

# Anomaly Inflow In Curved Space

Shoto Aoki

Department of Physics, Osaka University,  
Toyonaka, Osaka 560-0043, Japan

E-mail: [saoki@het.phys.sci.osaka-u.ac.jp](mailto:saoki@het.phys.sci.osaka-u.ac.jp)

ABSTRACT: 対称性は物理学において重要な概念の一つである。しかし、経路積分による場の量子論の定式化では、古典的には期待できる対称性が存在しない場合がある。これは古典的な対称性が量子効果で破れることを意味し、アノマリーと呼ばれる。アノマリーは有限自由度と無限自由度の差から生じる。

空間にドメインウォールが存在する場合、高次元時空におけるアノマリーがドメインウォール上のアノマリーを補正し、全体としてアノマリーのない理論を構成できる。これはアノマリー流入と呼ばれ、Callan-Harvey 機構やドメインウォールに局在する状態で説明される。そこで、曲がった空間を高次元の空間にドメインウォールとして埋め込むことを考える。重力はこれによって再現されるため、曲がったドメインウォールに局在したフェルミオンによってアノマリーへの重力の寄与を計算できると期待できる。

本研究では最初に、ドメインウォールで重力アノマリーを再現することを念頭において、重力アノマリーの構成をレビューする。重力アノマリーは、古典的に期待できる局所 Lorentz 変換や一般座標変換が量子効果で破れることを表す量である。そして、この2つから生じるアノマリーが局所 counter term で移り合い、本質的に同じであることを確認する。

次に Euclid 空間に曲がったドメインウォールを設置して、フェルミオンの振る舞いを調べる。ドメインウォールとして球面や円筒を用いて、ドメインウォールに局在する状態の固有値や相関関数を解析的に求める。

---

**Contents**

<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 アノマリーを考える動機とその発展	1
1.2 重力アノマリーの流入	2
1.3 ドメインウォールフェルミオン	3
1.4 構成	4
<b>I 重力アノマリーのレビュー</b>	<b>4</b>
<b>2 準備</b>	<b>5</b>
2.1 ゲージ場	5
2.2 重力場	6
2.3 特性類とその降下方程式	10
2.4 指数定理	16
<b>3 ゲージアノマリー</b>	<b>22</b>
3.1 経路積分の正当化と Wess-Zumino 整合性条件	22
3.2 ゲージアノマリーの位相的な解析	27
<b>4 重力アノマリー</b>	<b>33</b>
4.1 重力アノマリーへの拡張	33
4.2 エネルギー運動量テンソル	36
4.3 Lorentz form と Einstein form の等価性	37
<b>II 研究</b>	<b>38</b>
<b>5 曲がったドメインウォールの寄与</b>	<b>38</b>
5.1 $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ の場合	38
5.2 $S^1 \times \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ の場合	42
<b>6 格子上的曲がったドメインウォール</b>	<b>44</b>
<b>7 総括</b>	<b>46</b>
7.1 まとめ	46
7.2 展望	47
<b>8 謝辞</b>	<b>47</b>
<b>A <math>\det(i\mathcal{D}_{2n}^{t,\theta})</math> の零点に局在する mode</b>	<b>47</b>
<b>B 平らなドメインウォール</b>	<b>51</b>

C	ドメインウォール $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ のエッジ状態の相関関数	55
D	ドメインウォール $S^1 \times \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ のエッジ状態の相関関数	56
E	Fourier 変換の公式	58

---

## 1 Introduction

### 1.1 アノマリーを考える動機とその発展

対称性は物理学において最も重要な概念である。ある変換の下で作用が不変となる時、その理論が記述する物理にはその変換に対応する対称性が存在する。対称性がある時、Noether の定理から保存量を定義することができる。例えば並進対称性に対応する保存量はエネルギーや運動量で、グローバル  $U(1)$  ゲージ対称性に対応するのは電荷である。

しかし場の量子論の経路積分による定式化では、古典的には期待できる対称性が存在しない時がある。これは古典的な対称性が量子効果で破れることを意味し、量子異常 (quantum anomaly) あるいは単にアノマリーと呼ばれる。アノマリーは古典論と量子論のずれであり、有限自由度と無限自由度の差から生じる。素粒子物理学や凝縮系物理学の分野において盛んに研究され、今までにカイラルアノマリーやゲージアノマリーなど数多くのアノマリーが発見され、アノマリー流入 (anomaly inflow) などのユニークな機構も提案された。

最初に発見されたのはカイラルアノマリーであり、 $U(1)$  ゲージ場が背景に存在する質量のない Dirac フェルミオンの理論で見つかった。この理論には古典的な  $U(1)$  ゲージ対称性とカイラル対称性が存在するが、1-ループの寄与によってカイラル対称性が破られることが明らかとなった [1, 2]。これは1-ループの寄与を計算する時に用いたゲージ不変な正則化 (Pauli-Villars 法, 次元正則化など) がカイラル対称性を破ることが原因である。 $U(1)$  ゲージ対称性とカイラル対称性を両立する正則化は存在せず、ゲージ対称性を保つためには、カイラル対称性を犠牲にする必要がある。このアノマリーは  $\pi_0 \rightarrow 2\gamma$  の崩壊過程を記述し [1],  $U(1)$  問題を解決することが知られている [3–6]。

アノマリーは他にも様々なものがある。例えば局所的な対称性であるゲージ対称性にもアノマリーは生じ得る。これはゲージ場が背景に存在する時のワイルフェルミオンで生じる。ゲージアノマリーは背景のゲージ場をゲージ変換した時の分配関数の位相変化を表し、有効作用の無限小ゲージ変換で記述される。後述の重力アノマリーはこれの重力場への拡張であり、局所 Lorentz 変換や一般座標変換で生じる。

ゲージ変換は群としての積が定まっているから、その積を保つために無限小ゲージ変換は Lie 括弧を保たなければならない。ゲージアノマリーは有効作用の無限小ゲージ変換として現れるため、Lie 括弧を保つことに対応する条件を満たさなければならない。これを一般化したのが Wess-Zumino 整合性条件と呼ばれるものである [7]。これはアノマリーの形に強い制限をかける。

カイラルアノマリーとゲージアノマリーは数学的にも重要な量で、これらは Atiyah-Singer の指数定理 [8–11] と関係することが知られている。この関係はアノマリーを経路積分の積分測度の Jacobian として導出する Fujikawa の方法で示すことができる [12]。よってアノマリー

は位相幾何学的意味をもち、実際  $2n$  次元のカイラルアノマリーは  $2n$  次元の指数である。本論文では  $2n$  次元のゲージアノマリーを  $2n + 2$  次元の指数で記述する。

指数は Dirac 演算子の 0-mode の個数についての解析的な量である。Dirac 演算子はカイラリティを反転させる性質があり、Dirac 演算子の 0 でない固有値に対応する固有状態は必ずカイラリティが正の mode と負の mode に分解できる。したがって、0 でない固有値について、カイラリティが正の mode と負の mode は同じ数存在する。しかし固有値が 0 の mode では、カイラリティとの同時固有状態が存在するから、正の mode と負の mode が同じ数存在するとは限らない。正のカイラリティをもつ Dirac 演算子の 0-mode の数と負のカイラリティをもつ 0-mode の個数の差を指数という。この指数は Atiyah-Singer の指数定理によって、位相的な不変量であることが知られており、摂動の影響を受けにくい。これはアノマリーが摂動に強いことと対応する。

