

令和元年度修士課程修了論文<sup>1</sup>  
超弦理論のフラックスコンパクト化における  
コンパクト空間の幾何学とフレーバー構造

北海道大学大学院理学院 宇宙理学専攻 素粒子論研究室  
内田 光

<sup>1</sup>本論文は 2020 年 1 月に提出した修士論文に加筆、修正したものである。

## 概要

標準模型を越えた理論として盛んに研究されている超弦理論は10次元時空上の理論である。その10次元時空から6次元空間をコンパクト化することで4次元時空の有効理論を得る。そこで、標準模型が抱える課題の一つである、フェルミオンの質量や3世代フレーバー混合を与える4次元湯川結合定数をコンパクト空間上の波動関数を用いて計算し、コンパクト空間の幾何学が湯川結合定数に与える影響について議論する。具体的には、超弦理論の有効理論として得られる10次元 $\mathcal{N} = 1$  Super Yang-Mills理論を6次元フラックスコンパクト化し、さらにフェルミオンの3世代構造がそのうちの2次元空間に由来するとして、2次元空間上の波動関数を求めて湯川結合を計算する。2次元空間として $T^2/\mathbb{Z}_2$  オービフォールドが持つ特異点の近傍を $S^2$ の一部を用いてブローアップして変形した幾何を考えて、その幾何上の波動関数を求め、さらに得られた波動関数を用いて4次元湯川結合定数を計算する。そして、その湯川結合から得られるクォークのフレーバー構造(クォーク質量比およびフレーバー混合行列)のブローアップ半径の依存性を議論し、ブローアップを行うことで観測値に $O(1)$ 程度で再現するモデルについて議論する。

# 目次

第 1 章 導入	2
第 2 章 標準模型とその課題	4
第 3 章 超弦理論	9
3.1 弦理論	9
3.2 超弦理論	13
3.3 コンパクト化と $T$ -双対性	19
3.4 D-ブレーンモデル	21
3.4.1 交差 D-ブレーンモデル	21
3.4.2 Magnetized D-ブレーンモデル	24
第 4 章 フラックスコンパクト化	26
4.1 $T^2$ フラックスコンパクト化	27
4.1.1 $T^2$ 上の波動関数と湯川結合定数	27
4.1.2 $T^2$ におけるモジュライ対称性	34
4.2 $T^2/\mathbb{Z}_2$ フラックスコンパクト化	42
4.2.1 $T^2/\mathbb{Z}_2$ 上の波動関数と湯川結合定数	42
4.2.2 $T^2/\mathbb{Z}_2$ におけるモジュライ対称性	45
4.3 $S^2$ フラックスコンパクト化	46
第 5 章 $T^2/\mathbb{Z}_2$ オービフォールド特異点のブローアップ	50
第 6 章 総括	57
付録 A 超対称性	59
付録 B $T^2$ 上の波動関数に対するモジュライ変換性	61
付録 C $T^2/\mathbb{Z}_N$ オービフォールド特異点のブローアップ	64
付録 D $T^2/\mathbb{Z}_2$ 特異点のブローアップ後の動関数の規格化因子	68
付録 E $T^2/\mathbb{Z}_2$ 特異点のブローアップ後の湯川結合の補正	74

# 第1章 導入

現在のところ自然に存在する四つの相互作用（強い相互作用、電磁相互作用、弱い相互作用、重力相互作用）のうち重力相互作用を除く三つの相互作用は、表 1.1 に示される  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  局所対称性を持つ素粒子の相互作用によってヒッグススカラー場による自発的対称性の破れを介して記述されることが標準模型によって知られている。実際に、3つのゲージ結合定数、ヒッグススカラー場のポテンシャルを決める結合定数、フェルミオンの質量構造を与える湯川結合係数といった標準模型のフリーパラメータを適当な値に選ぶことによって  $O(10^2)\text{GeV}$  以下の多くの実験結果と非常に良く整合している。

しかし、そのようなフリーパラメータの値を理論的に説明することはできない。また、なぜゲージ群構造が  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  であり、そして表 1.1 のような素粒子が存在するのかを理論的に説明することはできない。他にも、標準模型では重力相互作用を説明できないことや、現在の宇宙に存在するエネルギーのうち表 1.1 の標準模型の粒子で構成される物質は宇宙全体の約 5% を占めているがなぜそのような物質が多く生成されているのか（バリオン非対称性）、そして残りのダークマター・ダークエネルギーの起源なども標準模型では説明できない。このような謎を解決するためには、標準模型を越えた理論が必要である。

これらの謎を解決し得る「万物の理論」の有力候補として超弦理論が挙げられる。超弦理論とは、超対称性をもつ弦理論である。ここで、超対称性とは、ボソンとフェルミオンの間の対称性であり、弦理論とは、全ての素粒子をプランクスケール  $E_p = m_p c^2 = c^2 \sqrt{\hbar c / G} \sim O(10^{18})\text{GeV}$  においては「点粒子」ではなく長さにして  $10^{-33}\text{cm}$  ほどの「弦」として扱う理論である。その弦の振動モードとして重力子やゲージボソンとそれらの超対称性パートナーとしてフェルミオンを含むため、「万物の理論」の有力候補として盛んに研究されている。しかし、超弦理論が量子論において無矛盾であるためには 10 次元時空であることが要請されて、超弦理論が標準模型を含む自然界を記述する「万物の理論」であると仮定するならば、我々が観測していない余剰な 6 次元空間は  $O(10^2) \sim O(10^{18})\text{GeV}$  のあるエネルギースケールで小さく丸められて（コンパクト化されて）いる必要があり、その  $O(10^2)\text{GeV}$  における有効理論として標準模型が導かれなければならない。しかし、現在に至るまで超弦理論から標準模型を実験値まで完全に再現するモデルは得られていない。

本論文では、超弦理論から得られる有効理論を用いて、標準模型の謎の一つである 3 世代フェルミオンの質量構造および世代（フレーバー）混合を与える湯川結合係数の構造について議論する。具体的には、超弦理論の magnetized D-ブレンモデルの有効理論として得られる 10 次元  $\mathcal{N} = 1$  Super Yang-Mills 理論を 6 次元フラックスコンパクト化する。特に、6 次元空間が 3 つの 2 次元空間の直積で構成されるとしてさらに表 1.1 のフェルミオンの 3 世代構造が 1 つの 2 次元空間に由来するとして一つの 2 次元空間上で特にクォークの湯川結合を計算して 4 次元湯川

結合係数を求める。そして、その湯川結合係数から得られる3世代クォークの質量および世代(フレーバー)混合行列が、コンパクト空間の幾何を変形することでどのような影響を与えるのかを議論する。

本論文の構成は以下の通りである。まず第2章で標準模型とその課題についてまとめる。第3章で、標準模型を越えた理論である超弦理論について概説する。そこで超弦理論では10次元時空が要請されることをみる。そして、4次元標準模型を得るために有用なコンパクト化およびD-ブレーンモデルについて概説する。第4章で、超弦理論の有効理論として得られる10次元  $\mathcal{N} = 1$  Super Yang-Mills 理論のフラックスコンパクト化について議論する。特に、2次元トーラス ( $T^2$ )、それをさらに  $\mathbb{Z}_2$  対称性で割ったトーラスオービフォールド ( $T^2/\mathbb{Z}_2$ )、さらに  $T^2/\mathbb{Z}_2$  と同じトポロジー不変量を持つ2次元球面 ( $S^2$ ) 上の波動関数およびそれから得られる湯川結合係数についてレビューする。第5章で、 $T^2/\mathbb{Z}_2$  特異点を  $S^2$  を用いて丸く滑らかに変形(ブローアップ)した幾何上の波動関数および湯川結合係数を求めて、クォークの質量およびフレーバー混合行列のブローアップ依存性および実験値の再現について議論する。最後に、第6章で総括を行う。また、付録Aで、超対称性に関する基礎事項について補足する。付録Bで、第4章で議論された  $T^2$  上の波動関数に対するモジュライ変換の計算の詳細を記載している。付録Cで、第5章のブローアップの手法を一般の  $T^2/\mathbb{Z}_N$  オービフォールド特異点に適用して変形後の波動関数を求めている。付録Dで、第5章で求めたブローアップ後の波動関数の規格化因子を求めるための計算の詳細を記載している。付録Eで、第5章で用いた湯川結合定数の計算の詳細を記載している。

物質フェルミオン (スピノル場)	左巻きクォーク	左巻きレプトン	右巻きクォーク	右巻きレプトン
表現	$q_L^i = (\mathbf{3}, \mathbf{2}, +\frac{1}{6})$	$l_L^i = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$	$u_R^i = (\mathbf{3}, \mathbf{1}, +\frac{2}{3})$ $d_R^i = (\mathbf{3}, \mathbf{1}, -\frac{1}{3})$	$e_R^i = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1)$
第1世代	$q_L^1 = \begin{pmatrix} u_L^r & u_L^g & u_L^b \\ d_L^r & d_L^g & d_L^b \end{pmatrix}$	$l_L^1 = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e \end{pmatrix}$	$u_R^1 = \begin{pmatrix} u_R^r & u_R^g & u_R^b \\ d_R^r & d_R^g & d_R^b \end{pmatrix}$	$e_R^1 = e_R$
第2世代	$q_L^2 = \begin{pmatrix} c_L^r & c_L^g & c_L^b \\ s_L^r & s_L^g & s_L^b \end{pmatrix}$	$l_L^2 = \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu \end{pmatrix}$	$u_R^2 = \begin{pmatrix} c_R^r & c_R^g & c_R^b \\ s_R^r & s_R^g & s_R^b \end{pmatrix}$	$e_R^2 = \mu_R$
第3世代	$q_L^3 = \begin{pmatrix} t_L^r & t_L^g & t_L^b \\ b_L^r & b_L^g & b_L^b \end{pmatrix}$	$l_L^3 = \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau \end{pmatrix}$	$u_R^3 = \begin{pmatrix} t_R^r & t_R^g & t_R^b \\ b_R^r & b_R^g & b_R^b \end{pmatrix}$	$e_R^3 = \tau_R$
ゲージボソン (ベクトル場)	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$	ヒッグスボソン (スカラー場)
表現	$G = (\mathbf{8}, \mathbf{1}, 0)$	$W_L = (\mathbf{1}, \mathbf{3}, 0)$ $\Rightarrow W_L^\pm, Z_L$	$B = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0)$ $\Rightarrow \gamma (A)$	$\phi = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, +\frac{1}{2})$ $\Rightarrow h$
相互作用	強い相互作用	弱い相互作用	電磁相互作用	(湯川相互作用)

表 1.1:  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  対称性を持つ標準模型の構成粒子

## 第2章 標準模型とその課題

本章ではまず標準模型とその課題についてまとめる。主に [1-3] を参考にしている。標準模型は以下の  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  対称性を持つ作用

$$S = \int d^4x \left[ -\frac{1}{4} G^{\alpha\mu\nu} G_{\mu\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4} W_L^{\alpha\mu\nu} W_{L\mu\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \right. \quad (2.1)$$

$$\left. + (q_L^i)^\dagger i\sigma^\mu \left( \partial_\mu - ig_C G_\mu^a \frac{\lambda^a}{2} - ig_L W_{L\mu} \frac{\sigma^a}{2} - ig_Y B_\mu \frac{1}{6} \right) q_L^i \right.$$

$$\left. + (l_L^i)^\dagger i\sigma^\mu \left( \partial_\mu - ig_L W_{L\mu} \frac{\sigma^a}{2} + ig_Y B_\mu \frac{1}{2} \right) l_L^i \right.$$

$$\left. + (u_R^i)^\dagger i\bar{\sigma}^\mu \left( \partial_\mu - ig_C G_\mu^a \frac{\lambda^a}{2} - ig_Y B_\mu \frac{2}{3} \right) u_R^i \right.$$

$$\left. + (d_R^i)^\dagger i\bar{\sigma}^\mu \left( \partial_\mu - ig_C G_\mu^a \frac{\lambda^a}{2} + ig_Y B_\mu \frac{1}{3} \right) d_R^i \right.$$

$$\left. + (e_R^i)^\dagger i\bar{\sigma}^\mu (\partial_\mu + ig_Y B_\mu) e_R^i \right.$$

$$\left. + \left| \left( \partial_\mu - ig_L W_{L\mu} \frac{\sigma^a}{2} - ig_Y B_\mu \frac{1}{2} \right) \phi \right|^2 - \lambda \left( |\phi|^2 - \frac{v^2}{2} \right)^2 \right.$$

$$\left. - \left( y_u^{ij} (u_R^i)^\dagger \tilde{\phi}^\dagger q_L^j + y_d^{ij} (d_R^j)^\dagger \phi^\dagger q_L^j + y_e^{ij} (e_R^i)^\dagger \phi^\dagger l_L^j + \frac{c^{ij}}{\Lambda} ((l_L^i)^c)^\dagger \tilde{\phi}^* \tilde{\phi}^\dagger l_L^j + \text{h.c.} \right) \right]$$

$$ig_C G_{\mu\nu}^a \frac{\lambda^a}{2} = ig_C (\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - g G_\mu^b G_\nu^c f^{bca}) \frac{\lambda^a}{2}, \quad \left[ \frac{\lambda^b}{2}, \frac{\lambda^c}{2} \right] = if^{bca} \frac{\lambda^a}{2} \quad (a, b, c = 1, 2, \dots, 8)$$

$$ig_L W_{L\mu\nu}^a \frac{\sigma^a}{2} = ig_L (\partial_\mu W_{L\nu}^a - \partial_\nu W_{L\mu}^a - g W_{L\mu}^b W_{L\nu}^c \epsilon^{bca}) \frac{\sigma^a}{2}, \quad \left[ \frac{\sigma^b}{2}, \frac{\sigma^c}{2} \right] = i\epsilon^{bca} \frac{\lambda^a}{2} \quad (a, b, c = 1, 2, 3)$$

$$ig_Y B_{\mu\nu} Y = ig_Y (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu) Y$$

$$\sigma^\mu = (I, \sigma^i), \quad \bar{\sigma}^\mu = (I, -\sigma^i)$$

$$\tilde{\phi} = i\sigma^2 \phi^*$$

で記述される。ここで、 $\lambda^a, \sigma^a$  はそれぞれ Gell-Mann 行列、Pauli 行列でありそれぞれ  $SU(3)$ ,  $SU(2)$  の Lie 代数を構成し、 $f^{bca}, \epsilon^{bca}$  はそれぞれの構造定数となる。また、 $g_C, g_L, g_Y$  はそれぞれ  $SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y$  のゲージ結合定数、 $\lambda, v$  はヒッグススカラー場ポテンシャルを決める結合定数、 $y_f^{ij}$  ( $f = u, d, e$ ) は湯川結合定数である。また、作用の最終項 (Weinberg オペレー

タ [4]<sup>1</sup>は質量次元が5次の結合であるため、質量次元1のカットオフパラメータ  $\Lambda$  を導入し無次元結合定数を  $c^{ij}$  とする。ここで、 $(l_L^i)^c$  は  $l_L^i$  の荷電共役をとったものである。ここで、ヒッグススカラー場  $\phi$  の真空期待値

$$\langle \phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

によって  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow SU(3)_C \times U(1)_Q$  と自発的に対称性が破れて、真空期待値周りで

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

と展開することで、作用は以下のように書き表される。

---

<sup>1</sup>この項は表 1.1 の標準模型粒子を用いてニュートリノの質量を説明するために考えられる項であるが、結合定数が負の質量次元を持つためにこの項は繰り込み不可能となる。(標準模型が提案された当初はニュートリノは質量を持っていないと考えられたためこの項を考える必要はなかったが、このように繰り込み不可能であることを許せば標準模型の範囲内でニュートリノの質量を説明することができる。)

$$S = \int d^4x \left[ -\frac{1}{4}G^{\alpha\mu\nu}G_{\mu\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4}A^{\mu\nu}A_{\mu\nu} \right. \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} & + 2 \left( -\frac{1}{4}W_L^{+\mu\nu}W_{L\mu\nu}^- + \frac{1}{2}m_{W_L}^2 W_L^{+\mu}W_{L\mu}^- \right) + \left( -\frac{1}{4}Z_L^{\mu\nu}Z_{L\mu\nu} + \frac{1}{2}m_{Z_L}^2 Z_L^{\mu}Z_{L\mu} \right) \\ & + \frac{1}{2}(\partial_{\mu}h)^2 - \frac{1}{2}m_h^2(h)^2 - \frac{1}{2}\frac{m_h^2}{v}(h)^3 - \frac{\lambda}{4}(h)^4 \\ & + 2\frac{m_{W_L}^2}{v}hW_L^{+\mu}W_{L\mu}^- + \frac{m_{W_L}^2}{v^2}(h)^2W_L^{+\mu}W_{L\mu}^- + \frac{m_{Z_L}^2}{v}hZ_L^{\mu}Z_{L\mu} + \frac{1}{2}\frac{m_{Z_L}^2}{v^2}(h)^2Z_L^{\mu}Z_{L\mu} \\ & + \bar{u}'^I \left( i\gamma^{\mu} \left( \partial_{\mu} - ig_C G_{\mu}^a \frac{\lambda^a}{2} - i\frac{2}{3}eA_{\mu} \right) - m_{u'^I} - \frac{m_{u'^I}}{v}h \right) u'^I \\ & + \frac{g_L}{\cos\theta_W} \left( \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sin^2\theta_W \right) (u'_L)^{\dagger}\sigma^{\mu}Z_{L\mu}u'_L - \frac{2}{3}\sin^2\theta_W (u'_R)^{\dagger}\bar{\sigma}^{\mu}Z_{L\mu}u'_R \right) \\ & + \bar{d}'^I \left( i\gamma^{\mu} \left( \partial_{\mu} - ig_C G_{\mu}^a \frac{\lambda^a}{2} + i\frac{1}{3}eA_{\mu} \right) - m_{d'^I} - \frac{m_{d'^I}}{v}h \right) d'^I \\ & + \frac{g_L}{\cos\theta_W} \left( \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sin^2\theta_W \right) (d'_L)^{\dagger}\sigma^{\mu}Z_{L\mu}d'_L + \frac{1}{3}\sin^2\theta_W (d'_R)^{\dagger}\bar{\sigma}^{\mu}Z_{L\mu}d'_R \right) \\ & + \bar{e}'^I \left( i\gamma^{\mu} (\partial_{\mu} + ieA_{\mu}) - m_{e'^I} - \frac{m_{e'^I}}{v}h \right) e'^I \\ & + \frac{g_L}{\cos\theta_W} \left( \left( -\frac{1}{2} + \sin^2\theta_W \right) (e'_L)^{\dagger}\sigma^{\mu}Z_{L\mu}e'_L + \sin^2\theta_W (e'_R)^{\dagger}\bar{\sigma}^{\mu}Z_{L\mu}e'_R \right) \\ & + \frac{1}{2}\bar{\nu}'^I_{L(M)} \left( i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m_{\nu'^I_{L(M)}} \right) \nu'^I_{L(M)} + \frac{g_L}{\cos\theta_W} \left( \frac{1}{2}(\nu'^I)^{\dagger}\sigma^{\mu}Z_{L\mu}\nu'^I \right) \\ & + \frac{g_L}{\sqrt{2}} \left( (u'^I)^{\dagger}\sigma^{\mu}W_{L\mu}^+(V_{CKM})_{IJ}d'^J + (e'^I)^{\dagger}\sigma^{\mu}W_{L\mu}^-(V_{PMNS})_{IJ}\nu'^J + \text{h.c.} \right) \end{aligned}$$

$$W_L^{\pm} = \frac{W_L^1 \mp iW_L^2}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{pmatrix} Z_L \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & -\sin\theta_W \\ \sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_L^3 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{g_L}{\sqrt{g_L^2+g_Y^2}} & -\frac{g_Y}{\sqrt{g_L^2+g_Y^2}} \\ \frac{g_Y}{\sqrt{g_L^2+g_Y^2}} & \frac{g_L}{\sqrt{g_L^2+g_Y^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_L^3 \\ B \end{pmatrix}$$

$$m_{W_L} = \frac{g_L v}{2}, \quad m_{Z_L} = \frac{\sqrt{g_L^2+g_Y^2}v}{2}, \quad m_h = \sqrt{2\lambda}v, \quad e = \frac{g_L g_Y}{\sqrt{g_L^2+g_Y^2}}, \quad Q = I_{L3} + Y$$

$$\gamma^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mu} \\ \bar{\sigma}^{\mu} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{pmatrix} f_L \\ f_R \end{pmatrix}, \quad \bar{f} = f^{\dagger}\gamma^0, \quad (f = u, d, e), \quad \nu_{L(M)} = \begin{pmatrix} \nu_L \\ (\nu_L)^c \end{pmatrix}, \quad \bar{\nu}_{L(M)} = \nu_{L(M)}^{\dagger}\gamma^0 \text{ (Majorana)}$$

$$f_{L,R}^i = (U_{f_{L,R}})_{iI} f'^I_{L,R}, \quad (U_{f_L})_{iI}^{\dagger} y_f^{ij} (U_{f_R})_{jJ} = \sqrt{2}\frac{m_{f^I}}{v}\delta_{IJ}$$

$$\nu_L^i = (U_{\nu_L})_{iI} \nu'^I_L, \quad (U_{\nu_L})_{iI}^{\dagger} \frac{c_{\mu}^{ij}}{\Lambda} (U_{\nu_L})_{jJ} = \frac{m_{\nu'^I_{L(M)}}}{v^2}\delta_{IJ} \quad (m_{\nu'^I_{L(M)}} \ll m_{f^I})$$

$$V_{CKM} = (U_{u_L})^{\dagger}U_{d_L}, \quad V_{PMNS} = (U_{e_L})^{\dagger}U_{\nu_L}$$



こうして破れずに残る  $SU(3)_C$  対称性により強い相互作用を、 $U(1)_Q$  対称性により電磁相互作用を説明し、破れてヒッグス機構により Nambu-Goldstone ボソンの 3 自由度を吸収して質量を獲得した  $W^\pm, Z$  ボソンにより弱い相互作用を説明する。また、残りの 1 自由度は質量を持つ実スカラー場  $h$  として物理的に現れるヒッグスボソンである。また、ヒッグススカラー場との (湯川) 結合を通してフェルミオンも質量を獲得し<sup>2</sup>、そして  $W^\pm$  ボソンとの相互作用で世代 (フレーバー) 混合を起こす。クォークの混合量列を Cabibbo-Kobayashi-Masukawa (CKM) 行列、レプトンの混合行列を Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (PMNS) 行列と呼ぶ。さらに、3 世代以上が混合することによって混合行列に物理的な複素位相が現れて  $CP$  対称性の破れを説明することができる<sup>3</sup>。

このようにしてゲージ結合定数、ヒッグススカラー場のポテンシャルを決める結合定数、湯川結合定数 (および Weinberg オペレータ係数) を適当な値に選ぶことで、標準模型で  $O(10^2)\text{GeV}$  以下の多くの実験結果を説明することができる。しかし、標準模型では説明できない謎も多く存在する。以下、主要な謎について列挙する。

- フリーパラメータの値の理論的説明に関する謎

- 3つのゲージ結合定数の値は理論的にどのように決定されるのか。(→ 繰り込み手法を用いてエネルギースケールを上げていくと  $O(10^{16})\sim O(10^{17})\text{GeV}$  程度で3つのゲージ結合定数が (おおよそ) 同一の値を示すことが知られている。そのため、 $O(10^{16})\sim O(10^{17})\text{GeV}$  以上ではある一つのゲージ群  $G$  によって記述されているのではないかと示唆されている (大統一理論)。そして、そのエネルギースケールで群  $G$  の対称性が破れることにより実験値と整合する3つのゲージ結合定数が得られたのではないかと示唆されている。ただしゲージ結合定数を統一するためには標準模型で導入されていない新たな粒子の効果が必要である。)
- ヒッグススカラー場のポテンシャルの形はどのように理論的に決定されるのか。特に、対称性を破るエネルギースケールがなぜ  $O(10^2)\text{GeV}$  程度であるのか (ゲージ階層問題)。(→ フェルミオンとの間の超対称性や余剰次元時空におけるゲージ対称性などにより制限されているのではないかと盛んに研究されている。)
- フェルミオンの質量や世代 (フレーバー) 混合、 $CP$  対称性の破れを引き起こす湯川結合定数は理論的にどのように決定されるのか。特に、なぜ質量が階層構造になっているのか。また、極端に小さいニュートリノの質量の起源は何か。(ニュートリノは Majorana 粒子であるのか Dirac 粒子であるのか。Majorana 粒子である場合はカッ

<sup>2</sup>ただし、Weinberg オペレータから得られるニュートリノ質量項は Majorana 質量項であるため、ニュートリノが Majorana 粒子でない場合は、 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  のもとで singlet として振る舞う右巻きニュートリノを導入し、アップクォークタイプと同様の湯川結合から得られる Dirac 質量項によって説明する必要がある。ただしこの場合は、ニュートリノの質量が他のフェルミオンの質量と比べて極端に小さいために、ニュートリノの湯川結合定数が他のフェルミオンの湯川結合定数より極端に小さいという不自然性を抱えることになる。なお、ニュートリノが Majorana 粒子であるかどうかはまだわかっていない。

<sup>3</sup>Majorana ニュートリノである場合は 2 世代以上の PMNS 混合でも  $CP$  対称性の破れを説明することができるが、現在すでに 3 世代混合が起きていることは知られている。また、実際に何世代で混合しているかは混合行列のユニタリ性を確認することで特定される。

トオフスケールでのどのような結合に由来するのか。Dirac 粒子である場合は湯川結合定数が他のフェルミオンと比べて極端に小さいのはなぜか。)(→Majorana ニュートリノである場合、シーソー機構などによって説明されることが有力視されている。ただし、ニュートリノと結合する重い粒子の存在は確認されていない。)なぜクォークの世代混合は小さくレプトンの世代混合は大きいのか。(→フレーバー対称性を用いて説明するモデルが提唱されている。)

- 自然界がなぜ標準模型のような構造をしているのか

- なぜゲージ群構造が  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  なのか。特に、なぜ左巻き粒子にのみ  $SU(2)$  対称性がある (カイラルな理論である) のか。(→標準模型より高エネルギーで右巻き粒子に対する  $SU(2)_R$  対称性を導入したモデルも提唱されている。)
- 自然界にはなぜ表 1.1 のような素粒子が存在しているのか。特に、なぜフェルミオンは 3 世代存在しているのか。また、表現はなぜ表 1.1 のような表現であるのか。特に、 $U(1)_Y$  のハイパー電荷  $Y$  はどのように決定されるのか。(→高エネルギーで非可換ゲージ群に埋め込むことによってよく説明されている。)

- 標準模型では説明することができていない現象

- 重力相互作用は標準模型で説明できていない。また、一般相対性理論で記述される古典重力理論は繰り込み不可能な理論である。(→超弦理論はこの問題を解決し得る理論として注目されている。)
- 現在の宇宙に存在するエネルギーのうち表 1.1 の標準模型の粒子で構成される物質は宇宙全体の約 5% を占めており、まず標準模型ではなぜそのような物質が多く生成されたのか (バリオン非対称性) を説明することができない。(→Majorana ニュートリノなどによるレプトン数の破れと電弱相互作用で予言されるスファレロン効果を用いてバリオン数の破れを説明するモデルが有力視されている。)また残りの宇宙全体の約 27% を未だ正体不明なダークマターが、約 68% を宇宙を膨張させるダークエネルギーが占めているが、これらは標準模型で説明できていない。
- 宇宙論における地平線問題と平坦性問題を解決する理論として有力視されているインフレーション理論を標準模型では説明できていない。(→インフレーションを起こすポテンシャルの起源がわかっていない。)

このように標準模型は多くの謎を抱えており、これらを解決するためには標準模型を越えた理論が必要である。以降では、標準模型を越えた理論として超弦理論を考えて、超弦理論から予言される余剰なコンパクト空間を用いて、特にクォークのフレーバー構造のコンパクト空間の幾何依存性について議論する。

## 第3章 超弦理論

本章では超弦理論の概要をまとめる。主に [5-7] を参考にしている。まず、点粒子から有限長さを持つ弦へ拡張することで閉弦と開弦の2種類の弦を考えることができる。また弦を考えることで、古典論において考えられる対称性を量子論でも保障することを要請すると、弦が運動する時空間の次元が特定される。具体的にはまずボソニック弦理論についてまとめる。このとき、ボソン弦は26次元時空間上を運動している必要がある。そして、閉弦から2階テンソル場(重力子など)、開弦からベクトル場(ゲージボソン)が0質量モードとして現れて、その意味で弦理論は重力も含めて記述する「万物の統一理論」として注目されている。ただし、真空状態がタキオン状態である。また、フェルミオンを扱うことができない。そこで、超対称性を導入した超弦理論を考える。これによりフェルミオンが導入されてさらに真空状態が安定する。このとき、超弦は10次元時空間上を運動している必要がある。ただし、我々が観測している時空は4次元時空であり、観測されていない余剰な6次元空間はコンパクト化されている必要がある。そこで、コンパクト化すると新たにどのようなことが得られるか議論する。また、超弦理論から標準模型を含む理論を得るために有用なD-ブレーンモデルについて簡単に紹介する。

### 3.1 弦理論

まず、 $D$ 次元時空中を運動する点粒子(ボソン)の作用は、線素  $ds^2 = -g_{MN}X^M X^N$  ( $M, N = 0, 1, \dots, D-1$ ) を用いて

$$S = -m \int ds = -m \int d\tau \sqrt{-g_{MN} \frac{dX^M(\tau)}{d\tau} \frac{dX^N(\tau)}{d\tau}} \quad (3.1)$$

で与えられる。ここで、 $\tau$  は世界線の固有時間であり、 $X^M(\tau)$  は世界線座標で  $\tau$  の位置にある点粒子の  $D$ 次元時空における  $X^M$  方向の座標を表している。すなわち、世界線が  $D$ 次元時空にどのように埋め込まれるかを表している。また、 $m$  は点粒子の質量である。

これを  $D$ 次元時空中を運動するボソン弦の作用に拡張すると、

$$S_{NG} = -T \int d^2\sigma \sqrt{-\det G_{\alpha\beta}} \quad (\alpha, \beta = 0, 1) \quad (3.2)$$

$$G_{\alpha\beta} = g_{MN} \frac{\partial X^M(\sigma)}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial X^N(\sigma)}{\partial \sigma^\beta} \quad (3.3)$$

で与えられる。ここで、 $\sigma^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) は世界面上の座標であり、 $X^M(\sigma)$  は世界面座標で  $\sigma = (\sigma^0, \sigma^1)$  の位置にある弦の  $D$ 次元時空における  $X^M$  方向の座標を表しており、世界面が  $D$ 次元

時空にどのように埋め込まれるかを表している。その埋め込まれた世界面の計量は  $G_{\alpha\beta}$  で  $D$  次元時空計量から誘導される。また、 $T$  は弦の張力であり、弦理論のパラメータとして質量次元  $-2$  を持つ Regge スロープと呼ばれるパラメータ  $\alpha'$  を用いて  $T = (2\pi\alpha')^{-1}$  と表せる。この作用は Nambu-Goto 作用と呼ばれる。以後、 $D$  次元背景時空として Minkowski 時空を考える。このとき  $D$  次元背景時空には大域的 Poincaré 対称性がある。また、 $\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial\sigma^\alpha}$  とする。ただし、この作用では  $D$  次元座標が平方根内で用いられていて量子化が困難であるため、この作用と同等の Polyakov 作用

$$S_P = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-\text{deth}h_{\alpha\beta}(\sigma)} h^{\alpha\beta}(\sigma) \eta_{MN} \partial_\alpha X^M(\sigma) \partial_\beta X^N(\sigma) \quad (3.4)$$

を考える。ここで、世界面計量を  $h_{\alpha\beta}$  とし、弦の  $D$  次元座標  $X^M(\sigma)$  を  $D$  個の 0 質量スカラー場として見ることに対応する。実際、世界面計量  $h_{\alpha\beta}$  は補助場であり運動方程式から世界面のエネルギー運動量テンソルが<sup>3</sup>に関する拘束条件

$$T_{\alpha\beta}(\sigma) = \eta_{MN} \partial_\alpha X^M(\sigma) \partial_\beta X^N(\sigma) - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta}(\sigma) h^{\gamma\delta}(\sigma) \eta_{MN} \partial_\gamma X^M(\sigma) \partial_\delta X^N(\sigma) = 0 \quad (3.5)$$

が得られて、これにより Polyakov 作用 (3.4) が<sup>3</sup> Nambu-Goto 作用 (3.3) と等価であることが確かめられる。また、弦  $X^M$  に関する運動方程式は

$$\partial_\alpha \left( \sqrt{-\text{deth}h_{\alpha\beta}(\sigma)} h^{\alpha\beta}(\sigma) \eta_{MN} \partial_\beta X^N(\sigma) \right) = 0 \quad (3.6)$$

となる。ただし、弦の長さ  $l$  は有限でありパラメータ  $\sigma^1$  の領域は有限であり、境界条件

$$\sqrt{-\text{deth}h_{\alpha\beta}(\sigma)} h^{1\alpha}(\sigma) \eta_{MN} \partial_\alpha X^N(\sigma) \delta X^M(\sigma) \Big|_{\sigma^1=0}^{\sigma^1=l} = 0 \quad (3.7)$$

を満たす必要がある。さて、この Polyakov 作用は世界面上の局所的な世界面のパラメータ付け替え (一般座標変換)、世界面計量に対する Weyl 変換、および  $D$  次元背景時空上の大域的な Poincaré 変換に対して不変である。そして運動方程式もまた上記の変換に対して不変である。これら対称性が量子論でも保たれるためには、背景時空が  $D = 26$  次元でなければならないことがわかる。

量子化の方法として、局所対称性をゲージ固定して量子化する光円錐量子化を考える<sup>1</sup>。まず、世界面のパラメータ付け替え (一般座標変換) を用いて世界面パラメータを直交系にとり世界面計量を 2次元 Minkowski 計量に比例した形 ( $h_{\alpha\beta} \propto \eta_{\alpha\beta}$ ) に固定させることができる。ただし、Weyl 変換パラメータは固定されない。すなわち、一般座標変換と Weyl 変換を同時に行う共形変換に対する対称性はまだ固定されずに残っている。さらに、世界面座標の光円錐表示 ( $\sigma^\pm = \sigma^0 \pm \sigma^1$ ) を導入すると、(3.5)-(3.7) は

$$T_{\pm\pm}(\sigma) = \eta_{MN} \partial_\pm X^M(\sigma) \partial_\pm X^N(\sigma) = 0 \quad (3.8)$$

$$\partial_+ \partial_- X^M(\sigma) = 0 \quad (3.9)$$

$$\eta_{MN} \partial_1 X^M(\sigma) \delta X^N(\sigma) \Big|_{\sigma^1=0}^{\sigma^1=l} = 0 \quad (3.10)$$

