクルと  $C_{IJ}$  を境界とする二次元面である。(図 15 の (a)) これは T-dual をとると、すなわち  $C_I$  の代わりに  $S_I$  を用いたとすると、二次元面  $S_{IJ}$  を境界とする 3 次元ディスクを得る。この 3 次元曲面が  $B_i$  である。 $\beta_i$  サイクルを引き絞ると、カットのどちらかの端点と遠方の基準点をつなぐ曲線になる。この曲線を  $\beta'_i$  としよう。 $\alpha_i$  のときと同様に、 $\beta_i$  サイクルにそって  $S_I$  を動かすということは  $\beta'_i$  にそって  $S_{IJ} = S_I - S_J$  を動かすことと同じであり、 $B_i$  サイクルは  $\beta'_i$  とその上の  $S^2$  からなる 3 次元ディスクであるとみなすことができる。(図 16 の (b))

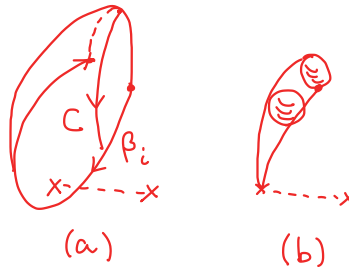


図 16: Calabi-Yau 上の  $B_i$  サイクル

$A_i$  サイクルと  $B_i$  サイクルは  $\alpha_i$  と  $\beta_i$  と同様に次のような交差関係をもつ。

$$\langle A_i, B_j \rangle = \delta_{ij}. \quad (341)$$

もともと NS5-ブレーンの  $x^8$  座標を全て 0 においてあったことに相当して、 $u$  を固定して得られる Taub-NUT 空間上でのコンパクト 2-サイクルはその上へのケーラー形式  $k_8$  の引き戻しが 0 であるような Lagrangian 部分多様体である。従って、 $u$  平面上の曲線と Taub-NUT 空間中のコンパクト 2-サイクルとからなる  $A_i$  サイクルや  $B_i$  サイクルは、その上へのケーラー形式 (334) の引き戻しが 0 であるラグランジアン多様体になる。以前にも述べたように (334) は近似式でしかないから、ここでの議論は厳密ではないが、それぞれのサイクルにブレーンをまきつけたときに超対称性が残ることを仮定すれば、それがラグランジアン部分多様体でなければならないことが示される。

#### 4.6 Gukov-Vafa-Witten ポテンシャル

$\mathcal{N} = 2$  ゲージ理論について、IIB 理論の立場では結合定数を 2-form 場のサイクル上の積分として与えることができたように、ここで考えている  $\mathcal{N} = 1$  理論の場合にはグローバル超ポテンシャル (329) を Calabi-Yau 上の場の積分によって与えることができる。そのためにはまずリーマン面上の積分 (312) と (319) を Calabi-Yau 上のサイクルでの積分として書き換える必要がある。

まず (319) について考える。 $w$  は (336) に与えられているように正則 2 形式の  $S_I$  上の積分として与えられる。従って  $wdu$  の  $\alpha_i$  サイクル上での積分は

$$S_i = \int_{\alpha_i} wdu = \int_{\alpha_i} \left( \int_{S_I} \omega_{(2,0)} \right) du \quad (342)$$

となる。ここで  $S_I$  サイクルを  $\alpha_i$  サイクルにそってまわしたときに掃く曲面が Calabi-Yau 上の  $A_i$  サイクルであること、Calabi-Yau 上の正則 3 形式が (333) によって与えられることを用いれば  $S_i$  は  $\omega_{(3,0)}$  の  $A_i$  サイクル上の積分として表されることがわかる。 $\Pi_i$  についても同様であり、次の二つの式を得る。

$$S_i = \oint_{A_i} \omega_{(3,0)}, \quad \Pi_i = \int_{B_i} \omega_{(3,0)}. \quad (343)$$

積分 (312) では differential  $ds$  の  $u$  平面上の積分として  $N_i$  や  $\tau$  が与えられている。ある  $u$  における  $s$  の値は 2-form ポテンシャルの積分として (290) のように与えられる。積分 (312) は、この量  $s$  を一度微分して  $\alpha_i$  または  $\beta_i$  サイクル上で積分せよという式であるから、これは次のように  $A_i$  サイクルおよび  $B_i$  サイクル上で対応する場の強さを積分せよという式になる。

$$N_i = \oint_{A_i} G_3^C, \quad \tau + n_i = \int_{B_i} G_3^C. \quad (344)$$

ただし、複素 3-形式  $G_3^C$  を次のように定義した。

$$G_3^C = G_3^B + \tau_{\text{str}} H_3^B. \quad (345)$$

(344) で得られた二つの式はそれぞれ物理的な解釈をすることができる。まず、 $A_i$  上の積分として  $N_i$  を得る式であるが、この式はもともと  $N_i$  枚の D5-ブレーンが  $A_i$  とリンクした  $S^2$  に巻きついていて、それがフラックスとして残っていることを意味している。また、二つ目の  $\tau$  の式であるが、これはストークスの定理によって (290) に書き換えること

ができる。つまり、遠方の基準点における  $S^2$  のサイクルに D5-ブレーンを巻き付けたときにその上で実現されるゲージ理論の結合定数を与えている。

(343) と (344) を以前に得られた有効超ポテンシャル (329) に代入すれば、次の式を得る。

$$\begin{aligned} W_{\text{eff}} &= \frac{1}{g_{\text{str}}^A} \left[ \oint_{A_i} \omega_{(3,0)} \int_{B_i} G_3^C - \oint_{B_i} \omega_{(3,0)} \int_{A_i} G_3^C \right] \\ &= \frac{1}{g_{\text{str}}^A} \int_{\text{CY}} \omega_{(3,0)} \wedge G_3^C \end{aligned} \quad (346)$$