凝縮系物理学においては、アノマリーは量子 Hall 効果を预言する。量子 Hall 効果はトポロジカル絶縁体・超伝導体の表面に流れる Hall 電流の伝導率が量子化される現象であり、スピン流、熱流についても同様の現象が確認されている。実際、空間 2 次元 class A のトポロジカル絶縁体では Chern-Simons 項によって、空間 3 次元 class All では  $\theta$  項によって記述される。

量子 Hall 効果とアノマリーの関係は一般の次元に拡張され、アノマリーの存在によって非自明な相をもつトポロジカル絶縁体や超伝導体の存在を予測できる [13]。例えば、純粋な重力アノマリーは  $4k + 2$  次元時空で現れるが、これは 1 次元上にあるトポロジカル相の存在を示唆する。これに対応するのが 3 次元時空 (つまり 2 次元空間) の class D や 7 次元時空 (つまり 6 次元空間) の class C のトポロジカル超伝導体である。アノマリーの存在は場の量子論についての主張であり、相互作用によらないため、相互作用系のトポロジカル絶縁体・超伝導体の描像を提供する。量子 Hall 効果はしばしばエッジ状態の観点で議論されるがそれはアノマリー流入 [14] として解釈できる。

## 1.2 重力アノマリーの流入

この論文では重力アノマリーとその高次元時空への埋め込みについて議論する。重力アノマリーは局所 Lorentz 変換や一般座標変換の下での、ワイルフェルミオンの分配関数の位相の変化を表し、[1, 2, 12, 15] を拡張した摂動的な方法で、[16] で初めて計算された。しかし、この計算ではアノマリーは "Bose 非対称" か "共変" な形として与えられ、それ以前のトポロジカルな議論 [17, 18] から示唆されるものとはわずかに異なっていた。そしてこの摂動的な方法で求められたアノマリーは重力についての Wess-Zumino 整合性条件を満たしておらず、それを満たすために補正を加える必要があった。さらにゲージ固定によって、アノマリーを局所 Lorentz 変換の破れとするよりも、常に一般座標変換の破れとして表すことを選択していた。

ここでは [18, 19] に基づき Atiyah-Singer の指数定理と降下方程式によって重力アノマリーを求める。これはトポロジカルな議論によって  $2n + 2$  次元のカイラルアノマリーと  $2n$  次元のゲージアノマリーを直接関係づける方法を重力に拡張したものである。具体的には、まず局所 Lorentz 変換や一般座標変換の下での分配関数の非自明な変化を見るために変換の族を導入し、分配関数の位相の巻き付き数としてアノマリーを記述する。次にこの巻き付き数が高次元の指数定理と関連することを示し、指数の密度を元の空間に降下させることでアノマリーの具体的な形を求める。この導出によってアノマリーの位相幾何学的な側面を理解できる。

この方法で得られるアノマリーの表式は、自然に Wess-Zumino 整合性条件をみたし、指数定理から規格化定数も定まる。さらに、その具体的な形から、局所 Lorentz 変換についてのアノマリーと一般座標変換についてのアノマリー同士が、作用に counter term を加えることで移り合うことを示すことができる。これはゲージアノマリーの L-R form と V-A form が counter term で移り合うことの類似であり、これによって2つのアノマリーが同等であることが示される。そして重力アノマリーの相殺条件が局所 Lorentz 変換か一般座標変換かどうかによらないことが明らかとなる。以下、局所 Lorentz 変換についての重力アノマリーの表式を Lorentz form、一般座標変換の下での重力アノマリーの表式を Einstein form とよぶ。

重力アノマリーはゲージアノマリーの一種である。ゲージ current の異常発散として現れたので、重力アノマリーの場合も同様に、エネルギー運動量テンソルに現れる。このとき Lorentz form と Einstein form では有効作用が counter term だけずれるため、エネルギー運動量テンソルの表式が異なり、この二つの表式で重力アノマリーは別のところに現れる。局所 Lorentz 変換でのエネルギー運動量テンソルは保存するが、対称テンソルではなく、反対称テンソルの成分として Lorentz form が現れる。一般座標変換では逆にエネルギー運動量テンソルは対称テンソルとなるが、保存則が成り立たず、異常発散として Einstein form が現れる。よって期待されるエネルギー運動量テンソルの性質から、重力アノマリーの形を選ぶことができる。

### 1.3 ドメインウォールフェルミオン

空間にドメインウォールなどの位相欠陥が存在する場合、高次元時空のアノマリーが位相欠陥のアノマリーを補正する現象が知られている [14]。この現象はアノマリー流入として知られており、Callan-Harvey 機構によって記述される。アノマリーのある系を高次元時空の位相欠陥(ドメインウォールなど)として埋め込むことで、高次元からのアノマリーによる補正がかかり、全体としてアノマリーのない理論ができる。そしてアノマリー降下方程式の物理的な解釈が与えられる。

この観点から、ゲージアノマリーや重力アノマリーは1次元高い時空からのパリティアノマリー [20–22] のアノマリー流入だと解釈できる。理論がパリティ不変な場合分配関数は実数になるが、パリティアノマリーが存在するとき分配関数を実数にすることはできない。パリティアノマリーはパリティ不変な量子化に対する障害を表し、分配関数を実数にすることを諦めれば、整合性の取れた方法で分配関数を定義できる。パリティアノマリーのある系の有効作用は Chern-Simons 項を含み、これは実際にパリティを破る。

アノマリー流入はドメインウォールに局在したフェルミオンで記述することができる [23, 24]。時空のある領域に正の質量、もう一方に負の質量を与えると、その境界に局在したカイラルフェルミオンが現れる。ここでその境界のことをドメインウォールとよび、それに局在する状態をドメインウォールフェルミオンと言う。アノマリー流入のドメインウォールフェルミオンによる描像は、バルクと境界の関係を明らかにし、量子 Hall 効果 [25] や指数定理 [26–28] などを記述する。

トポロジカル絶縁体の電磁応答、例えば前述の量子 Hall 効果を理解するためにドメインウォールを用いると便利である [29, 30]。電磁場の有効作用を計算すると  $\theta$  項が生じるが、時間反転不変性から  $\theta = 0, \pi \pmod{2\pi}$  でなければならない。ここで  $\theta = 0 \pmod{2\pi}$  は自明な相を記述し、質量の符号は正であり、対して  $\theta = \pi \pmod{2\pi}$  はトポロジカルに非自明な相を記述し、質量の符号は負である。この非自明な相がトポロジカル絶縁体である。つまり、

時空にドメインウォールを設置した時に、質量が負の領域がトポロジカル絶縁体となることを意味する。そしてドメインウォールフェルミオンが表面に流れる電流を運ぶ担体となる。