<sup>1</sup>BRST 量子化を行っても、BRST 対称性、Weyl 対称性、Poincaré 対称性を保障すると同じ結果が得られる。

となる。また、共役運動量は

$$P^M(\sigma) \equiv \frac{1}{2\pi\alpha'} \partial_0 X^M(\sigma) \quad (3.11)$$

と表せる。ここで、 $\sigma^1 = 0$  と  $\sigma^l$  が同一視される閉弦においては、 $l = 2\pi$  として周期境界条件

$$X^M(\sigma^1 + 2\pi) = X^M(\sigma^1) \Rightarrow X_C^M(\sigma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n^M(\sigma^0) e^{in\sigma^1} \quad (3.12)$$

によって (3.10) を満たす。このとき (3.9) の解は

$$X_C^M(\sigma) = x^M + \alpha' p^M \sigma^0 + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \left( \frac{\alpha_n^M}{n} e^{-in\sigma^+} + \frac{\tilde{\alpha}_n^M}{n} e^{-in\sigma^-} \right) \quad (3.13)$$

$$= \left( \frac{1}{2} x^M + \frac{\alpha'}{2} p^M \sigma^+ + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^M}{n} e^{-in\sigma^+} \right) \\ + \left( \frac{1}{2} x^M + \frac{\alpha'}{2} p^M \sigma^- + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\tilde{\alpha}_n^M}{n} e^{-in\sigma^-} \right)$$

$$P_C^M(\sigma) = \frac{p^M}{2\pi} + \frac{1}{2\pi\sqrt{2\alpha'}} \sum_{n \neq 0} \left( \alpha_n^M e^{-in\sigma^+} + \tilde{\alpha}_n^M e^{-in\sigma^-} \right) \quad (3.14)$$

$$= \left( \frac{p^M}{4\pi} + \frac{1}{2\pi\sqrt{2\alpha'}} \sum_{n \neq 0} \alpha_n^M e^{-in\sigma^+} \right) + \left( \frac{p^M}{4\pi} + \frac{1}{2\pi\sqrt{2\alpha'}} \sum_{n \neq 0} \tilde{\alpha}_n^M e^{-in\sigma^-} \right)$$

と得られる。ここで、 $p^M$  は弦全体の運動量であり、(3.14) より  $\alpha_0^M = \tilde{\alpha}_0^M = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^M$  である。また、場の実性より  $(\alpha_n^M)^* = \alpha_{-n}^M$ ,  $(\tilde{\alpha}_n^M)^* = \tilde{\alpha}_{-n}^M$  を満たす。これより、閉弦は  $\sigma^+$  による左回りモード  $\alpha_n^M$  および  $\sigma^-$  による右回りモード  $\tilde{\alpha}_n^M$  は独立である。一方、 $\sigma^1 = 0$  と  $\sigma^1 = l$  が独立な開弦においては、 $l = \pi$  として (3.10) の各項それぞれで 0、すなわち

$$\eta_{MN} \partial_1 X^M(\sigma) \delta X^N(\sigma) \Big|_{\sigma^1=0,\pi} = 0 \quad (3.15)$$

を満たす必要がある。ところで、反対向きの  $\sigma^1 = 0, -\pi$  に対しても同様に

$$\eta_{MN} \partial_1 X^M(\sigma) \delta X^N(\sigma) \Big|_{\sigma^1=0,-\pi} = 0 \quad (3.16)$$

を考えることができ、 $\pi \sim -\pi$  より周期境界条件が考えられるため閉弦と同様の議論をすることができる。すなわち、閉弦に対してさらに  $\sigma^1 = 0, \pi$  で (3.15) を課すことによって開弦が得られる。具体的には、自由端条件である Neumann 条件

$$\partial_1 X^M(\sigma) \Big|_{\sigma^1=0,\pi} = 0 \quad (3.17)$$

を満たす開弦は (3.15) を満たし  $\tilde{\alpha}_n^M = \alpha_n^M$  より (3.9) の解は

$$X_{ON}^M(\sigma) = x^M + 2\alpha' p^M \sigma^0 + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^M}{n} e^{-in\sigma^0} \cos(n\sigma^1) \quad (3.18)$$

$$P_{ON}^M(\sigma) = \frac{p^M}{\pi} + \frac{1}{2\pi\sqrt{2\alpha'}} \sum_{n \neq 0} \alpha_n^M e^{-in\sigma^0} \cos(n\sigma^1) \quad (3.19)$$

と得られる。一方、固定端条件である Dirichlet 条件

$$\delta X^M(\sigma)|_{\sigma^1=0,\pi} = 0 \Leftrightarrow \partial_0 X^M(\sigma)|_{\sigma^1=0,\pi} = 0 \quad (3.20)$$

を満たす開弦においても (3.15) を満たし  $\tilde{\alpha}_n^M = -\alpha_n^M$  より (3.9) の解は

$$X_{OD}^M(\sigma) = x^M + \frac{l^M}{\pi} \sigma^1 + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^M}{n} e^{-in\sigma^0} \sin(n\sigma^1) \quad (3.21)$$

$$P_{ON}^M(\sigma) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\alpha'}} \sum_{n \neq 0} \alpha_n^M e^{-in\sigma^0} \sin(n\sigma^1) \quad (3.22)$$

と得られる。ただし、Dirichlet 条件を課した方向に関して弦全体は運動せず  $p^M = 0$  となるため、背景時空の時間方向である  $X^0$  方向には Dirichlet 条件を課することはできない。ここで、 $D$  次元背景時空のうち Neumann 条件により弦の端点動くことができる  $p+1$  次元時空を  $Dp$ -ブレーンと呼ぶ。また、Dirichlet 条件を課した方向に関して、 $l^M \neq 0$  のとき  $X_{OD}^M(\sigma^1 = \pi) = x^M$ ,  $X_{OD}^M(\sigma^1 = 0) = x^M + l^M$  となり弦の端は  $l^M$  だけ離れた  $D$ -ブレーン上にある。 $D$ -ブレーンの詳細は後に述べることにする。以後ここでは  $l^M = 0$  とする。このように開弦では、左回りモードと右回りモードが独立でなくなる。ただし、このようにして得られた弦のモードはまだ共形対称性により独立ではなく、共形対称性を固定して拘束条件 (3.8) を解く必要がある。まず、拘束条件 (3.8) を

$$T_{++}(\sigma^+) = \alpha' \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n e^{-in\sigma^+} = 0, \quad L_n = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_{n-m}^M \alpha_m^N \eta_{MN} = 0 \quad (3.23)$$

$$T_{--}(\sigma^-) = \alpha' \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{L}_n e^{-in\sigma^-} = 0, \quad \tilde{L}_n = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{\alpha}_{n-m}^M \tilde{\alpha}_m^N \eta_{MN} = 0 \quad (3.24)$$

とモード展開する。ただし、開弦では  $\tilde{L}_n = L_n$  である。また、共形対称性を固定するためにさらに  $D$  次元背景時空座標の光円錐表示 ( $X^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 \pm X^1)$ ),  $X^I = X^I$  ( $I = 2, \dots, D-1$ ) を導入して、

$$X^+(\sigma) = x^+ + \alpha' p^+ \sigma^0 \quad (3.25)$$

で共形対称性を固定する (開弦では  $p^+ \rightarrow 2p^+$  に変える)。その上で (3.23), (3.24) を解くと、

$$\sqrt{2\alpha'} p^+ \alpha_n^- = \sum_{I=2}^{D-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_{n-m}^I \alpha_m^I, \quad \sqrt{2\alpha'} p^+ \tilde{\alpha}_n^- = \sum_{I=2}^{D-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{\alpha}_{n-m}^I \tilde{\alpha}_m^I \quad (3.26)$$

と、 $X^-$  モードも  $X^I$  モードで展開できて独立なモードでなくなる。すなわち物理的に独立なモードは  $D-2$  個の  $X^I$  のモードである。また特に  $n=0$  のとき

$$\alpha' p^+ p^- = \sum_{I=2}^{D-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_{-m}^I \alpha_m^I = \sum_{I=2}^{D-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-m}^I \tilde{\alpha}_m^I \quad (3.27)$$

が成り立つ。この  $D-2$  個のモードに対して正準量子化条件は

$$\begin{aligned} [X^I(\sigma), P^J(\sigma')] &= i\delta^{IJ}\delta(\sigma - \sigma') \\ \Rightarrow [\alpha_m^I, \alpha_n^J] &= [\tilde{\alpha}_m^I, \tilde{\alpha}_n^J] = m\delta^{IJ}\delta_{m+n,0} \quad (m, n \neq 0), \quad [x^I, p^J] = i\delta^{IJ} \end{aligned} \quad (3.28)$$

となる。これより、運動量  $p^I$  を持つ基底状態  $|0; p\rangle$  は

$$\alpha_m^I |0; p\rangle = \tilde{\alpha}_m^I |0; p\rangle = 0 \quad (n > 0), \quad \alpha_0^I |0; p\rangle = \tilde{\alpha}_0^I |0; p\rangle = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^I \quad (3.29)$$

で定義される (開弦では  $\tilde{\alpha}_m^I$  は独立なモードではない)。そして任意の物理的状態はこの基底状態に上昇演算子  $(\alpha_n^I)^\dagger = \alpha_{-n}^I$ ,  $(\tilde{\alpha}_n^I)^\dagger = \tilde{\alpha}_{-n}^I$  を作用させることで得られる。ただし、(3.27) より (3.28) を用いて

$$\begin{aligned} \frac{\alpha'}{2} 2p^+ p^- &= \frac{\alpha'}{2} \sum_{I=2}^{D-1} (p^I)^2 + 2 \sum_{I=2}^{D-1} \sum_{m \neq 0} \alpha_{-m}^I \alpha_m^I - \frac{D-2}{12} = \frac{\alpha'}{2} \sum_{I=2}^{D-1} (p^I)^2 + 2 \sum_{I=2}^{D-1} \sum_{m \neq 0} \tilde{\alpha}_{-m}^I \tilde{\alpha}_m^I - \frac{D-2}{12} \\ \Leftrightarrow M^2 = (p^M)^2 &= \frac{4}{\alpha'} \sum_{I=1}^{D-2} \sum_{m \neq 0} (\alpha_m^I)^\dagger \alpha_m^I - \frac{D-2}{6\alpha'} = \frac{4}{\alpha'} \sum_{I=1}^{D-2} \sum_{m \neq 0} (\tilde{\alpha}_m^I)^\dagger \tilde{\alpha}_m^I - \frac{D-2}{6\alpha'} \end{aligned} \quad (3.30)$$

という関係を満たす必要がある。なお、定数項は、量子化条件 (3.28) から得られる寄与である。最後に、弦が埋め込まれる  $D$  次元背景時空の Poincaré 対称性、特に  $SO(1, D-1)$  Lorentz 対称性を保障するためには背景時空が  $D=26$  次元でなければならない。実際この場合のみ、閉弦では  $\alpha_{-1}^I$  および  $\tilde{\alpha}_{-1}^I$  でそれぞれ一回ずつ上げた第一励起モードの 2 階の反対称テンソル場である Kalb-Ramond 場 (B 場)、2 階のトレースレス対称テンソル場である重力場 (グラビトン)、トレース部分のスカラー場 (ディラトン場) が、開弦では  $\alpha_{-1}^I$  で一回だけ上げた第一励起モードの 1 階のベクトル場 (ゲージ場) が 0 質量であり、Lorentz 対称性が保たれる。なお、このとき真空はタキオン状態である。

## 3.2 超弦理論

前節における弦理論では、真空がタキオン状態で安定でないことやフェルミオンを扱うことができないなどの問題点がある。そこでこれらの問題を解決するために超対称性を導入する。これにより超対称パートナーとしてフェルミオンが現れてさらに超対称性により真空のエネルギーが 0 となり問題が解決される。ただし、超対称性の導入の仕方には 2 種類存在し、直接  $D$  次

元背景時空に対して超対称性を導入する Green-Schwarz(GS) 形式と、2次元世界面上の超対称性を導入した後に  $D$  次元背景時空における超対称性を議論する Ramond-Neveu-Schwarz(RNS) 形式がある。GS 形式では量子化が複雑であるため以下では RNS 形式を用いて議論する。なお、超対称性に関しては付録 A で基礎事項を補足している。

世界面は 2次元であり前節で固定したように Minkowski 時空とする。このとき Weyl スピノルの成分は 1 成分ずつありさらに Majorana でもある。すなわち、2次元 Clifford 代数 (Dirac 代数)  $\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = 2\eta^{\alpha\beta}(\alpha, \beta = 0, 1)$  を満たす  $\gamma^\alpha$  を

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \rho_{+-}^0 \\ \rho_{+-}^0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \rho_{+-}^1 \\ \rho_{+-}^1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

とすると

$$\gamma^3 = \gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

より、 $D$  個の 2次元 Majorana-Weyl スピノルは

$$\psi^M(\sigma) = \begin{pmatrix} \psi_-^M(\sigma) \\ \psi_+^M(\sigma) \end{pmatrix}, \quad (\psi_-^M)^* = \psi_-^M, \quad (\psi_+^M)^* = \psi_+^M \quad (3.33)$$

となる。そこで、2次元 Minkowski 時空に Grassmann 座標  $\theta, \bar{\theta}$  を加えた超空間上の  $D$  個の超場  $\Phi^M(\sigma, \theta, \bar{\theta})$  を Grassmann 数の性質を用いて  $\theta, \bar{\theta}$  で展開すると、

$$\Phi^M(\sigma, \theta, \bar{\theta}) = X^M(\sigma) + i\theta_+\psi_-^M(\sigma) - i\theta_-\psi_+^M(\sigma) + \theta_+\theta_-\bar{B}^M(\sigma) \quad (3.34)$$

となる。この超場に対して超対称変換の生成子

$$Q_- = -i\frac{\partial}{\partial\theta_+} - \rho_{+-}^\alpha\theta_-\frac{\partial}{\partial\sigma^\alpha}, \quad Q_+ = i\frac{\partial}{\partial\theta_-} - \rho_{-+}^\alpha\theta_+\frac{\partial}{\partial\sigma^\alpha} \quad (3.35)$$

を用いて超対称変換  $\delta = i\xi_+Q_- - i\xi_-Q_+$  を行くと、それぞれの成分場は

$$\delta X^M(\sigma) = i\xi_+\psi_-^M(\sigma) - i\xi_-\psi_+^M(\sigma) \quad (3.36)$$

$$\delta\psi_\pm^M(\sigma) = \pm 2\partial_\pm X^M(\sigma)\xi_\mp + \xi_\pm B^M(\sigma) \quad (3.37)$$

$$\delta B^M(\sigma) = -2i\xi_-\partial_+\psi_-^M - 2i\xi_+\partial_-\psi_+^M \quad (3.38)$$

となる。この超場を用いて超対称不変な 2次元世界面上の作用を構成するためには全微分が現れる  $\theta_+\theta_-$  項の場を用いる必要があるが、その項から前節で得られた弦  $X^M$  の 2階微分の運動項を得るためには、超対称変換 (3.35) と反可換な超共偏微分

$$D_- = -i\frac{\partial}{\partial\theta_+} + \rho_{+-}^\alpha\theta_-\frac{\partial}{\partial\sigma^\alpha}, \quad D_+ = i\frac{\partial}{\partial\theta_-} + \rho_{-+}^\alpha\theta_+\frac{\partial}{\partial\sigma^\alpha} \quad (3.39)$$



を用いて

$$\begin{aligned} S_{SP} &= -\frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma D_+ \Phi^M(\sigma, \theta, \bar{\theta}) D_- \Phi^N(\sigma, \theta, \bar{\theta}) \eta_{MN} \Big|_{\theta_+ \theta_-} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \partial_+ X^M(\sigma) \partial_- X^N(\sigma) \eta_{MN} + i\psi_-^M(\sigma) \partial_+ \psi_-^N(\sigma) \eta_{MN} + i\psi_+^M(\sigma) \partial_- \psi_+^N(\sigma) \eta_{MN} \end{aligned} \quad (3.40)$$

とすることで、2次元世界面上で超対称不変な弦の作用を得ることができる。ここで、 $\alpha' = 1$ としている。また、 $B^M(\sigma)$ は補助場となり運動方程式より  $B^M(\sigma) = 0$  となるのでそれを代入している。一方、スピノル  $\psi_{\pm}^M$  の運動方程式と  $\sigma^1$  に対する境界条件は

$$\text{運動方程式: } \partial_{\mp} \psi_{\pm}^M(\sigma) = 0 \Rightarrow \psi_{\pm}^M(\sigma) = \psi_{\pm}^M(\sigma^{\pm}) \quad (3.41)$$

$$\text{境界条件: } \eta_{MN} (\psi_+^M \delta \psi_+^N - \psi_-^M \delta \psi_-^N) \Big|_{\sigma^1=0}^{\sigma^1=l} = 0 \quad (3.42)$$

となる。 $\psi_{\pm}^M$  の共役運動量は

$$\frac{i}{2\pi} \psi_{\pm}^M \quad (3.43)$$

となる。なお、世界面ボソン  $X^M$  に関しては前節と変わらないため省略する。ここで、境界条件 (3.42) が自分自身の積でつくられていることから、閉弦の場合でも

$$\psi_+^M(\sigma + 2\pi) = \pm \psi_+^M(\sigma), \quad \psi_-^M(\sigma + 2\pi) = \pm \psi_-^M(\sigma) \quad (3.44)$$

と  $\psi_+^M$  と  $\psi_-^M$  が独立にそれぞれ周期境界条件または反周期境界条件どちらかを満たす。それぞれ

$$\text{周期境界条件: } \psi_+^M(\sigma) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^M e^{-in\sigma^+} \quad (3.45)$$

$$\psi_-^M(\sigma) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{d}_n^M e^{-in\sigma^-} \quad (3.46)$$

$$\text{反周期境界条件: } \psi_+^M(\sigma) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + 1/2} b_r^M e^{-ir\sigma^+} \quad (3.47)$$

$$\psi_-^M(\sigma) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + 1/2} \tilde{b}_r^M e^{-ir\sigma^-} \quad (3.48)$$

と表される。ここで、 $n$  は整数であり、 $r$  は半奇数である。この、 $d_n^M$  ( $\tilde{d}_n^M$ ) により展開される場を Rammond(R) セクター、 $b_n^M$  ( $\tilde{b}_n^M$ ) により展開される場を Neveu-Schwarz(NS) セクターと呼ぶ。なお、Majorana 場による実性により  $(d_n^M)^* = d_{-n}^M$ ,  $(\tilde{d}_n^M)^* = \tilde{d}_{-n}^M$ ,  $(b_r^M)^* = b_{-r}^M$ ,  $(\tilde{b}_r^M)^* = \tilde{b}_{-r}^M$  を満たす。また、世界面ボソン  $X^M$  と同様閉弦では  $\sigma^+$  による左回りモードおよび  $\sigma^-$  による右回りモードは独立である。一方開弦の場合、境界条件 (3.40) は  $\sigma^1 = 0, \pi$  でそれぞれ独立に 0 になる必要があり、

$$\eta_{MN} \psi_+^M \delta \psi_+^N \Big|_{\sigma^1=0, \pi} = \eta_{MN} \psi_-^M \delta \psi_-^N \Big|_{\sigma^1=0, \pi} \Rightarrow \psi_+^M(\sigma) \Big|_{\sigma^1=\pi} = \pm \psi_-^M(\sigma) \Big|_{\sigma^1=\pi} \quad (3.49)$$

を満たせばよい。ただし、 $\sigma^1 = 0$  を基準にとり  $\psi_+^M(\sigma)|_{\sigma^1=0} = \psi_-^M(\sigma)|_{\sigma^1=0}$  としている。これより、 $\sigma^+$  で表される左回りモードと  $\sigma^-$  で表される右回りモードは独立でなくなる。この条件は

$$\psi_+^M(\sigma)|_{\sigma^1=\pi} = \psi_-^M(\sigma)|_{\sigma^1=\pi} \Rightarrow \psi_{\pm}^M(\sigma) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^M e^{-in\sigma^{\pm}} \quad (3.50)$$

$$\psi_+^M(\sigma)|_{\sigma^1=\pi} = -\psi_-^M(\sigma)|_{\sigma^1=\pi} \Rightarrow \psi_{\pm}^M(\sigma) = \sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} b_r^M e^{-ir\sigma^{\pm}} \quad (3.51)$$

とすることで満たされる。ただし、前節と同様このようにして得られる  $D$  個のモードは物理的に独立なモードではない。ここで、作用 (3.40) では世界面計量を共形変換の自由度を除いて Minkowski 計量に固定しているが、本来はもとの (3.4) に対して超対称性を導入する必要がある、このとき世界面計量の超対称パートナーも補助場として導入される。そして、補助場である世界面計量およびその超対称パートナーの運動方程式からそれぞれ世界面のエネルギー運動量テンソルおよび世界面の超対称カレントに関する拘束条件が得られる。そして、世界面計量およびその超対称パートナーを超共形変換の自由度を除いて固定することで作用 (3.40) が得られる。このとき、拘束条件となる世界面のエネルギー運動量テンソルおよび超対称カレントは

$$T_{\pm\pm}(\sigma) = \partial_{\pm} X^M(\sigma) \partial_{\pm} X^N(\sigma) \eta_{MN} + \frac{i}{2} \psi_{\pm}^M(\sigma) \partial_{\pm} \psi_{\pm}^N(\sigma) \eta_{MN} = 0 \quad (3.52)$$

$$J_{\pm}(\sigma) \equiv \frac{1}{2} J_{\pm}^{\mp}(\sigma) = \psi_{\pm}^M(\sigma) \partial_{\pm} X^N(\sigma) \eta_{MN} = 0 \quad (3.53)$$

と表される。ここで、まずこれらをモード展開する。ただし、閉弦では左回りモードと右回りモードは独立であるが振る舞い方は同様にして議論することができるため右回りモードに関する  $T_{--}, J_{-}$  の展開は省略する。R セクターのとき

$$T_{++}(\sigma^+) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n^{(R)} e^{-in\sigma^+} = 0, \quad (3.54)$$

$$L_n^{(R)} = \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-m}^M \alpha_m^N \eta_{MN} + \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(m + \frac{n}{2}\right) d_{-m}^M d_{n+m}^N \eta_{MN} = 0$$

$$J_+(\sigma^+) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_n^{(R)} e^{-in\sigma^+} = 0, \quad (3.55)$$

$$F_n^{(R)} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_{-m}^M d_{n+m}^N \eta_{MN} = 0$$

と、NS セクターのとき

$$T_{++}(\sigma^+) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n^{(NS)} e^{-in\sigma^+} = 0, \quad (3.56)$$

$$L_n^{(NS)} = \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-m}^M \alpha_m^N \eta_{MN} + \frac{1}{2} \sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} \left(r + \frac{n}{2}\right) b_{-m}^M b_{n+m}^N \eta_{MN} = 0$$

$$J_+(\sigma^+) = \sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} G_r^{(NS)} e^{-ir\sigma^+} = 0, \quad (3.57)$$

$$G_r^{(NS)} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_{-m}^M b_{r+m}^N \eta_{MN} = 0$$

と、展開される。そして前節と同様に背景時空の光円錐座標を用いて  $X^+$  および  $\psi_{\pm}^{\pm}$  の振動モードをもって超共形対称性を固定して上記の拘束条件を解くことで、 $X^-, \psi_{\pm}^{\pm}$  モードも  $X^I, \psi_{\pm}^I$  モードで展開されて独立なモードでなくなる。すなわち物理的に独立なモードは  $D-2$  個の  $X^I, \psi_{\pm}^I$  のモードである。この  $D-2$  個の  $\psi_{\pm}^I$  のモードの正準量子化条件は

$$\begin{aligned} \{\psi_A^I(\sigma), \psi_B^J(\sigma')\} &= 2\pi\delta^{IJ}\delta_{AB}\delta(\sigma - \sigma') \\ \Rightarrow \text{R: } \{d_m^I, d_n^J\} &= \{\tilde{d}_m^I, \tilde{d}_n^J\} = \delta^{IJ}\delta_{m+n,0}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\Rightarrow \text{NS: } \{b_r^I, b_s^J\} = \{\tilde{b}_r^I, \tilde{b}_s^J\} = \delta^{IJ}\delta_{r+s,0} \quad (3.59)$$

となる。 $X^I$  のモードの正準量子化条件は前節の (3.28) と同じである。これより、基底状態  $|0\rangle_{\text{R,NS}}$  は前節の  $\alpha_n^I, \tilde{\alpha}_n^I$  の条件 (3.29) に加えて、 $n, r > 0$  に対して

$$\text{R: } d_n^I |0\rangle_{\text{R}} = \tilde{d}_n^I |0\rangle_{\text{R}} = 0 \quad (3.60)$$

$$\text{NS: } b_r^I |0\rangle_{\text{NS}} = \tilde{b}_r^I |0\rangle_{\text{NS}} = 0 \quad (3.61)$$

を満たすように定義される。(開弦では  $\tilde{d}_n^I$  および  $\tilde{b}_r^I$  は独立なモードではない。) そして任意の物理的状態は上昇演算子  $(\alpha_n^I)^\dagger = \alpha_{-n}^I$ ,  $(\tilde{\alpha}_n^I)^\dagger = \tilde{\alpha}_{-n}^I$ ,  $(d_n^I)^\dagger = d_{-n}^I$ ,  $(\tilde{d}_n^I)^\dagger = \tilde{d}_{-n}^I$ ,  $(b_r^I)^\dagger = b_{-r}^I$ ,  $(\tilde{b}_r^I)^\dagger = \tilde{b}_{-r}^I$  を作用させることで得られる。ただし、Rセクターには  $d_0^I$  ( $\tilde{d}_0^I$ ) が存在して  $D-2$  次元 Clifford 代数と同じ構造を持ち、さらに  $d_0^I$  以外の全ての演算子と反可換であるため、Rセクターの基底状態は  $d_0^I$  によって構成される  $D-2$  次元のスピンの  $1/2$  のスピノルで背景時空フェルミオンであり、さらにRセクターの全ての状態は背景時空フェルミオンとなる。一方、NSセクター基底状態は一つで時空スカラーであるため、そこから作られる任意の状態は背景時空ボソンである。また、前節と同様に  $L_0, \tilde{L}_0$  に対する条件から

$$\begin{aligned} M_{(\text{R})}^2 &= 4 \sum_{I=2}^{D-1} \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m^I)^\dagger \alpha_m^I + 4 \sum_{I=2}^{D-1} \sum_{m=1}^{\infty} m (d_m^I)^\dagger d_m^I \\ &= 4 \sum_{I=2}^{D-1} \sum_{m=1}^{\infty} (\tilde{\alpha}_m^I)^\dagger \tilde{\alpha}_m^I + 4 \sum_{I=2}^{D-1} \sum_{m=1}^{\infty} m (\tilde{d}_m^I)^\dagger \tilde{d}_m^I \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} M_{(\text{NS})}^2 &= 4 \sum_{I=2}^{D-1} \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m^I)^\dagger \alpha_m^I + 4 \sum_{I=2}^{D-1} \sum_{r=1/2}^{\infty} r (b_r^I)^\dagger b_r^I - \frac{D-2}{4} \\ &= 4 \sum_{I=2}^{D-1} \sum_{m=1}^{\infty} (\tilde{\alpha}_m^I)^\dagger \tilde{\alpha}_m^I + 4 \sum_{I=2}^{D-1} \sum_{r=1/2}^{\infty} r (\tilde{b}_r^I)^\dagger \tilde{b}_r^I - \frac{D-2}{4} \end{aligned} \quad (3.63)$$

という関係を満たす必要がある。なお、NSセクターに現れる定数項は、量子化条件 (3.28) および (3.59) から得られる寄与である。一方、Rセクターに関しても量子化条件 (3.28) および (3.58) からの寄与がそれぞれあるが、それらが互いに打ち消しあい全体としては寄与しない。最後に、弦が埋め込まれる背景時空の対称性について考える。まず、前節と同様に背景時空の Poincaré 対称性、特に  $SO(1, D-1)$  Lorentz 対称性を要請すると背景時空が  $D=10$  次元でなければならない。実際このとき、開弦において、背景時空ボソンとなるNSセクターでは  $b_{-1/2}^I$  で一回だ

上げた第一励起モードの1階のベクトル場が0質量となり Lorentz 対称性が保たれる。なお、このとき NS セクターの真空  $|0\rangle_{\text{NS}}$  はタキオン状態である。一方、背景時空フェルミオンとなる R セクターのスピン 1/2 のスピノル真空  $|0\rangle_{\text{R}}$  は0質量となる。さらに、この 10 次元時空に超対称性を要請する。それは、境界条件の  $\sigma^0$  と  $\sigma^1$  の同等性を考慮して以下で定義する、背景時空ボソンを得る NS セクターの G パリティ演算子  $G_{\text{NS}}$  および背景時空フェルミオンを得る R セクターの G パリティ演算子  $G_{\text{R}}$  による Gliozzi-Scherk-Olive(GSO) 射影  $P_{\text{NS}} = (1 + G_{\text{NS}})/2$  および  $P_{\text{R}} = (1 \pm G_{\text{NS}})/2$  を行うことで実現される。G パリティ演算子  $G_{\text{NS}}$  および  $G_{\text{R}}$  をそれぞれ

$$G_{\text{NS}} \equiv (-1)^{F_{\text{NS}}+1}, \quad G_{\text{R}} \equiv \Gamma_{11}(-1)^{F_{\text{R}}} \quad (3.64)$$

と定義する。ここで、 $F_{\text{NS}}, F_{\text{R}}$  は世界面フェルミオン数を表しており、また  $\Gamma_{11}$  は 10 次元カイラリティを表している。この GSO 射影によって、NS セクターの真空  $|0\rangle_{\text{NS}}$  がプロジェクトアウトされて (光円錐ゲージ固定による)8 自由度のベクトル  $b_{-1/2}^I |0\rangle_{\text{NS}}$  (ゲージボソン) が GSO 射影後の基底状態で 0 質量となり、R セクターの真空  $|0\rangle_{\text{R}}$  は 10 次元スピノルの一方のカイラリティのみ GSO 射影で選ばれて (光円錐ゲージ固定による)8 自由度のスピノル (ゲージノ) が GSO 射影後の基底状態で 0 質量となる。さらに閉弦において、左回りモードと右回りモードに関して異なるカイラリティを選択することで IIA 型超弦理論が、同じカイラリティを選択することで IIB 型超弦理論が得られる。さらに、IIB 型超弦理論では超対称パートナーの 2 つのフェルミオンのカイラリティが同じであるため、そのフェルミオンが同一視されるとき特に  $\mathcal{N} = 1$  超対称性を持つ I 型超弦理論が得られる。また、IIA 型超弦理論の有効理論である IIA 型超重力理論は超対称パートナーの 2 つのフェルミオンのカイラリティが異なるため 11 次元  $\mathcal{N} = 1$  超重力理論から得ることができる。なお、11 次元  $\mathcal{N} = 1$  超重力理論は、超対称性持つことができる最大の理論である。他にも、閉弦の左回りモードと右回りモードが独立であることから、左回りモードに対して 26 次元の弦理論を採用して右回りモードに対して 10 次元の超弦理論を採用するヘテロティック弦理論というものがある。これらは互いに異なる理論であるが、ある種の双対関係で結びついており 11 次元超重力理論を含む M 理論 (膜理論) のある極限で得られると考えられている。以下では特に IIA 型/IIB 型超弦理論に注目する。閉弦は左回りモード-右回りモードとして、NS-NS セクター、NS-R/R-NS セクター、R-R セクターがあり、各モードの 0 質量状態について述べる。ただし、状態は光円錐ゲージ固定されており 8 次元である。

- NS-NS セクターの 0 質量状態は、前節と同様それぞれの 8 自由度のベクトルモードの直積から、2階の反対称テンソル場である 28 自由度の Kalb-Ramond 場 (B 場)、2階のトレース対称テンソル場である 35 自由度の重力場 (グラビトン)、トレース部分の 1 自由度のスカラー場 (ディラトン場) が得られる。
- NS-R/R-NS セクターの 0 質量状態は、NS セクターからの自由度のベクトルモードと R セクターからの一方のカイラリティをもつ 8 自由度のスピノル真空の直積から、56 自由度のスピン 3/2 のグラビトンの超対称パートナーグラビティーノと 8 自由度のスピン 1/2 のディラトンの超対称パートナーディラティーノが得られて、IIA (IIB) 型超弦理論では、NS-R と R-NS から得られるそれらのカイラリティが異なる (等しい)。

- R-R セクターの 0 質量状態は、IIA 型超弦理論からはカイラリティが異なる 8 自由度のスピンル真空の直積から、8 自由度の 1 形式ゲージ場 (D0-ブレーンおよび双対関係より D6-ブレーンと結合する) と 56 自由度の 3 形式ゲージ場 (D2-ブレーンおよび双対関係より D4-ブレーンと結合する) が得られる。IIB 型超弦理論からはカイラリティが等しい 8 自由度のスピンル真空の直積から、1 自由度の 0 形式となるスカラー (時間方向の広がりもない D(-1)-ブレーン (D-インスタントン) および双対関係より D7-ブレーンと結合する) と 28 自由度の 2 形式ゲージ場 (D1-ブレーンおよび双対関係より D5-ブレーンと結合する) と自己双対の 35 自由度の 4 形式ゲージ場 (D3-ブレーンと結合する) が得られる。

以上より、弦理論が量子論においても無矛盾でかつ安定な理論でありボソンとフェルミオンの両方を得るためには、超対称性をもつ 10 次元時空上を超弦が運動していることが要請される。これが超弦理論の帰結である。

### 3.3 コンパクト化と $T$ -双対性

前節より超弦理論では 10 次元時空が要請されることをみた。しかし、我々は 4 次元時空のみ観測できているため、観測されていない余剰な 6 次元空間は  $O(10^2) \sim O(10^{18})\text{GeV}$  のあるエネルギースケールでコンパクト化されていると考えられる。本節ではコンパクト化によってどのような特徴を持つのか議論する。その特徴を簡単に議論するために、ボソンのみが現れる 26 次元時空の弦理論に対して、25 番目の方向が半径  $R$  の円周  $S^1$  コンパクト化することを考える。このとき、閉弦はコンパクト空間方向に  $W \in \mathbb{Z}$  回巻き付くことができる。すなわち、弦の 25 番目の方向  $X^{25}$  は、

$$X^{25}(\sigma^1 + 2\pi) = X^{25}(\sigma^1) + 2\pi RW \quad (3.65)$$

を満たす。なお、コンパクト化されていない残りの 25 次元方向は周期境界条件 (3.12) を満たす。これより、 $\alpha_0^{25} = \tilde{\alpha}_0^{25} = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^{25}$  のみ

$$\alpha_0^{25} \rightarrow \alpha_0'^{25} = \alpha_0^{25} + \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} RW \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^{25} + \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} RW \\ &= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \frac{K}{R} + \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} RW \\ &= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p_L^{25}, \quad p_L^{25} \equiv p^{25} + \frac{RW}{\alpha'} = \frac{K}{R} + \frac{RW}{\alpha'} \\ \tilde{\alpha}_0^{25} \rightarrow \tilde{\alpha}_0'^{25} &= \tilde{\alpha}_0^{25} - \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} RW \quad (3.67) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^{25} - \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} RW \\ &= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \frac{K}{R} - \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} RW \\ &= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p_R^{25}, \quad p_R^{25} \equiv p^{25} - \frac{RW}{\alpha'} = \frac{K}{R} - \frac{RW}{\alpha'} \end{aligned}$$