ここで、 $g_{\text{str}}^A$  が T-dual 変換を行う前の IIA 型理論の結合定数であることに注意。全てを IIB 型の言葉で書くために  $g_{\text{str}}^A = L_A g_{\text{str}}^B$  を用い、さらに次のように正則 3 形式の規格化を変更する。

$$\Omega_{(3,0)} = \frac{1}{L_A} \omega_{(3,0)} \quad (347)$$

$\omega_{(3,0)} = du \wedge \omega_{(2,0)}$  の規格化が (337) のように因子  $L_A$  を含んでいることを思い出せば、 $\Omega_{(3,0)}$  が次のように自然な規格化条件を満足していることがわかる。

$$\Omega_{(3,0)} \wedge \Omega_{(3,0)}^* = \frac{4i}{3} k_{\text{CY}} \wedge k_{\text{CY}} \wedge k_{\text{CY}}, \quad |\Omega_{(3,0)}|^2 \equiv \frac{1}{6} \Omega_{mnp} \Omega^{*mnp} = 8. \quad (348)$$

$\Omega_{(3,0)}$  を用いて (346) を書き直せば、次のポテンシャルを得る。

$$W_{\text{eff}} = \frac{1}{g_{\text{str}}^B} \int_{\text{CY}} \Omega_{(3,0)} \wedge G_3^C. \quad (349)$$

これは Gukov-Vafa-Witten ポテンシャルと呼ばれる。[13]

IIB 型理論の場でグルーボール超場を書いておくと、次のようになる。

$$\frac{1}{g_{\text{str}}^B} \oint_{A_i} \Omega_{(3,0)} \sim \mathcal{S}_i \equiv \text{tr}(W_i W_i). \quad (350)$$

有効ポテンシャル (349) は、ドメインウォールの張力を与えるものとして幾何学的に解釈することができる。Calabi-Yau の  $A_i$  サイクルに巻きついた  $n$  枚の D5-ブレーンとして domain wall を与えてみよう。D5-ブレーンが  $G_3$  に対して磁氣的に結合することから、ドメインウォールの両側では  $G_3$  の  $B_i$  積分が以下のように変化する。

$$\Delta \int_{B_i} G_3 = n \quad (351)$$

これは、ドメインウォールの両側の  $B_i$  サイクルの差が  $A_i$  サイクルにリンクした  $S^3$  を与え、そこを通るフラックスがブレーンの枚数を与えるからである。この結果、超ポテンシャルが次のように変化する。

$$|2\pi \Delta W_{\text{eff}}| = n T_{\text{D5}} \left| \oint_{A_i} \Omega_{(3,0)} \right| = n T_{\text{D5}} V. \quad (352)$$

ただし、 $A_i$  サイクル上での  $\Omega_{(3,0)}$  の積分が次のように体積を与えることを用いた。

$$\left| \oint_{A_i} \Omega_{(3,0)} \right| = V. \quad (353)$$



ドメインウォールがもし BPS であれば。その張力はドメインウォール両側での超ポテンシャルの差として与えられることが知られている。すなわち (352) の左辺はドメインウォールの張力を与えており、それが右辺のように D5-ブレーンの張力として与えられることを意味している。

## 参考文献

- [1] T. H. Buscher, “A Symmetry of the String Background Field Equations,” *Phys. Lett. B* **194**, 59 (1987).
- [2] E. Bergshoeff, C. M. Hull and T. Ortin, “Duality in the type II superstring effective action,” *Nucl. Phys. B* **451**, 547 (1995) [hep-th/9504081].
- [3] *Comm. Math. Phys.* 108, (1987), 535-589, “Hyper-Kähler metrics and supersymmetry,” N. J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindström, and M. Roček.
- [4] N. Hitchin, “Hyper-Kähler manifolds,” *Astérisque* (1992), no. 206, Exp. No. 748, 3, 137-166. *Séminaire Bourbaki*, Vol. 1991/92.
- [5] Dieter R. Brill, “Electromagnetic Fields in a Homogeneous, Nonisotropic Universe,” *Phys.Rev.*133,B845(1964)
- [6] C. N. Pope, “Axial-vector anomalies and the index theorem in charged Schwarzschild and Taub-NUT spaces,” *Nucl.Phys.*B141,432(1978)
- [7] A. Giveon and D. Kutasov, “Brane dynamics and gauge theory,” *Rev. Mod. Phys.* **71**, 983 (1999) [hep-th/9802067].
- [8] A. Karch, D. Lust and D. J. Smith, “Equivalence of geometric engineering and Hanany-Witten via fractional branes,” *Nucl. Phys. B* **533**, 348 (1998) [hep-th/9803232].
- [9] A. Hanany and E. Witten, “Type IIB superstrings, BPS monopoles, and three-dimensional gauge dynamics,” *Nucl. Phys. B* **492**, 152 (1997) [hep-th/9611230].
- [10] E. Witten, “Solutions of four-dimensional field theories via M theory,” *Nucl. Phys. B* **500**, 3 (1997) [hep-th/9703166].
- [11] S. Elitzur, A. Giveon and D. Kutasov, “Branes and N=1 duality in string theory,” *Phys. Lett. B* **400**, 269 (1997) [hep-th/9702014].
- [12] E. Witten, “Branes and the dynamics of QCD,” *Nucl. Phys. B* **507**, 658 (1997) [hep-th/9706109].
- [13] S. Gukov, C. Vafa and E. Witten, “CFT’s from Calabi-Yau four folds,” *Nucl. Phys. B* **584**, 69 (2000) [Erratum-ibid. *B* **608**, 477 (2001)] [hep-th/9906070].