境界とバルクの複合系でのアノマリーは、境界つき多様体上の Atiyah-Patodi-Singer の指数定理 [31–33] によって記述される。境界つき多様体の場合、Dirac 演算子がエルミートにならないため、特別な境界条件を必要とする。ここで、局所的な条件ではカイラリティをうまく定義できず、非局所的な APS 境界条件を課さなければならない。APS 境界条件は境界の Dirac 演算子の正 (または負) の状態が、境界で 0 となることを要請する。これは境界上のゲージ配位などの全ての情報を用いるため、局所的な条件ではなく、物理的な解釈が難しい。そこで、境界の外に別の多様体を置き、境界をドメインウォールとする閉じた多様体を考える。これによって指数を計算すると、ドメインウォールフェルミオンから境界の寄与を計算できる。これは [26] で提案され、数学的に [27] で示された。そしてこれを格子上に拡張することに成功した [28]。

重力は多様体の計量によって記述され、多様体の曲率と密接に関係する。任意の  $n$  次元実解析的 Riemann 多様体は十分大きな Euclid 空間  $\mathbb{R}^m$  ( $m \geq \frac{1}{2}(n+2)(n+5)$ ) に実解析的に埋めこむことができ、多様体の計量は Euclid 空間の計量から誘導したものと一致する [34, 35]。つまり、十分大きな Euclid 空間の中に物理の系を埋め込み、Euclid 空間の平坦な計量を誘導することで重力を再現できる。そこで物理の系を Euclid 空間に曲がったドメインウォールとして埋め込むことを考える。重力はこれで再現できるため、曲がったドメインウォールに局在したフェルミオンの振る舞いを調べることで重力アノマリーを計算できると期待できる。

上の提案を確かめるため、この論文では、平坦な時空に曲がったドメインウォールを設置してフェルミオンの振る舞いを調べる。まずは球面や円柱などの簡単な曲がったドメインウォールを考えて、その固有値や相関関数を解析的に求める。その次に複雑なドメインウォールを作り、数値計算する。 $M$  が十分大きい極限で、曲がった空間の固有値や相関関数が得られれば、曲がったドメインウォールで曲がった空間のフェルミオンを記述できる証拠の一つになる。

## 1.4 構成

この論文は大きく、レビューパートと研究パートに分けられる。

レビューパートの目標は [18, 19] に則り、重力アノマリーを構成することである。Sec. 2 ではそのために必要な数学などを整理する。Sec. 3 ではワイルフェルミオンのゲージアノマリーを構成する。そして Wess-Zumino 整合性条件を満たしていることを確認する。Sec. 4 では 3 の方法を拡張して重力アノマリーの表式を導出する。さらに Lorentz form と Einstein form が互いに counter term で移り合い、同等であることを示す。

研究パートの目標は、曲がったドメインウォールが埋め込まれた平坦時空中のフェルミオンの解析である。Sec. 5 では曲がったドメインウォールとして  $S^1, S^1 \times \mathbb{R}^2$  をとり、ドメインウォールに局在する状態やその固有値を調べる。最後に Sec. 6 では、格子上の曲がったドメインウォールを考え、その固有値を計算し、エッジ状態が現れることを確かめる。

## Part I

## 重力アノマリーのレビュー

## 2 準備

ここではゲージアノマリーや重力アノマリーを求めるために用いる数学の用語などを確認する。全体を通して多様体は向き付け可能で、Euclidean signature の計量を持つとする。つまり計量を対称行列とした時に、その固有値が全て正であるようにする。

この論文では次の線形 Lie 群を用いる： $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  として

$$GL(n, K) = \{ M = (M_{ij}) \mid M_{ij} \in K, M \text{ は逆行列をもつ} \} \quad (2.1)$$

$$O(n) = \left\{ T \in GL(n, \mathbb{R}) \mid {}^t T T = I \right\} \quad (2.2)$$

$$SO(n) = \{ L \in O(n) \mid \det L = 1 \} \quad (2.3)$$

とする。さらにそれぞれに対応する Lie 環を  $\mathfrak{gl}(n, K), \mathfrak{o}(n), \mathfrak{so}(n)$  とする。

## 2.1 ゲージ場

最初に  $d$  次元多様体  $M$  上のコンパクトなゲージ群  $G$  によるゲージ理論を考える。ゲージ場  $A_\mu = A_\mu^i \lambda^i$  は数学的には構造群を  $G$  とするファイバー束の接続であり、 $G$  の Lie 環に値をもつ 1-form として

$$A = A_\mu dx^\mu \quad (2.4)$$

と書かれる。 $G$  のコンパクト性から  $(\lambda^i)^a_b$  を反エルミート行列ととることができる。物理の他の文献ではエルミート行列ととる場合が多いが、この論文では反エルミートとする。また接続  $A$  のゲージ変換は、ゲージ変換群の元を  $g$  とすると

$$A \rightarrow A^g = g^{-1}(d + A)g \quad (2.5)$$

のようになる。

$M$  上のテンソルに値をもつ  $p$ -form  $\Sigma = \Sigma_{b, \dots, \alpha_1, \dots, \alpha_p}^{a, \dots} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p}$  はゲージ変換の下で

$$\Sigma \rightarrow \Sigma^g = (g^{-1})^a_{a'} \dots (\Sigma)^{a', \dots}_{b', \dots} g^{b'}_b \dots \quad (2.6)$$

のように変化する。このときこの変換則を保ったまま  $p$ -form を  $(p+1)$ -form に移す"外微分"を、接続を用いて定義できる。これを共変外微分とよび、

$$D_A \Sigma := d\Sigma + [A, \Sigma] \quad (2.7)$$

と定められる。ここで括弧積は

$$[A, \Sigma] = A^a_{a'} \wedge \Sigma^{a', \dots}_{b, \dots} + (\text{all upper indices}) - (-1)^p \left( \Sigma^{a, \dots}_{b', \dots} \wedge A^{b'}_b + (\text{all under indices}) \right) \quad (2.8)$$

である。 $\wedge$  は反対称化積のことである。より一般には Lie 環に値をもつ  $p$ -form  $\eta = \eta^i \lambda^i$  と  $q$ -form  $\theta = \theta^j \lambda^j$  について  $[\eta, \theta] := \eta^i \wedge \theta^j [\lambda^i, \lambda^j] = \eta \wedge \theta - (-1)^{pq} \theta \wedge \eta$  と定義される。以下  $\wedge$  は省略する。  $D_A \Sigma$  はゲージ変換によって

$$D_A \Sigma \rightarrow (D_A \Sigma)^g = D_{A^g} \Sigma^g \quad (2.9)$$

と変化し、ゲージ変換を保つことを実際に確かめられる。0-form の共変外微分を特に共変微分と呼ぶ。

ゲージ場の強さは接続の曲率で表され

$$F_A = dA + A^2 = \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu])dx^\mu dx^\nu = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad (2.10)$$