と変更される。ただし、25 番目の方向が半径  $R$  でコンパクト化されていることより、25 番目の方向の運動量は

$$p^{25} = \frac{K}{R}, \quad (K \in \mathbb{Z}) \quad (3.68)$$

と量子化されている。ここで、 $K$  を Kaluza-Klein(K-K) 励起数という。これより、25 次元時空の静止エネルギーはコンパクト空間の寄与により

$$M^2 = (p_L^{25})^2 + \frac{4}{\alpha'} \left( \sum_{I=2}^{25} \sum_{m \neq 0} (\alpha_m^I)^\dagger \alpha_m^I - 1 \right) = (p_R^{25})^2 + \frac{4}{\alpha'} \left( \sum_{I=2}^{25} \sum_{m \neq 0} (\tilde{\alpha}_m^I)^\dagger \tilde{\alpha}_m^I - 1 \right) \quad (3.69)$$

と変更される。ここで、(3.69) および (3.66), (3.67) より、コンパクト空間  $S^1$  の半径  $R$  を  $\tilde{R} = \alpha'/R$  に変えて同時に巻き付き数  $W$  と K-K 励起数  $K$  を入れ替えた理論は物理的に等価であり、これによる物理的に等価な理論は  $T$ -双対の関係にあるという。すなわち、この  $T$ -双対変換のもとで

$$T : \alpha_0'^{25} \leftrightarrow \alpha_0^{25}, \quad \tilde{\alpha}_0'^{25} \leftrightarrow -\tilde{\alpha}_0^{25} \quad (3.70)$$

さらには

$$T : X_L^{25}(\sigma^+) \leftrightarrow X_L^{25}(\sigma^+), \quad X_R^{25}(\sigma^-) \leftrightarrow -X_R^{25}(\sigma^-) \quad (3.71)$$

と移り変わる理論が  $T$ -双対関係にある理論である。これにより、小さい半径を持つ理論はその逆数に比例した大きな半径を持つ理論と物理的に等価であることがわかる。また、開弦についての  $T$ -双対変換を (3.70) および (3.71) として考えると、(3.18),(3.21) よりコンパクト空間方向である 25 番目の方向の Neumann 条件 ( $\partial_1 X^{25} = 0$ ) と Dirichlet 条件 ( $\partial_0 X^{25} = 0$ ) が入れ替わり、これに伴って D-ブレーンの次元が 1 変わる。これらの議論は超弦理論にも当てはまり、(3.71) 同様に世界面フェルミオンの左回りモード  $\psi_+^9$  は変化せず右回りモード  $\psi_-^9$  が  $-1$  倍されるとき、ボソンは前述と同様でフェルミオンのカイラリティも変わるため、IIA 型超弦理論と IIB 型超弦理論が  $T$ -双対関係にあることもわかる。

### 3.4 D-ブレーンモデル

本節では、超弦が結合する D-ブレーンについてもう少し掘り下げる。D $p$ -ブレーンは、開弦の端点が動ける  $p+1$  次元時空に広がったオブジェクトである (すなわち、10 次元時空中の  $p+1$  次元方向は自由端条件の Neumann 条件が課されていて残りの  $9-p$  次元方向は固定端条件の Dirichlet 条件が課されている) が、これは超重力理論のソリトン解として得られて、 $p$  が偶数のとき IIA 型の閉弦の R-R セクターが結合して  $p$  が奇数のとき IIB 型の閉弦の R-R セクターが結合する。ここでは特に、超弦理論から超対称標準模型を含む理論を得るために複数の D-ブレーンが存在するとき、開弦から何が得られるか議論する。

まず、一枚の D-ブレーン上に端点を持つ開弦による 0 質量モードは  $U(1)$  ゲージベクトルボソンおよび Majorana-Weyl ゲージノが得られて、超対称  $U(1)$  ゲージ理論が得られる。また、離れた位置に平行にある D-ブレーンに端点を持つ開弦モードはその距離に依存した質量を持つ。このときは超対称  $U(1) \times U(1)$  ゲージ理論が得られる。逆に同じ位置に異なる平行 D-ブレーンがあるとき、その異なる D-ブレーン間の開弦から得られるベクトルボソンおよび Majorana-Weyl フェルミオンが 0 質量となる。この開弦はその両端がそれぞれどのブレーン上にあるかで区別される (Chan-Paton 因子)。一般に  $N$  枚の平行 D-ブレーンが同じ位置にあるとき、 $N^2$  の自由度を持つゲージベクトルボソンと Majorana-Weyl ゲージノが得られて、超対称  $U(N)$  ゲージ理論が得られる。これより、平行 D-ブレーン位置 A に 3 枚、位置 B に 2 枚、位置 C に 1 枚設置したとき、超対称  $U(3) \times U(2) \times U(1)$  ゲージ理論が得られるが、これらのゲージ群のもとで基本表現で変換する物質を構成するカイラルフェルミオンを得ることができない。そこで、D-ブレーンが交差している場合の開弦について議論する。また、別のアプローチを用いて  $T$ -双対変換して D-ブレーンが交差する場合に対応する magnetized D-ブレーンモデルについても議論する。

#### 3.4.1 交差 D-ブレーンモデル

本節では、10 次元時空  $\mathbb{R}^{1,9} \simeq \mathbb{R}^{1,3} \times \mathbb{R}_1^2 \times \mathbb{R}_2^2 \times \mathbb{R}_3^2$  のうち、4 次元時空と各  $\mathbb{R}_i^2 (i = 1, 2, 3)$  に 1 次元ずつ広がっている  $N_a$  枚の平行 D $6_a$ -ブレーンと  $N_b$  枚の平行 D $6_b$ -ブレーンが各  $\mathbb{R}_i^2$  において  $|\theta_i|$  で交差している IIA 型超弦理論の交差 D-ブレーンモデルを考えて、その交差しているブ

レーン間の開弦について議論する。開弦の始点 ( $\sigma^1 = 0$ ) は、4次元時空方向と  $X^{2i+2}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 方向に対して Neumann 条件をとり  $X^{2i+3}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 方向に対して Dirichlet 条件をとる D6<sub>a</sub>-ブレーン上にあり、開弦の終点 ( $\sigma^1 = \pi$ ) は、4次元時空方向と  $\cos \theta_i X^{2i+2} + \sin \theta_i X^{2i+3}$  方向に対して Neumann 条件をとり  $-\sin \theta_i X^{2i+2} + \cos \theta_i X^{2i+3}$  方向に対して Dirichlet 条件をとる D6<sub>b</sub>-ブレーン上にあるとする。すなわち、

$$\partial_1 X^{2i+2} \Big|_{\sigma^1=0} = 0, \partial_0 X^{2i+3} \Big|_{\sigma^1=0} = 0 \quad (3.72)$$

$$(\cos \theta_i \partial_1 X^{2i+2} + \sin \theta_i \partial_1 X^{2i+3}) \Big|_{\sigma^1=\pi} = 0, (-\sin \theta_i \partial_0 X^{2i+2} + \cos \theta_i \partial_0 X^{2i+3}) \Big|_{\sigma^1=\pi} = 0 \quad (3.73)$$

が成り立つ。さらに複素場  $Z^i = X^{2i+2} + iX^{2i+3}$  を導入すると、上記の境界条件は

$$\partial_1 (\operatorname{Re} Z^i) \Big|_{\sigma^1=0} = 0, \partial_0 (\operatorname{Im} Z^i) \Big|_{\sigma^1=0} = 0 \quad (3.74)$$

$$\partial_1 [\operatorname{Re} (e^{i\theta_i} Z^i)] \Big|_{\sigma^1=\pi} = 0, \partial_0 [\operatorname{Im} (e^{i\theta_i} Z^i)] \Big|_{\sigma^1=\pi} = 0 \quad (3.75)$$

と表せる。よって  $e^{i\frac{\theta_i}{\pi}\sigma^1} Z^i$  の実部が Neumann 条件を満たし、虚部が Dirichlet 条件を満たす。これより、Fourier 展開モードが  $n \rightarrow n - \theta_i/\pi$  だけずれて交差部に局在する。複素共役場  $\bar{Z}^i = X^{2i+2} - iX^{2i+3}$  の Fourier 展開モードは  $n \rightarrow n + \theta_i/\pi$  だけずれる。世界面超対称パートナー  $F^i = \psi^{2i+2} + i\psi^{2i+3}$  ( $\bar{F}^i = \psi^{2i+2} - i\psi^{2i+3}$ ) も同様に  $-\theta_i/\pi$  ( $\theta_i/\pi$ ) だけずれる。このずれに伴い、量子化により現れる定数項も変わり得るが、R セクターでは変更後も打ち消し合い全体としては影響を受けず、基底状態は 0 質量である。ただし、 $d_0^i = d_0^{2i+2} + id_0^{2i+3}$ ,  $\bar{d}_0^i = d_0^{2i+2} - id_0^{2i+3}$  は昇降演算子となり、各  $\mathbb{R}_i^2$  においてそれぞれどちらかのカイラリティだけが基底状態となる。また、GSO 射影より 10 次元時空全体のカイラリティも決まっているため、4次元時空  $\mathbb{R}^{1,3}$  のどちらかのカイラリティを持つフェルミオンだけが 0 質量で得られる。一方、NS セクターでは定数寄与は  $1/2 \rightarrow 1/2 - \sum |\theta_i|/(2\pi)$  となり、基底状態の 10 次元ベクトルの質量は交差角度に依存する。そして改めて基底状態となる質量が 0 質量となる時、4次元で超対称性を保ち安定に存在する。なお、基底状態となるのは交差する 6 次元方向のベクトル、すなわち 4次元スカラーであり、この基底状態が 0 質量のとき、4次元のベクトルは正の質量をもち、残るゲージ対称性は、 $U(N_a) \times U(N_b)$  ゲージ対称性である。これらの開弦モードは、 $U(N_a) \times U(N_b)$  ゲージ群のもとで  $(N_a, \bar{N}_b)$  表現となる。例えば、表 1.1 の粒子に加えて右巻きニュートリノを導入し右巻き粒子にも  $SU(2)_R$  ゲージ対称性を課しそれを超対称化した模型 (模型 A) の粒子、すなわち  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$  up to  $U(1)$  ゲージ群のもとで基本表現で変換する 4次元カイラルフェルミオンおよび超対称パートナーとなる 4次元スカラーは、D6-ブレーンを図 3.1 のように配置することで得られる<sup>2</sup>

<sup>2</sup>標準模型を超対称化した (最小) 超対称標準模型においては、アップクォークタイプとダウンクォークタイプに質量を与えるためにはそれぞれアップタイプヒッグス場とダウンタイプヒッグス場と、異なるヒッグス場との湯川結合によって与えられる。そしてこの 2つのヒッグス場は  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$  のもとでは  $(1, 2, 2)$  表現としてまとめられる。



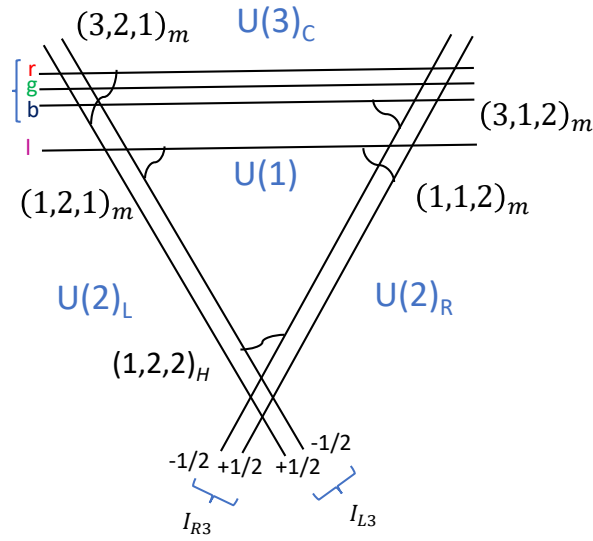


図 3.1: 交差 D-ブレーン  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$  up to  $U(1)$  模型 (模型 A) を示す。  $U(3)_C$  D-ブレーンと  $U(2)_L(U(2)_R)$  D-ブレーンの交差部から  $(3, 2, 1)$  表現 ( $(3, 1, 2)$  表現) の左巻き (右巻き) クォークおよび超対称スカラー場のスクォーク、  $U(1)$  D-ブレーンと  $U(2)_L(U(2)_R)$  D-ブレーンの交差部から  $(1, 2, 1)$  表現 ( $(1, 1, 2)$  表現) の左巻き (右巻き) レプトンおよび超対称スカラー場のスレプトン、  $U(2)_L$  D-ブレーンと  $U(2)_R$  D-ブレーンの交差部から  $(1, 2, 2)$  表現のアップタイプヒッグスボソンとダウンタイプヒッグスボソンを与えるヒッグススカラー場およびその超対称フェルミオンのヒッグシーノが得られる。

図 3.1 のように、  $U(3)_C$  D-ブレーンと  $U(2)_L(U(2)_R)$  D-ブレーンの交差部から  $(3, 2, 1)$  表現 ( $(3, 1, 2)$  表現) の左巻き (右巻き) クォークおよび超対称スカラー場のスクォークが、  $U(1)$  D-ブレーンと  $U(2)_L(U(2)_R)$  D-ブレーンの交差部から  $(1, 2, 1)$  表現 ( $(1, 1, 2)$  表現) の左巻き (右巻き) レプトンおよび超対称スカラー場のスレプトンが、  $U(2)_L$  D-ブレーンと  $U(2)_R$  D-ブレーンの交差部から  $(1, 2, 2)$  表現のアップタイプヒッグスボソンとダウンタイプヒッグスボソンを与えるヒッグススカラー場およびその超対称フェルミオンのヒッグシーノが得られる。また、6次元空間はコンパクト空間である必要があるため、例えば  $\mathbb{R}_i^2 \rightarrow T_i^2$  とする必要がある。このとき、D-ブレーンがコンパクト空間上に巻き付き、例えば図 3.2 のようにうまくカイラルフェルミオンを与える D-ブレーンが 3 回交差するとき、同じ表現を持つ 3 世代の 4 次元カイラルフェルミオン (および超対称 4 次元スカラー場) を得ることができる。(ただし、この交差 D ブレーン模型は toy-model である。)

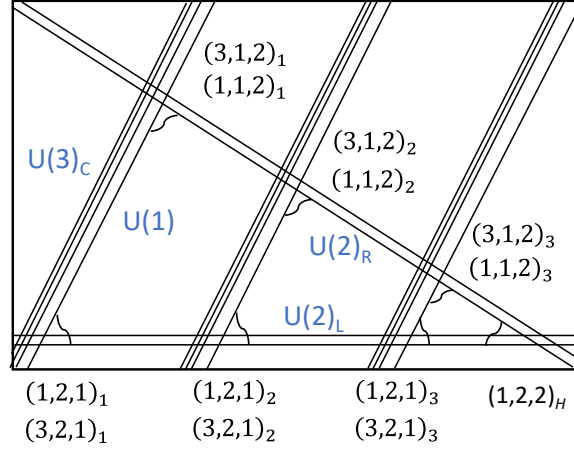


図 3.2: 3世代カイラルフェルミオンが現れるコンパクト空間に巻き付く交差 D-ブレーン  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$  up to  $U(1)$  模型 (模型 A) を示す。各表現の下付き添え字 ( $i = 1, 2, 3$ ) は第  $i$  世代のカイラルフェルミオンおよび超対称スカラーを表す。

### 3.4.2 Magnetized D-ブレーンモデル

本節では、10次元時空  $\mathbb{R}^{1,9} \simeq \mathbb{R}^{1,3} \times T_1^2 \times T_2^2 \times T_3^2$  全体に広がる D9-ブレーンのコンパクト空間方向に異なる一様 magnetic flux  $F^a = dA^a$  と  $F^b = dA^b$  を入れて区別された  $D9_a$ -ブレーンと  $D9_b$ -ブレーンが重なっている IIB 型超弦理論の magnetized D-ブレーンモデルを考えて、その異なる D-ブレーンに接続する開弦について議論する。開弦と D-ブレーン上の一様 magnetic flux を与えるゲージ場  $A_k^{a,b} = 1/2 F_{jk}^{a,b} X^j$  との相互作用を含めた作用

$$S_M = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \eta^{\alpha\beta} \delta_{jk} \partial_\alpha X^j \partial_\beta X^k + \frac{1}{2} \int d\sigma^0 F_{jk}^{a,b} X^j \partial_0 X^k \Big|_{\sigma^1=0} - \frac{1}{2} \int d\sigma^0 F_{jk}^{a,b} X^j \partial_0 X^k \Big|_{\sigma^1=\pi} \quad (3.76)$$

を考えると、境界条件は

$$(\partial_1 X^j - 2\pi\alpha' F_{jk}^a \partial_0 X^k) \Big|_{\sigma^1=0} = 0, \quad (\partial_1 X^j + 2\pi\alpha' F_{jk}^b \partial_0 X^k) \Big|_{\sigma^1=\pi} = 0 \quad (3.77)$$

となる。ここで、 $j, k = 2i + 2, 2i + 3$  ( $i = 1, 2, 3$ ) として、 $D9_a$ -ブレーンの magnetic flux を  $2\pi\alpha' F_{(2i+2)(2i+3)}^a = 0$ 、 $D9_b$ -ブレーンの magnetic flux を  $2\pi\alpha' F_{(2i+2)(2i+3)}^b = \tan \theta_i$  とすると、

$$\partial_1 X^{2i+2} \Big|_{\sigma^1=0} = 0, \quad \partial_1 X^{2i+3} \Big|_{\sigma^1=0} = 0 \quad (3.78)$$

$$(\cos \theta_i \partial_1 X^{2i+2} + \sin \theta_i \partial_0 X^{2i+3}) \Big|_{\sigma^1=\pi} = 0, \quad (\cos \theta_i \partial_1 X^{2i+3} - \sin \theta_i \partial_0 X^{2i+2}) \Big|_{\sigma^1=\pi} = 0 \quad (3.79)$$

となる。さらに  $X^{2i+3}$  方向に対して  $T$ -双対変換を行うと  $\partial_1 X^{2i+3} \leftrightarrow \partial_0 X^{2i+3}$  となり、(3.78),(3.79) は前節で議論した IIA 型超弦理論の交差 D-ブレーンモデルの (3.72),(3.73) に対応することがわかる。

次章以降では、IIB 型超弦理論の magnetized D9-ブレーンモデルの有効理論として得られる場の理論を用いて、前節で見たモデル A のような標準模型を含むモデルを扱い、クォークの質量比および CKM 行列の数値解析を行う。

## 第4章 フラックスコンパクト化

本章および次章では、IIB 型超弦理論の magnetized D9-ブレーンモデルの有効理論として得られる場の理論を用いて具体的に波動関数を求めて湯川結合を計算して、前章のモデル A のような標準模型を含むモデルに対して特に次章でクォークの質量比および CKM 行列の数値解析を行う。IIB 型超弦理論の magnetized D9-ブレーンモデルの有効理論として得られる場の理論として、10 次元  $\mathcal{N} = 1$  超対称性をもつ非可換ゲージ場の理論 (Super Yang-Mills 理論)

$$S_{SYM} = \int d^{10}X \left[ -\frac{1}{4g^2} \text{Tr}\{F^{MN}(X)F_{MN}(X)\} + \frac{i}{2g^2} \text{Tr}\{\bar{\lambda}(X)\Gamma^M D_M \lambda(X)\} \right]$$

$$F_{MN}(X) = \partial_M A_N(X) - \partial_N A_M - i[A_M(X), A_N(X)] \quad (4.1)$$

$$D_M \lambda(X) = \partial_M \lambda(X) - i[A_M(X), \lambda(X)] \quad (M, N = 0, \dots, 9)$$

を用いる。この 10 次元時空  $X^M (M = 0, \dots, 9)$  を 4 次元時空  $x^\mu (\mu = 0, \dots, 3)$  と 6 次元空間  $y^i (i = 4, \dots, 9)$  に分解すると、10 次元スピノル場  $\lambda(X)$  および 10 次元ベクトル場  $A_M(X)$  はそれぞれ

$$\lambda(x, y) = \sum_n \lambda_n(x) \otimes \lambda_n(y) \quad (4.2)$$

$$A_i(x, y) = \sum_n A_{n,\mu}(x) \otimes A_{n,\mu}(y) \quad (4.3)$$

と分解される (=Kaluza-Klein(KK) 分解)。さらに、ゲージベクトル場のコンパクト空間方向 (すなわち 4 次元時空スカラー) でかつゲージ群の対角成分方向に magnetic flux を入れることで複数世代のカイラルな理論が得られる。なお、6 次元コンパクト空間上の波動関数はそれぞれ

$$i\gamma^i D_{6,i} \lambda_n(y) = m_n \lambda_n(y) \quad (4.4)$$

$$\Delta_6 A_{n,i}(y) = M_{n,\mu}^2 A_{n,i}(y) \quad (4.5)$$

を満たす規格化された固有関数とする。ここで、各微分演算子は magnetic flux を与えるゲージ場を用いた共偏微分で与えられる。このとき、特にスピノル場に関しては、

$$S_\lambda = \int d^4x d^6y \frac{1}{2g^2} \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x, y) (i\gamma^\mu D_{4,\mu} + i\gamma^i D_{6,i} + \gamma^i A'_i(x, y)) \lambda(x, y) \} \quad (4.6)$$

$$= \int d^4x \frac{1}{2g^2} \sum_n \{ \bar{\lambda}_n^a(x) (i\gamma^\mu D_{4,\mu} + m_n) \lambda_n^a(x) + Y \bar{\lambda}_n^a(x) A_i^b(x) \lambda_n^c(x) f_{abc} \}$$

のように、対角成分に入った magnetic flux を与える 4次元スカラーのゲージ場との相互作用による固有値  $m_n$  が 4次元スピノル場  $\lambda_n(x)$  の質量として振る舞い、一方ゲージ群の非対角成分の 4次元スカラーとなるゲージ場  $A_i^a$  との相互作用により、4次元で湯川結合となり、コンパクト空間方向の積分

$$Y = \int d^6 y \lambda_n^{a\dagger}(y) \gamma^i A_i^b(y) \lambda_n^c(y) f_{abc} \quad (4.7)$$

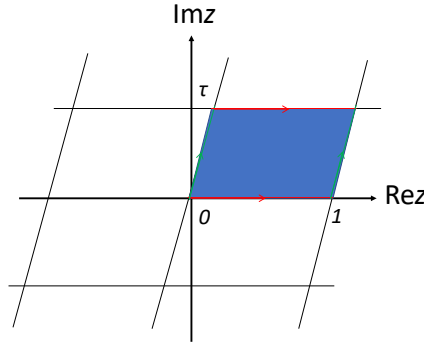
より湯川結合係数  $Y$  が与えられる。ただし、添え字  $a, b, c$  はゲージ群の生成子の方向を表しており、 $f_{abc}$  はそのゲージ群の構造定数とする。ただし、質量はコンパクト空間のエネルギースケールを持つため、4次元時空上の標準模型などを再現する場合は基底状態  $\lambda_0$  にのみ着目する(以後添え字 0 は省略する)。以下では、様々なコンパクト空間に対してこの基底状態の波動関数を求めて湯川結合定数を計算する。ただし、解析可能な 6次元コンパクト空間としてシンプルな 6次元トーラス  $T^6 \simeq T^2 \times T^2 \times T^2$  を出発点として、特に 1つの 2次元トーラス  $T^2$  に着目して議論する。その 2次元トーラス  $T^2$  を起点にいくつかの解析可能な 2次元コンパクト化を考えて、次章で超対称標準模型を含むモデルがコンパクト空間の変形に伴ってどのように変化するかを議論する。また、トーラスはモジュライ対称性という幾何学的対称性を持っており、その幾何学的な変形に伴って波動関数がどのように変化するかを議論する。

## 4.1 $T^2$ フラックスコンパクト化

### 4.1.1 $T^2$ 上の波動関数と湯川結合定数

まずはじめに、単純な 2次元トーラス  $T^2$  コンパクト化について議論する。主に [8] に基づいている。

2次元トーラス  $T^2$  は、図 4.1 のように複素平面  $\mathbb{C}$  を 2次元格子  $\Lambda = \{\sum_{i=1}^2 n_i e_i | n_i \in \mathbb{Z}\}$  (複素平面上で独立な 2つの格子ベクトル  $e_i$  で生成される点 (格子点) の集合) で同一視することで生成される ( $T^2 \simeq \mathbb{C}/\Lambda$ )。すわなち  $T^2$  は格子の並進対称性を持つ。格子ベクトルの 1つを複素平面の実軸の単位ベクトル  $e_1 = 1$  に採る。もう一方の独立な格子ベクトルを複素パラメータ  $\tau$  の方向  $e_2 = \tau$  に採る。ここで、複素パラメータ  $\tau = \frac{e_2}{e_1}$  ( $\text{Im}\tau > 0$ ) をモジュライパラメータと呼ぶ。これらの双対 1形式を  $dy^i(e_j) = \delta_j^i$  で定義する。さらに複素座標  $z$  を  $dz = dy^1 + \tau dy^2$  で定義する。

図 4.1:  $T^2 \simeq \mathbb{C}/\Lambda$ 

$T^2$  の計量は

$$ds^2 = g_{ij}dy^i dy^j = 2h_{\mu\nu}dz^\mu d\bar{z}^\nu \quad (4.8)$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & \operatorname{Re}\tau \\ \operatorname{Re}\tau & |\tau|^2 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

となり、 $T^2$  全域で平坦であり  $T^2$  の面積  $\mathcal{A}$  は  $\mathcal{A} = \operatorname{Im}\tau$  となる。ただし、全体の大きさを  $2\pi R = 1$  とする。これに伴い、2次元 Clifford 代数  $\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\delta^{ab}$  ( $a, b = 1, 2$ ) を満たす

$$\gamma^1 = \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

から  $\{\gamma^z, \gamma^{\bar{z}}\} = 2h^{z\bar{z}}$  となるような  $\gamma^z, \gamma^{\bar{z}}$  を導く。ただし、 $h^{z\bar{z}}$  は  $h_{z\bar{z}}$  の逆行列である。そのために、2次元直交座標系から2次元格子ベクトルで張られる座標系に射影する2脚場  $e_i^a$  を  $g_{ij} = e_i^a e_j^b \delta_{ab}$  を満たすように、さらにその2次元格子ベクトルで張られる座標系から  $z$  で張れる複素座標系に射影する2脚場  $f_\mu^i$  を  $h_{\mu\nu} = f_\mu^i f_\nu^j g_{ij}$  を満たすように、それぞれ導入すると以下のように得られる。

$$e = \begin{pmatrix} 1 & \operatorname{Re}\tau \\ 0 & \operatorname{Im}\tau \end{pmatrix}, \quad f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 1 & \bar{\tau} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

このとき、 $\gamma^z \equiv (f^{-1})_i^z (e^{-1})_a^i \gamma^a$ ,  $\gamma^{\bar{z}} \equiv (f^{-1})_j^{\bar{z}} (e^{-1})_b^j \gamma^b$  で定義される

$$\gamma^z = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{\bar{z}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

を導入することで  $\{\gamma^z, \gamma^{\bar{z}}\} = 2h^{z\bar{z}}$  が満たされる。

さて、この  $T^2$  上に  $U(N)$  ゲージ場の対角方向に以下のような一様 magnetic flux

$$\int_{T^2} F = \begin{pmatrix} 2\pi M_a \mathbb{I}_{N_a} & \\ & 2\pi M_b \mathbb{I}_{N_b} \end{pmatrix}, \quad N_a + N_b = N, \quad M_{a,b} \in \mathbb{Z} \text{ (ディラックの量子化条件)} \quad (4.13)$$

が入るとき、 $U(N)$  ゲージ対称性は  $U(N_a) \times U(N_b)$  ゲージ対称性に破れる<sup>1</sup>。この magnetic flux を与えるゲージ場の強さ  $F$  は

$$\begin{aligned} F(z, \bar{z}) &= F_{z\bar{z}} dz \wedge d\bar{z} \\ &= \frac{2\pi}{\text{Im}\tau} \begin{pmatrix} M_a \mathbb{I}_{N_a} & \\ & M_b \mathbb{I}_{N_b} \end{pmatrix} \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} \\ &= \frac{2\pi M_i}{\text{Im}\tau} \mathbb{I}_{N_i} \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} \end{aligned} \quad (4.14)$$

となる。これを導くゲージ場  $A$  は、 $F = dA$  から

$$\begin{aligned} A(z, \bar{z}) &= A_z dz + A_{\bar{z}} d\bar{z} \\ &= -\frac{i}{4} \frac{2\pi M_i}{\text{Im}\tau} (\bar{z} + \bar{\zeta}) \mathbb{I}_{N_i} dz + \frac{i}{4} \frac{2\pi M_i}{\text{Im}\tau} (z + \zeta) \mathbb{I}_{N_i} d\bar{z} \\ &= \frac{2\pi M_i}{2\text{Im}\tau} \text{Im}((\bar{z} + \bar{\zeta}) dz) \mathbb{I}_{N_i} \end{aligned} \quad (4.15)$$

となる。ただし、一般には同じ場の強さ (4.14) を与える定数のゲージ自由度 Wilson line  $\zeta$  が入るが、以下の議論では Wilson line が入っていない  $\zeta = 0$  の状況で考える。なお、以下の議論において Wilson line  $\zeta$  が入る場合は  $z \rightarrow z + \zeta$  とずらせば良い。(これは対角方向のゲージ場であり、 $SU(N)$  の非対角成分のゲージ場については後に議論する。) このゲージ場  $A$  は、格子の並進に伴って以下のようにゲージ変換される。

$$A(z+1) = A(z) + d \left( \frac{2\pi M_i}{2\text{Im}\tau} \text{Im}z \right) \mathbb{I}_{N_i} = A(z) + d\chi_1^i(z) \mathbb{I}_{N_i} \quad (4.16)$$

$$A(z+\tau) = A(z) + d \left( \frac{2\pi M_i}{2\text{Im}\tau} \text{Im}\bar{\tau}z \right) \mathbb{I}_{N_i} = A(z) + d\chi_2^i(z) \mathbb{I}_{N_i} \quad (4.17)$$

また、共偏微分は

$$\begin{aligned} D &= d - iA \\ D_z dz + \bar{D}_{\bar{z}} d\bar{z} &= (\partial_z - iA_z) dz + (\partial_{\bar{z}} - iA_{\bar{z}}) d\bar{z} \\ &= \left( \partial_z - \frac{\pi M_i}{2\text{Im}\tau} \bar{z} \mathbb{I}_{N_i} \right) dz + \left( \partial_{\bar{z}} + \frac{\pi M_i}{2\text{Im}\tau} z \mathbb{I}_{N_i} \right) d\bar{z} \end{aligned} \quad (4.18)$$

<sup>1</sup> $U(N) \simeq U(1) \times SU(N)$  としたときの  $U(1)$  は  $SU(N)$  全体に共通する  $U(1)$  であり、異なる magnetic flux  $M_{a,b}$  ( $M_a \neq M_b$ ) が入るときは  $SU(N)$  の対角化された (Cartan 部分代数の基底の) 方向にも magnetic flux が入っていることになる。これにより、

$$U(N) \simeq U(1) \times SU(N) \rightarrow U(1)_a \times SU(N_a) \times U(1)_b \times SU(N_b) \simeq U(N_a) \times U(N_b)$$

となる。

で与えられて、 $U(N)$  ゲージノの  $T^2$  上の場

$$\psi(z, \bar{z}) = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}, \quad \psi_{\pm} = \begin{pmatrix} \lambda_{\pm}^{aa} & \lambda_{\pm}^{ab} \\ \lambda_{\pm}^{ba} & \lambda_{\pm}^{bb} \end{pmatrix} \quad (\psi_- = \psi_+^{\dagger}) \quad (4.19)$$

のゼロモード Dirac 方程式は

$$\begin{aligned} i(\gamma^z D_z + \gamma^{\bar{z}} \bar{D}_{\bar{z}})\psi(z, \bar{z}) &= 2i \begin{pmatrix} 0 & \partial_z - iA_z \\ \partial_{\bar{z}} - iA_{\bar{z}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = 0 \quad (4.20) \\ iD\psi_+ \equiv 2i(\partial_{\bar{z}}\psi_+ - i[A_{\bar{z}}, \psi_+]) &= 2i \begin{pmatrix} \partial_{\bar{z}}\lambda_+^{aa} & (\partial_{\bar{z}} + \frac{\pi M}{2\text{Im}\tau}z)\lambda_+^{ab} \\ (\partial_{\bar{z}} - \frac{\pi M}{2\text{Im}\tau}z)\lambda_+^{ba} & \partial_{\bar{z}}\lambda_+^{bb} \end{pmatrix} = 0 \\ -iD^{\dagger}\psi_- \equiv 2i(\partial_z\psi_- - i[A_z, \psi_-]) &= 2i \begin{pmatrix} \partial_z\lambda_-^{aa} & (\partial_z - \frac{\pi M}{2\text{Im}\tau}z)\lambda_-^{ab} \\ (\partial_z + \frac{\pi M}{2\text{Im}\tau}z)\lambda_-^{ba} & \partial_z\lambda_-^{bb} \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

となる。ただし、 $M = M_a - M_b$  とする。ここで、境界条件は (4.16), (4.17) と整合する必要がある。破れずに残る  $U(N_{a,b})$  対称性のゲージノ  $\lambda_{\pm}^{aa,bb}$  ( $\lambda_{\pm}^{aa,bb}$ ) は周期境界条件

$$\lambda^{aa,bb}(z+1) = \lambda^{aa,bb}(z), \quad \lambda^{aa,bb}(z+\tau) = \lambda^{aa,bb}(z) \quad (4.21)$$

を満たす (反) 正則関数となり、 $T^2$  上で定数場となる。一方、 $\lambda^{ab}(\lambda^{ba})$  は  $U(N_a) \times U(N_b)$  のもとで  $(N_a, \bar{N}_b)$  表現 ( $(\bar{N}_a, N_b)$  表現) であり、 $M = M_a - M_b$  より  $\chi(z) = \chi^a(z) - \chi^b(z)$  を用いて境界条件は

$$\lambda^{ab}(z+1) = e^{i\chi_1(z)}\lambda^{ab}(z), \quad \lambda^{ab}(z+\tau) = e^{i\chi_2(z)}\lambda^{ab}(z) \quad (4.22)$$

$$\lambda^{ba}(z+1) = e^{-i\chi_1(z)}\lambda^{ba}(z), \quad \lambda^{ba}(z+\tau) = e^{-i\chi_2(z)}\lambda^{ba}(z) \quad (4.23)$$