のように定義される。ここで  $[\ast, \ast]$  は Lie 環の Lie 括弧を表す。曲率は上のように Lie 環に値をもつ 2-form である。共変外微分を用いると任意のテンソルに値をもつ  $p$ -form  $\Sigma$  に対して

$$D_A^2 \Sigma = [F_A, \Sigma] \quad (2.11)$$

のようになるから、ゲージ変換によって

$$F_A \rightarrow (F_A)^g = g^{-1} F g = dA^g + (A^g)^2 = F_{A^g} \quad (2.12)$$

となることがわかる。

$F_A$  は共変外微分によって

$$D_A F_A = dF_A + [A, F_A] = 0 \quad (2.13)$$

となる。これは Bianchi 恒等式として有名である。誤解の恐れがないときは  $D_A, F_A$  を単に  $D, F$  とかく。

上のことをまとめる。ゲージ変換の下で  $A, F, \Sigma$  はそれぞれ

$$\begin{aligned} A &\rightarrow A^g = g^{-1}(d + A)g \\ F &\rightarrow F^g = g^{-1} F g \\ \Sigma &\rightarrow \Sigma^g = (g^{-1})^a_{a'} \cdots (\Sigma)^{a'}_{b' \dots} g^{b'}_{b'} \cdots \end{aligned} \quad (2.14)$$

のように変化する。  $g \simeq 1 + v$  として無限小ゲージ変換  $\delta_v$  を定めると

$$\begin{aligned} \delta_v A &= A^g - A = dv + [A, v] \\ \delta_v F &= -[v, A] \\ \delta_v \Sigma &= -[v, \Sigma]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

## 2.2 重力場

次に計量  $h$  をもつ  $d$  次元多様体  $M$  の Riemann 幾何学を考える。計量は多様体の点同士にある種の距離を定める非退化の 2 次の対称テンソルで

$$h = h_{\mu\nu}(x)dx^\mu \otimes dx^\nu \quad (h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}) \quad (2.16)$$



のように表される.  $h_{\mu\nu}$  は添え字  $\mu, \nu$  について非退化対称行列だから, 適切な  $e^a_\mu$  を選ぶことで  $h_{\mu\nu} = \eta_{ab} e^a_\mu e^b_\nu$  のようにかける. ここで Euclidean signature の計量を取っているため  $\eta = \text{diag}(+1, \dots, +1)$  である. これを用いれば

$$h = \eta_{ab} e^a_\mu e^b_\nu dx^\mu \otimes dx^\nu = \eta_{ab} e^a \otimes e^b \quad (2.17)$$

のようにできる. ここで  $e^a = e^a_\mu dx^\mu$  は vielbein と呼ばれる 1-form である. 以下,  $\{dx^1, \dots, dx^d\}$  を基底に選んだ時の添え字をギリシャ文字  $\mu, \nu, \dots$  で表し,  $\{e^1, \dots, e^d\}$  についての添え字を  $a, b, \dots$  で表す.

多様体  $M$  上にある開被覆  $U = \{U, V, \dots\}$  があって, 各開集合  $U$  上で, 上のように vielbein  $\{e^1_U, \dots, e^d_U\}$  を定めることができる.  $U \cap V \neq \emptyset$  の時,  $e^a_U = (L_{UV}^{-1})^a_c e^c_V$  となる行列  $L_{UV}$  があって, vielbein の定義から

$$\eta_{ab} (L_{UV}^{-1})^a_c (L_{UV}^{-1})^b_d = \eta_{cd} \quad (2.18)$$

を満たす.  $\eta = \text{diag}(+1, \dots, +1)$  だから  $L_{UV} \in O(d)$  である. 特に  $M$  が向き付け可能であれば,  $L_{UV}$  が常に  $\det L_{UV} = 1$  となるように vielbein を選ぶことができ, つまり  $L_{UV} \in SO(d)$  としても一般性は失われない. この  $L_{UV}$  は変換関数と呼ばれ, その族  $\{L_{UV} : U \cap V \rightarrow SO(d)\}$  は次を満たす:

(i)  $L_{UU}(x) = 1 \quad (x \in U)$

(ii)  $U \cap V \neq \emptyset$  の時

$$L_{UV}(x) = L_V^{-1}(x) \quad (x \in U \cap V) \quad (2.19)$$

(iii)  $U \cap V \cap W \neq \emptyset$  の時

$$L_{UV}(x)L_{VW}(x) = L_{UW}(x) \quad (x \in U \cap V \cap W) \quad (2.20)$$

この条件は cocycle 条件と呼ばれる.

$x \in U \cap V$  に対して

$$(v_U(x))_a = (v_V(x))_b (L_{UV}(x))^b_a \quad (2.21)$$

とすれば,  $(v_U)_a e^a_U = (v_V)_a e^a_V$  を満たすので, (2.21) で  $v_U, v_V$  を同一視することで構造群を  $SO(d)$  とするベクトル束を定義できる. このベクトル束は余接束  $T^*M$  として知られている. 以下 vielbein の定義域を省略して, 単に  $e^a$  とする.

余接束は上のゲージ理論の特別な場合である. そして上と同様に接続  $\omega$  をとることができる. その曲率も  $\Omega = d\omega + \omega^2$  と与えることができる. テンソルに値を持つ  $p$ -form  $\Sigma = \Sigma^a_{b\dots}$  についての共変外微分も同様に

$$D_\omega \Sigma := d\Sigma + [\omega, \Sigma] \quad (2.22)$$

と定義できる. 0-form についての共変外微分を共変微分と呼ぶ.

vielbein の定義から  $e$  の取り方には任意性がある. そこで  $e \rightarrow e' = L^{-1}e$  のような変換を考える. これは  $e$  をベクトル (したがってテンソル) に値を持つ微分形式とした時の,

$L \in SO(d)$  によるゲージ変換に他ならない. よって (2.14) と同様に, vielbein  $e$ , 接続  $\omega$ , 曲率  $\Omega$ , テンソルに値を持つ  $p$ -form  $\Sigma$  の  $L \in SO(d)$  による変換を,

$$\begin{aligned} e &\rightarrow e' = L^{-1}e \\ \omega &\rightarrow L^{-1}(d + \omega)L \\ \Omega &\rightarrow L^{-1}\Omega L \\ \Sigma &\rightarrow L_{\text{upper}}^{-1}\Sigma L_{\text{lower}} \end{aligned} \quad (2.23)$$

と定めることができる. 変換  $e \rightarrow e' = L^{-1}e$  を局所 Lorentz 変換とよぶ. さらに  $L \simeq 1 + \alpha$  として, (2.15) と同様に無限小局所 Lorentz 変換  $\delta_\alpha^L$  は

$$\begin{aligned} \delta_\alpha^L e &= -\alpha e \\ \delta_\alpha^L \omega &= d\alpha + [\omega, \alpha] = D_\omega \alpha \\ \delta_\alpha^L \Omega &= -[\alpha, \Omega] \end{aligned} \quad (2.24)$$

となる.

また, 多様体  $M$  は座標近傍系  $\{(U; x_U^1, \dots, x_U^d)\}$  を持っているため, 各開集合上で  $\{dx_U^1, \dots, dx_U^d\}$  を定めることができる.  $U \cap V \neq \emptyset$  の時, 共通部分の上で

$$dx_U^\mu = \frac{\partial x_U^\mu}{\partial x_V^\nu} dx_V^\nu \quad (2.25)$$

を満たす. このとき  $\frac{\partial x_U^\mu}{\partial x_V^\nu} \in GL(d, \mathbb{R})$  であるが, これによって, 各開集合上の  $\{dx_U^1, \dots, dx_U^d\}$  を張り合わせることで  $GL(d, \mathbb{R})$  を構造群とするベクトル束が構成できる. このベクトル束は上で定めた  $T^*M$  と可微分同相であることが知られている. 以下  $x_U^\mu$  において座標が定まる開集合  $U$  を省略し,  $x^\mu$  やまたは単に  $x$  とかく.

上と同様に接続  $\Gamma$  をとることができ, 曲率も  $R = d\Gamma + \Gamma^2$  と定めることができる. さらに  $\Sigma_{\nu \dots}^\mu$  についての共変外微分も

$$\nabla \Sigma := d\Sigma + [\Gamma, \Sigma] \quad (2.26)$$

と定義できる. 0-form についての共変外微分を特別に共変微分と呼ぶ.

この状況で座標変換  $x \rightarrow x'$  を考える. この変換の下で  $dx^\mu \rightarrow dx'^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu dx^\nu$  となる. ここで  $(\Lambda^{-1})^\mu_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \in GL(d, \mathbb{R})$  であり,  $dx$  をベクトルに値を持つ微分形式とした時の,  $\Lambda$  によるゲージ変換に他ならない. よって (2.14) と同様に,  $dx$ , 接続  $\Gamma$ , 曲率  $R$ , テンソルに値を持つ  $p$ -form  $\Sigma$  の  $\Lambda$  による変換を

$$\begin{aligned} dx &\rightarrow dx' = \Lambda^{-1}dx \\ \Gamma &\rightarrow \Lambda^{-1}(d + \Gamma)\Lambda \\ R &\rightarrow \Lambda^{-1}R\Lambda \\ \Sigma &\rightarrow \Lambda_{\text{upper}}^{-1}\Sigma\Lambda_{\text{lower}} \end{aligned} \quad (2.27)$$

と定める. また  $e_\mu^a$  は  $\mu$  についてのテンソルだから

$$e_\mu^a \rightarrow e_\nu^a \Lambda^\nu_\mu \quad (2.28)$$

と変換する. 変換  $x \rightarrow x'$  を一般座標変換とよぶ. さらに無限小一般座標変換  $x^\mu \rightarrow x^\mu - \xi^\mu$  の下で  $\Lambda^\mu_\nu \simeq \delta^\mu_\nu + \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu}$  となるから,  $v_\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x}$  とおけば, (2.15) と同様に

$$\begin{aligned}\delta_{v_\xi}^{C'} e^a_\mu &= e^a_\nu (v_\xi)^\nu{}_\mu \\ \delta_{v_\xi}^{C'} \Gamma &= dv_\xi + [\Gamma, v_\xi]\end{aligned}\quad (2.29)$$

として無限小一般座標変換  $\delta_{v_\xi}^{C'}$  が定まる. ここで  $\delta_{v_\xi}^{C'} e^a_\mu dx^\mu = 0$  に注意せよ.  $e^a = e^a_\mu dx^\mu$  と書いた時は  $e^a$  は座標についての添え字を持っておらず, 座標変換で  $e^a \rightarrow e^a$  となるからである.

$SO(d) \subset GL(d, \mathbb{R})$  より,  $\omega$  は  $GL(d, \mathbb{R})$  束の接続でもあるが, それに対して  $\Gamma$  は  $SO(d)$  束の接続とは限らない.  $\omega$  は反対称行列のみで展開されるが,  $\Gamma$  は対称行列, 例えば単位行列を含むことができ, その自由度をゲージ変換で除くことができないからである. よって  $\Gamma$  を  $SO(d)$  束の接続に変換できるための条件は, 変換  $dx^\mu \rightarrow e^a_\nu dx^\nu|_{a=\mu}$  の下で

$$\Gamma \rightarrow e(d + \Gamma)e^{-1} \in \mathfrak{so}(d) \quad (2.30)$$

となることである.

この条件は  $h_{\mu\nu}$  の共変微分で書き直すことができる:  $h_{\mu\nu}$  の共変微分は

$$\nabla h_{\mu\nu} = dh_{\mu\nu} - h_{\rho\nu} \Gamma^\rho{}_\mu - h_{\mu\rho} \Gamma^\rho{}_\nu \quad (2.31)$$

である. ここで  $\Gamma$  は  $\mathfrak{gl}(d, \mathbb{R})$  に値をもつ 1-form で,  $\Gamma^\rho{}_\mu$  はその  $(\rho, \mu)$  成分を表す.  $g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e^a_\mu e^b_\nu$  を用いれば

$$\nabla h_{\mu\nu} = -\eta_{ab} (ede^{-1} + e\Gamma e^{-1})^a{}_c \cdot e^c{}_\mu e^b{}_\nu - \eta_{ab} e^a{}_\mu (ede^{-1} + e\Gamma e^{-1})^b{}_c \cdot e^c{}_\nu \quad (2.32)$$

$$= -e^a{}_\mu (ede^{-1} + e\Gamma e^{-1})_{ab} e^b{}_\nu - e^a{}_\mu (ede^{-1} + e\Gamma e^{-1})_{ba} e^b{}_\nu. \quad (2.33)$$

ここで  $\eta$  を用いて添字を上下させた. よって,  $e(d + \Gamma)e^{-1} \in \mathfrak{so}(d)$  の時に

$$(ede^{-1} + e\Gamma e^{-1})_{ab} = -(ede^{-1} + e\Gamma e^{-1})_{ba} \quad (2.34)$$

が成り立つから,  $\nabla h_{\mu\nu} = 0$  となる. 逆に  $\nabla h_{\mu\nu} = 0$  が成り立つ時に同様の議論で  $e(d + \Gamma)e^{-1} \in \mathfrak{so}(d)$  となる. したがって次が成り立つ:

$$\nabla h_{\mu\nu} = 0 \iff e(d + \Gamma)e^{-1} \in \mathfrak{so}(d) \quad (2.35)$$

この  $\nabla h_{\mu\nu} = 0$  を満たす時,  $\nabla$  は計量  $h$  を両立するという.

この論文ではそのような  $\nabla$ , つまり接続  $\Gamma$  をとり, vielbein での接続  $\omega$  との間に

$$\omega = e(d + \Gamma)e^{-1} \quad (2.36)$$

または

$$\Gamma = e^{-1}(d + \omega)e \quad (2.37)$$

の関係があることを仮定する. そして  $h_{\mu\nu}$  と  $\omega$  を独立にとる Palatini 形式を採用する. それは重力アノマリーを導出する過程で, 必ずしも Levi-Civita 接続とならない接続を用いるからである.