となり、方程式 (4.20) の解は  $M$  が正 (負) のとき  $\lambda_+^{ab}$  と  $\lambda_-^{ba} = \overline{\lambda_+^{ab}}$  ( $\lambda_+^{ba}$  と  $\lambda_-^{ab} = \overline{\lambda_+^{ba}}$ ) のみ解となり  $|M|$  個の独立な解

$$\begin{aligned} \psi_{T^2}^{j,|M|}(z, \bar{z}) &= \mathcal{N}^{j,|M|} e^{-\frac{\pi|M|}{2\text{Im}\tau}|z|^2} e^{\frac{\pi|M|}{2\text{Im}\tau}z^2} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{j}{|M|} \\ 0 \end{bmatrix} (|M|z, |M|\tau) \\ &\equiv \mathcal{N}^{j,|M|} e^{-\frac{\pi|M|}{2\text{Im}\tau}|z|^2} g^{j,|M|}(z) \end{aligned} \quad (4.24)$$

が得られる。ここで、 $j = 0, \dots, |M| - 1$  とする。これより、 $|M|$  世代のカイラルフェルミオンが得られる<sup>2</sup>。ここで Jacobi の  $\theta$ -関数

$$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (\nu, \tau) = \sum_{l \in \mathbf{Z}} e^{\pi i(a+l)^2 \tau} e^{2\pi i(a+l)(\nu+b)} \quad (4.25)$$

<sup>2</sup>10次元時空中におけるカイラリティが決められているため、6次元空間を構成する各  $T^2$  のカイラリティが決まることで4次元時空中におけるカイラリティも決まる。



を用いている。 $N^{j,|M|}$  は規格化因子であり規格化を

$$\int_{T^2} dz d\bar{z} \phi_{T^2}^{j,|M|} \overline{\phi_{T^2}^{j,|M|}} = \delta_{jk} \quad (4.26)$$

とすると

$$\mathcal{N}^{j,|M|} = \left( \frac{2|M|\text{Im}\tau}{\mathcal{A}^2} \right)^{1/4} \quad (4.27)$$

が得られる。この波動関数は

$$\psi_{T^2}^{j,|M|}(-z) = \psi_{T^2}^{|M|-j,|M|}(z) \quad (4.28)$$

を満たす。また、 $z$  の正則関数を  $g^{j,|M|}(z)$  と定義した。この Dirac 方程式の解は以下も満たす。

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \mathcal{D}^\dagger \mathcal{D} & 0 \\ 0 & \mathcal{D} \mathcal{D}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = 0 \\ & \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\{\mathcal{D}^\dagger, \mathcal{D}\} + \frac{1}{2}[\mathcal{D}^\dagger, \mathcal{D}] & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\{\mathcal{D}^\dagger, \mathcal{D}\} - \frac{1}{2}[\mathcal{D}^\dagger, \mathcal{D}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = 0 \\ & \begin{pmatrix} \Delta + 2iF_{z\bar{z}} & 0 \\ 0 & \Delta - 2iF_{z\bar{z}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = 0 \\ & \begin{pmatrix} \Delta \lambda_{\pm}^{aa} & \left(\Delta - \frac{2\pi|M|}{\mathcal{A}}\right) \lambda_{\pm}^{ab} \\ \left(\Delta - \frac{2\pi|M|}{\mathcal{A}}\right) \lambda_{\pm}^{ba} & \Delta \lambda_{\pm}^{bb} \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

ここで、 $\Delta$  はラプラシアンである。ゆえに、波動関数  $\psi_{T^2}^{j,|M|}$  は

$$\Delta \phi_{T^2}^{j,|M|}(z, \bar{z}) = m^2 \phi_{T^2}^{j,|M|}(z, \bar{z}) \quad (4.30)$$

$$m^2 = \frac{2\pi|M|}{\mathcal{A}}, \quad \phi_{T^2}^{j,|M|}(z, \bar{z}) = \psi_{T^2}^{j,|M|}(z, \bar{z}) \quad (4.31)$$

と、質量の 2 乗が  $m^2 = \frac{2\pi|M|}{\mathcal{A}}$  となるスカラー場が満たす Klein-Gordon 方程式の固有関数にもなっている。なお、(4.31) は基底状態であるが、

$$[\mathcal{D}^\dagger \mathcal{D}, \mathcal{D}^\dagger] = \frac{4\pi|M|}{\mathcal{A}} \mathcal{D}^\dagger, \quad [\mathcal{D}^\dagger \mathcal{D}, \mathcal{D}] = -\frac{4\pi|M|}{\mathcal{A}} \mathcal{D} \quad (4.32)$$

を満たすため

$$a \equiv \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{4\pi|M|}} \mathcal{D}, \quad a^\dagger \equiv \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{4\pi|M|}} \mathcal{D}^\dagger \quad (4.33)$$

と定義することで  $[a, a^\dagger] = 1$  となり、規格化条件

$$\int_{T^2} dz d\bar{z} \phi_{T^2, m}^{j, |M|} \overline{\phi_{T^2, n}^{j, |M|}} = \delta_{jk} \delta_{mn} \quad (4.34)$$

を満たす第  $n$  励起状態

$$\begin{aligned} \phi_{T^2, n}^{j, |M|} &= \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n \phi_{T^2}^{j, |M|} \\ &= \mathcal{N}_n^{j, |M|} e^{i\pi |M| z \frac{\text{Im} z}{\text{Im} \tau}} \sum_{l \in \mathbf{Z}} e^{i\pi \left(\frac{j}{|M|} + l\right)^2 |M| \tau} e^{2\pi i |M| z \left(\frac{j}{|M|} + l\right)} H_n \left( \sqrt{2\pi |M| |\text{Im} \tau} \left( \frac{\text{Im} z}{\text{Im} \tau} + \frac{j}{|M|} + l \right) \right) \end{aligned} \quad (4.35)$$

が得られる [9]。ただし、 $H_n(x)$  は Hermite 関数である。また、規格化因子  $\mathcal{N}_n^{j, |M|}$  は (4.27) の  $\mathcal{N}^{j, |M|}$  を用いて

$$\mathcal{N}_n^{j, |M|} = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \mathcal{N}^{j, |M|} \quad (4.36)$$

と表される。この第  $n$  励起状態の質量の 2 乗は

$$m_n^2 = \frac{2\pi |M|}{\mathcal{A}} (2n + 1) \quad (4.37)$$

となる。一方、 $U(N)$  ゲージ場の  $T^2$  方向にベクトルの足を持つ、 $U(N_a) \times U(N_b)$  のもとで  $(N_a, \bar{N}_b)$  表現 ( $(\bar{N}_a, N_b)$  表現) となるゲージ場  $A_{z, T^2}^{ab}, A_{\bar{z}, T^2}^{ab} (A_{z, T^2}^{ba} = \overline{A_{\bar{z}, T^2}^{ab}}, A_{\bar{z}, T^2}^{ba} = \overline{A_{z, T^2}^{ab}})$  の基底状態については、ゲージ固定条件

$$h^{z\bar{z}} (D_z A_{\bar{z}, T^2}^{ab} + \bar{D}_{\bar{z}} A_{z, T^2}^{ab}) = 0 \quad (4.38)$$

に対して各項を 0 にするように解くことで、 $M$  が正 (負) のとき、 $A_{\bar{z}, T^2}^{ab} = 0 (A_{z, T^2}^{ab} = 0)$  で、 $A_{z, T^2}^{ab} (A_{\bar{z}, T^2}^{ab})$  が  $\psi_{T^2}^{j, |M|}$  となり、このベクトル場  $A_{z, T^2}^{ab}$  の運動方程式から

$$\Delta A_{z, T^2}^{ab} + 2i F_{z\bar{z}} h^{\bar{z}z} A_{z, T^2}^{ab} = m^2 A_{z, T^2}^{ab} \quad (4.39)$$

$$m^2 = -\frac{2\pi |M|}{\mathcal{A}}, \quad A_{z, T^2}^{ab} = \psi_{T^2}^{j, |M|} \quad (4.40)$$

と、質量が負となるタキオンモードが得られる。なお、励起状態については上記とスカラー場と同様にして議論することができる。これより、適当な 6 次元コンパクト化をすると、コンパクト空間のベクトル成分による負質量とそれ以外のスカラー成分による正質量が打ち消し合い 0 質量 6 次元コンパクト空間ベクトルが得られて、0 質量 6 次元コンパクト空間カイラルスピノルとの間に一部超対称性が残る<sup>3</sup>。

これより、湯川結合定数を計算することができる。そのために、これまで議論したことを拡張して  $U(N) \rightarrow U(N_a) \times U(N_b) \times U(N_c)$  とする magnetic flux

$$\int_{T^2} F = 2\pi \begin{pmatrix} M_a \mathbb{I}_{N_a} & & \\ & M_b \mathbb{I}_{N_b} & \\ & & M_c \mathbb{I}_{N_c} \end{pmatrix}, \quad N_a + N_b + N_c = N \quad (4.41)$$

<sup>3</sup>これは前章で議論した  $T$ -双対変換した IIA 型超弦理論の交差 D-ブレーンモデルと対応する。

を導入する。ここで、 $M_{ij} \equiv M_i - M_j$  とすると、 $M_{ab} + M_{bc} + M_{ca} = 0$  が成り立ち、 $|M_{bc}| = |M_{ab}| + |M_{ca}|$  としたとき、 $M_{ab}$  と  $M_{ca}$  は同符号であり  $M_{bc}$  のみ異符号である。このとき、波動関数の解は

$$\psi_- = \begin{cases} \begin{pmatrix} \text{const.} & \psi_{T^2}^{i,M_{ba}} & 0 \\ 0 & \text{const.} & 0 \\ \psi_{T^2}^{j,M_{ac}} & \psi_{T^2}^{k,M_{bc}} & \text{const.} \end{pmatrix} & (M_{bc} > 0) \\ \begin{pmatrix} \text{const.} & 0 & \psi_{T^2}^{j,M_{ac}} \\ \psi_{T^2}^{i,M_{ab}} & \text{const.} & \psi_{T^2}^{k,M_{cb}} \\ 0 & 0 & \text{const.} \end{pmatrix} & (M_{bc} < 0) \end{cases} \quad (4.42)$$

となる。ここで、 $\psi_{T^2}^{i,M_{ba}} (\psi_{T^2}^{i,M_{ab}})$  は  $(\mathbf{N}_a, \bar{\mathbf{N}}_b, \mathbf{1})$  表現 ( $(\bar{\mathbf{N}}_a, \mathbf{N}_b, \mathbf{1})$  表現)、 $\psi_{T^2}^{j,M_{ac}} (\psi_{T^2}^{j,M_{ac}})$  は  $(\bar{\mathbf{N}}_a, \mathbf{1}, \mathbf{N}_c)$  表現 ( $(\mathbf{N}_a, \mathbf{1}, \bar{\mathbf{N}}_c)$  表現)、 $\psi_{T^2}^{k,M_{bc}} (\psi_{T^2}^{k,M_{cb}})$  は  $(\mathbf{1}, \bar{\mathbf{N}}_b, \mathbf{N}_c)$  表現 ( $(\mathbf{1}, \mathbf{N}_b, \bar{\mathbf{N}}_c)$  表現) である。ただし、 $\psi_+ = (\psi_-)^\dagger$  である。また、 $\text{const.}$  は残る対称性のゲージノ部分である。これより、 $T^2$  から計算される湯川結合定数は

$$Y_{ijk} = \begin{cases} \sigma_{abc} g \int_{T^2} dz d\bar{z} \psi_{T^2}^{i,M_{ab}} \psi_{T^2}^{j,M_{ca}} \overline{\psi_{T^2}^{k,M_{cb}}} & (M_{bc} < 0) \\ \sigma_{abc} g \int_{T^2} dz d\bar{z} \psi_{T^2}^{i,M_{ba}} \psi_{T^2}^{j,M_{ac}} \overline{\psi_{T^2}^{k,M_{bc}}} & (M_{bc} > 0) \end{cases} \quad (4.43)$$

と計算される。ここで、 $g$  は結合定数、 $\sigma_{abc}$  は  $\sigma_{abc} = \text{sign}(M_{ab}M_{bc}M_{ca})$  で Fermi 統計由来の符号関数である。ここで、Jacobi の  $\vartheta$ -関数に関する公式

$$\begin{aligned} \vartheta \left[ \begin{matrix} r \\ N_1 \end{matrix} \right] (z_1, \tau N_1) \vartheta \left[ \begin{matrix} s \\ N_2 \end{matrix} \right] (z_2, \tau N_2) &= \sum_{m \in \mathbf{Z}_{N_1+N_2}} \vartheta \left[ \begin{matrix} r+s+N_1 m \\ N_1+N_2 \end{matrix} \right] (z_1+z_2, \tau(N_1+N_2)) \\ &\times \vartheta \left[ \begin{matrix} N_2 r - N_1 s + N_1 N_2 m \\ N_1 N_2 (N_1+N_2) \end{matrix} \right] (z_1 N_2 - z_2 N_1, \tau N_1 N_2 (N_1+N_2)) \end{aligned} \quad (4.44)$$

を用いると、最終的に

$$\begin{aligned} Y_{ijk} &= \sigma_{abc} g (2\text{Im}\tau)^{1/4} \left| \frac{M_{ab}M_{ca}}{M_{bc}} \right|^{1/4} \\ &\times \sum_{m \in \mathbf{Z}_{|M_{bc}|}} \delta_{k,i+j+|M_{ab}|m} \vartheta \left[ \begin{matrix} |M_{ca}|i - |M_{ab}|j + M_{ab}M_{ca}m \\ |M_{ab}M_{bc}M_{ca}| \end{matrix} \right] (0, \tau |M_{ab}M_{bc}M_{ca}|) \end{aligned} \quad (4.45)$$

と計算できる。これより湯川結合定数はモジュライパラメータ  $\tau$  の関数である。ただし、 $i \in \mathbf{Z}_{|M_{ab}|}$ ,  $j \in \mathbf{Z}_{|M_{ca}|}$ ,  $k \in \mathbf{Z}_{|M_{bc}|}$  であり、

$$\delta_{k,i+j+M_{ab}m} = \begin{cases} 1 & (k = i + j + |M_{ab}|m \pmod{\mathbf{Z}_{|M_{bc}|}}) \\ 0 & (k \neq i + j + |M_{ab}|m \pmod{\mathbf{Z}_{|M_{bc}|}}) \end{cases} \quad (4.46)$$

である。

### 4.1.2 $T^2$ におけるモジュライ対称性

さて、 $T^2 \simeq \mathbb{C}/\Lambda$  を構成するための格子  $\Lambda$  は以下のように

$$\Gamma = SL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \det \gamma = ad - bc = 1 \right\} \quad (4.47)$$

変換された格子ベクトル  $\tilde{e}_i$  を用いても変わらないため等価な  $T^2$  が構成される。すなわち、その変換された基底  $\tilde{e}_i$  で構成される  $T^2$  上の波動関数  $\tilde{\psi}(\tilde{z}, \tilde{\tau})$  ともとの基底  $e_i$  で構成される  $T^2$  の波動関数  $\psi(z, \tau)$  の関係性を調べることは重要である。

格子ベクトルの  $SL(2, \mathbb{Z})$  変換は

$$\gamma : \begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{e}_2 \\ \tilde{e}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae_2 + be_1 \\ ce_2 + de_1 \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

となる。複素モジュライパラメータは

$$\gamma : \tau = \frac{e_2}{e_1} \rightarrow \tilde{\tau} = \frac{\tilde{e}_2}{\tilde{e}_1} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad (4.49)$$

となる。(4.49) をモジュライ変換と呼ぶ。また、これに伴い複素座標  $z$  も

$$\gamma : z \rightarrow \tilde{z} = \frac{z}{c\tau + d} \quad (4.50)$$

と変換される。特に、 $SL(2, \mathbb{Z})$  変換は2つの生成子

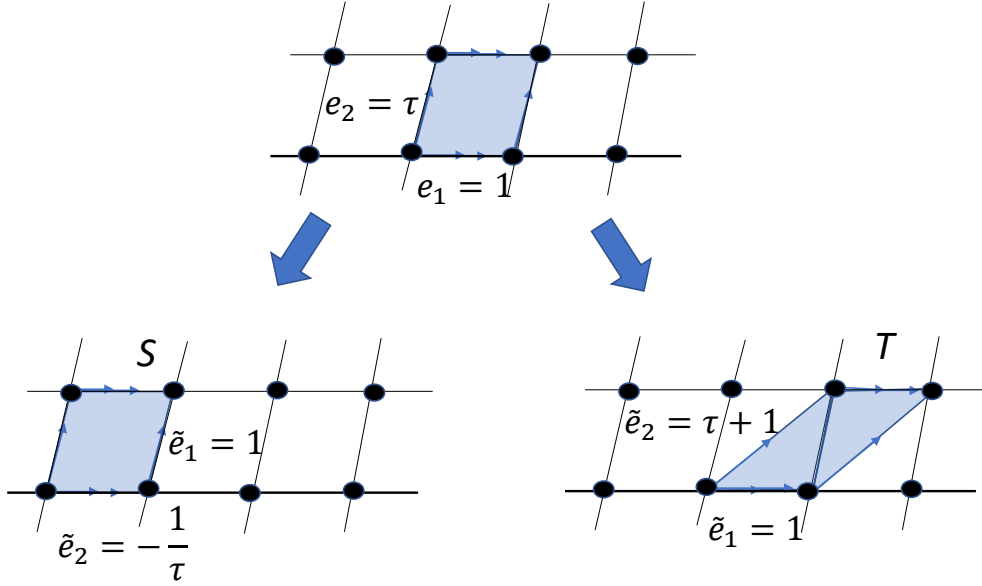
$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

で生成される。これらは  $S^2 = -\mathbb{I}$  であり、すなわち  $S^4 = (ST)^3 = \mathbb{I}$  を満たす。(4.51) のとき、モジュライパラメータおよび座標は

$$S : \tau \rightarrow \tilde{\tau} = -\frac{1}{\tau}, \quad T : \tau \rightarrow \tilde{\tau} = \tau + 1 \quad (4.52)$$

$$S : z \rightarrow \tilde{z} = -\frac{z}{\tau}, \quad T : z \rightarrow \tilde{z} = z \quad (4.53)$$

と変換される。特に  $S^2 = -\mathbb{I}$  を  $(z, \tau)$  に作用させると  $(-z, \tau)$  となり、 $S^4 = (ST)^3 = \mathbb{I}$  を作用させると  $(z, \tau)$  に戻る。なお、これら  $S$  変換および  $T$  変換を図示すると図 4.2 のようになる。

図 4.2:  $S$  変換および  $T$  変換

さて、これまでの議論に対してモジュライ変換 (4.52),(4.53) を施す。ただし、線素  $ds^2$ 、面積  $\mathcal{A}$ 、magnetic flux の総量  $M_{a,b}$  は変換前後で変化しない。ここで、 $dz$  は (4.53) と同じ変換性であり、

$$S: h_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{h}_{\mu\nu} = |\tau|^2 h_{\mu\nu}, \quad T: h_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} \quad (4.54)$$

$$S: \gamma^z \rightarrow \tilde{\gamma}^z = -\frac{1}{\tau} \gamma^z, \quad T: \gamma^z \rightarrow \tilde{\gamma}^z = \gamma^z \quad (4.55)$$

$$S: F_{z\bar{z}}(z, \tau) \rightarrow \tilde{F}_{z\bar{z}}(\tilde{z}, \tilde{\tau}) = |\tau|^2 F_{z\bar{z}}(z, \tau), \quad T: F_{z\bar{z}}(z, \tau) \rightarrow \tilde{F}_{z\bar{z}}(\tilde{z}, \tilde{\tau}) = |\tau|^2 F_{z\bar{z}}(z, \tau) \quad (4.56)$$

$$S: A_z(z, \tau) \rightarrow \tilde{A}_z(\tilde{z}, \tilde{\tau}) = -\tau A_z(z, \tau), \quad T: A_z(z, \tau) \rightarrow \tilde{A}_z(\tilde{z}, \tilde{\tau}) = A_z(z, \tau) \quad (4.57)$$

$$S: D_z \rightarrow \tilde{D}_z = -\tau D_z, \quad T: D_z \rightarrow \tilde{D}_z = D_z \quad (4.58)$$

と変換される。なお、複素共役に関しても同様に変換される。よって、 $F, A, D$  は全体としてモジュライ不変であり、満たすべき運動方程式および質量固有値も変換前後で変わらない。一方、 $A$  の境界条件 (4.16),(4.17) および波動関数の境界条件 (4.22) についてはまず  $\chi_{1,2}(z, \tau)$  に対してモジュライ変換 (4.52),(4.53) を施す。

$$S: \chi_1(z, \tau) \rightarrow \tilde{\chi}_1(\tilde{z}, \tilde{\tau}) = -\chi_2(z, \tau), \quad T: \chi_1(z, \tau) \rightarrow \tilde{\chi}_1(\tilde{z}, \tilde{\tau}) = \chi_1(z, \tau) \quad (4.59)$$

$$S: \chi_2(z, \tau) \rightarrow \tilde{\chi}_2(\tilde{z}, \tilde{\tau}) = \chi_1(z, \tau), \quad T: \chi_2(z, \tau) \rightarrow \tilde{\chi}_2(\tilde{z}, \tilde{\tau}) = \chi_1(z) + \chi_2(z+1) + \pi M \quad (4.60)$$

となる。これより、 $S$  変換においては、(4.16) の変換後の境界条件は (4.17) と同じ境界条件を満たし、(4.17) の変換後の境界条件は (4.16) と同じ境界条件を満たしており、波動関数の境界条件 (4.22) は  $S$  変換後も同じ境界条件となる。一方、 $T$  変換においては、(4.16) の変換後の境界条件は (4.16) と同じ境界条件を満たしており波動関数の境界条件 (4.22) の  $z \rightarrow z + 1$  に対する境界条件は  $T$  変換後も同じ境界条件を満たすが、波動関数の境界条件 (4.22) の  $z \rightarrow z + \tau$  に対する境界条件

$$\psi_{T^2}^{j,|M|}(z + \tau, \tau) = e^{i\pi|M|\frac{\text{Im}\bar{\tau}z}{\text{Im}\tau}} \psi_{T^2}^{j,|M|}(z, \tau)$$

は  $T$  変換後は

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{T^2}^{j,|M|}(\tilde{z} + \tilde{\tau}, \tilde{\tau}) &= e^{i\pi|M|\frac{\text{Im}\bar{\tilde{\tau}}\tilde{z}}{\text{Im}\tilde{\tau}}} \tilde{\psi}_{T^2}^{j,|M|}(\tilde{z}, \tilde{\tau}) \\ \tilde{\psi}_{T^2}^{j,|M|}(z + \tau + 1, \tau + 1) &= e^{i\pi|M|\frac{\text{Im}(\bar{\tau}+1)z}{\text{Im}\tau}} \tilde{\psi}_{T^2}^{j,|M|}(z, \tau + 1) \end{aligned} \quad (4.61)$$

を満たす。一方、(4.22) よりもとの波動関数は

$$\psi_{T^2}^{j,|M|}(z + \tau + 1, \tau) = e^{-i\pi|M|} e^{i\pi|M|\frac{\text{Im}(\bar{\tau}+1)z}{\text{Im}\tau}} \psi_{T^2}^{j,|M|}(z, \tau) \quad (4.62)$$

を満たす。これは半周していることに依る。よって、 $M$  が偶数のときは同じ境界条件となるが  $M$  が奇数のときは境界条件が異なる<sup>4</sup> [10]。なお、(4.17) については変換後も同じ境界条件を満たしている。ゆえに、 $M$  が偶数のとき、モジュライ変換 (4.52),(4.53) 後の波動関数を同じ質量固有値を持つもとの波動関数で表すことができる。以後、モジュライ変換について議論する際は  $M$  は偶数であるとする<sup>5</sup>。では、波動関数

$$\psi_{T^2}^{j,|M|}(z, \tau) = \tilde{\mathcal{N}}^{j,|M|} e^{i\pi|M|z\frac{\text{Im}z}{\text{Im}\tau}} \sum_{l \in \mathbf{Z}} e^{i\pi\left(\frac{j}{|M|}+l\right)^2|M|\tau} e^{2\pi i|M|z\left(\frac{j}{|M|}+l\right)} \quad (4.63)$$

に対してモジュラー変換 (4.52),(4.53) を考える。ただし、規格化を (4.26) ではなく

$$\int_{T^2} dz d\bar{z} \psi_{T^2}^{j,|M|} \overline{\psi_{T^2}^{k,|M|}} = (2\text{Im}\tau)^{-1/2} \delta_{jk} \quad (4.64)$$

とする<sup>6</sup>。これより、規格化因子  $\tilde{\mathcal{N}}^{j,|M|}$  は (4.27) ではなく

$$\tilde{\mathcal{N}}^{j,|M|} = \left( \frac{|M|}{\mathcal{A}^2} \right)^{1/4} \quad (4.65)$$

となり、モジュライ変換 (4.52),(4.53) に対して不変である。このもとで、波動関数 (4.63) に対してモジュラー変換 (4.52),(4.53) を施すと、

$$S : \psi_{T^2}^{j,|M|}(z, \tau) \rightarrow \tilde{\psi}_{T^2}^{j,|M|}\left(-\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = (-\tau)^{1/2} e^{\pi i/4} \frac{1}{\sqrt{|M|}} \sum_{k=0}^{|M|-1} e^{2\pi i\frac{jk}{|M|}} \psi_{T^2}^{k,|M|}(z, \tau) \quad (4.66)$$

$$T : \psi_{T^2}^{j,|M|}(z, \tau) \rightarrow \tilde{\psi}_{T^2}^{j,|M|}(z, \tau + 1) = e^{\pi i\frac{j^2}{|M|}} \psi_{T^2}^{j,|M|}(z, \tau) \quad (4.67)$$

<sup>4</sup> $T^2$  変換においては  $M$  が奇数のときも同じ境界条件を満たす。

<sup>5</sup>付録 B では、 $M$  の偶奇によらずにモジュライ変換の議論ができるような方法を述べる。

<sup>6</sup>このとき、(4.6) より 4 次元場の運動項の係数は  $(2\text{Im}\tau)^{-1/2}$  倍される。従って、4 次元場はモジュライウェイト  $-k = -1/2$  を持つ。(モジュライウェイトについては後述する。)

と変換される (詳細の計算については付録 B に示す)。これより、波動関数はある種のモジュライ形式 (保型形式) のように振る舞っている。ここで、一般に  $\tau$  の正則関数  $f(\tau)$  が任意の  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$  に対して

$$f(\gamma(\tau)) = (c\tau + d)^k f(\tau), \quad \gamma(\tau) = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad (4.68)$$

を満たすとき、 $f(\tau)$  は  $\Gamma$  のモジュライウエイト  $k$  のモジュライ形式という。ただし、 $\gamma = -\mathbb{I} \in \Gamma$  に対して  $\gamma(\tau) = 1$  となるため、(4.68) より  $(-1)^k = 1$ 、すなわちモジュライウエイト  $k$  は偶数である。さらに制限を緩めて  $f(\tau)$  が  $\Gamma$  の正規部分群であるレベル  $N$  の主合同部分群<sup>7</sup>

$$\Gamma(N) = \left\{ h = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \Gamma \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\} \quad (4.69)$$

のモジュライウエイト  $k$  のモジュライ形式であるとき、任意の  $h = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \Gamma(N)$  に対して、

$$f(h(\tau)) = (c'\tau + d')^k f(\tau), \quad h(\tau) = \frac{a'\tau + b'}{c'\tau + d'} \quad (4.70)$$

を満たす。このとき、 $N > 2$  においては  $-\mathbb{I} \notin \Gamma(N)$  であるため  $\mathbb{I} \in \Gamma(N)$  に対して  $(1)^k = 1$ 、すなわちモジュライウエイト  $k$  は整数であれば良い [11]<sup>8</sup>。この  $f(\tau)$  に対して  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$  を作用させると、

$$f(\gamma(\tau)) = (c\tau + d)^k \rho(\gamma) f(\tau) \quad (4.71)$$

となる。ただし、一般に  $f(\tau)$  は  $\Gamma$  に対して multiplet で変換されても良く、 $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$  に対して

$$\rho(\gamma_1 \gamma_2) = \rho(\gamma_1) \rho(\gamma_2) \quad (4.72)$$

と準同型性を満たし、かつ  $h \in \Gamma(N)$  に対して

$$\rho(h) = \mathbb{I} \quad (4.73)$$

を満たす行列である。すなわち、 $\rho$  は

$$\rho(S)^4 = [\rho(S)\rho(T)]^3 = \rho(T)^N = \mathbb{I}, \quad \rho(S)^2 \rho(T) = \rho(T) \rho(S)^2 \quad (4.74)$$

を満たす  $\Gamma'_N \equiv \Gamma/\Gamma(N)$  の表現である。また、特に  $\gamma = -\mathbb{I}$  に対しては  $(-1)^k \rho(-\mathbb{I}) = \mathbb{I}$  となる必要があるので、 $k$  が偶数のときは  $\rho(-\mathbb{I}) = \mathbb{I}$  であり、 $k$  が奇数のときは  $\rho(-\mathbb{I}) = -\mathbb{I}$  を満たす

<sup>7</sup> $\Gamma(1) = \Gamma$  である。

<sup>8</sup> [12–15] も参照。

必要がある。これより、 $k$  が偶数のときは、 $-\mathbb{I}$  を  $\mathbb{I}$  と同一視した  $\Gamma_N = \bar{\Gamma}/\bar{\Gamma}(N)$  の表現となっている。ここで、 $\bar{\Gamma} = \Gamma/\{\pm\mathbb{I}\}$  であり  $\bar{\Gamma}(N) = \Gamma(N)$  ( $N > 2$ ),  $\bar{\Gamma}(2) = \Gamma(2)/\{\pm\mathbb{I}\}$  である<sup>9</sup>。一方、保形因子  $J_k(\gamma, \tau) \equiv (c\tau + d)^k$  に対しては

$$J_k(\gamma_1\gamma_2, \tau) = J_k(\gamma_1, \gamma_2(\tau))J_k(\gamma_2, \tau) \quad (4.75)$$

が成り立っている。さて、波動関数に対するモジュライ変換の話に戻すと、波動関数 (4.66), (4.67) は  $\gamma \in \Gamma$  に対して

$$\psi_{T^2}^{j, |M|}(\tilde{\gamma}(z, \tau)) = (c\tau + d)^{1/2} \sum_{k=0}^{|M|-1} \rho(\tilde{\gamma})_{jk} \psi_{T^2}^{k, |M|}(z, \tau) \quad (4.76)$$

$$\rho(\tilde{S})_{jk} = e^{i\pi/4} \frac{1}{\sqrt{|M|}} e^{2\pi i \frac{jk}{|M|}} \quad (4.77)$$

$$\rho(\tilde{T})_{jk} = e^{\pi i \frac{j^2}{|M|}} \delta_{jk} \quad (4.78)$$

と変換しておりモジュライウェイト  $1/2$  のように振る舞っている<sup>10</sup>。(以下の議論は私が携わった研究である [17] に基づいている。) ここで、さらに  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{Z})/\{\pm 1\} \simeq SL(2, \mathbb{Z})$  となるような  $SL(2, \mathbb{Z})$  の二重被覆群  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{Z}) \equiv \bar{\Gamma}$  を以下のようにして導入する [14, 18, 19]。

1.  $\gamma \in SL(2, \mathbb{Z})$  に対して  $\epsilon \in \{\pm 1\}$  で拡張した組  $[\gamma, \epsilon]$  を考える。
2. 2つの組  $[\alpha, \epsilon], [\beta, \delta]$  の間の演算を

$$[\alpha, \epsilon][\beta, \delta] = [\alpha\beta, A(\alpha, \beta)\epsilon\delta] \quad (4.79)$$

と定義する。ただし、 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  に対して

$$\chi(\gamma) = \begin{cases} c & c \neq 0 \\ d & c = 0 \end{cases} \quad (4.80)$$

を定義し、また以下のように定義された演算 (Hilbert 記号)

$$(a, b) = \begin{cases} -1 & a < 0 \text{ かつ } b < 0 \\ 1 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (4.81)$$

のもとで

$$A(\alpha, \beta) = (\det\alpha, \det\beta) \left( \frac{\chi(\alpha\beta)}{\chi(\alpha)}, \frac{\chi(\alpha\beta)}{\chi(\beta)\det\alpha} \right) \quad (4.82)$$

と定める<sup>11</sup>。

<sup>9</sup> $\Gamma_2 \simeq S_3, \Gamma_3 \simeq A_4, \Gamma_4 \simeq S_4, \Gamma \simeq A_5$  [16]

<sup>10</sup>これは4次元場がモジュライウェイト  $-k = -1/2$  を持つことと整合している。

<sup>11</sup> $SL(2, \mathbb{Z})$  上の2-コサイクルとなる。



このもとで、 $\gamma \in SL(2, \mathbb{Z})$  に対して  $[\gamma, \epsilon] \in \widetilde{SL}(2, \mathbb{Z})$  が得られる。具体的には、 $\gamma = S, T \in SL(2, \mathbb{Z})$  に対して、

$$\widetilde{S} = [S, 1] \in \widetilde{SL}(2, \mathbb{Z}), \quad \widetilde{T} = [T, 1] \in \widetilde{SL}(2, \mathbb{Z}) \quad (4.83)$$

とする。このとき、 $\widetilde{SL}(2, \mathbb{Z}) \equiv \widetilde{\Gamma}$  のもとでは

$$\widetilde{S}^2 = [-\mathbb{I}, 1] \equiv \widetilde{Z}, \quad \widetilde{S}^4 = (\widetilde{S}\widetilde{T})^3 = [\mathbb{I}, -1] = \widetilde{Z}^2, \quad \widetilde{S}^8 = (\widetilde{S}\widetilde{T})^6 = [\mathbb{I}, 1] = \mathbb{I} = \widetilde{Z}^4, \quad (4.84)$$

を満たす。また、逆元は

$$\widetilde{S}^{-1} = [S^{-1}, 1], \quad \widetilde{T}^{-1} = [T^{-1}, 1], \quad \widetilde{Z} = [-\mathbb{I}, -1]. \quad (4.85)$$

となる。さらに、モジュライウエイト  $1/2$  であることより保型因子も

$$\widetilde{J}_{1/2}(\widetilde{\gamma} = [\gamma, \epsilon], \tau) = \epsilon J_{1/2}(\gamma, \tau) \quad (4.86)$$

と変更される。ただし、 $(-1)^{1/2} = e^{-i\pi/2}$  とする。これは、(4.75),(4.79) より

$$\widetilde{J}_{1/2}(\widetilde{\gamma}_1 \widetilde{\gamma}_2, \tau) = A(\gamma_1, \gamma_2) \widetilde{J}_{1/2}(\widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2(\tau)) \widetilde{J}_{1/2}(\widetilde{\gamma}_2, \tau) \quad (4.87)$$