### 2.3 特性類とその降下方程式

特性類は、多様体  $M$  上のベクトル束やより一般に主束に対して定まる多様体  $M$  の cohomology 類のことである。Stiefel–Whitney 類, Chern 類, Pontrjagin 類などが知られており, 多様体  $M$  の位相幾何学的, または微分幾何学的な構造を調べられる。例えば, Stiefel–Whitney 類を調べることで,  $M$  が向き付け可能か, スピン構造が入るのか, さらに 1 次元高いコンパクト多様体の境界として  $M$  を埋め込められるかどうか分かる。Chern 類は主束の分類に使うことができ, 物理では Hall 伝導度の計算に現れるなど, 物理, 数学を問わずとても重要である。Pontrjagin 類は位相同相だが微分同相でない多様体の探索に用いられる。この構造をもつ多様体をエキゾチック多様体とよび, エキゾチック構造と重力アノマリーの関係は [36] で議論されている。これを示す過程で Hirzebruch の符号数定理 [37, 38] が用いられたが, これを発展させたのが後述の Atiyah–Singer の指数定理である。

ここではアノマリーの解析で用いる特性類を定義し, その性質を調べる。そして Chern–Simons 項やその降下方程式を定める。

構造群を  $G$  とするファイバー束  $E$  を考える。  $G$  の Lie 環を  $\mathfrak{g}$  とおき, 整数  $m$  について, 次の性質を持つ多重線形写像  $P: \mathfrak{g}^{\otimes m} \rightarrow \mathbb{R}$  を  $G$  の  $m$  次不変多項式とよぶ:

- (i)  $P(X_1, \dots, X_m)$  ( $X_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq m$ ) で  $X_i$  について対称
- (ii)  $P$  は随伴不変, つまり  $P(gX_1g^{-1}, \dots, gX_mg^{-1}) = P(X_1, \dots, X_m)$  ( $g \in G$ )

このとき,  $g = \exp(tv)$  ( $v \in \mathfrak{g}$ ) とすれば,  $P(gX_1g^{-1}, \dots, gX_mg^{-1})$  は変数  $t$  について不変であり,  $t$  で微分することで

$$\sum_{i=1}^m P(\dots, [v, X_i], \dots) = 0 \quad (2.38)$$

を満たす。

**Theorem 2.1** (Chern–Weil の定理). 構造群を  $G$  とするファイバー束  $E$  について,  $G$  の  $m$  次不変多項式を  $P$  とする。

- (I)  $E$  の接続  $A$  の曲率  $F$  について,  $F$  は Lie 環  $\mathfrak{g}$  に値を持つ 2-form だから  $\mathfrak{g}$  の基底  $\{\lambda^a\}$  を用いて  $F = F^a \lambda^a$  と展開できる。  $d$  次元多様体  $M$  上の  $2m$ -form ( $2m \leq d$ ) を

$$P(F, \dots, F) = P(\lambda^{a_1}, \dots, \lambda^{a_k}) F^{a_1} \dots F^{a_k} \quad (2.39)$$

と定めれば, これは  $dP(F, \dots, F) = 0$  である。

- (II)  $E$  の接続  $A_0, A_1$  の曲率をそれぞれ  $F_0, F_1$  とする。このとき  $M$  上の  $(2m - 1)$ -form  $\theta$  が存在し

$$P(F_1, \dots, F_1) - P(F_0, \dots, F_0) = d\theta \quad (2.40)$$

を満たす。したがって  $M$  がコンパクトの時,  $P(F^m) = P(F, \dots, F)$  の積分は接続  $A$  の取り方に関係せず, ファイバー束  $E$  のみに依存する。  $P(F^m)$  を特性類とよぶ<sup>1</sup>。

<sup>1</sup>より正確には  $P(F^m)$  の de Rham cohomology 類が特性類である。

**Proof.** (I) 簡単のため  $P$  を 2 次の不変多項式とするが、この方法は任意の  $m$  で用いることができる。  $dF = -[A, F]$  より

$$\begin{aligned} dP(F, F) &= P(dF, F) + P(F, dF) \\ &= -P([A, F], F) - P(F, [A, F]) = 0. \end{aligned}$$

よって  $P(F, F)$  は閉形式である。

(II) 接続  $A_0, A_1$  に対して新しい接続  $A_t$  を

$$A_t = A_0 + t\alpha, \quad \alpha = A_1 - A_0 \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (2.41)$$

とする。  $A_0, A_1, A_t$  による共変外微分を  $D_0, D_1, D_t$  とかく。  $F_t = dA_t + A_t^2$  とすれば

$$F_t = d(A_0 + t\alpha) + (A_0 + t\alpha)^2 = F_0 + t(D_0\alpha) + t^2\alpha^2 \quad (2.42)$$

$$\frac{d}{dt}F_t = D_0\alpha + 2t\alpha^2 = d\alpha + [A + t\alpha, \alpha] = D_t\alpha \quad (2.43)$$

を満たす。

ここで

$$\theta = 2 \int_0^1 dt P(\alpha, F_t) \quad (2.44)$$

とおけば、  $\theta$  は  $M$  上の 3-form であり、これの外微分をこれから計算する。  $\alpha, F_t$  がそれぞれ 1-form, 2-form であることに注意すれば、被積分関数は

$$\begin{aligned} dP(\alpha, F_t) &= P(d\alpha, F_t) - P(\alpha, dF_t) \\ &= P(d\alpha, F_t) + P(\alpha, [A_t, F_t]) \\ &= P(d\alpha, F_t) + P([A_t, \alpha], F_t) \\ &= P(D_t\alpha, F_t) \end{aligned}$$

となる。  $\frac{d}{dt}F_t = D_t\alpha$  を用いれば

$$dP(\alpha, F_t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} P(F_t, F_t). \quad (2.45)$$

したがって

$$\begin{aligned} d\theta &= 2 \int_0^1 dt dP(\alpha, F_t) \\ &= 2 \int_0^1 dt \frac{1}{2} \frac{d}{dt} P(F_t, F_t) \\ &= P(F_1, F_1) - P(F_0, F_0). \end{aligned}$$

また、  $P$  が  $m$  次不変多項式である時は

$$\theta = m \int_0^1 dt P(\alpha, \underbrace{F_t, \dots, F_t}_{m-1 \text{ 個}}) \quad (2.46)$$

とすれば、上と同じことが同様に成り立つ。  $\square$

**Example 2.2** (Chern 類). Chern 類は複素ベクトル束に対して定まる特性類である.  $A$  を  $G = GL(r, \mathbb{C})$  束の接続, 曲率を  $F$  として

$$\det\left(I_r + i\frac{t}{2\pi}F\right) = 1 + t^1c_1 + t^2c_2 + \cdots + t^rc_r \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (2.47)$$

とすれば,  $c_k$  ( $k = 1, 2, \dots, r$ ) は  $2k$ -form である. 上の式から各  $c_k$  は  $\text{tr}(F^m)$  の積と和で書くことができ, 随伴不変である. したがって特性類となる.  $c_k$  を  $k$  次の Chern 類とよぶ. 例えば

$$c_1 = \frac{i}{2\pi} \text{tr}(F), \quad c_2 = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{2} (\text{tr}(F)^2 - \text{tr}(F^2)), \quad \dots, \quad c_r = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^r \det(F) \quad (2.48)$$

である.