を満たす。ここで、表現行列 (4.77),(4.78) は以下の性質を満たす (詳細の計算については付録 B に示す)。

$$\rho(\widetilde{Z})_{jk} = \rho(\widetilde{S})_{jk}^2 = i\delta_{|M|-j,k} \quad (4.88)$$

$$\rho(\widetilde{Z})_{jk}^2 = \rho(\widetilde{S})_{jk}^4 = [\rho(\widetilde{S})\rho(\widetilde{T})]_{jk}^3 = -\delta_{jk} \quad (4.89)$$

$$\rho(\widetilde{Z})_{jk}^4 = \rho(\widetilde{S})_{jk}^8 = [\rho(\widetilde{S})\rho(\widetilde{T})]_{jk}^6 = \delta_{jk} \quad (4.90)$$

$$\rho(\widetilde{T})_{jk}^{2|M|} = \delta_{jk} \quad (4.91)$$

$$\rho(\widetilde{Z})^n \rho(\widetilde{T}) = \rho(\widetilde{T}) \rho(\widetilde{Z})^n, \quad n = 1, 2, 3, \quad (4.92)$$

を満たす。また、保型因子  $\widetilde{J}_{1/2}(\widetilde{\gamma}, \tau)$  については、

$$\widetilde{J}_{1/2}(\widetilde{Z}, \tau) = \widetilde{J}_{1/2}(\widetilde{S}^2, \tau) = -i \quad (4.93)$$

$$\widetilde{J}_{1/2}(\widetilde{Z}^2, \tau) = \widetilde{J}_{1/2}(\widetilde{S}^4, \tau) = \widetilde{J}_{1/2}((\widetilde{S}\widetilde{T})^3, \tau) = -1 \quad (4.94)$$

$$\widetilde{J}_{1/2}(\widetilde{Z}^4, \tau) = \widetilde{J}_{1/2}(\widetilde{S}^8, \tau) = \widetilde{J}_{1/2}((\widetilde{S}\widetilde{T})^6, \tau) = 1 \quad (4.95)$$

$$\widetilde{J}_{1/2}(\widetilde{T}^n, \tau) = 1 \quad (4.96)$$

となる。ここで、 $n$  は任意の整数である。よって、(4.90)-(4.92) および (4.95)-(4.96) より  $|M|$  個のゼロモード波動関数は

$$\widetilde{\Gamma}(2|M|) \equiv \{[h, \epsilon] \in \widetilde{\Gamma} | h \in \Gamma(2|M|), \epsilon = 1\}. \quad (4.97)$$

のモジュライウェイト  $1/2$  のモジュライ形式のように振る舞っている。そして  $\rho$  は  $\tilde{\Gamma}_{2|M|} \equiv \tilde{\Gamma}/\tilde{\Gamma}(2|M|)$  の  $|M|$  次元表現となっている。なお、(4.88),(4.93) は (4.28) を満たし、(4.89),(4.94) は波動関数全体としてはもとに戻っている。また、この  $|M|$  次元表現は一般には可約表現である。ここではゼロモード波動関数 (4.63) に対してのモジュライ変換について議論してきたが、(4.33) はモジュライ変換のもとで不変でありまた (4.66),(4.67) の展開係数は (4.33) と可換であるため、(4.66),(4.67) の関係はそのまま第  $n$  励起モード波動関数 (4.35) に対しても当てはまる。従って上記の議論はゼロモード波動関数 (4.63) だけでなく一般の第  $n$  励起モード波動関数 (4.35) に対して適応される。

また、[20] で議論された generalized  $CP$  変換に対しての波動関数の振る舞いについても議論する。[20] で議論された  $CP$  変換は、基底  $e_i$  に対して

$$CP : \begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e_{2CP} \\ e_{1CP} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{e}_2 \\ \bar{e}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{e}_2 \\ -\bar{e}_1 \end{pmatrix} \quad (4.98)$$

と変換することで、モジュライパラメータ  $\tau$  と複素座標  $z$  がそれぞれ

$$CP : \tau = \frac{e_2}{e_1} \rightarrow \tau_{CP} = \frac{e_{2CP}}{e_{1CP}} = \frac{\bar{e}_2}{-\bar{e}_1} = -\bar{\tau} \quad (4.99)$$

$$CP : z \rightarrow z_{CP} = -\bar{z} \quad (4.100)$$

と変換する。これらは  $(CP)^2 = \mathbb{I}$  を満たす。なお、 $\det(CP) = -1$  である。この  $CP$  変換を図示すると図 4.3 のようになる。

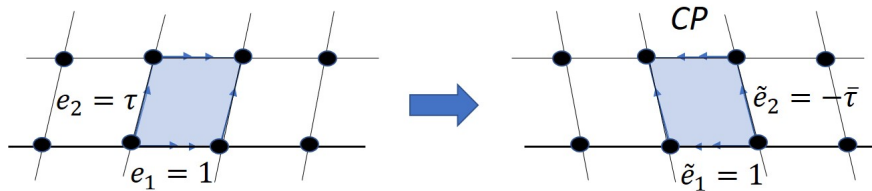


図 4.3:  $CP$  変換

任意の  $SL(2, \mathbb{Z})$  変換  $\gamma$  に対してこの  $CP$  変換を作用させると、

$$(CP)\gamma(CP)^{-1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \quad (4.101)$$

となる。特に、 $(CP)S(CP)^{-1} = S^{-1}$ ,  $(CP)T(CP)^{-1} = T^{-1}$  を満たす。これより、 $CP$  変換が加わると変換群は  $\Gamma^* \equiv SL(2, \mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}_2^{CP} \simeq GL(2, \mathbb{Z})$  となる。この群の変換行列  $\gamma^*$  が  $\det \gamma^* = -1$  を満たす場合は  $CP$  変換が奇数回寄与していることを考慮すると  $(z, \tau)$  は

$$\gamma^* : (z, \tau) \rightarrow (\tilde{z}, \tilde{\tau}) = \left( \frac{\bar{z}}{c\bar{\tau} + d}, \frac{a\bar{\tau} + b}{c\bar{\tau} + d} \right) \quad (4.102)$$

と変換する。一方、 $\det \tilde{\gamma} = 1$  を満たすとき  $(z, \tau)$  は

$$\gamma^* : (z, \tau) \rightarrow (\tilde{z}, \tilde{\tau}) = \left( \frac{z}{c\tau + b}, \frac{a\tau + b}{c\tau + b} \right) \quad (4.103)$$

と変換される。では、モジュライ変換の議論と同様に magnetic flux の入った  $T^2$  上の場に対して  $CP$  変換 (4.99), (4.100) を行う。このとき同時に magnetic flux  $M = M_a - M_b$  が反転  $-M = M_b - M_a$  となることで、場  $f$  が  $CP : f \rightarrow \bar{f}$  と変化する<sup>12</sup>。実際、波動関数は

$$\begin{aligned} CP : \psi_{T^2}^{j, |M|}(z, \tau) &\rightarrow \tilde{\psi}_{T^2}^{j, |M|}(-\bar{z}, -\bar{\tau}) \\ &= \tilde{\mathcal{N}}^{j, |M|} e^{-i\pi |M| z \frac{\text{Im} z}{\text{Im} \tau}} \sum_{l \in \mathbf{Z}} e^{-i\pi \left(\frac{j}{|M|} + l\right)^2 |M| \bar{\tau}} e^{-2\pi i |M| \bar{z} \left(\frac{j}{|M|} + l\right)} \\ &= \overline{\psi_{T^2}^{j, |M|}(z, \tau)} \\ &= (-1)^{1/2} i \psi_{T^2}^{j, |M|}(z, \tau) \end{aligned} \quad (4.104)$$

となる。ただし、 $(-1)^{1/2} = e^{-i\pi/2}$  とする。ここで、 $SL(2, \mathbf{Z})$  と同様に  $GL(2, \mathbf{Z})$  の二重被覆群  $\widetilde{GL}(2, \mathbf{Z})$  を考える。このとき、

$$\widetilde{CP} = [CP, 1] \in \widetilde{GL}(2, \mathbf{Z}) \quad (4.105)$$

であり、

$$(\widetilde{CP})^2 = [\mathbb{I}, -1] = \tilde{Z}^2, \quad (\widetilde{CP})^4 = [\mathbb{I}, 1] = \mathbb{I} = \tilde{Z}^4, \quad (4.106)$$

$$(\widetilde{CP})\tilde{S}(\widetilde{CP})^{-1} = [S^{-1}, 1] = \tilde{S}^{-1}, \quad (\widetilde{CP})\tilde{T}(\widetilde{CP})^{-1} = [T^{-1}, 1] = \tilde{T}^{-1}, \quad (4.107)$$

を満たす。ただし、 $(\widetilde{CP})^{-1} = [(CP)^{-1}, -1]$  である。このもとで、表現行列および保型因子はそれぞれ、

$$\rho(\tilde{Z})^2 = \rho(\widetilde{CP})^2 = -1, \quad \rho(\tilde{Z})^4 = \rho(\widetilde{CP})^4 = 1, \quad (4.108)$$

$$\rho(\widetilde{CP})^{-1} = \rho(\widetilde{CP})^3 = -i \quad (4.109)$$

$$\rho(\widetilde{CP})\overline{\rho(\tilde{S})}\rho(\widetilde{CP})^{-1} = \rho(\tilde{S})^{-1}, \quad \rho(\widetilde{CP})\overline{\rho(\tilde{T})}\rho(\widetilde{CP})^{-1} = \rho(\tilde{T})^{-1} \quad (4.110)$$

および

$$\tilde{J}_{1/2}(\tilde{Z}^2, \tau) = \tilde{J}_{1/2}((\widetilde{CP})^2, \tau) = -1, \quad \tilde{J}_{1/2}(\tilde{Z}^4, \tau) = \tilde{J}_{1/2}((\widetilde{CP})^4, \tau) = 1, \quad (4.111)$$

$$\tilde{J}_{1/2}(\widetilde{CP}^{-1}, \tau) = -e^{-i\pi/2} = i, \quad (4.112)$$

$$\tilde{J}_{1/2}(\widetilde{CP}\tilde{S}\widetilde{CP}^{-1}, \tau) = \tilde{J}_{1/2}(\tilde{S}^{-1}, \tau), \quad \tilde{J}_{1/2}(\widetilde{CP}\tilde{T}\widetilde{CP}^{-1}, \tau) = \tilde{J}_{1/2}(\tilde{T}^{-1}, \tau) \quad (4.113)$$

が成り立っている。

<sup>12</sup> $\chi_1(z, \tau)$  に関しては  $CP : \chi_1(z, \tau) \rightarrow \tilde{\chi}_1(\tilde{z}, \tilde{\tau}) = -\chi_1(z, \tau)$  となるが、 $z \rightarrow z+1$  の境界条件が  $CP$  変換後では  $-\bar{z}+1 = -z-1 \rightarrow -\bar{z}$  となり、 $z \rightarrow z-1$  に対する境界条件と整合する。

## 4.2 $T^2/\mathbb{Z}_2$ フラックスコンパクト化

### 4.2.1 $T^2/\mathbb{Z}_2$ 上の波動関数と湯川結合定数

前節で  $T^2$  上に magnetic flux が入ったもとの波動関数および湯川結合について述べたが、前節の設定では3世代カイラルフェルミオンを得ることができるのは  $|M| = 3$  のみであり標準模型を含むモデルを構築することは難しい。本節では、2次元トーラス  $T^2$  をさらに  $\mathbb{Z}_2 = \{I, -I\}$  同一視 ( $z \rightarrow -z \sim z$ ) する  $T^2/\mathbb{Z}_2$  オービフォールドコンパクト化について議論する。なお、 $z_I = 0, 1/2, \tau/2, (\tau+1)/2$  は  $T^2/\mathbb{Z}_2$  において固定点であり特異点となる (図 4.4)。本節は [21] に基づく。

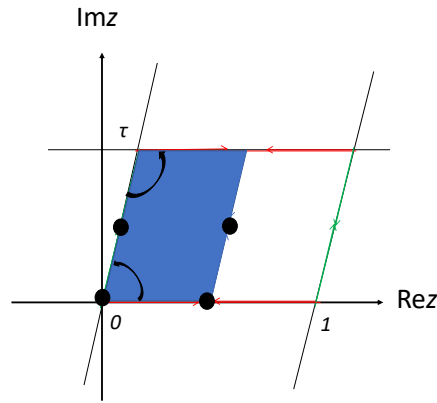


図 4.4:  $T^2/\mathbb{Z}_2$  オービフォールド

ゲージ場およびゲージノの  $T^2/\mathbb{Z}_2$  上のは、 $\mathbb{Z}_2$  変換 ( $z \rightarrow -z$ ) のもとで

$$A_z(-z) = -PA_z(z)P^{-1} \quad (4.114)$$

$$\psi_{\pm}(-z) = \pm P\psi_{\pm}(z)P^{-1} \quad (4.115)$$

を満たす。ここで、係数の符号はこの2次元コンパクト空間の座標変換  $SO(2) \simeq U(1) \supset \mathbb{Z}_2$  によって決まり、 $P$  は  $P^2 = \mathbb{I}$  を満たす  $U(N)$  ゲージ群の作用である。(4.115) より  $\mathbb{Z}_2$ -even モードまたは  $\mathbb{Z}_2$ -odd モードのどちらかが残る。また、 $T^2$  上のゼロモード波動関数は (4.28) を満たすので、 $j = 0$  および  $M$  が偶数のときは  $j = |M|/2$  に関しては

$$\begin{aligned} \psi_{T^2/\mathbb{Z}_2}^{j,|M|}(z) &= \psi_{T^2}^{j,|M|}(z) \\ &= \mathcal{N}^{j,|M|} e^{-\frac{\pi|M|}{2\text{Im}\tau}|z|^2} g^{j,|M|}(z) \end{aligned} \quad (4.116)$$

のように  $T^2$  の波動関数そのまま  $\mathbb{Z}_2$ -even モードとなり  $\mathbb{Z}_2$ -odd モードはない。一方、 $0 < j <$

$|M|/2$  に関しては、 $\mathbb{Z}_2$ -even および  $\mathbb{Z}_2$ -odd モードは

$$\begin{aligned}\psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^\pm}^{j,|M|}(z) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \psi_{T^2}^{j,|M|}(z) \pm \psi_{T^2}^{j,|M|}(-z) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \psi_{T^2}^{j,|M|}(z) \pm \psi_{T^2}^{|M|-j,|M|}(z) \right) \\ &= \mathcal{N}^{j,|M|} e^{-\frac{\pi|M|}{2\text{Im}\tau}|z|^2} \frac{1}{\sqrt{2}} \left( g^{j,|M|}(z) \pm g^{|M|-j,|M|}(z) \right)\end{aligned}\tag{4.117}$$

となる。これより、 $M$  が偶数のとき  $\mathbb{Z}_2$ -even モードは  $(|M|/2+1)$  個  $\mathbb{Z}_2$ -odd モードは  $(|M|/2-1)$  個となり、 $M$  が奇数のとき  $\mathbb{Z}_2$ -even モードは  $(|M|+1)/2$  個  $\mathbb{Z}_2$ -odd モードは  $(|M|-1)/2$  個となる。具体的なゼロモードの数を表 4.1 に示す。

$ M $	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
even	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7
odd	0	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5

表 4.1: The total numbers of degenerate zero-modes for  $\mathbb{Z}_2$  -even and -odd wavefunctions.

これより、3 世代カイラルフェルミオンを得るために、 $T^2$  の場合は  $|M| = 3$  の一通りしかないのに対して  $T^2/\mathbb{Z}_2$  の場合は  $\mathbb{Z}_2$ -even モードまたは  $\mathbb{Z}_2$ -odd モードのどちらかが残るため 4 通り考えることができる。実際、例えば [22] のように以下のような  $U(8)$  magnetic flux を入れることで<sup>13</sup>

$$\int_{T^2/\mathbb{Z}_2} F = 2\pi \begin{pmatrix} 0 \times \mathbb{I}_3 & & & \\ & 1 & & \\ & & 5 \times \mathbb{I}_2 & \\ & & & -7 \times \mathbb{I}_2 \end{pmatrix}\tag{4.118}$$

ゲージ群は  $U(8) \rightarrow SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$  up to  $U(1)$  に破れて、 $M = -5$  の  $\mathbb{Z}_2$ -even から  $(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$  表現の 3 世代左巻きクォーク  $Q_{L_I}(x) \otimes \psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^+}^{I,5}(z)$  ( $0 \geq I \geq 2$ )、 $M = -7$  の  $\mathbb{Z}_2$ -odd から  $(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \mathbf{2})$  表現の 3 世代右巻きクォーク  $Q_{R_J}(x) \otimes \psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^-}^{J+1,7}(z)$  ( $0 \geq J \geq 2$ )、 $M = -4$  の  $\mathbb{Z}_2$ -even から  $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$  表現の 3 世代左巻きレプトン  $L_{L_I}(x) \otimes \psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^+}^{I,4}(z)$ 、 $M = -8$  の  $\mathbb{Z}_2$ -odd から  $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2})$  表現の 3 世代右巻きレプトン  $L_{R_J}(x) \otimes \psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^-}^{J+1,8}(z)$ 、 $M = 12$  の  $\mathbb{Z}_2$ -odd から  $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$  表現の 5 世代スカラー場  $H_K(x) \otimes \psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^-}^{K+1,12}(z)$  ( $0 \geq K \geq 4$ ) が得られる。なお、 $SU(2)_R$  はこの magnetic flux では破れないが、(4.114) のような適当な  $\mathbb{Z}_2$  射影などを行うことで破ることができる。このとき、アップクォークタイプの質量を与えるヒッグス場  $H_u$  とダウンクォークタイプの質量を与

<sup>13</sup>実際は、 $T^6/(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}'_2)$  コンパクト化をして、 $T^6 \simeq T^2 \times T^2 \times T^2$  のうちの一つの  $T^2$  に () の magnetic flux を入れて残りの  $T^2$  には構造を変えないような magnetic flux を入れており、残りの  $T^2$  からの湯川結合定数への寄与は全体係数のみとなり議論に影響しないため、ここでは一つの  $T^2$  からの寄与のみ着目している。

えるヒッグス場  $H_d$  が得られる。特に、クォークセクターに対して、湯川相互作用は

$$\begin{aligned}
S_Y &= \int d^4x Q_{L_I}(x) Q_{R_J}(x) H_K(x) \int_{T^2/\mathbb{Z}_2} dz d\bar{z} \psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^+}^{I,5}(z) \psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^-}^{J+1,7}(z) \psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^-}^{K+1,12}(z) \\
&= \int d^4x Y_{IJK} Q_{L_I}(x) Q_{R_J}(x) H_K(x) \\
&\rightarrow \int d^4x \left\langle \sum_{K=0}^4 Y_K H_K(x) \right\rangle_{IJ} Q_{L_I}(x) Q_{R_J}(x) \\
&= \int d^4x m_{IJ} Q_{L_I}(x) Q_{R_J}(x)
\end{aligned} \tag{4.119}$$

となる。ここで、 $5 \times 7 \times 12 = 420$  であり、

$$\vartheta \begin{bmatrix} \frac{l}{420} \\ 0 \end{bmatrix} (0, 420\tau) \equiv \vartheta^l \tag{4.120}$$

を用いて具体的に

$$\begin{aligned}
Y_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}(\vartheta^5 - \vartheta^{65}) & \sqrt{2}(\vartheta^{185} - \vartheta^{115}) & \sqrt{2}(\vartheta^{55} - \vartheta^{125}) \\ \vartheta^{173} - \vartheta^{103} - \vartheta^{187} + \vartheta^{163} & \vartheta^{67} - \vartheta^{137} - \vartheta^{53} + \vartheta^{17} & \vartheta^{113} - \vartheta^{43} - \vartheta^{127} + \vartheta^{197} \\ \vartheta^{79} - \vartheta^{149} - \vartheta^{19} + \vartheta^{89} & \vartheta^{101} - \vartheta^{31} - \vartheta^{199} + \vartheta^{151} & \vartheta^{139} - \vartheta^{209} - \vartheta^{41} + \vartheta^{29} \end{pmatrix}, \\
Y_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}(\vartheta^{170} - \vartheta^{110}) & \sqrt{2}(\vartheta^{10} - \vartheta^{130}) & \sqrt{2}(\vartheta^{50} - \vartheta^{190}) \\ \vartheta^2 - \vartheta^{142} - \vartheta^{58} + \vartheta^{82} & \vartheta^{178} - \vartheta^{38} - \vartheta^{122} + \vartheta^{158} & \vartheta^{62} - \vartheta^{202} - \vartheta^{118} + \vartheta^{22} \\ \vartheta^{166} - \vartheta^{26} - \vartheta^{194} + \vartheta^{94} & \vartheta^{74} - \vartheta^{206} - \vartheta^{46} + \vartheta^{94} & \vartheta^{106} - \vartheta^{34} - \vartheta^{134} + \vartheta^{146} \end{pmatrix}, \\
Y_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}(\vartheta^{75} - \vartheta^{135}) & \sqrt{2}(\vartheta^{165} - \vartheta^{45}) & \sqrt{2}(\vartheta^{15} - \vartheta^{195}) \\ \vartheta^{173} - \vartheta^{33} - \vartheta^{117} + \vartheta^{93} & \vartheta^3 - \vartheta^{207} - \vartheta^{123} + \vartheta^{87} & \vartheta^{183} - \vartheta^{27} - \vartheta^{57} + \vartheta^{153} \\ \vartheta^9 - \vartheta^{201} - \vartheta^{51} + \vartheta^{81} & \vartheta^{171} - \vartheta^{39} - \vartheta^{129} + \vartheta^{81} & \vartheta^{69} - \vartheta^{141} - \vartheta^{111} + \vartheta^{99} \end{pmatrix}, \\
Y_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}(\vartheta^{100} - \vartheta^{140}) & \sqrt{2}(\vartheta^{80} - \vartheta^{200}) & \sqrt{2}(\vartheta^{160} - \vartheta^{20}) \\ \vartheta^{68} - \vartheta^{208} - \vartheta^{128} + \vartheta^{152} & \vartheta^{172} - \vartheta^{32} - \vartheta^{52} + \vartheta^{88} & \vartheta^8 - \vartheta^{148} - \vartheta^{188} + \vartheta^{92} \\ \vartheta^{184} - \vartheta^{44} - \vartheta^{124} + \vartheta^{164} & \vartheta^4 - \vartheta^{136} - \vartheta^{116} + \vartheta^{164} & \vartheta^{176} - \vartheta^{104} - \vartheta^{64} + \vartheta^{76} \end{pmatrix}, \\
Y_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}(\vartheta^{145} - \vartheta^{205}) & \sqrt{2}(\vartheta^{95} - \vartheta^{25}) & \sqrt{2}(\vartheta^{85} - \vartheta^{155}) \\ \vartheta^{107} - \vartheta^{37} - \vartheta^{47} + \vartheta^{23} & \vartheta^{73} - \vartheta^{143} - \vartheta^{193} + \vartheta^{157} & \vartheta^{167} - \vartheta^{97} - \vartheta^{13} + \vartheta^{83} \\ \vartheta^{61} - \vartheta^{131} - \vartheta^{121} + \vartheta^{11} & \vartheta^{179} - \vartheta^{109} - \vartheta^{59} + \vartheta^{11} & \vartheta^1 - \vartheta^{71} - \vartheta^{181} + \vartheta^{169} \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{4.121}$$

と表せる。

最後に、特に固定点における波動関数の値について述べる。波動関数の  $\mathbb{Z}_2$ -even および  $\mathbb{Z}_2$ -odd モードは

$$\psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^\pm}^{j,|M|}(-z) = \pm \psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^\pm}^{j,|M|}(z) \tag{4.122}$$

を満たすので、 $z_I = 0$  では

$$\psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^\pm}^{j,|M|}(0) = \pm \psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^\pm}^{j,|M|}(0) \quad (4.123)$$

より  $\mathbb{Z}_2$ -odd モードの波動関数の値が 0 となる。また、(4.22) より

$$\psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^\pm}^{j,|M|}\left(\frac{1}{2}\right) = \psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^\pm}^{j,|M|}\left(-\frac{1}{2}\right) \quad (4.124)$$

$$\psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^\pm}^{j,|M|}\left(\frac{\tau}{2}\right) = \psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^\pm}^{j,|M|}\left(-\frac{\tau}{2}\right) \quad (4.125)$$

が成り立つので、(4.122) より  $z_I = 1/2, \tau/2$  でもそれぞれ

$$\psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^\pm}^{j,|M|}\left(\frac{1}{2}\right) = \pm \psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^\pm}^{j,|M|}\left(\frac{1}{2}\right) \quad (4.126)$$

$$\psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^\pm}^{j,|M|}\left(\frac{\tau}{2}\right) = \pm \psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^\pm}^{j,|M|}\left(\frac{\tau}{2}\right) \quad (4.127)$$

となり  $\mathbb{Z}_2$ -odd モードの波動関数の値が 0 となる。一方、 $z_I = (\tau + 1)/2$  では、(4.22) より

$$\psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^\pm}^{j,|M|}(z + \tau + 1) = e^{i\pi M} e^{i\frac{2\pi M}{2\text{Im}\tau} \text{Im}(\bar{\tau}+1)z} \psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^\pm}^{j,|M|}(z) \quad (4.128)$$

となり

$$\psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^\pm}^{j,|M|}\left(\frac{\tau + 1}{2}\right) = e^{i\pi M} \psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^\pm}^{j,|M|}\left(-\frac{\tau + 1}{2}\right) \quad (4.129)$$

が成り立つので、(4.122) より

$$\psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^\pm}^{j,|M|}\left(\frac{\tau + 1}{2}\right) = \pm e^{i\pi M} \psi_{T^2/\mathbb{Z}_2^\pm}^{j,|M|}\left(\frac{\tau + 1}{2}\right) \quad (4.130)$$

となり、 $M$  が偶数のとき  $\mathbb{Z}_2$ -odd モードの波動関数の値が 0 となり、 $M$  が奇数のとき  $\mathbb{Z}_2$ -even モードの波動関数の値が 0 となる。

## 4.2.2 $T^2/\mathbb{Z}_2$ におけるモジュライ対称性

$T^2/\mathbb{Z}_2$  においてはモジュライパラメータ  $\tau$  に対する制限はなく  $T^2$  と同様にモジュライ対称性を持っている。 $T^2/\mathbb{Z}_2$  上の波動関数は (4.116), (4.117) のように  $T^2$  の線形結合で表される。これより、 $T^2/\mathbb{Z}_2$  上の波動関数に対する  $\gamma^* = S, T, CP$  の表現は

$$\rho^+(\tilde{S})_{jk} = e^{i\pi/4} \frac{2}{\sqrt{|M|}} \cos(2\pi ijk/|M|), \quad \rho^-(\tilde{S})_{jk} = e^{i\pi/4} \frac{2i}{\sqrt{|M|}} \sin(2\pi ijk/|M|) \quad (4.131)$$

$$\rho^\pm(\tilde{T})_{jk} = e^{i\pi j^2/|M|} \delta_{jk} \quad (4.132)$$

$$\rho^\pm(\widetilde{CP})_{jk} = e^{i\pi/2} \delta_{jk} \quad (4.133)$$

となる。ただし、 $\rho^+(\rho^-)$  は  $\mathbb{Z}_2$ -even(-odd) モードに対する表現であり、 $\rho^+(\tilde{S})_{jk}$  において、 $j$  または  $k$  が  $0, |M|/2$  となるとき (4.131) を  $1/\sqrt{2}$  倍する。つまり  $j, k$  がともに  $0$  または  $|M|/2$  であるときは  $1/2$  倍される。これより、(4.88) における  $\delta_{|M|-j,k}$  が  $\rho^\pm(\tilde{S})_{jk}^2$  および  $[\rho^\pm(\tilde{S})\rho^\pm(\tilde{T})]_{jk}^3$  において  $\delta_{|M|-j,k} \rightarrow \pm\delta_{jk}$  と変更される。この変更は (4.28) から (4.115) への変更と整合する。しかし、表現  $\rho$  が満たす代数は (4.90)-(4.92) および (4.108), (4.110) と変わらない。また、全体の保型因子  $\tilde{J}_{1/2}(\tilde{\gamma}^*, \tau)$  は変化しない。ただし、 $\mathbb{Z}_2$ -even モードおよび  $\mathbb{Z}_2$ -odd モードがそれぞれ独立にモジュライ変換のもとで閉じており、 $T^2$  の場合と比べて表現が表 4.1 のようにより小さな次元に直和分解される。

### 4.3 $S^2$ フラックスコンパクト化

前節で  $T^2/\mathbb{Z}_2$  オービフォールドコンパクト化によって 3 世代カイラルフェルミオンを得るために複数通り考えることができるようになり、標準模型を再現し得ることがわかった。一方で、幾何学的には大部分が平坦で波動関数による解析が可能であるが 4 つの特異点を持っており、幾何学的に非自明な構造がその特異点に集約されていると考えられる。本節では、 $T^2/\mathbb{Z}_2$  と同じトポロジー構造を持つ、すなわち、トポロジー不変量であるオイラー数が同じ ([23]) 2 次元球面  $S^2$  上の場について議論する。本節は [24] に基づく。

2 次元球面  $S^2$  は、図 4.5 のように球面上のある 1 点 (北極点) から複素平面  $\mathbb{C}$  上に射影して考えることができる ( $S^2 \simeq \mathbb{CP}^1$ )。射影する複素平面  $\mathbb{C}$  を球の中心を通り赤道を通る面とする。球の半径を  $R$  として球面座標のパラメータ  $(R, \theta, \varphi)$  を用いてデカルト座標系で表した  $S^2$  上の点  $(R \sin \theta \cos \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, -R \cos \theta)$  を、北極点  $(0, 0, R)$  から  $\mathbb{C}$  上に射影したときの座標は、 $(R \tan(\theta/2) \cos \varphi, R \tan(\theta/2) \sin \varphi, 0)$  と表せる。一方、複素平面  $\mathbb{C}$  の座標  $z'$  を次のように定義する。すなわち、デカルト座標で  $(R \cos \varphi, R \sin \varphi, 0)$  と表される  $S^2$  との交点を座標  $z'$  で  $(\text{Re} z', \text{Im} z') = (R \cos \varphi, R \sin \varphi)$  と表す。このとき、射影した点を座標系  $z'$  を用いて表すと、 $|z'| = \tan(\theta/2)$  と表せる。

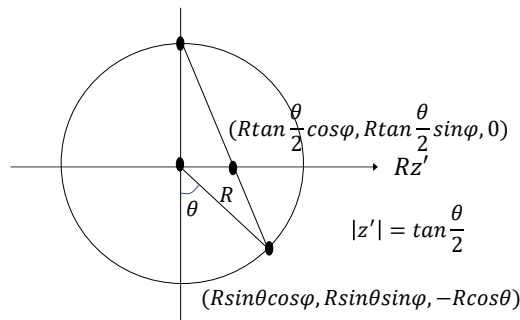


図 4.5:  $S^2 \simeq \mathbb{CP}^1$



このとき、 $S^2$  の計量は

$$ds^2 = g_{ij}dy^i dy^j = 2h_{\mu\nu}dz'^{\mu} dz'^{\nu} \quad (4.134)$$

$$g = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (4.135)$$

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 2R^2 \cos^4 \frac{\theta}{2} \\ 2R^2 \cos^4 \frac{\theta}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2R^2}{(1+|z'|^2)^2} \\ \frac{2R^2}{(1+|z'|^2)^2} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.136)$$

となり、 $S^2$  の面積  $\mathcal{A}$  は  $\mathcal{A} = 4\pi R^2$  となる。ただし、 $dy^1 = d\theta$ ,  $dy^2 = d\varphi$  とする。これに伴い、 $T^2$  での議論同様、2次元 Clifford 代数  $\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\delta^{ab}$  ( $a, b = 1, 2$ ) を満たす

$$\gamma^1 = \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (4.137)$$

から  $\{\gamma^{z'}, \gamma^{\bar{z}'}\} = 2h^{z'\bar{z}'}$  となるような  $\gamma^{z'}, \gamma^{\bar{z}'}$  を導く。そのために、2次元直交座標系から  $z'$  で張れる複素座標系に射影する2脚場  $e_{\mu}^a$  を  $h_{\mu\nu} = e_{\mu}^a e_{\nu}^b \delta_{ab}$  を満たすように導入すると以下のように得られる。

$$e = \begin{pmatrix} \frac{R}{1+|z'|^2} & \frac{R}{1+|z'|^2} \\ \frac{-iR}{1+|z'|^2} & \frac{iR}{1+|z'|^2} \end{pmatrix} \quad (4.138)$$

このとき、 $\gamma^{z'} \equiv (e^{-1})_a^{z'} \gamma^a$ ,  $\gamma^{\bar{z}'} \equiv (e^{-1})_b^{\bar{z}'} \gamma^b$  で定義される

$$\gamma^{z'} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} 0 & 1+|z'|^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{\bar{z}'} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1+|z'|^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.139)$$

を導入することで  $\{\gamma^{z'}, \gamma^{\bar{z}'}\} = 2h^{z'\bar{z}'}$  が満たされる。また、 $S^2$  は曲がっているためスピン接続  $\frac{1}{2}\omega_{\mu ab}\Sigma^{ab}$  を考える必要がある。ここで、スピン接続場  $\omega_{\mu ab}$  は  $\partial_{\mu}e_{\nu}^a - \Gamma_{\mu\nu}^{\kappa}e_{\kappa}^a + \omega_{\mu b}^a e_{\nu}^b = 0$  を満たし、 $\Gamma_{\mu\nu}^{\kappa}$  は Levi-Civita 接続で  $\Gamma^{\kappa}h_{\kappa\lambda} = \frac{1}{2}(\partial_{\mu}h_{\nu\lambda} + \partial_{\nu}h_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda}h_{\mu\nu})$  と表せるため、 $h_{\mu\nu} = e_{\mu}^a e_{\nu}^b \delta_{ab}$  を用いて

$$\omega_{\mu}^{ab} = \frac{1}{2}e^{a\nu}(\partial_{\mu}e_{\nu}^b - \partial_{\nu}e_{\mu}^b) - \frac{1}{2}e^{b\nu}(\partial_{\mu}e_{\nu}^a - \partial_{\nu}e_{\mu}^a) - \frac{1}{2}e^{a\psi}e^{b\sigma}(\partial_{\psi}e_{\sigma c} - \partial_{\sigma}e_{\psi c})e_{\mu}^c \quad (4.140)$$

と表せる。(4.138) より

$$\omega_{z'}^{12} = \frac{-i\bar{z}'}{1+|z'|^2}, \quad \omega_{\bar{z}'}^{12} = \frac{iz'}{1+|z'|^2} \quad (4.141)$$

が得られる。またその生成子  $\Sigma^{ab}$  は  $\Sigma^{ab} = \frac{1}{4}[\gamma^a, \gamma^b]$  より

$$\Sigma^{12} = \frac{i\sigma^3}{2} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.142)$$

となる。

さて、この  $S^2$  上に  $T^2$  同様  $U(N)$  ゲージ場の  $U(1)$  方向に以下のような一様 magnetic flux

$$\int_{S^2} F = \begin{pmatrix} 2\pi M'_a \mathbb{I}_{N_a} & \\ & 2\pi M'_b \mathbb{I}_{N_b} \end{pmatrix}, \quad N_a + N_b = N, \quad (M'_{a,b} \in \mathbb{Z}) \quad (4.143)$$

が入るとき、 $U(N)$  ゲージ対称性は  $U(N_a) \times U(N_b)$  ゲージ対称性に破れる。この magnetic flux を与えるゲージ場の強さ  $F$  は

$$\begin{aligned} F(z', \bar{z}') &= F_{z'\bar{z}'} dz' \wedge d\bar{z}' \\ &= \frac{2\pi}{4\pi R^2} \frac{4R^2}{(1+|z'|^2)^2} \begin{pmatrix} M'_a \mathbb{I}_{N_a} & \\ & M'_b \mathbb{I}_{N_b} \end{pmatrix} \frac{i}{2} dz' \wedge d\bar{z}' \\ &= \frac{2\pi M'_i}{4\pi R^2} \frac{4R^2}{(1+|z'|^2)^2} \mathbb{I}_{N_i} \frac{i}{2} dz' \wedge d\bar{z}' \end{aligned} \quad (4.144)$$

となる。これを導くゲージ場  $A$  は、 $F = dA$  から

$$\begin{aligned} A(z', \bar{z}') &= A_{z'} dz' + A_{\bar{z}'} d\bar{z}' \\ &= -\frac{i}{4} \frac{2\pi M'_i}{4\pi R^2} \frac{4R^2}{1+|z'|^2} \bar{z}' \mathbb{I}_{N_i} dz' + \frac{i}{4} \frac{2\pi M'_i}{4\pi R^2} \frac{4R^2}{1+|z'|^2} z' \mathbb{I}_{N_i} d\bar{z}' \end{aligned} \quad (4.145)$$

となる。また、共偏微分は

$$D_{z'} = \partial_{z'} + \omega_{z'12} \Sigma^{12} - iA_{z'} \quad (4.146)$$

で与えられて、 $U(N)$  ゲージノの  $S^2$  上の場

$$\psi(z', \bar{z}') = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}, \quad \psi_{\pm} = \begin{pmatrix} \lambda_{\pm}^{aa} & \lambda_{\pm}^{ab} \\ \lambda_{\pm}^{ba} & \lambda_{\pm}^{bb} \end{pmatrix} \quad (\psi_- = \psi_+^\dagger) \quad (4.147)$$

のゼロモード Dirac 方程式は

$$\begin{aligned} i(\gamma^{z'} D_{z'} + \gamma^{\bar{z}'} \bar{D}_{\bar{z}'}) \psi(z', \bar{z}') &= i \frac{1+|z'|^2}{R} \begin{pmatrix} 0 & \partial_{z'} - \frac{i}{2} \omega_{z'} - iA_{z'} \\ \partial_{\bar{z}'} + \frac{i}{2} \omega_{z'} - iA_{z'} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = 0 \\ \frac{i}{R} \begin{pmatrix} \left\{ (1+|z'|^2) \partial_{\bar{z}'} - \frac{z'}{2} \right\} \lambda_+^{aa} & \left\{ (1+|z'|^2) \partial_{\bar{z}'} - \frac{z'}{2} (1-M') \right\} \lambda_+^{ab} \\ \left\{ (1+|z'|^2) \partial_{\bar{z}'} - \frac{z'}{2} (1+M') \right\} \lambda_+^{ba} & \left\{ (1+|z'|^2) \partial_{\bar{z}'} - \frac{z'}{2} \right\} \lambda_+^{bb} \end{pmatrix} &= 0 \\ \frac{i}{R} \begin{pmatrix} \left\{ (1+|z'|^2) \partial_{z'} - \frac{\bar{z}'}{2} \right\} \lambda_-^{aa} & \left\{ (1+|z'|^2) \partial_{z'} - \frac{\bar{z}'}{2} (1+M') \right\} \lambda_-^{ab} \\ \left\{ (1+|z'|^2) \partial_{z'} - \frac{\bar{z}'}{2} (1-M') \right\} \lambda_-^{ba} & \left\{ (1+|z'|^2) \partial_{z'} - \frac{\bar{z}'}{2} \right\} \lambda_-^{bb} \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned} \quad (4.148)$$

となる。ただし、 $M' = M'_a - M'_b$  とする。この方程式を解くための条件として  $S^2$  全体で収束して規格化可能であることを課すと、 $M' = 0$  すなわち  $\lambda_{\pm}^{aa}, \lambda_{\pm}^{bb}$  はゼロモード解がなく、 $M'$  が正(負) のとき  $\lambda_{+}^{ab}$  と  $\lambda_{-}^{ba} = \overline{\lambda_{+}^{ab}}$  ( $\lambda_{+}^{ba}$  と  $\lambda_{-}^{ab} = \overline{\lambda_{+}^{ba}}$ ) のみ解となり

$$\psi_{S^2}^{|M'|-1}(z', \bar{z}') = \frac{f^{|M'|-1}(z')}{(1 + |z'|^2)^{\frac{|M'|-1}{2}}} \quad (4.149)$$

が得られる。ただし、 $z'$  の正則関数を  $f^{|M'|-1}(z')$  として  $S^2$  全体で収束するためには  $|M'|-1$  次多項式であり  $|M'|-1$  個の自由度がある。これより、 $|M'|-1$  世代のカイラルフェルミオンが得られる。なお、 $S^2$  が曲がっていることによるスピン接続の寄与のために有効 magnetic flux が1小さくなる。そこで改めて有効 flux  $|M'|_{eff} = |M'|-1$  とする。また、 $T^2$  と同様にして

$$\Delta \phi_{S^2}^{|M'|}(z' \bar{z}') = m^2 \phi_{S^2}^{|M'|}(z' \bar{z}') \quad (4.150)$$

$$m^2 = \frac{2\pi|M'|}{\mathcal{A}'}, \quad \phi_{S^2}^{|M'|}(z', \bar{z}') = \psi_{S^2}^{|M'|}(z', \bar{z}') = \frac{f^{|M'|}(z')}{(1 + |z'|^2)^{\frac{|M'|}{2}}} \quad (4.151)$$

と、質量の2乗が  $m^2 = \frac{2\pi|M'|}{\mathcal{A}'}$  のスカラー場が得られる。ただし、スカラー場  $\phi_{S^2}^{|M'|}(z', \bar{z}')$  は  $S^2$  が曲がっていることによるスピン接続の寄与がないため  $|M'|_{eff} = |M'|$  である。また、スカラー場においては  $M' = 0$  のゼロモード解は  $S^2$  上で定数場となる。さらに、 $U(N)$  ゲージ場の  $S^2$  方向にベクトルの足を持つ、 $U(N_a) \times U(N_b)$  のもとで  $(N_a, \bar{N}_b)$  表現 ( $(\bar{N}_a, N_b)$  表現) となるゲージ場  $A_{z,S^2}^{ab}, A_{\bar{z},S^2}^{ab}$  ( $A_{z,S^2}^{ba} = \overline{A_{\bar{z},S^2}^{ab}}, A_{\bar{z},S^2}^{ba} = \overline{A_{z,S^2}^{ab}}$ ) についても、 $T^2$  と同様に、ゲージ固定条件

$$h^{z\bar{z}} (D_z A_{\bar{z},S^2}^{ab} + \bar{D}_{\bar{z}} A_{z,S^2}^{ab}) = 0 \quad (4.152)$$

に対して各項を0にするように解いて、 $M$  が正(負) のとき  $A_{\bar{z},S^2}^{ab} = 0$  ( $A_{z,S^2}^{ab} = 0$ ) で、 $A_{S^2,z}^{ab}$  ( $A_{\bar{z},S^2}^{ab}$ ) が  $\psi_{S^2}^{j,|M|}$  となり、このベクトル場  $A_{z,S^2}^{ab}$  の運動方程式から

$$\Delta A_{z,S^2}^{ab} + 2iF_{z\bar{z}} h^{\bar{z}z} A_{z,S^2}^{ab} = m^2 A_{z,S^2}^{ab} \quad (4.153)$$

$$m^2 = -\frac{2\pi|M'|}{\mathcal{A}'}, \quad A_{z,S^2}^{ab} = \psi_{S^2}^{j,|M|} \quad (4.154)$$

と質量が負のタキオンモードが得られる。ただし、 $\Gamma_{z\bar{z}}^z = \Gamma_{\bar{z}z}^{\bar{z}} = 0$  であるため  $S^2$  が曲がっている寄与を受けず、固有関数はスカラー場と同じになる。

これより、適当な6次元コンパクト化をすると、コンパクト空間のベクトル成分による負質量とそれ以外のスカラー成分による正質量が打ち消し合い0質量6次元コンパクト空間ベクトルが得られる。ただし、0質量6次元コンパクト空間カイラルスピノルとは0質量モード数が異なるために超対称性はない。

## 第5章 $T^2/\mathbb{Z}_2$ オービフォールド特異点のブローアップ

前章では様々な2次元コンパクト化についてレビューしたが、特に  $T^2/\mathbb{Z}_2$  オービフォールドは4つの特異点を持っており、この  $T^2/\mathbb{Z}_2$  が  $S^2$  と同じトポロジー構造を持つことに着目する。そこで本章では、 $T^2/\mathbb{Z}_2$  特異点近傍を  $S^2$  の一部に置き換えて滑らかに接続することで特異点を滑らかに(ブローアップ)して、特異点近傍では曲率を持つような  $T^2/\mathbb{Z}_2$  オービフォールドを変形した幾何学上の波動関数を求めて、それを用いて現象が  $T^2/\mathbb{Z}_2$  オービフォールドのときと比べてどのように変化するかを議論する。本章は私が携わった研究である [25, 26] に基づいている。

はじめに、 $T^2/\mathbb{Z}_2$  特異点をブローアップして滑らかにする方法について議論する。まず、1つの  $T^2/\mathbb{Z}_2$  特異点近傍を特異点からの距離  $r$  で切り取ると、 $\mathbb{Z}_2$  同一視を考慮すると中心角  $\pi$  で切り口が半径  $r/2$  の円錐形が切り取られたと考えることができる。そこに、滑らかに接続するように  $S^2$  の一部を埋め込むためには、図 5.1 より  $\theta_0 = \pi/3$  となり、半径  $R = r/\sqrt{3}$  の  $S^2$  の  $1/4$  を埋め込む必要がある。

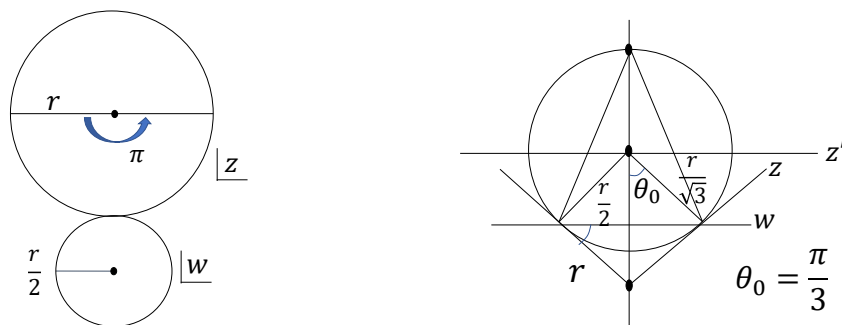


図 5.1: 左図は座標  $z$  で表される  $T^2/\mathbb{Z}_2$  から切り取られる円錐の展開図を示す。右図は座標  $z$  で表される  $T^2/\mathbb{Z}_2$  から切り取られる円錐とそこに埋め込まれる座標  $z'$  で表される半径  $R = r/\sqrt{3}$  の  $S^2$  の  $1/4$  を示す。なお、切り口の座標を  $w$  で表す。

なお、他3つの  $T^2/\mathbb{Z}_2$  特異点も同様にして考えることができ、 $S^2$  の全領域を張り付けることができるため、 $T^2/\mathbb{Z}_2$  は  $S^2$  と同相の関係にあることがわかる。

では、このようにして特異点をブローアップした幾何上の波動関数について議論する。特に、

特異点  $z_I = 0$  のブローアップ<sup>1</sup>を中心として議論する。ただし、前章における設定を用いる。すなわち、 $T^2/\mathbb{Z}_2$  の座標系を  $z$  で表してもとの  $T^2$  全体で有効 magnetic flux  $|M|$  を感じる<sup>1</sup>波動関数

$$\phi_{T^2/\mathbb{Z}_2}^{j,|M|}(z) = \mathcal{N}^{j,|M|} e^{-\frac{\pi|M|}{2\text{Im}\tau}|z|^2} h^{j,|M|}(z) \quad (5.1)$$

$$h^{j,|M|}(z) = \begin{cases} g^{j,|M|}(z), & (j = 0, \frac{|M|}{2}, \mathbb{Z}_2\text{-even}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (g^{j,|M|}(z) + g^{|M|-j,|M|}(z)), & (0 < j < \frac{|M|}{2}, \mathbb{Z}_2\text{-even}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (g^{j,|M|}(z) - g^{|M|-j,|M|}(z)), & (0 < j < \frac{|M|}{2}, \mathbb{Z}_2\text{-odd}) \end{cases} \quad (5.2)$$

$$g^{j,|M|}(z) = e^{\frac{\pi|M|}{2\text{Im}\tau}z^2} \vartheta \left[ \begin{matrix} j \\ 0 \end{matrix} \right] (|M|z, |M|\tau) \quad (5.3)$$

$$\mathcal{N}_0^{j,|M|} = \left( \frac{2|M|\text{Im}\tau}{\mathcal{A}^2} \right)^{1/4} \quad (5.4)$$

と、 $S^2$  の座標系を  $z'$  で表して  $S^2$  全体で有効 magnetic flux  $|M'|$  を感じる波動関数

$$\phi_{S^2}^{j,|M'|}(z') = \mathcal{N}'^{j,|M'|} \frac{f^{j,|M'|}(z')}{(1 + |z'|^2)^{\frac{|M'|}{2}}} \quad (5.5)$$

を用いる。ここで、 $f^{|M'|}(z')$  は  $S^2$  部分における  $z'$  で表される正則関数で  $g^{j,|M|}(z)$ ,  $h^{j,|M|}(z)$  はそれぞれ (5.3), (5.2) のように定義した  $T^2$  ならびに  $T^2/\mathbb{Z}_2$  における  $z$  で表される正則関数である。 $\mathcal{N}^{j,|M|}$ ,  $\mathcal{N}'^{j,|M'|}$  はそれぞれ  $T^2/\mathbb{Z}_2$  部分および  $S^2$  部分の規格化因子である。ただし、 $T^2/\mathbb{Z}_2$  から変形するため、変形する前の  $T^2/\mathbb{Z}_2$  全体の規格化因子が (5.4) の  $\mathcal{N}_0^{j,|M|}$  である。なお、 $M$  を整数として  $j = 0, \dots, |M| - 1$  であるが  $M'$  に関しては  $S^2$  全体になっていないため整数とは限らず  $f^{j,|M'|}(z')$  も整数次多項式とはならない。また、(5.5) において (5.1) と同じ  $j$  を用いている理由は、 $r \rightarrow 0$  極限において (5.1) と (5.5) が滑らかに接続するためである。さて、波動関数 (5.1) と (5.5) を接続点で滑らかに接続するにあたり、 $T^2/\mathbb{Z}_2$  における座標系  $z$  と  $S^2$  における座標系  $z'$  の関係を見る。そこで、図 5.1 のように切り口の点は座標系  $z$  でも  $z'$  でも表せることに注目して、 $z'$  に平行で切り口を通る複素平面上の座標系  $w$  を、切り口の円周上の点の座標が  $\frac{r}{2}e^{i\varphi}$  となるように導入すると、この座標  $w$  は座標  $z$  を用いて  $w = \frac{r}{2}\sqrt{3}z'$  と表せる。ただし  $z'$  は  $\theta, \varphi$  を用いて  $z' = \tan(\theta/2)e^{i\varphi}$  と表せる。また、切り口の円周上の点は座標系  $z$  では  $z = re^{i\varphi/2}$  と表せる。すなわち、切り口の円周上の点  $z = re^{i\varphi/2}$  および  $z' = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\varphi}$  で  $z \leftrightarrow \frac{r}{2}\sqrt{3}z'$  が対応する。これより、波動関数 (5.1) と (5.5) が接続点で滑らかに接続するための条件は

$$\begin{aligned} \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2}^{j,|M|}(z) \Big|_{z=re^{i\varphi/2}} &= \phi_{S^2}^{j,|M'|}(z') \Big|_{z'=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\varphi}} \\ \frac{d\phi_{T^2/\mathbb{Z}_2}^{j,|M|}(z)}{dz} \Big|_{z=re^{i\varphi/2}} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}r} \frac{d\phi_{S^2}^{j,|M'|}(z')}{dz'} \Big|_{z'=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\varphi}} \end{aligned} \quad (5.6)$$

<sup>1</sup> $T^2/\mathbb{Z}_2$  の基本領域は  $T^2$  の半分 (面積  $\text{Im}(\tau)/2$ ) であるため  $T^2/\mathbb{Z}_2$  上の有効 magnetic flux も半分の  $|M|/2$  と考えることができる。

となる<sup>2</sup>。ここで、 $T^2/\mathbb{Z}_2$  の正則関数 (5.2) がブローアップで変化しないと仮定する。また、接続点における座標変換で正則関数の微分は

$$\left. \frac{df^{j,|M'|}(z)}{dz} \right|_{z=re^{i\varphi/2}} = \left. \frac{df^{j,|M'|}(w)}{dw} \right|_{z=\frac{r}{2}e^{i\varphi}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}r} \left. \frac{df^{j,|M'|}(\frac{\sqrt{3}}{2}rz')}{dz'} \right|_{z'=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\varphi}} \quad (5.7)$$

と変化する。これより、(5.1) と (5.5) の非正則部分から接続条件 (5.6) を解くと

$$\frac{\mathcal{N}^{j,|M|}}{\mathcal{N}'^{j,|M'|}} = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{|M'|} e^{\frac{|M'|}{4}} \quad (5.8)$$

$$\frac{|M'|}{4} = \frac{\pi r^2}{2\text{Im}\tau} |M| \quad (5.9)$$

が得られる。(5.8) は規格化因子の比の関係を示し、ブローアップして変形した幾何全体の規格化を定める際に有効になる。一方 (5.9) は、埋め込む  $S^2$  部分の有効 magnetic flux が  $T^2/\mathbb{Z}_2$  から切り取る部分の有効 magnetic flux と等しいということを示している。なぜなら、 $S^2$  全体に有効 magnetic flux  $|M'|$  が入っている状態でその 1/4 を埋め込むため左辺は埋め込む部分の有効 magnetic flux を示しており、一方で面積が  $\text{Im}\tau$  の  $T^2$  全体に有効 magnetic flux  $|M|$  が入って状態でそのうちの面積  $\pi r^2/2$  だけ切り取るため右辺は切り取る部分の有効 magnetic flux を示しているからである。つまり (5.9) はブローアップを通して幾何全体の有効 magnetic flux が変わらないということを示している。なお、 $T^2/\mathbb{Z}_2$  部分の有効 magnetic flux  $|M|$  はスピノル場もスカラー場も  $T^2/\mathbb{Z}_2$  上に入る magnetic flux  $M$  から得られるが、 $S^2$  部分の有効 magnetic flux  $|M'|$  はスカラー場は  $S^2$  上に入る magnetic flux  $M'$  から得られるがスピノル場は  $S^2$  が曲がっていることによるスピン接続の寄与で 1 小さくなるために  $S^2$  上には 1 だけ大きさが増す magnetic flux を入れる必要がある。一方、正則部分に関しては、上記の仮定および (5.7) より

$$f^{j,|M'|}(z') = \begin{cases} g^{j,|M|} \left( \frac{\sqrt{3}}{2}rz' \right), & (j = 0, \frac{|M|}{2}, \mathbb{Z}_2\text{-even}) \\ \sqrt{2}g^{j,|M|} \left( \frac{\sqrt{3}}{2}rz' \right), & (0 < j < \frac{|M|}{2}, \mathbb{Z}_2\text{-even}) \\ 0, & (0 < j < \frac{|M|}{2}, \mathbb{Z}_2\text{-odd}) \end{cases} \quad (5.10)$$

が得られる。ここで、 $g^{|M|-j,M}(z) = g^{j,|M|}(ze^{i\pi})$  が成り立ちまた  $z'$  の偏角は  $z$  の偏角の 2 倍になることを用いている。ただし  $|M'|$  は (5.9) より  $|M|$  で与えられる。(5.10) より、 $\mathbb{Z}_2\text{-even}$  モードのみ  $S^2$  部分に持ち上がることを示しているが、これは  $r \rightarrow 0$  の  $T^2/\mathbb{Z}_2$  極限において (E.1) より  $z_I = 0$  の  $\mathbb{Z}_2\text{-odd}$  モードの値が 0 となることに整合している。同様に、特異点  $z_I = 1/2, \tau/2$  のブローアップにおいても、(4.126),(4.127) より  $\mathbb{Z}_2\text{-even}$  モードのみ  $S^2$  部分に持ち上がる。一

<sup>2</sup>特に、 $|z'| = \tan(\theta/2)$  であり、 $R = r/\sqrt{3}$  で接続点は  $\theta_0 = \pi/3 \leftrightarrow |z'| = \frac{1}{\sqrt{3}}$  より、

$$\frac{\sqrt{3}}{2}rd|z'| \Big|_{|z'|=\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{2R}{1+|z'|^2}d|z'| \Big|_{|z'|=\frac{1}{\sqrt{3}}} = Rd\theta \Big|_{\theta_0=\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow d|z'| \Big|_{|z|=r}$$

となり、図 5.1 からこれが妥当な対応関係であることがわかる。

方特異点  $z_I = (\tau + 1)/2$  ブローアップでは、(4.130) より  $M$  が偶数 (奇数) のとき  $\mathbb{Z}_2$ -even モード ( $\mathbb{Z}_2$ -odd モード) のみ  $S^2$  部分に持ち上がる。以上より、特異点  $z_I = 0$  のブローアップ後の波動関数は以下のように表される。

$$\phi_{\text{up}}^{j,|M|} = \begin{cases} \phi_{S^2}^{j,|M'|} = \frac{\mathcal{N}^{j,|M'|}}{(1 + |z'|^2)^{\frac{|M'|}{2}}} f^{j,|M'|}(z') & (|z'| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}) \\ \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2}^{j,|M|} = \mathcal{N}^{j,|M|} e^{-\frac{\pi|M|}{2\text{Im}\tau}|z|^2} h^{j,|M|}(z) & (|z| \geq r) \end{cases} \quad (5.11)$$

ここで、 $\mathcal{N}^{j,|M'|}$ ,  $\mathcal{N}^{j,|M|}$  はそれぞれ  $S^2$  部分および  $T^2/\mathbb{Z}_2$  部分の規格化因子であり (5.8) を満たす。また、 $f^{j,|M'|}(z')$ ,  $h^{j,|M|}(z)$  はそれぞれ (5.10), (5.2) で表される  $S^2$  部分および  $T^2/\mathbb{Z}_2$  部分の正則関数である。ただし、有効 magnetic flux  $|M'|$  は (5.9) で与えられる。なお、この方法は一般の  $T^2/\mathbb{Z}_N$  オービフォールド特異点のブローアップに適用できる (付録 C)。規格化因子の計算は、

$$\begin{aligned} f_{jk} &\equiv \int_{|z| \geq r} dzd\bar{z} \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2}^{j,M} \overline{\phi_{T^2/\mathbb{Z}_2}^{k,M}} + \int_{|z'| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}} dz'd\bar{z}' \phi_{S^2}^{j,M'} \overline{\phi_{S^2}^{k,M'}} \\ &= \left| \frac{\mathcal{N}^{j,|M|}}{\mathcal{N}_0^{j,|M|}} \right|^2 \delta_{jk} - \int_{|z| \geq r} dzd\bar{z} \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2}^{j,M} \overline{\phi_{T^2/\mathbb{Z}_2}^{k,M}} + \int_{|z'| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}} dz'd\bar{z}' \phi_{S^2}^{j,M'} \overline{\phi_{S^2}^{k,M'}} \end{aligned} \quad (5.12)$$

を計算することで以下のように得られる (詳細の計算は付録 D に示す)。その結果

$$|\mathcal{N}_1^{j,|M|}| \simeq \begin{cases} |\mathcal{N}_0^{j,|M|}|, & (j = 0, \frac{|M|}{2}, \mathbb{Z}_2\text{-even}) \\ |\mathcal{N}_0^{j,|M|}| \left( 1 - \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\pi r^2}{2} \right)^2 \left| \left[ \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2}^{j,|M|} \right]'(0) \right|^2 \right), & (0 < j < \frac{|M|}{2}, \mathbb{Z}_2\text{-even}) \\ |\mathcal{N}_0^{j,|M|}| \left( 1 + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\pi r^2}{2} \right)^2 \left| \left[ \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2}^{j,|M|} \right]'(0) \right|^2 \right), & (0 < j < \frac{|M|}{2}, \mathbb{Z}_2\text{-odd}) \end{cases} \quad (5.13)$$

が得られる。ここで、 $\phi_{T^2/\mathbb{Z}_2}^{j,|M|}$  はブローアップする前のもとの  $T^2/\mathbb{Z}_2$  上の  $\mathbb{Z}_2$ -odd 波動関数であり、 $\left[ \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2}^{j,|M|} \right]'(0) \equiv \left. \frac{d\phi_{T^2/\mathbb{Z}_2}^{j,|M|}}{dz} \right|_{z=0} = 0$  とする。また、 $S^2$  部分の規格化因子  $\mathcal{N}^{j,|M'|}$  は (5.8) で与えられる。これより、 $j = 0, |M|/2$  はブローアップの影響を受けず、特に  $|M| = 2$  はブローアップをしても全く影響を受けないことがわかる。

以上より求められたブローアップ後の波動関数を用いて湯川行列を計算して、クォークの質量および CKM 行列について議論する。なお、(13) と同じ設定を用いる。ただし、湯川結合定数は

$$\begin{aligned} Y_{IJK} &= \int_{T^2/\mathbb{Z}_2} dzd\bar{z} \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2}^{I,5}(z) \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2}^{J+1,7}(z) \overline{\phi_{T^2/\mathbb{Z}_2}^{K+1,12}(z)} \\ &\quad - \sum_{z_I} \int_{|z-z_I| \leq r} dzd\bar{z} \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2}^{I,5}(z) \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2}^{J+1,7}(z) \overline{\phi_{T^2/\mathbb{Z}_2}^{K+1,12}(z)} \end{aligned} \quad (5.14)$$

と計算される。ここで、第一項は (4.119) で得られる  $T^2/\mathbb{Z}_2$  全体の項であり、第二項は  $T^2/\mathbb{Z}_2$  から切り取られる項である。一般にはさらにブローアップした後の  $S^2$  部分の項も必要であるが、この湯川結合は全ての特異点で 0 になるため  $S^2$  部分の湯川結合は消える。(5.14) の第一項は (4.121) となり、第二項は

$$\begin{aligned} & \int_{|z-z_i| \leq r} dz d\bar{z} \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^+}^{I,5}(z) \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^-}^{J+1,7}(z) \overline{\phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^-}^{K+1,12}(z)} \\ & \simeq \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\pi r^2}{2} \right)^2 \left( \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^+}^{I,5} \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^-}^{J+1,7} \right)'(z_I) \overline{\phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^-}^{K,M}(z_I)} \end{aligned} \quad (5.15)$$

と計算される。各特異点での (5.15) の具体的な計算を付録 E に示す。ここで、一つの具体的なモデル設定として、アップクォークタイプの質量を与えるヒッグス場  $H_u$  の真空期待値の方向を  $\cos(\pi/6)H_4 - \sin(\pi/6)H_3$  に、ダウンクォークタイプの質量を与えるヒッグス場  $H_d$  の真空期待値の方向を  $\sin(\pi/6)H_4 + \cos(\pi/6)H_3$  にとり、4 つの特異点を同じブローアップ半径  $r$  でブローアップする。このとき、 $Y_{K=3}$  と  $Y_{K=4}$  は

$$Y_{K=3} = \frac{a}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\eta_{10000} & \sqrt{2}\eta_{6400} & -\sqrt{2}\eta_{400} \\ \eta_{4624} & -\eta_{1024} & \eta_{64} \\ -\eta_{1936} & \eta_{16} & -\eta_{4096} \end{pmatrix} - \pi^3 r^4 \frac{a}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 8\sqrt{2}\eta_{1040} & 96\sqrt{2}\eta_{800} & -8\sqrt{2}\eta_{680} \\ 176\eta_{704} & 16\eta_{464} & 128\eta_{344} \\ 48\eta_{536} & 128\eta_{296} & 16\eta_{176} \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

$$Y_{K=4} = \frac{a}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\eta_{21025} & -\sqrt{2}\eta_{625} & \sqrt{2}\eta_{7225} \\ \eta_{529} & \eta_{5329} & -\eta_{169} \\ \eta_{121} & \eta_{121} & \eta_1 \end{pmatrix} - \pi^3 r^4 \frac{a}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 87\sqrt{2}\eta_{935} & 0 & 63\sqrt{2}\eta_{575} \\ 28\eta_{594} & 126\eta_{359} & 0 \\ 126\eta_{431} & 28\eta_{191} & 98\eta_{71} \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

と近似的に表せる。ここで、全体の規格化因子は  $a = \frac{|\mathcal{N}_1^{I,5} \mathcal{N}_1^{J+1,7} \mathcal{N}_1^{K+1,12}|}{|\mathcal{N}^{K+1,12}|^2}$  である。また、 $\pi\tau = 5.7i$  と仮定して、Jacobi の  $\vartheta$ -関数  $\vartheta^l$  は  $\vartheta^l \simeq e^{-5.7l^2/420}$  となる。ただし、 $\eta_n \equiv e^{-n\pi\text{Im}\tau/420}$  と表記している。この湯川結合を用いて、アップ/チャームクォークのトップクォークに対する質量比およびダウン/ストレンジクォークのボトムクォークに対する質量比、さらに CKM 行列を計算した。これらのブローアップ半径  $r$  依存性を図 5.2 および図 5.3 に示す。ただし、各特異点のブローアップ半径  $r$  が同じであり、最近隣特異点間の距離が 0.5 であるため、 $0 \leq r \leq 0.25$  とした。これらの図からわかるように、クォークの質量および CKM 行列が特異点のブローアップに大きく影響することがわかる。



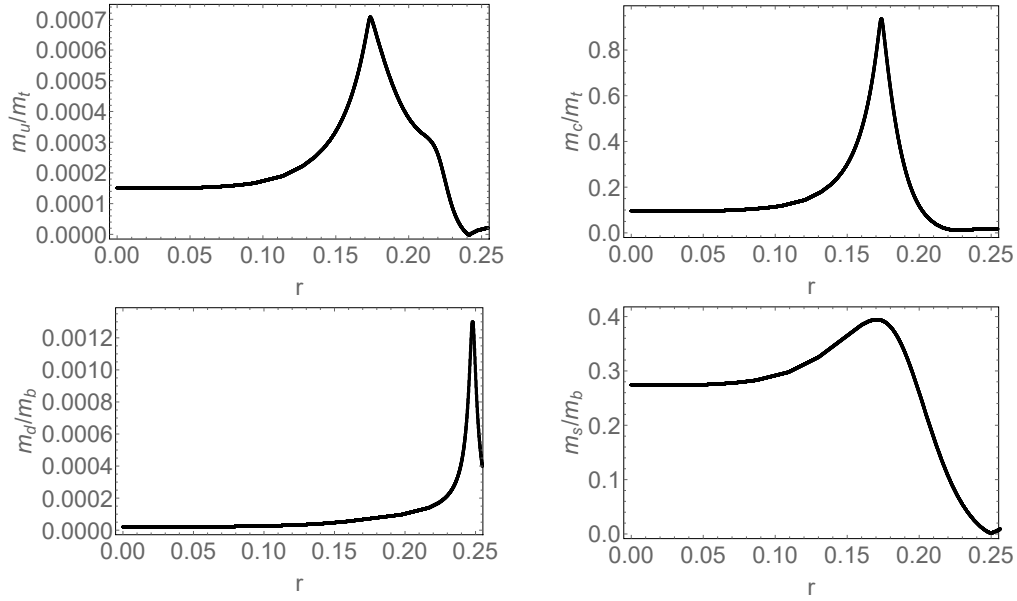


図 5.2: アップクォークのトップクォークに対する質量比  $m_u/m_t$ 、チャームクォークのトップクォークに対する質量比  $m_c/m_t$ 、ダウンクォークのボトムクォークに対する質量比  $m_d/m_b$ 、ストレンジクォークのボトムクォークに対する質量比  $m_s/m_b$  のブローアップ半径  $r$  依存性を示す。

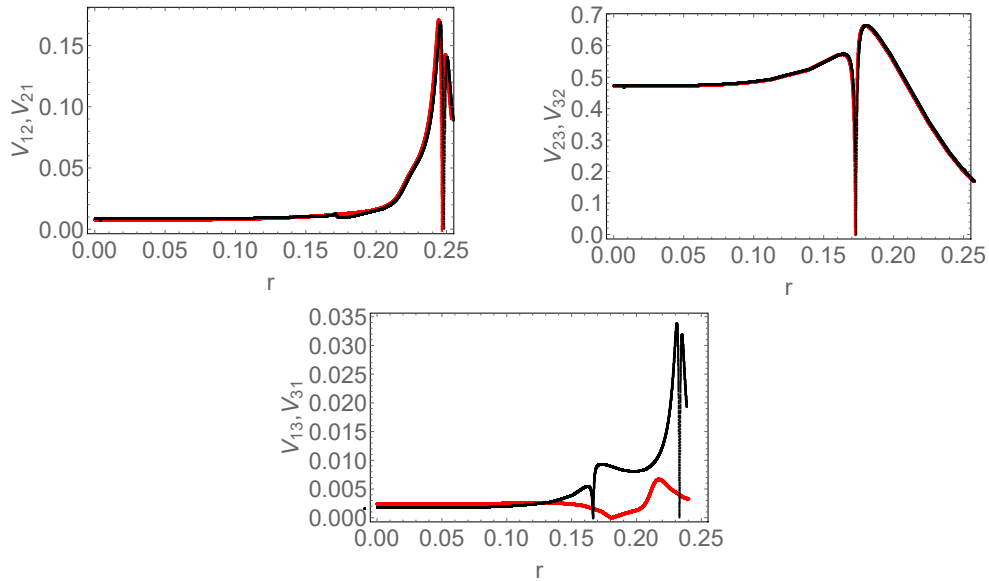


図 5.3: CKM 混合角  $V_{12}(V_{21}), V_{23}(V_{32}), V_{13}(V_{31})$  のブローアップ半径  $r$  依存性を赤線 (黒線) で示す。