**Example 2.3** (Pontrjagin 類). Pontrjagin 類は実ベクトル束に対して定まる特性類である.  $\Gamma$  を  $G = GL(r, \mathbb{R})$  束の接続, 曲率を  $R$  として

$$\det\left(I_r + \frac{t}{2\pi}R\right) = 1 + t^1p_1 + t^2p_2 + \cdots + t^rp_r \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (2.49)$$

とすれば,  $p_k$  は  $2k$ -form で, 同様に特性類である.  $GL(r, \mathbb{R})$  束が常に  $O(r)$  束に簡約できることを思い出せば, 接続を適切にとることで  $R \in O(r)$  とできて,

$$\det\left(I_r + \frac{t}{2\pi}R\right) = \det\left[{}^t\left(I_r + \frac{t}{2\pi}R\right)\right] = \det\left(I_r - \frac{t}{2\pi}R\right). \quad (2.50)$$

ここで  ${}^t(*)$  は転置を表す. したがって,  $k$  が奇数の項に意味はない.  $p_{2k}$  は  $4k$ -form となり,  $k$  次の Pontrjagin 類と呼ばれる.

$M$  がコンパクトの時, Chern 類, Pontrjagin 類の積分は整数になる. 他の特性類も Chern 類や Pontrjagin 類を用いてかけることが多い.

(2.40) は Cartan のホモトピー公式の応用である. 多様体  $M$  を  $M \times [0, 1]$  に埋め込み, その座標を  $(x, t)$  で表す.  $M$  の接続の族  $\{A_t\}_{t \in [0, 1]}$  をとり,  $M \times [0, 1]$  の上で接続  $A_t$  を考える. このように取れば,  $A_t$  は  $dt$  成分を持たない. そして  $M \times [0, 1]$  上の曲率を

$$\mathcal{F} = (d + d_t)A_t + A_t^2 = dA_t + A_t^2 + d_tA_t = F_t + d_tA_t \quad (2.51)$$

によって定める.  $d$  は  $x$  方向の,  $d_t = dt \frac{\partial}{\partial t}$  は  $t$  方向の外微分とする.  $F_t = dA_t + A_t^2$  は  $M$  上の接続  $A_t$  による曲率である.

ここでベクトル場  $\xi = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  について, 内部積  $i_\xi$  を定義する: 内部積は  $p$ -form を  $(p-1)$ -form に移す変換で,  $p$ -form  $\omega = \frac{1}{p!} \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p} dx^{\alpha_1} \cdots dx^{\alpha_p}$  に対して

$$i_\xi \omega := \frac{1}{(p-1)!} \xi^{\alpha_1} \omega_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} dx^{\alpha_2} \cdots dx^{\alpha_p} \quad (2.52)$$

によって定義される. 内部積は  $p$ -form  $\Lambda_p$ ,  $q$ -form  $\Sigma_q$  の積に対して,

$$i_\xi(\Lambda_p \Sigma_q) = (i_\xi \Lambda_p) \Sigma_q + (-1)^p \Lambda_p (i_\xi \Sigma_q) \quad (2.53)$$

のように作用し,  $i_{\xi}^2 = 0$  を満たす.

$A_t, \mathcal{F}$  に  $i_{\partial_t}$  ( $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ ) を作用させると

$$i_{\partial_t} A_t = 0, \quad i_{\partial_t} \mathcal{F} = \frac{\partial}{\partial t} A_t \quad (2.54)$$

のようになるから,  $\delta := (d + d_t)i_{\partial_t} + i_{\partial_t}(d + d_t)$  に対して

$$\begin{aligned} \delta A_t &= i_{\partial_t}(d + d_t)A_t = \frac{\partial}{\partial t} A_t, \\ \delta \mathcal{F} &= (d + d_t) \frac{\partial}{\partial t} A_t + i_{\partial_t}[-A_t, \mathcal{F}] \\ &= (d + d_t) \frac{\partial}{\partial t} A_t + A_t \frac{\partial}{\partial t} A_t + \frac{\partial}{\partial t} A_t \cdot A_t = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F} \end{aligned} \quad (2.55)$$

となる.  $\delta$  は  $M \times [0, 1]$  上の Lie 微分として知られており, その関係を Cartan のホモトピー公式とよぶ. Lie 微分の性質から,  $\delta$  は Leibniz 則  $\delta \Lambda \Sigma = (\delta \Lambda) \Sigma + \Lambda(\delta \Sigma)$  を満たす. よって  $A_t, \mathcal{F}$  の多項式  $S(A_t, \mathcal{F})$  に対して

$$\delta S(A_t, \mathcal{F}) = \frac{\partial}{\partial t} S(A_t, \mathcal{F}) \quad (2.56)$$

が成り立ち, 両辺を積分することで,

$$\int_0^1 dt \delta S(A_t, \mathcal{F}) = S(A_t, \mathcal{F}) \Big|_{t=1} - S(A_t, \mathcal{F}) \Big|_{t=0} \quad (2.57)$$

のようになる.

$S(A_t, \mathcal{F})$  は  $M \times [0, 1]$  上の微分形式であり  $dt$  を含む. そこで  $M \times [0, 1]$  上の微分形式を  $M$  の微分形式に移す写像を  $\iota^*$  とすれば,  $\iota^*$  は  $dt$  を含む項を 0 にする射影として定義される.  $\iota^* A_t = A_t, \iota^* \mathcal{F} = F_t$  となるから,

$$\int_0^1 dt \iota^* [\delta S(A_t, \mathcal{F})] = S(A_1, F_1) - S(A_0, F_0) \quad (2.58)$$

をえる. これを上  $S(A, F) = P(F^m)$  に用いると, 接続の族  $A_t = A_0 + t\alpha$  ( $\alpha = A_1 - A_0$ ) に対して  $\mathcal{F} = F_t + \alpha dt$  であり

$$\iota^* [\delta P(\mathcal{F}^m)] = \iota^* [(d + d_t)mP(\alpha, \mathcal{F}^{m-1})] = mdP(\alpha, F_t^{m-1}) \quad (2.59)$$

となるため, (2.40) が導かれる. (2.58) は (2.40) の一般化である. ここで  $P(\alpha, F_t^{m-1}) = P(\alpha, F_t, \dots, F_t)$  とした.

族として  $A_t = tA$  をとる. これは正確には接続とは限らないが, この族と  $S(A, F) = P(F^m)$  に対して (2.58) を用いると

$$P(F^m) = d \left[ m \int_0^1 dt P(A, F_t^{m-1}) \right] \quad (2.60)$$

のようになる. ここで  $F_t = tA + t^2 A^2$  である. この式は局所的な表示であり, 右辺の括弧の中が大域的な微分形式になるとは限らない. 括弧の中身を

$$Q_{2m-1}(A, F) := \int_0^1 dt \iota^* [i_{\partial_t} P(\mathcal{F}^m)] \quad (2.61)$$

$$= m \int_0^1 dt P(A, F_t^{m-1}) \quad (2.62)$$

として表し, これを Chern-Simons 項とよぶ.