特に、表 5.1 に  $r \approx 0.24$  ( $\pi^3 r^4 = 0.105$ ) での質量比および CKM 行列を示す。また、 $r = 0$  の  $T^2/\mathbb{Z}_2$  オービフォールド極限での値と、CKM 行列の実験データ [27] および大統一理論スケール  $2.0 \times 10^{16}$  GeV で評価したクォーク質量 [28] も合わせて示す。

	Pure $T^2/\mathbb{Z}_2$ ( $r = 0$ )	Blow-ups of $T^2/\mathbb{Z}_2$ ( $r \approx 0.24$ )	Observed values
$(m_u, m_c, m_t)/m_t$	$(1.5 \times 10^{-4}, 9.6 \times 10^{-2}, 1)$	$(1.2 \times 10^{-5}, 2.3 \times 10^{-2}, 1)$	$(6.5 \times 10^{-6}, 3.2 \times 10^{-3}, 1)$
$(m_d, m_s, m_b)/m_b$	$(2.5 \times 10^{-5}, 2.7 \times 10^{-1}, 1)$	$(9.7 \times 10^{-4}, 6.3 \times 10^{-3}, 1)$	$(1.1 \times 10^{-3}, 2.2 \times 10^{-2}, 1)$
$ V_{CKM} $	$\begin{pmatrix} 1.0 & 0.0082 & 0.0022 \\ 0.0084 & 0.88 & 0.47 \\ 0.0017 & 0.47 & 0.88 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.99 & 0.17 & 0.0043 \\ 0.17 & 0.96 & 0.22 \\ 0.034 & 0.22 & 0.98 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.97 & 0.22 & 0.0037 \\ 0.22 & 0.97 & 0.042 \\ 0.0090 & 0.041 & 1.0 \end{pmatrix}$

表 5.1: クォーク質量比および CKM 行列の  $r = 0$  ( $T^2/\mathbb{Z}_2$  オービフォールド),  $r \approx 0.24$  での値および実験値を示す。ここで、CKM 行列の実験データ [27] および大統一理論スケールの繰り込み質量 [28] を用いている。

これより、特異点をブローアップすることで観測値に  $O(1)$  程度まで近づけられることがわかる。

## 第6章 総括

本論文では、10次元 IIB 型超弦理論の magnetized D9-ブレーンモデルの有効理論として得られる 10次元  $\mathcal{N} = 1$  Super Yang-Mills 理論を  $T^6 \simeq T^2 \times T^2 \times T^2$  フラックスコンパクト化することで導かれる 4次元有効理論に着目した。特に、標準模型のフェルミオンの 3世代構造が  $T^2$  をはじめとする一つの 2次元空間に由来するとして、magnetic flux の入った 2次元空間上の波動関数を用いて湯川結合を計算して 4次元湯川結合係数を求めた。特に、 $T^2$  を  $\mathbb{Z}_2$  で割った  $T^2/\mathbb{Z}_2$  オービフォールドが持つ特異点の近傍を、同じトポロジー構造を持つ  $S^2$  の一部を用いてブローアップして変形した幾何を考えて、その幾何上の波動関数を求め、さらに得られた波動関数を用いて 4次元湯川結合係数を計算した。そして、得られた湯川結合係数から、特にクォークの質量比およびフレーバー混合行列である CKM 行列を求め、ブローアップ半径の依存性を調べた (図 5.2, 5.3)。ただし、4つの  $T^2/\mathbb{Z}_2$  オービフォールド特異点のブローアップ半径はすべて等しいとしている。そして、特異点ブローアップを行うことで観測値に  $O(1)$  程度まで近づけられるモデルが得られた。

本研究では  $T^2/\mathbb{Z}_N$  オービフォールド特異点ブローアップの手法を確立したが、より高次元のトーラスオービフォールド  $T^4/\mathbb{Z}_N$  および  $T^6/\mathbb{Z}_N$  の特異点ブローアップの手法を確立していきたい。そうすることで、超弦理論から得られるコンパクト空間の中で標準模型を再現し得ると期待されている Calabi-Yau 多様体が再現されると考えられており [29]、具体的な数値解析が困難な Calabi-Yau 多様体上の現象を間接的に解析することが可能になると期待される。

## 謝辞

本研究を行うにあたり多くの方々にご指導いただきました。特に指導教員である小林達夫教授には学問的な指導をはじめ研究生生活に関わる数多くの場面でご指導、ご協力いただきました。心より感謝いたします。また、共同研究者である大塚啓さん(KEK)にはたくさんの議論をしていただき、多くの助言をいただきました。研究にご協力いただきまして感謝いたします。素粒子論研究室の皆様、特に一緒にゼミを行った皆様にも研究生生活の数多くの場面でご協力をしていただきました。この場を借りてお礼申し上げます。

## 付録 A 超対称性

ここでは、時空が持つ Poincaré 対称性を拡張した超対称性について補足する。主に [30] を参考にしている。

$D$ 次元 Minkowski 時空は Lorentz 回転  $SO(1, D-1)$  対称性<sup>1</sup>と並進対称性が合わさった Poincaré 対称性

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}) \quad (\text{A.1})$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = i(\eta_{\mu\rho}P_\nu - \eta_{\nu\rho}P_\mu) \quad (\text{A.3})$$

を持っている。ただし Lorentz 変換の生成子を  $M_{\mu\nu}$ 、並進変換の生成子を  $P_\mu$  とする。特に  $D$ 次元 Minkowski 時空上に表現するとそれぞれ

$$M_{\mu\nu} = i\left(x_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - x_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\right), \quad P_\mu = i \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (\text{A.4})$$

となる。この Poincaré 代数を、さらに反交換関係も用いる超対称代数に拡張することで

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu P_\mu \quad (\alpha, \dot{\alpha} \text{ は } 2^{\frac{D}{2}-1} \text{ 個の Weyl スピノルの成分}) \quad (\text{A.5})$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$[Q_\alpha, P_\mu] = [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, P_\mu] = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$[Q_\alpha, M_{\mu\nu}] = \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu, \alpha}^\beta Q_\beta, \quad [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, M_{\mu\nu}] = \frac{1}{2}\bar{Q}_{\dot{\beta}}\bar{\sigma}_{\mu\nu, \dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \quad (\text{A.8})$$

$$(\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu), \bar{\sigma}^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu))$$

に従うスピン 1/2 だけ変えてボソンとフェルミオンを変換する超対称変換 ( $\mathcal{N} = 1$ ) の生成子  $Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}$  が導入される<sup>2</sup>。ただし  $D$  は偶数とする。特に座標  $x^\mu$  で表される  $D$ 次元 Minkowski 時空に Grassmann 座標  $\theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$  を加えた超空間上に表現すると

$$Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} - i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \bar{Q}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (\text{A.9})$$

<sup>1</sup>Lorentz 回転  $SO(1, D-1)$  対称性は、 $D$ 次元 Minkowski 時空  $\mathbb{R}^{1, D-1}$  上のベクトル  $x \in \mathbb{R}^{1, D-1}$  のノルムの 2 乗  $\|x\|^2 = x_0^2 - \sum_{i=1}^{D-1} x_i^2$  を不変に保つ回転対称性。

<sup>2</sup>一般にスピン 1/2 を変え方が  $\mathcal{N}$  通り存在しても良く、特に (A.6) においてその  $\mathcal{N}$  個の間の内部変換の生成子と関係する。

となる。なお、(A.5)より系全体のエネルギーは0以上であり、特に真空が超対称性をもつとき

$$Q_\alpha|0\rangle = \bar{Q}_{\dot{\alpha}}|0\rangle = 0 \quad (\text{A.10})$$

より真空のエネルギーは0でなければならない。逆に真空のエネルギーが正のとき超対称性は破れている。さらに、(A.7)より超対称変換において質量が保存する。すなわち、超対称性があるとき変換するボソンとフェルミオンの質量は同じである。また、ボソンとフェルミオンの自由度は同じでなければならない。

この超対称変換に伴い、超空間上の超場  $\Phi(x, \theta, \bar{\theta})$  も変換される。特に Grassmann 数の性質を用いて  $\theta, \bar{\theta}$  で展開することで有限項の展開となり、各展開係数は  $\theta, \bar{\theta}$  に応じたスピンを持つ  $x$  に依存した場であり、超対称変換によってスピンの異なる場に変換される。すなわち、ボソンとフェルミオンが入れ替わる。具体的な展開は考える次元によって異なるため本編に譲る。ただし、超場の成分場を用いて  $D$  次元時空上の作用が超対称不変であるためには、全微分が現れる  $\theta, \bar{\theta}$  の最高次の場を用いる必要がある。また、

$$\{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\} = -2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu P_\mu \quad (\text{A.11})$$

$$\{D_\alpha, D_\beta\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{D}_{\dot{\beta}}\} = 0 \quad (\text{A.12})$$

$$\{D_\alpha, Q_\beta\} = \{D_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, Q_\alpha\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0 \quad (\text{A.13})$$

を満たす超共偏微分

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (\text{A.14})$$

を導入することができる。

## 付録B $T^2$ 上の波動関数に対するモジュライ変換性

ここでは、4.1.2節で議論されている  $T^2$ 上の波動関数に対するモジュライ変換の計算の詳細について議論する。

まず、 $M$ を偶数として、規格化因子(4.64)を持つ波動関数(4.63)に対してモジュラー変換(4.52),(4.53)を施すと、

$$\begin{aligned}
S : \psi_{T^2}^{j,|M|}(z, \tau) &\rightarrow \tilde{\psi}_{T^2}^{j,|M|}\left(-\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) \\
&= \tilde{\mathcal{N}}^{j,|M|} e^{i\pi|M|\frac{z}{\tau}\frac{\text{Im}\bar{\tau}z}{\text{Im}\tau}} \sum_{l \in \mathbf{Z}} e^{-i\pi\left(\frac{j}{|M|}+l\right)^2\frac{|M|}{\tau}} e^{-2\pi i|M|\frac{z}{\tau}\left(\frac{j}{|M|}+l\right)} \\
&= \tilde{\mathcal{N}}^{j,|M|} e^{i\pi|M|\frac{z}{\tau}\frac{\text{Im}\bar{\tau}z}{\text{Im}\tau}} e^{i\pi|M|\frac{z^2}{\tau}} \sum_{l \in \mathbf{Z}} e^{-i\pi\left(\frac{j}{|M|}+l+z\right)^2\frac{|M|}{\tau}} \\
&= \tilde{\mathcal{N}}^{j,|M|} e^{i\pi|M|\frac{z}{\tau}\frac{\text{Re}\tau\text{Im}z - \text{Re}z\text{Im}\tau}{\text{Im}\tau}} e^{i\pi|M|\frac{z}{\tau}\frac{\text{Im}\bar{\tau}}{\text{Im}\tau}} (-\tau)^{1/2} e^{i\pi/4} \frac{1}{\sqrt{M}} \\
&\quad \times \sum_{k=0}^{|M|-1} \sum_{l' \in \mathbf{Z}} e^{i\pi\left(\frac{k}{|M|}+l'\right)^2|M|\tau} e^{2\pi i|M|\left(z+\frac{j}{|M|}\right)\left(\frac{k}{|M|}+l'\right)} \\
&= (-\tau)^{1/2} e^{i\pi/4} \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{k=0}^{|M|-1} e^{2\pi i\frac{jk}{|M|}} \\
&\quad \times \tilde{\mathcal{N}}^{j,|M|} e^{i\pi|M|z\frac{\text{Im}z}{\text{Im}\tau}} \sum_{l' \in \mathbf{Z}} e^{i\pi\left(\frac{k}{|M|}+l'\right)^2|M|\tau} e^{2\pi i|M|z\left(\frac{k}{|M|}+l'\right)} \\
&= (-\tau)^{1/2} e^{i\pi/4} \frac{1}{\sqrt{|M|}} \sum_{k=0}^{|M|-1} e^{2\pi i\frac{jk}{|M|}} \psi_{T^2}^{k,|M|}(z, \tau) \tag{B.1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T : \psi_{T^2}^{j,|M|}(z, \tau) &\rightarrow \tilde{\psi}_{T^2}^{j,|M|}(z, \tau + 1) \\
&= \tilde{\mathcal{N}}^{j,|M|} e^{i\pi|M|z\frac{\text{Im}z}{\text{Im}\tau}} \sum_{l \in \mathbf{Z}} e^{i\pi\left(\frac{j}{|M|}+l\right)^2|M|(\tau+1)} e^{2\pi i|M|z\left(\frac{j}{|M|}+l\right)} \\
&= e^{i\pi\frac{j^2}{|M|}} \tilde{\mathcal{N}}^{j,|M|} e^{i\pi|M|z\frac{\text{Im}z}{\text{Im}\tau}} \sum_{l \in \mathbf{Z}} e^{i\pi|M|l} e^{i\pi\left(\frac{j}{|M|}+l\right)^2|M|\tau} e^{2\pi i|M|z\left(\frac{j}{|M|}+l\right)} \\
&= e^{\pi i\frac{j^2}{|M|}} \psi_{T^2}^{j,|M|}(z, \tau) \tag{B.2}
\end{aligned}$$

と変換される。ただし、 $S$  変換においては  $\text{Im}\tau > 0$  であることを考慮して Poisson の和公式を用いており、 $T$  変換においては  $M$  が偶数であることを用いている。ここで、Poisson の和公式とは、関数  $f(x)$  とその Fourier 成分  $\hat{f}(k)$

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-2\pi i k x}$$

に対して

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} f(n) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} \hat{f}(m) \quad (\text{B.3})$$

が成り立つことである。その結果、(4.76)-(4.78) のようにまとめられる。また、表現行列 (4.77), (4.78) は以下の性質を満たす。

$$\begin{aligned} \rho(\tilde{S})_{jl}^2 &= \sum_{k=0}^{|M|-1} \rho(\tilde{S})_{jk} \rho(\tilde{S})_{kl} \\ &= e^{i\pi/2} \frac{1}{|M|} \sum_{k=0}^{|M|-1} e^{2\pi i \frac{k(j+l)}{|M|}} \\ &= i \delta_{|M|-j,l} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} [\rho(\tilde{S})\rho(\tilde{T})]_{jp}^3 &= \sum_{k,l,m,n,o=0}^{|M|-1} \rho(\tilde{S})_{jk} \rho(\tilde{T})_{kl} \rho(\tilde{S})_{lm} \rho(\tilde{T})_{mn} \rho(\tilde{S})_{no} \rho(\tilde{T})_{op} \\ &= e^{3\pi i/4} \frac{1}{|M|\sqrt{|M|}} \sum_{k,m}^{|M|-1} e^{2\pi i \frac{jk}{|M|}} e^{\pi i \frac{k^2}{|M|}} e^{2\pi i \frac{km}{|M|}} e^{\pi i \frac{m^2}{|M|}} e^{2\pi i \frac{mp}{|M|}} e^{\pi i \frac{p^2}{|M|}} \\ &= e^{3\pi i/4} \frac{1}{|M|\sqrt{|M|}} \sum_{k,m}^{|M|-1} e^{\pi i \frac{(m+(k+p))^2}{|M|}} e^{2\pi i \frac{k(j-p)}{|M|}} \\ &= e^{3\pi i/4} e^{i\pi/4} \frac{1}{|M|} \sum_k^{|M|-1} e^{2\pi i \frac{k(j-p)}{|M|}} \\ &= -\delta_{j,p} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

従って、(4.88)-(4.92) を満たす。なお、(変形された)Landsberg-Schaar 関係式

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{n=0}^{p-1} e^{\frac{\pi i n^2 q}{p}} = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{q}} \sum_{n=0}^{q-1} e^{-\frac{\pi i n^2 p}{q}} \quad (\text{B.6})$$

を用いて。ここで  $p, q$  は正の整数でありかつ  $pq$  は偶数である。

次に、 $M$  の偶奇に関わらずモジュライ変換の議論ができるような方法を述べる ([17] に基づく)。 (4.61) において、 $T$  変換で同時に Wilson line も  $+1$  だけゲージ変換させることを考える。



例えば、Wilson line が  $\zeta = \tau$  方向に入っている状態で  $T$  変換して  $\tilde{\zeta} = \tau + 1$  方向へ変化したとすることで考えられる<sup>1</sup>。このとき、(4.61) は

$$\tilde{\psi}_{T^2}^{j,|M|}(z + \tau + 1, \tau + 1) = e^{i\pi|M|\frac{\text{Im}(\tilde{\tau}+1)(z+1)}{\text{Im}\tau}} \tilde{\psi}_{T^2}^{j,|M|}(z, \tau + 1) \quad (\text{B.7})$$

$$= e^{-i\pi|M|} e^{i\pi|M|\frac{\text{Im}(\tilde{\tau}+1)z}{\text{Im}\tau}} \tilde{\psi}_{T^2}^{j,|M|}(z, \tau + 1) \quad (\text{B.8})$$

となり、 $M$  の偶奇に関わらず (4.62) と同じ境界条件を満たすことになる。一方、運動方程式

$$i\mathcal{D}\psi_{T^2}^{j,|M|}(z + \zeta, \tau) = 2i \left( \partial_{\bar{z}} + \frac{\pi M}{2\text{Im}\tau} z \right) \psi_{T^2}^{j,|M|}(z, \tau) = 0 \quad (\text{B.9})$$

を  $T$  変換すると

$$i\tilde{\mathcal{D}}\tilde{\psi}_{T^2}^{j,|M|}(\tilde{z} + \tilde{\zeta}, \tau) = 2i \left( \partial_{\bar{z}} + \frac{\pi M}{2\text{Im}\tau} (z + 1) \right) \tilde{\psi}_{T^2}^{j,|M|}(z + 1, \tau + 1) = 0 \quad (\text{B.10})$$

$$i\mathcal{D}\tilde{\psi}_{T^2}^{j,|M|}(z + 1, \tau + 1) = 2i \left( \partial_{\bar{z}} + \frac{\pi M}{2\text{Im}\tau} z \right) \tilde{\psi}_{T^2}^{j,|M|}(z + 1, \tau + 1) = -i \frac{\pi M}{\text{Im}\tau} \tilde{\psi}_{T^2}^{j,|M|}(z + 1, \tau + 1)$$

となり、 $T$  変換後の基底状態の波動関数は変換前の励起状態の波動関数を用いて展開されると考えられる。実際、 $T$  変換後の波動関数は

$$\begin{aligned} & \tilde{\psi}_{T^2}^{j,|M|}(z + 1, \tau + 1) \\ &= \tilde{\mathcal{N}}^{j,|M|} e^{i\pi|M|(z+1)\frac{\text{Im}z}{\text{Im}\tau}} \sum_{l \in \mathbf{Z}} e^{i\pi\left(\frac{j}{|M|}+l\right)^2|M|(\tau+1)} e^{2\pi i|M|z\left(\frac{j}{|M|}+l\right)} \\ &= (-1)^2 e^{i\pi\frac{j^2}{|M|}} \tilde{\mathcal{N}}^{j,|M|} e^{i\pi|M|z\frac{\text{Im}z}{\text{Im}\tau}} \sum_{l \in \mathbf{Z}} e^{i\pi|M|\left(\frac{\text{Im}z}{\text{Im}\tau} + \frac{j}{|M|} + l\right)} e^{i\pi\left(\frac{j}{|M|}+l\right)^2|M|\tau} e^{2\pi i|M|z\left(\frac{j}{|M|}+l\right)} \\ &= (-1)^2 e^{i\pi\frac{j^2}{|M|}} e^{-\frac{\pi|M|}{8\text{Im}\tau}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( i\sqrt{\frac{\pi|M|}{8\text{Im}\tau}} \right)^n \\ & \quad \times \tilde{\mathcal{N}}^{j,|M|} e^{i\pi|M|z\frac{\text{Im}z}{\text{Im}\tau}} \sum_{l \in \mathbf{Z}} e^{i\pi\left(\frac{j}{|M|}+l\right)^2|M|\tau} e^{2\pi i|M|z\left(\frac{j}{|M|}+l\right)} H_n \left( \sqrt{2\pi|M|\text{Im}\tau} \left( \frac{\text{Im}z}{\text{Im}\tau} + \frac{j}{|M|} + l \right) \right) \\ &= (-1)^2 e^{i\pi\frac{j^2}{|M|}} e^{-\frac{\pi|M|}{8\text{Im}\tau}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \left( i\sqrt{\frac{\pi|M|}{4\text{Im}\tau}} \right)^n \psi_{T^2,n}^{j,|M|}(z, \tau) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

と表せる。ただし、Hermite 関数の母関数

$$e^{-y^2+2xy} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{y^n}{n!} \quad (\text{B.12})$$

と (4.36) を用いている。

<sup>1</sup>一般に Wilson line の方向が変わらなるとすると、モジュライ変換で  $z$  と同様に  $\zeta \rightarrow \tilde{\zeta} = \frac{\zeta}{c\tau+d}$  と変換される。すなわち、 $T$  変換では  $\tilde{\zeta} = \zeta$  と変化しない。

## 付録C $T^2/\mathbb{Z}_N$ オービフォールド特異点のブローアップ

5章で  $T^2/\mathbb{Z}_2$  オービフォールド特異点をブローアップして変形した幾何上の波動関数を求めたが、この手法を一般の  $T^2/\mathbb{Z}_N$  オービフォールドに拡張する。なお、[25]に基づいている。

$T^2/\mathbb{Z}_N$  オービフォールドは、2次元トーラス  $T^2$  をさらに  $\mathbb{Z}_N = \{\rho_m = e^{2\pi im/N} | m \in \mathbb{Z}, \rho_m^N = 1\}$  同一視 ( $z \rightarrow \rho_m z \sim z$ ) して得られる<sup>1</sup>。任意の  $N$  に対して  $z_I = 0$  は固定点となり  $T^2/\mathbb{Z}_N$  特異点の1つとなる。この特異点近傍を  $S^2$  の一部に置き換えて滑らかに接続して特異点をブローアップして、 $T^2/\mathbb{Z}_N$  オービフォールドを変形した幾何学上の波動関数を定める。

$T^2/\mathbb{Z}_2$  と同様に特異点近傍を特異点からの距離  $r$  で切り取ると、 $\mathbb{Z}_N$  同一視を考慮すると中心角  $2\pi/N$  で切り口が半径  $r/N$  の円錐形が切り取られたと考えることができる。そこに、滑らかに接続するように  $S^2$  の一部を埋め込むためには、図 C.1 より  $\cos \theta_0 = 1/N$  を満たし、半径  $R = r \cot \theta_0 = r/\sqrt{N^2 - 1}$  の  $S^2$  の  $(N-1)/2N$  を埋め込む必要がある。

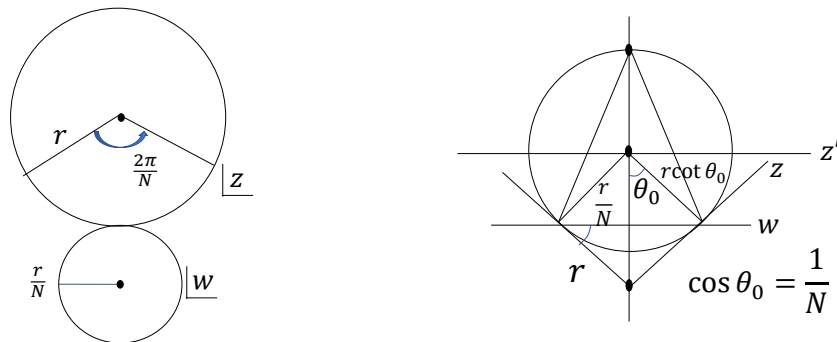


図 C.1: 左図は座標  $z$  で表される  $T^2/\mathbb{Z}_N$  から切り取られる円錐の展開図を示す。右図は座標  $z$  で表される  $T^2/\mathbb{Z}_N$  から切り取られる円錐とそこに埋め込まれる座標  $z'$  で表される半径  $R = r \cot \theta_0 = r/\sqrt{N^2 - 1}$  の  $S^2$  の  $(N-1)/2N$  を示す。なお、切り口の座標を  $w$  で表す。

では、このようにして特異点をブローアップした幾何上の波動関数について議論する。 $T^2/\mathbb{Z}_2$  と同様に  $T^2/\mathbb{Z}_N$  の座標系を  $z$  で表してもとの  $T^2$  全体で有効 magnetic flux  $|M|$  を感じる  $T^2/\mathbb{Z}_N$

<sup>1</sup>任意の格子点を  $\mathbb{Z}_N$  回転した点もまた別の格子点となる条件より、取り得る  $N$  は  $N = 2, 3, 4, 6$  に限られる。さらに、 $N = 2$  を除いてモジュライパラメータ  $\tau$  は  $\tau = \rho$  に制限される。

基底の波動関数は

$$\phi_{T^2/\mathbb{Z}_N^m}^{j,|M|}(z) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} (\rho_m^{-1})^k \phi_{T^2}^{j,|M|}(\rho_k z) \quad (\text{C.1})$$

$$= \mathcal{N}^{j,|M|} e^{-\frac{\pi|M|}{2\text{Im}\tau}|z|^2} h^{j,|M|}(z)$$

$$h^{j,|M|}(z) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} (\rho_m)^k g^{j,|M|}(\rho_k z) \quad (\text{C.2})$$

$$g^{j,|M|}(z) = e^{\frac{\pi|M|}{2\text{Im}\tau}z^2} \vartheta \left[ \begin{matrix} j \\ |M| \end{matrix} \right] (|M|z, |M|\tau) \quad (\text{C.3})$$

と表せて [31–33]、これを座標系  $z'$  で表した  $S^2$  上の有効 magnetic flux  $|M'|$  を感じる波動関数

$$\phi_{S^2}^{j,|M'|}(z') = \mathcal{N}'^{j,|M'|} \frac{f^{j,|M'|}(z')}{(1 + |z'|^2)^{\frac{|M'|}{2}}} \quad (\text{C.4})$$

と滑らかに接続する。そこで、 $T^2/\mathbb{Z}_N$  における座標系  $z$  と  $S^2$  における座標系  $z'$  の関係を見るために、同様に  $z'$  に平行で切り口を通る複素平面上の座標系  $w$  を、切り口の円周上の点の座標が  $\frac{r}{N}e^{i\varphi}$  となるように導入すると、この座標  $w$  は座標  $z$  を用いて  $w = \frac{r}{N}\sqrt{\frac{N+1}{N-1}}z'$  と表せる。ただし  $z'$  は  $\theta, \varphi$  を用いて  $z' = \tan(\theta/2)e^{i\varphi}$  と表せる。また、切り口の円周上の点は座標系  $z$  では  $z = re^{i\varphi/N}$  と表せる。すなわち切り口の円周上の点  $z = re^{i\varphi/N}$  および  $z' = \sqrt{\frac{N-1}{N+1}}e^{i\varphi}$  で  $z \leftrightarrow \frac{r}{N}\sqrt{\frac{N+1}{N-1}}z'$  が対応する。これより、波動関数 (C.1) と (C.4) が接続点で滑らかに接続するための条件は

$$\begin{aligned} \left. \phi_{T^2/\mathbb{Z}_N^m}^{j,|M|}(z) \right|_{z=re^{i\varphi/N}} &= \left. \phi_{S^2}^{j,|M'|}(z') \right|_{z'=\sqrt{\frac{N-1}{N+1}}e^{i\varphi}}, \\ \left. \frac{d\phi_{T^2/\mathbb{Z}_N^m}^{j,|M|}(z)}{dz} \right|_{z=re^{i\varphi/N}} &= \frac{1}{\frac{r}{N}\sqrt{\frac{N+1}{N-1}}} \left. \frac{d\phi_{S^2}^{j,|M'|}(z')}{dz'} \right|_{z'=\sqrt{\frac{N-1}{N+1}}e^{i\varphi}} \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

となる。同様にして (C.1) と (C.4) の非正則部分から接続条件 (C.5) を解くと

$$\frac{\mathcal{N}^{j,|M|}}{\mathcal{N}'^{j,|M'|}} = \left( \frac{N+1}{2N} \right)^{\frac{|M'|}{2}} e^{\frac{N-1}{4}|M'|} \quad (\text{C.6})$$

$$\frac{N-1}{2N}|M'| = \frac{\pi r^2}{N\text{Im}\tau}|M| \quad (\text{C.7})$$

が得られる。(C.6) は規格化因子の比の関係を示している。一方 (C.7) は、埋め込む  $S^2$  部分の有効 magnetic flux が  $T^2/\mathbb{Z}_N$  から切り取る部分の有効 magnetic flux と等しいということを示している。なぜなら、 $S^2$  全体に有効 magnetic flux  $|M'|$  が入っている状態でその  $(N-1)/2N$  を埋め込むため左辺は埋め込む部分の有効 magnetic flux を示しており、一方で面積が  $\text{Im}\tau$  の  $T^2$

全体に有効 magnetic flux  $|M|$  が入って状態でそのうちの面積  $\pi r^2/N$  だけ切り取るため右辺は切り取る部分の有効 magnetic flux を示しているからである。つまり (C.7) はブローアップを通して幾何全体の有効 magnetic flux が変わらないということを示している。一方、正則部分に関しても同様に、接続点における座標変換で正則関数の微分は

$$\left. \frac{df^{j,|M'}(z)}{dz} \right|_{z=re^{i\varphi}/N} = \left. \frac{df^{j,|M'}(w)}{dw} \right|_{z=\frac{r}{N}e^{i\varphi}} = \frac{1}{\frac{r}{N}\sqrt{\frac{N+1}{N-1}}} \left. \frac{df^{j,|M'}(\frac{r}{N}\sqrt{\frac{N+1}{N-1}}z')}{dz'} \right|_{z'=\sqrt{\frac{N-1}{N+1}}e^{i\varphi}} \quad (\text{C.8})$$

となり、

$$f^{j,|M'}(z') = \begin{cases} \sqrt{N}g^{j,|M'}\left(\frac{r}{N}\sqrt{\frac{N+1}{N-1}}z'\right), & (m=0) \\ 0, & (m \neq 0) \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

が得られる。ここで、 $z'$  の偏角が  $z$  の偏角の  $N$  倍になることと、 $m \neq 0$  に対して  $\sum_{k=0}^{N-1} (\rho_m^{-1})^k = 0$  となることを用いている。ただし  $|M'|$  は (C.7) より  $|M|$  で与えられる。(C.9) は同様に  $\mathbb{Z}_N$  不変なモード ( $m=0$ ) のみ  $S^2$  部分に持ち上がりことを示している。以上より、特異点  $z_I = 0$  のブローアップ後の波動関数は以下のように表される。

$$\phi_{\text{up}}^{j,|M|} = \begin{cases} \phi_{S^2}^{j,|M'|} = \frac{\mathcal{N}^{j,|M'|}}{(1+|z'|^2)^{\frac{|M'|}{2}}} f^{j,|M'}(z') & (|z'| \leq \sqrt{\frac{N-1}{N+1}}) \\ \phi_{T^2/\mathbb{Z}_N}^{j,|M|} = \mathcal{N}^{j,|M|} e^{-\frac{\pi|M|}{2\text{Im}\tau}|z|^2} h^{j,|M|}(z) & (|z| \geq r) \end{cases} \quad (\text{C.10})$$

ここで、 $\mathcal{N}^{j,|M'|}$ ,  $\mathcal{N}^{j,|M|}$  はそれぞれ  $S^2$  部分および  $T^2/\mathbb{Z}_N$  部分の規格化因子であり (C.6) を満たす。また、 $f^{j,|M'}(z')$ ,  $h^{j,|M|}(z)$  はそれぞれ (C.9), (C.2) で表される  $S^2$  部分および  $T^2/\mathbb{Z}_N$  部分の正則関数である。ただし、有効 magnetic flux  $|M'|$  は (C.7) で与えられる。

最後に、(C.10) で得られた  $S^2$  部分の波動関数のモジュライ変換性について議論する。(4.52), (4.53) より、まず  $T$  変換ではモジュライパラメータ  $\tau$  のみ変化する。つまり、(C.10) の  $S^2$  部分の波動関数に対する  $T$  変換では非正則部分は変化せず  $T^2$  と同様に (C.3) の Jacobi の  $\theta$ -関数のみ変化する。なお、(C.10) の  $T^2/\mathbb{Z}_N$  部分の波動関数に対する  $T$  変換も (C.3) の Jacobi の  $\theta$ -関数のみ変化する。一方、 $S$  変換においては (4.53) のように  $T^2/\mathbb{Z}_N$  における複素座標  $z$  も変化するが、これより

$$S: r \rightarrow \frac{r}{|\tau|} \quad (\text{C.11})$$

と変換される。また、 $T^2/\mathbb{Z}_N$  における座標  $z$  と  $S^2$  における座標  $z'$  の関係  $z \leftrightarrow \frac{r}{N}\sqrt{\frac{N+1}{N-1}}z'$  より  $S^2$  における座標  $z'$  は

$$S: z' \rightarrow \frac{z'}{\frac{r}{|\tau|}} \quad (\text{C.12})$$

と変換される。これより、(C.10)の $S^2$ 部分の波動関数に対する $S$ 変換において、非正則部分は不変であり正則関数(C.3)が変換される。一方、(C.10)の $T^2/\mathbb{Z}_N$ 部分の波動関数に対する $S$ 変換においても(4.52),(4.53)より非正則部分は不変であり正則関数(C.3)が変換される。すなわち、(C.10)のモジュライ変換性は完全に(C.3)のモジュライ変換性に起因して $S^2$ 部分も $T^2/\mathbb{Z}_N$ 部分も同様の変換性を示す。なお、(C.3)のモジュライ変換性は $T^2$ 上の波動関数に対するモジュライ変換と同じである。

## 付録D $T^2/\mathbb{Z}_2$ 特異点のブローアップ後の 動関数の規格化因子

ここでは、5章において求めた波動関数の規格化因子を求めるための (5.12) の近似計算を行い、その結果について議論する。ただし、以後の近似計算では  $\frac{\pi r^2}{Im\tau} \ll 1$  とする。また、 $\mathcal{N}^{j,|M|} = a$ ,  $\mathcal{N}^{j,|M'|} = b$  としている。

まず、 $0 < j < \frac{M}{2}$  において、(5.12) の第二項の近似計算を行う。

$$\begin{aligned}
& \int_{|z| \leq r} dz d\bar{z} \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^\pm}^{j,M} \overline{\phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^\pm}^{k,M}} \\
&= \frac{|a|^2}{2} \sum_{l,m} e^{\pi i M Re\tau \left[ \left(\frac{j}{M}+l\right)^2 - \left(\frac{k}{M}+m\right)^2 \right]} \int_0^r d|z| |z| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\
& \times \left[ e^{-\pi M Im\tau \left[ \left(\frac{j}{M}+l + \frac{|z| \sin \frac{\varphi}{2}}{Im\tau}\right)^2 + \left(\frac{k}{M}+m + \frac{|z| \sin \frac{\varphi}{2}}{Im\tau}\right)^2 \right]} e^{2\pi i M |z| \cos \frac{\varphi}{2} \left[ \left(\frac{j}{M}+l\right) - \left(\frac{k}{M}+m\right) \right]} \right. \\
& + e^{-\pi M Im\tau \left[ \left(\frac{j}{M}+l - \frac{|z| \sin \frac{\varphi}{2}}{Im\tau}\right)^2 + \left(\frac{k}{M}+m - \frac{|z| \sin \frac{\varphi}{2}}{Im\tau}\right)^2 \right]} e^{-2\pi i M |z| \cos \frac{\varphi}{2} \left[ \left(\frac{j}{M}+l\right) - \left(\frac{k}{M}+m\right) \right]} \\
& \pm e^{-\pi M Im\tau \left[ \left(\frac{j}{M}+l + \frac{|z| \sin \frac{\varphi}{2}}{Im\tau}\right)^2 + \left(\frac{k}{M}+m - \frac{|z| \sin \frac{\varphi}{2}}{Im\tau}\right)^2 \right]} e^{2\pi i M |z| \cos \frac{\varphi}{2} \left[ \left(\frac{j}{M}+l\right) + \left(\frac{k}{M}+m\right) \right]} \\
& \left. \pm e^{-\pi M Im\tau \left[ \left(\frac{j}{M}+l - \frac{|z| \sin \frac{\varphi}{2}}{Im\tau}\right)^2 + \left(\frac{k}{M}+m + \frac{|z| \sin \frac{\varphi}{2}}{Im\tau}\right)^2 \right]} e^{-2\pi i M |z| \cos \frac{\varphi}{2} \left[ \left(\frac{j}{M}+l\right) + \left(\frac{k}{M}+m\right) \right]} \right] \\
& \simeq \frac{|a|^2}{2} \sum_{l,m} e^{\pi i M Re\tau \left[ \left(\frac{j}{M}+l\right)^2 - \left(\frac{k}{M}+m\right)^2 \right]} e^{-\pi M Im\tau \left[ \left(\frac{j}{M}+l\right)^2 + \left(\frac{k}{M}+m\right)^2 \right]} \int_0^r d|z| |z| \\
& \times \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left[ e^{2\pi i M |z| \cos \frac{\varphi}{2} \left[ \left(\frac{j}{M}+l\right) - \left(\frac{k}{M}+m\right) \right]} + e^{-2\pi i M |z| \cos \frac{\varphi}{2} \left[ \left(\frac{j}{M}+l\right) - \left(\frac{k}{M}+m\right) \right]} \right. \\
& \left. \pm e^{2\pi i M |z| \cos \frac{\varphi}{2} \left[ \left(\frac{j}{M}+l\right) + \left(\frac{k}{M}+m\right) \right]} \pm e^{-2\pi i M |z| \cos \frac{\varphi}{2} \left[ \left(\frac{j}{M}+l\right) + \left(\frac{k}{M}+m\right) \right]} \right] \\
& = |a|^2 \sum_{l,m} e^{\pi i M \left[ \tau \left(\frac{j}{M}+l\right)^2 - \bar{\tau} \left(\frac{k}{M}+m\right)^2 \right]} \int_0^r d|z| |z| 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\
& \times \left[ \cos \left( 2\pi M |z| \cos \frac{\varphi}{2} \left[ \left(\frac{j}{M}+l\right) - \left(\frac{k}{M}+m\right) \right] \right) \right. \\
& \left. \pm \cos \left( 2\pi M |z| \cos \frac{\varphi}{2} \left[ \left(\frac{j}{M}+l\right) + \left(\frac{k}{M}+m\right) \right] \right) \right]
\end{aligned}$$

$\mathbb{Z}_2$ -odd に対して、

$$\begin{aligned}
& \simeq |a|^2 \sum_{l,m} e^{\pi i M [\tau(\frac{j}{M}+l)^2 - \bar{\tau}(\frac{k}{M}+m)^2]} \int_0^r d|z| |z| 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\
& \times \left[ -\frac{1}{2} (2\pi M)^2 |z|^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \left( \left[ \left( \frac{j}{M} + l \right) - \left( \frac{k}{M} + m \right) \right]^2 - \left[ \left( \frac{j}{M} + l \right) + \left( \frac{k}{M} + m \right) \right]^2 \right) \right] \\
& = |a|^2 \sum_{l,m} e^{\pi i M [\tau(\frac{j}{M}+l)^2 - \bar{\tau}(\frac{k}{M}+m)^2]} \int_0^r d|z| |z| \int_0^\pi d\varphi \\
& \times 4\pi^2 |z|^2 (1 + \cos \varphi) (j + lM) (k + mM) \\
& = |a|^2 \sum_{l,m} e^{\pi i M [\tau(\frac{j}{M}+l)^2 - \bar{\tau}(\frac{k}{M}+m)^2]} \int_0^r d|z| 4\pi^3 |z|^3 (j + lM) (k + mM) \\
& = |a|^2 \pi^3 r^4 \sum_{l,m} (j + lM) (k + mM) e^{\pi i M [\tau(\frac{j}{M}+l)^2 - \bar{\tau}(\frac{k}{M}+m)^2]} \tag{D.1}
\end{aligned}$$

となる。また  $\mathbb{Z}_2$ -even に対しては、

$$\begin{aligned}
& \simeq |a|^2 \sum_{l,m} e^{\pi i M [\tau(\frac{j}{M}+l)^2 - \bar{\tau}(\frac{k}{M}+m)^2]} \int_0^r d|z| |z| 2 \int_0^\pi d\varphi \\
& \times \left( 1 - \frac{1}{2} (2\pi M)^2 |z|^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \left[ \left( \frac{j}{M} + l \right)^2 + \left( \frac{k}{M} + m \right)^2 \right] \right) \\
& = |a|^2 \sum_{l,m} 2e^{\pi i M [\tau(\frac{j}{M}+l)^2 - \bar{\tau}(\frac{k}{M}+m)^2]} \int_0^r d|z| |z| 2 \int_0^\pi d\varphi \\
& \times (1 - \pi^2 |z|^2 (1 + \cos \varphi) [(j + lM)^2 + (k + mM)^2]) \\
& = |a|^2 \sum_{l,m} e^{\pi i M [\tau(\frac{j}{M}+l)^2 - \bar{\tau}(\frac{k}{M}+m)^2]} \int_0^r d|z| |z| (2\pi - 2\pi^3 |z|^2 [(j + lM)^2 + (k + mM)^2]) \\
& = |a|^2 \pi r^2 \sum_{l,m} e^{\pi i M [\tau(\frac{j}{M}+l)^2 - \bar{\tau}(\frac{k}{M}+m)^2]} \left( 1 - \frac{(\pi r)^2}{2} [(j + lM)^2 + (k + mM)^2] \right) \tag{D.2}
\end{aligned}$$

となる。一方、(5.12) の第三項の  $\phi_{S_{2+}}^{j,M'}$  について、 $\frac{r}{2} \rightarrow r, 2\pi \rightarrow \pi$  を考慮すると、

$$\begin{aligned}
& \int_{|z'| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}} dz' d\bar{z}' \phi_{S^{2+}}^{j, M'} \overline{\phi_{S^{2+}}^{k, M'}} \\
& \simeq |b|^2 \sum_{l, m} 2e^{\pi i M [\tau(\frac{j}{M} + l)^2 - \bar{\tau}(\frac{k}{M} + m)^2]} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left( r \frac{\sqrt{3}}{2} d|z'| \right) r \frac{\sqrt{3}}{2} |z'| \frac{e^{\frac{3}{4} \frac{\pi r^2}{Im\tau} M |z'|^2}}{(1 + |z'|^2)^{\frac{2\pi r^2}{Im\tau} M}} \\
& \times \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi e^{2\pi i M r \frac{\sqrt{3}}{2} |z'| \cos \varphi [(\frac{j}{M} + l) - (\frac{k}{M} + m)]} \\
& = |b|^2 \sum_{l, m} e^{\pi i M [\tau(\frac{j}{M} + l)^2 - \bar{\tau}(\frac{k}{M} + m)^2]} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left( r \frac{\sqrt{3}}{2} d|z'| \right) r \frac{\sqrt{3}}{2} |z'| \frac{e^{\frac{3}{4} \frac{\pi r^2}{Im\tau} M |z'|^2}}{(1 + |z'|^2)^{\frac{2\pi r^2}{Im\tau} M}} \\
& \times 2 \int_0^{\pi} d\varphi \cos \left( 2\pi M r \frac{\sqrt{3}}{2} |z'| \cos \varphi \left[ \left( \frac{j}{M} + l \right) - \left( \frac{k}{M} + m \right) \right] \right) \\
& \simeq |b|^2 \sum_{l, m} 2e^{\pi i M [\tau(\frac{j}{M} + l)^2 - \bar{\tau}(\frac{k}{M} + m)^2]} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left( r \frac{\sqrt{3}}{2} d|z'| \right) r \frac{\sqrt{3}}{2} |z'| \frac{e^{\frac{3}{4} \frac{\pi r^2}{Im\tau} M |z'|^2}}{(1 + |z'|^2)^{\frac{2\pi r^2}{Im\tau} M}} \\
& \times 2 \int_0^{\pi} d\varphi \left( 1 - \frac{1}{2} (2\pi M)^2 \left( r \frac{\sqrt{3}}{2} |z'| \right)^2 \cos^2 \varphi \left[ \left( \frac{j}{M} + l \right) - \left( \frac{k}{M} + m \right) \right]^2 \right) \\
& = |b|^2 \sum_{l, m} 2e^{\pi i M [\tau(\frac{j}{M} + l)^2 - \bar{\tau}(\frac{k}{M} + m)^2]} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left( r \frac{\sqrt{3}}{2} d|z'| \right) r \frac{\sqrt{3}}{2} |z'| \frac{e^{\frac{3}{4} \frac{\pi r^2}{Im\tau} M |z'|^2}}{(1 + |z'|^2)^{\frac{2\pi r^2}{Im\tau} M}} \\
& \times \int_0^{2\pi} d(2\varphi) \left( 1 - \pi^2 \left( r \frac{\sqrt{3}}{2} |z'| \right)^2 (1 + \cos 2\varphi) [(j + lM) - (k + mM)]^2 \right) \\
& = |b|^2 \sum_{l, m} 2e^{\pi i M [\tau(\frac{j}{M} + l)^2 - \bar{\tau}(\frac{k}{M} + m)^2]} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left( r \frac{\sqrt{3}}{2} d|z'| \right) r \frac{\sqrt{3}}{2} |z'| \frac{e^{\frac{3}{4} \frac{\pi r^2}{Im\tau} M |z'|^2}}{(1 + |z'|^2)^{\frac{2\pi r^2}{Im\tau} M}} \\
& \times \left( (2\pi) - (2\pi) \pi^2 \left( r \frac{\sqrt{3}}{2} |z'| \right)^2 [(j + lM) - (k + mM)]^2 \right) \\
& = |b|^2 \sum_{l, m} 2e^{\pi i M [\tau(\frac{j}{M} + l)^2 - \bar{\tau}(\frac{k}{M} + m)^2]} \\
& \times 2\pi \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{r}{2} \right)^2 \left( 1 - \frac{\pi^2}{2} \left( \frac{r}{2} \right)^2 [(j + lM) - (k + mM)]^2 \right) \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{\frac{4\pi r^2}{Im\tau} M} e^{\frac{\pi (\frac{r}{2})^2}{Im\tau} M} \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left( r \frac{\sqrt{3}}{2} d|z'| \right) \left( r \frac{\sqrt{3}}{2} |z'| \right)^3 \frac{\sqrt{3} \pi r}{Im\tau} M \frac{e^{\frac{3}{4} \frac{\pi r^2}{Im\tau} M |z'|^2}}{(1 + |z'|^2)^{\frac{2\pi r^2}{Im\tau} M + 1}} + \dots \right] \\
& \simeq |a|^2 \pi r^2 \sum_{l, m} e^{\pi i M [\tau(\frac{j}{M} + l)^2 - \bar{\tau}(\frac{k}{M} + m)^2]} \left( 1 - \frac{(\pi r)^2}{2} [(j + lM) - (k + mM)]^2 \right) \quad (D.3)
\end{aligned}$$



となる。

同様に  $j = 0, \frac{M}{2}$  において、(5.12) の第二項の近似計算を行う。

$$\begin{aligned}
& \int_{|z| \leq r} dz d\bar{z} \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^+}^{j,M} \overline{\phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^+}^{j,M}} \\
& \simeq |a|^2 \sum_{l,m} e^{\pi i M [\tau(\frac{j}{M}+l)^2 - \bar{\tau}(\frac{k}{M}+m)^2]} \int_0^r d|z| |z| \\
& \times \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\left(\frac{\varphi}{2}\right) e^{2\pi i M |z| \cos \frac{\varphi}{2} [(\frac{j}{M}+l) - (\frac{k}{M}+m)]} \\
& = |a|^2 \sum_{l,m} e^{\pi i M [\tau(\frac{j}{M}+l)^2 - \bar{\tau}(\frac{k}{M}+m)^2]} \int_0^r d|z| |z| 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\
& \times \cos \left( 2\pi i M |z| \cos \frac{\varphi}{2} \left[ \left(\frac{j}{M} + l\right) - \left(\frac{k}{M} + m\right) \right] \right) \\
& \simeq |a|^2 \sum_{l,m} e^{\pi i M [\tau(\frac{j}{M}+l)^2 - \bar{\tau}(\frac{k}{M}+m)^2]} \int_0^r d|z| |z| \int_0^\pi d\varphi \\
& \times (1 - \pi^2 |z|^2 (1 + \cos \varphi) [(j + lM) - (k + mM)]^2) \\
& = |a|^2 \sum_{l,m} e^{\pi i M [\tau(\frac{j}{M}+l)^2 - \bar{\tau}(\frac{k}{M}+m)^2]} \int_0^r d|z| |z| (\pi - \pi^3 |z|^2 [(j + lM) - (k + mM)]^2) \\
& = |a|^2 \frac{\pi r}{2} \sum_{l,m} e^{\pi i M [\tau(\frac{j}{M}+l)^2 - \bar{\tau}(\frac{k}{M}+m)^2]} \left( 1 - \frac{(\pi r)^2}{2} [(j + lM) - (k + mM)]^2 \right) \quad (D.4)
\end{aligned}$$

となる。これは、(D.2) に対して  $\frac{j}{M} + l \rightarrow -(\frac{j}{M} + l)$  とできることと、全体係数が  $(\frac{1}{\sqrt{2}})^2$  倍されることを考慮すると一致することがわかる。一方、(5.12) の第三項の  $\phi_{S^2_+}^{j,M'}$  については、(D.3) の  $(\frac{1}{\sqrt{2}})^2$  倍で、

$$\begin{aligned}
& \int_{|z'| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}} dz' d\bar{z}' \phi_{S^2_+}^{j,M'} \overline{\phi_{S^2_+}^{k,M'}} \\
& \simeq |a|^2 \frac{\pi r^2}{2} \sum_{l,m} e^{\pi i M [\tau(\frac{j}{M}+l)^2 - \bar{\tau}(\frac{k}{M}+m)^2]} \left( 1 - \frac{(\pi r)^2}{2} [(j + lM) - (k + mM)]^2 \right) \quad (D.5)
\end{aligned}$$

となる。  $0 < j < \frac{M}{2}$  と  $j = 0, \frac{M}{2}$  が混ざる場合も、 $T^2/\mathbb{Z}_2$  積分からは、 $j = 0, \frac{M}{2}$  の方に対して  $\frac{j}{M} + l \rightarrow -(\frac{j}{M} + l)$  を考えることで (D.4) と同形で、(D.4) の  $\sqrt{2}$  倍が得られて、 $S^2$  積分からも (D.5) の  $\sqrt{2}$  倍が得られる。

これらより、 $0 < j < \frac{M}{2}$  では、

$$f_{jk}^- \simeq \left| \frac{a}{N} \right|^2 \delta_{jk} - \frac{|a|^2}{2\pi} \left( \frac{\pi r^2}{2} \right)^2 \sum_{l,m} \frac{(4\pi M)^2}{2} \left( \frac{j}{M} + l \right) \left( \frac{k}{M} + m \right) e^{\pi i M \tau \left( \frac{j}{M} + l \right)^2} e^{-\pi i M \bar{\tau} \left( \frac{k}{M} + m \right)^2} \quad (\text{D.6})$$

$$= \left| \frac{a}{N} \right|^2 \left( \delta_{jk} - \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\pi r^2}{2} \frac{d\phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^-}^{j,M}}{dz} \Big|_{z=0} \right) \overline{\left( \frac{\pi r^2}{2} \frac{d\phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^-}^{k,M}}{dz} \Big|_{z=0} \right)} \right)$$

$$f_{jk}^+ \simeq \left| \frac{a}{N} \right|^2 \delta_{jk} + \frac{|a|^2}{2\pi} \left( \frac{\pi r^2}{2} \right)^2 \sum_{l,m} \frac{(4\pi M)^2}{2} \left( \frac{j}{M} + l \right) \left( \frac{k}{M} + m \right) e^{\pi i M \tau \left( \frac{j}{M} + l \right)^2} e^{-\pi i M \bar{\tau} \left( \frac{k}{M} + m \right)^2}$$

$$= \left| \frac{a}{N} \right|^2 \left( \delta_{jk} + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\pi r^2}{2} \frac{d\phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^-}^{j,M}}{dz} \Big|_{z=0} \right) \overline{\left( \frac{\pi r^2}{2} \frac{d\phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^-}^{k,M}}{dz} \Big|_{z=0} \right)} \right) \quad (\text{D.7})$$

となる。ただし、ここでの  $\phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^-}^{j,M}$  はブローアップで切り取られる前の波動関数である。なお、 $[\phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^+}^{j,M}]'(0) = 0$  より寄与しない。一方、 $j = 0, \frac{M}{2}$  が含まれる場合は、

$$f_{jk}^+ \simeq \left| \frac{a}{N} \right|^2 \delta_{jk} \quad (\text{D.8})$$

となる。よって、 $j = 0, \frac{M}{2}$  が含まれる場合は、近似的に補正を受けず直交したままで、規格化条件より  $|a_j| \simeq |N|$  となる。特に、 $M = 2$  のときはこの場合のみなので近似的に補正を受けない。一方  $0 < j < \frac{M}{2}$  の場合は、 $r^4$  項を見ると、ブローアップによって  $\mathbb{Z}^2$ -odd で失われる量が  $\mathbb{Z}^2$ -even へ寄与していると考えられる。

$r^4$  項は1に比べて非常に小さいとすると、規格化において  $f_{jk}^\pm$  ( $j \neq k$ ) が  $f_{jj}^\pm$  ( $j = k$ ) に与える寄与は無視できるほど小さく、 $f_{jj}^\pm = 1$  と考えられる。このとき、

$$|a_j^\pm| = |N| \left( 1 \pm \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi r^2}{2} \right)^2 \left| [\phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^-}^{j,M}]'(0) \right|^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\simeq |N| \left( 1 \mp \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\pi r^2}{2} \right)^2 \left| [\phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^-}^{j,M}]'(0) \right|^2 \right) \quad (\text{D.9})$$

となる。さらに、 $f$  はエルミートであり、また  $r^4$  までではユニタリでもある。このユニタリ行列  $f$  でエルミート行列  $f$  が、全ての固有値が1で対角化されるため、このユニタリ行列  $f$  で変換された波動関数は正規直交基底を成す。このとき、 $\phi^j$  で表す。では、波動関数がどう変換されるかを考える。 $r^4$  までで影響を受けるのは、波動関数が  $r$  に関して0次、つまり  $z = z' = 0$  のときのみ影響を受ける。逆に  $z \neq 0, z' \neq 0$  では波動関数は変化せず ( $\phi^j = \phi^j$ )、直交していると考えられる。よって  $j \neq k$  において  $f_{jk} \neq 0$  に寄与しているのも  $z = z' = 0$  のみである。さ

て、 $z = z' = 0$ において、まず  $\mathbb{Z}_2$ -odd モードは波動関数が0のため影響を受けない。よって、 $j \rightarrow j'$  に対して、

$$f_{jk}^- = \delta_{jk} - \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\pi r^2}{2} \left[ \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2}^j \right]'(0) \right) \overline{\left( \frac{\pi r^2}{2} \left[ \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2}^k \right]'(0) \right)} (1 - \delta_{jk}) \rightarrow \delta_{j'k'} \quad (\text{D.10})$$

を対応させる必要がある。次に、 $\mathbb{Z}_2$ -even モードはこのユニタリ行列  $f$  によって

$$\phi^j(0) = \phi^{j'}(0) + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\pi r^2}{2} \right)^2 \sum_{l' \neq j'} \left( \left[ \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2}^{j'} \right]'(0) \right) \overline{\left( \left[ \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2}^{l'} \right]'(0) \right)} \left( \phi^{l'}(0) \right) \quad (\text{D.11})$$

と表される。ただし、この混合は  $\mathbb{Z}_2$ -odd モードをペアに持つ異なる  $\mathbb{Z}_2$ -even モードがあるとき、すなわち、 $M \geq 5$  で起こる。 $\phi^{j'}(\phi^{k'} = \delta_{j'k'})$  を用いて、 $\phi^j(0) \overline{\phi^k(0)}$  を  $j, k$  基底で  $r^4$  までで評価すると、

$$\begin{aligned} & \phi^j(0) \overline{\phi^k(0)} \\ &= \left( \phi^{j'}(0) + \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi r^2}{2} \right)^2 \sum_{l' \neq j'} \left( \left[ \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2}^{j'} \right]'(0) \right) \overline{\left( \left[ \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2}^{l'} \right]'(0) \right)} \left( \phi^{l'}(0) \right) \right) \\ & \times \overline{\left( \phi^{k'}(0) + \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi r^2}{2} \right)^2 \sum_{m' \neq k'} \left( \left[ \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2}^{k'} \right]'(0) \right) \overline{\left( \left[ \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2}^{m'} \right]'(0) \right)} \left( \phi^{m'}(0) \right) \right)} \\ & \simeq \delta_{jk} - \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi r^2}{2} \left[ \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2}^j \right]'(0) \right) \overline{\left( \frac{\pi r^2}{2} \left[ \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2}^k \right]'(0) \right)} (1 - \delta_{jk}) \\ & + 2 \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi r^2}{2} \left[ \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2}^j \right]'(0) \right) \overline{\left( \frac{\pi r^2}{2} \left[ \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2}^k \right]'(0) \right)} (1 - \delta_{jk}) \\ & = \delta_{jk} + \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi r^2}{2} \left[ \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2}^j \right]'(0) \right) \overline{\left( \frac{\pi r^2}{2} \left[ \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2}^k \right]'(0) \right)} (1 - \delta_{jk}) = f_{jk}^+ \quad (\text{D.12}) \end{aligned}$$

となる。ただし、 $\delta$  は正確には  $z \neq 0, z' \neq 0$  まで含めての結果である。このように、 $\mathbb{Z}_2$ -even モードの  $z = z' = 0$  における混合によって  $j \neq k$  に対して  $f_{jk} \neq 0$  を与える。まとめると、 $r^4$  で規格化因子が補正されて  $\mathbb{Z}_2$ -even モードが  $(z =)z' = 0$  で混合する。

## 付録E $T^2/\mathbb{Z}_2$ 特異点のブローアップ後の湯川結合の補正

ここでは、各特異点での (5.15) の具体的な近似計算を行う。

$$\begin{aligned}
& \int_{|z| \leq r} dz d\bar{z} \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^+}^{I,5}(z) \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^-}^{J+1,7}(z) \overline{\phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^-}^{K+1,12}(z)} \\
& \simeq \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\pi r^2}{2} \right)^2 \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^+}^{I,5}(0) \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^-}^{J+1,7}(0) \overline{\phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^-}^{K+1,12}(0)} \\
& = \sqrt{2} \pi^3 r^4 a \sum_{l,m,n} (J+1+7m)(K+1+12n) \\
& \quad \times e^{-\pi \text{Im}\tau \left[ 5\left(\frac{l}{5}+l\right)^2 + 7\left(\frac{J+1}{7}+m\right)^2 + 12\left(\frac{K+1}{12}+n\right)^2 \right]} \\
& \simeq \sqrt{2} \pi^3 r^4 a (J+1)(K+1) e^{-\pi \text{Im}\tau \frac{84I^2+60(J+1)^2+35(K+1)^2}{420}} \\
& = \sqrt{2} \pi^3 r^4 a (J+1)(K+1) \eta_{84I^2+60(J+1)^2+35(K+1)^2}, \tag{E.1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{|z-\frac{1}{2}| \leq r} dz d\bar{z} \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^+}^{I,5}(z) \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^-}^{J+1,7}(z) \overline{\phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^-}^{K+1,12}(z)} \\
& \simeq \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\pi r^2}{2} \right)^2 \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^+}^{I,5}\left(\frac{1}{2}\right) \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^-}^{J+1,7}\left(\frac{1}{2}\right) \overline{\phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^-}^{K+1,12}\left(\frac{1}{2}\right)} \\
& = \sqrt{2} \pi^3 r^4 a \sum_{l,m,n} (J+1+7m)(K+1+12n) \\
& \quad \times e^{-\pi \text{Im}\tau \left[ 5\left(\frac{l}{5}+l\right)^2 + 7\left(\frac{J+1}{7}+m\right)^2 + 12\left(\frac{K+1}{12}+n\right)^2 \right]} e^{\pi i \left[ (I+5l) + (J+1+7m) - (K+1+12n) \right]} \\
& \simeq \sqrt{2} \pi^3 r^4 a (J+1)(K+1) e^{-\pi \text{Im}\tau \frac{84I^2+60(J+1)^2+35(K+1)^2}{420}} e^{\pi i (I+J-K)} \\
& = \sqrt{2} \pi^3 r^4 a (J+1)(K+1) \eta_{84I^2+60(J+1)^2+35(K+1)^2} e^{\pi i (I+J-K)}, \tag{E.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{|z-\frac{\tau}{2}| \leq r} dzd\bar{z} \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^+}^{I,5}(z) \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^-}^{J+1,7}(z) \overline{\phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^-}^{K+1,12}(z)} \\
& \simeq \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\pi r^2}{2} \right)^2 \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^+}^{I,5} \left( \frac{\tau}{2} \right) \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^-}^{J+1,7} \left( \frac{\tau}{2} \right) \overline{\phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^-}^{K,M} \left( \frac{\tau}{2} \right)} \\
& = \sqrt{2}\pi^3 r^4 a \sum_{l,m,n} (J+1+7m)(K+1+12n) \\
& \quad \times e^{-\pi \text{Im}\tau \left[ 5\left(\frac{I}{5}+l+\frac{1}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{J+1}{7}+m+\frac{1}{2}\right)^2 + 12\left(\frac{K+1}{12}+n+\frac{1}{2}\right)^2 \right]} \\
& \simeq \sqrt{2}\pi^3 r^4 a (7-(J+1))(12-(K+1)) \\
& \quad \times e^{-\pi \text{Im}\tau \frac{2520-84I(5-I)-60(J+1)(7-(J+1))-35(K+1)(12-(K+1))}{420}} \\
& = \sqrt{2}\pi^3 r^4 a (7-(J+1))(12-(K+1)) \\
& \quad \times \eta_{2520-84I(5-I)-60(J+1)(7-(J+1))-35(K+1)(12-(K+1))}, \tag{E.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{|z-\frac{\tau+1}{2}| \leq r} dzd\bar{z} \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^+}^{I,5}(z) \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^-}^{J+1,7}(z) \overline{\phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^-}^{K+1,12}(z)} \\
& \simeq \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\pi r^2}{2} \right)^2 \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^+}^{I,5} \left( \frac{\tau+1}{2} \right) \phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^-}^{J+1,7} \left( \frac{\tau+1}{2} \right) \overline{\phi_{T^2/\mathbb{Z}_2^-}^{K,M} \left( \frac{\tau+1}{2} \right)} \\
& = \sqrt{2}\pi^3 r^4 a \sum_{l,m,n} (I+5l)(K+1+12n) \\
& \quad \times e^{-\pi \text{Im}\tau \left[ 5\left(\frac{I}{5}+l+\frac{1}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{J+1}{7}+m+\frac{1}{2}\right)^2 + 12\left(\frac{K+1}{12}+n+\frac{1}{2}\right)^2 \right]} e^{\pi i[(I+5l)+(J+1+7m)-(K+1+12n)]} \\
& \simeq \sqrt{2}\pi^3 r^4 a (5-I)(12-(K+1)) \\
& \quad \times e^{-\pi \text{Im}\tau \frac{2520-84I(5-I)-60(J+1)(7-(J+1))-35(K+1)(12-(K+1))}{420}} e^{\pi i(I+J-K)} \\
& = \sqrt{2}\pi^3 r^4 a (5-I)(12-(K+1)) \\
& \quad \times \eta_{2520-84I(5-I)-60(J+1)(7-(J+1))-35(K+1)(12-(K+1))} e^{\pi i(I+J-K)}, \tag{E.4}
\end{aligned}$$

ここで、全体係数を  $a = \frac{|\mathcal{N}_1^{I,5} \mathcal{N}_1^{J+1,7} \mathcal{N}_1^{K+1,12}|}{|\mathcal{N}^{K+1,12}|^2}$  としている。また、 $\text{Re}\tau = 0$  を仮定して Jacobi の  $\vartheta$ -関数  $\vartheta^l$  は  $\vartheta^l \simeq e^{-l^2 \pi \text{Im}\tau / 420}$  となり、 $\eta_n \equiv e^{-n \pi \text{Im}\tau / 420}$  と表記する。なお、 $I = 0$  のときは  $1/\sqrt{2}$  倍する必要がある。

## 参考文献

- [1] M. E. Peskin and D. V. Schroeder,
- [2] 林青司, 『素粒子の標準模型を越えて』, 丸善出版, (2015)
- [3] H. M. Lee, “Lectures on Physics Beyond the Standard Model,” arXiv:1907.12409 [hep-ph].
- [4] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **43**, 1566-1570 (1979) doi:10.1103/PhysRevLett.43.1566
- [5] P. West, “Introduction to strings and branes,” Cambridge University Press, (2012)
- [6] 今村洋介, 『超弦理論の基礎 弦とブレーンの導入から』, サイエンス社, (2011)
- [7] L. E. Ibanez and A. M. Uranga, “String theory and particle physics: An introduction to string phenomenology,” Cambridge University Press, (2012)
- [8] D. Cremades, L. E. Ibanez and F. Marchesano, JHEP **0405**, 079 (2004) doi:10.1088/1126-6708/2004/05/079 [hep-th/0404229].
- [9] Y. Hamada and T. Kobayashi, Prog. Theor. Phys. **128** (2012), 903-923 doi:10.1143/PTP.128.903 [arXiv:1207.6867 [hep-th]].
- [10] H. Ohki, S. Uemura and R. Watanabe, [arXiv:2003.04174 [hep-th]].
- [11] X. Liu and G. Ding, JHEP **08** (2019), 134 doi:10.1007/JHEP08(2019)134 [arXiv:1907.01488 [hep-ph]].
- [12] R. C. Gunning, *Lectures on Modular Forms* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1962).
- [13] B. Schoeneberg, *Elliptic Modular Functions* (Springer-Verlag, 1974)
- [14] N. Koblitz, *Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms* (Springer-Verlag, 1984)
- [15] J.H. Bruinier, G.V.D. Geer, G. Harder, and D. Zagier, *The 1-2-3 of Modular Forms* (Springer, 2008)
- [16] R. de Adelhart Toorop, F. Feruglio and C. Hagedorn, Nucl. Phys. B **858**, 437-467 (2012) doi:10.1016/j.nuclphysb.2012.01.017 [arXiv:1112.1340 [hep-ph]].

- [17] S. Kikuchi, T. Kobayashi, S. Takada, T. H. Tatsuishi and H. Uchida, [arXiv:2005.12642 [hep-th]].
- [18] G. Shimura, *Annals of Mathematics*, 97(3), second series, 440 (1973)
- [19] J. F. Duncan and D. A. Mcgady, [arXiv:1806.09875 [math.NT]].
- [20] P. Novichkov, J. Penedo, S. Petcov and A. Titov, *JHEP* **07** (2019), 165 doi:10.1007/JHEP07(2019)165 [arXiv:1905.11970 [hep-ph]].
- [21] H. Abe, T. Kobayashi and H. Ohki, *JHEP* **0809**, 043 (2008) doi:10.1088/1126-6708/2008/09/043 [arXiv:0806.4748 [hep-th]].
- [22] H. Abe, T. Kobayashi, K. Sumita and Y. Tatsuta, *Phys. Rev. D* **90**, no. 10, 105006 (2014) doi:10.1103/PhysRevD.90.105006 [arXiv:1405.5012 [hep-ph]].
- [23] M. A. Walton, *Phys. Rev. D* **37**, 377 (1988). doi:10.1103/PhysRevD.37.377
- [24] J. P. Conlon, A. Maharana and F. Quevedo, *JHEP* **0809**, 104 (2008) doi:10.1088/1126-6708/2008/09/104 [arXiv:0807.0789 [hep-th]].
- [25] T. Kobayashi, H. Otsuka and H. Uchida, *JHEP* **1908**, 046 (2019) doi:10.1007/JHEP08(2019)046 [arXiv:1904.02867 [hep-th]].
- [26] T. Kobayashi, H. Otsuka and H. Uchida, arXiv:1911.01930 [hep-ph].
- [27] M. Tanabashi *et al.* [Particle Data Group], *Phys. Rev. D* **98**, no. 3, 030001 (2018). doi:10.1103/PhysRevD.98.030001
- [28] Z. z. Xing, H. Zhang and S. Zhou, *Phys. Rev. D* **77**, 113016 (2008) doi:10.1103/PhysRevD.77.113016 [arXiv:0712.1419 [hep-ph]].
- [29] S. Groot Nibbelink, T. W. Ha and M. Trapletti, *Phys. Rev. D* **77**, 026002 (2008) doi:10.1103/PhysRevD.77.026002 [arXiv:0707.1597 [hep-th]].
- [30] J. Wess and J. Bagger, “Supersymmetry and supergravity,” Princeton University Press, (1992)
- [31] T. H. Abe, Y. Fujimoto, T. Kobayashi, T. Miura, K. Nishiwaki and M. Sakamoto, *JHEP* **1401**, 065 (2014) doi:10.1007/JHEP01(2014)065 [arXiv:1309.4925 [hep-th]].
- [32] T. h. Abe, Y. Fujimoto, T. Kobayashi, T. Miura, K. Nishiwaki and M. Sakamoto, *Nucl. Phys. B* **890**, 442 (2014) doi:10.1016/j.nuclphysb.2014.11.022 [arXiv:1409.5421 [hep-th]].
- [33] T. Kobayashi and S. Nagamoto, *Phys. Rev. D* **96**, no. 9, 096011 (2017) doi:10.1103/PhysRevD.96.096011 [arXiv:1709.09784 [hep-th]].