今回  $M$  上の接続  $A$  を,  $M \times [0, 1]$  に拡張し,  $\delta$  を  $M \times [0, 1]$  の  $\partial_t$  方向の Lie 微分として定めたが, 拡張しない方法もある. 具体的には,  $M$  上の接続の族  $\{A_t = A_0 + t(A_1 - A_0)\}$  について

$$l_t A_t = 0, \quad l_t F_t = \frac{\partial}{\partial t} A_t = (A_1 - A_0) \quad (2.63)$$

として  $l_t$  を定め,  $\delta = dl_t + l_t d$  とする方法である. ここで  $l_t$  は  $i^* i_{\partial_t}$  に対応し, ホモトピー演算子と呼ばれる. この形式化の利点は  $A_t$  を  $M \times [0, 1]$  に拡張する必要がなく,  $M$  上の演算子のように  $l_t$  を使えることである. 欠点は, その数学的意味が曖昧なところである. 例えば  $M$  が  $2m - 1$  次元の多様体の場合,  $P(F_t^m)$  は  $2m$ -form のために 0 となり, つまり恒等的に  $l_t P(F_t^m) \equiv 0$  が成り立ちそうだが,  $l_t P$  を  $(A, F_t)$  の多項式と考えれば, これは値を持つ.  $l_t$  と  $i^* i_{\partial_t}$  の対応から, このような場合は  $l_t P$  を形式的に計算し, それに  $A, F_t$  を代入すべきである.  $l_t$  を用いる時はこれに常に注意する必要がある.

それに対して  $\delta$  を  $M \times [0, 1]$  の Lie 微分として扱う方法の利点は, その数学的意味が厳密なので, 無限小ゲージ変換演算子などとの可換性が一目瞭然なことである. そのため, この論文では  $\delta$  を  $M \times [0, 1]$  の Lie 微分として扱う.

最後に Chern-Simons 項の降下方程式を導く.  $2n$  次元多様体  $M$  上の接続  $A$  をとり, それを  $M \times G$  上に拡張する.  $M \times G$  の座標を  $(x, \theta)$  として,  $x, \theta$  方向の外微分をそれぞれ  $d, \hat{d}$  とかく.  $r$  次元 Lie 群  $G$  は  $M$  上のゲージ理論の構造群であり, ゲージ変換群の族  $\{g = g(x, \theta)\}$  をとる.  $A^\theta = g^{-1}(d + A)g, F^\theta = dA^\theta + (A^\theta)^2, \hat{v} = g^{-1}\hat{d}g$  として  $M \times G$  の接続と曲率を

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= g^{-1}(d + \hat{d} + A)g = A^\theta + \hat{v} \\ \mathcal{F} &= (d + \hat{d})\mathcal{A} + \mathcal{A}^2 = F^\theta \end{aligned} \quad (2.64)$$

によって定める. この定式化では

$$\begin{aligned} \hat{d}A^\theta &= -d\hat{v} - [A^\theta, \hat{v}] = -D_{A^\theta}\hat{v} \\ \hat{d}\hat{v} &= -\hat{v}^2 \\ \hat{d}F^\theta &= -[\hat{v}, F^\theta] \end{aligned} \quad (2.65)$$

が成り立つため,  $\hat{d}$  は無限小ゲージ変換演算子そのものであり,  $G$  はゲージ変換のパラメータ空間である. そして, 上の  $\delta$  と可換であることがわかる.

このように  $\mathcal{A}$  をとり,  $n + 1$  次不変多項式  $P$  についての特性類  $P(\mathcal{F}^{n+1})$  を考える. これは

$$P(\mathcal{F}^{n+1}) = P((g^{-1}Fg)^{n+1}) = P(F^{n+1}) = 0 \quad (2.66)$$

のようになるが, その Chern-Simons 項については  $Q_{2n+1}(\mathcal{A}, \mathcal{F}) \neq 0$  である. Chern-Simons 項の性質から

$$(d + \hat{d})Q_{2n+1}(\mathcal{A}, \mathcal{F}) = P(\mathcal{F}^{n+1}) = 0 \quad (2.67)$$

が成り立つ. 左辺は  $d\theta$  成分を持つが右辺は含んでいない.  $d\theta$  成分は  $\mathcal{A} = A^\theta + \hat{v}$  のみに現れるから,  $\hat{v}$  のべきで  $Q_{2n+1}(\mathcal{A}, \mathcal{F})$  を展開し

$$Q_{2n+1}(\mathcal{A}, \mathcal{F}) = Q_{2n+1}^0(A^\theta, \mathcal{F}) + Q_{2n}^1(\hat{v}, A^\theta, \mathcal{F}) + \cdots + Q_{2n+1-r}^r \quad (2.68)$$



とかく.  $Q_{2n+1-a}^a$  は  $\hat{v}$  の  $a$  乗を持つことを表し,  $r$  は Lie 群  $G$  の次元である. (2.67) に展開 (2.68) を代入すれば  $d\theta$  の同じ次数の項同士が打ち消し合い,

$$\begin{aligned} \hat{d}Q_{2n+1}^0 + dQ_{2n}^1 &= 0, \\ \hat{d}Q_{2n}^1 + dQ_{2n-1}^2 &= 0, \\ &\vdots \\ \hat{d}Q_{2n+1-(r-1)}^{r-1} + dQ_{2n+1-r}^r &= 0, \\ \hat{d}Q_{2n+1-r}^r &= 0 \end{aligned} \quad (2.69)$$

が成り立つ. これを降下方程式とよぶ. Sec. 3, 4 で  $Q_{2n}^1(\hat{v}, A^\theta, F^\theta)$  がゲージアノマリーや重力アノマリーとして現れることをみて, それが Wess-Zumino 整合性条件を満たすことを降下方程式を用いて確かめる. ここでは  $Q_{2n}^1$  の表式を導く.

(2.68) より,  $Q_{2n}^1$  は

$$Q_{2n+1}(\mathcal{A}, \mathcal{F}) = (n+1) \int_0^1 ds P(\mathcal{A}, \mathcal{F}_s^n) \quad (2.70)$$

の  $\hat{v}$  の一次の項である. ここで  $\mathcal{A} = A^\theta + \hat{v}$ ,  $\mathcal{F}_s = s(d + \hat{d})\mathcal{A} + s^2\mathcal{A}^2$  であるから,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_s &= sdA^\theta + s^2(A^\theta)^2 + (s^2 - s)([A^\theta, \hat{v}] + \hat{v}^2) \\ &= \mathcal{F}_s^\theta + (s^2 - s)([A^\theta, \hat{v}] + \hat{v}^2) \end{aligned}$$

とかける. ここで  $\mathcal{F}_s^\theta := sdA^\theta + s^2(A^\theta)^2$  とした.  $\mathcal{A}$  は  $\hat{v}$  の 1 次の項を持ち,  $\mathcal{F}_s$  は 2 次の項を持つことがわかる. したがって  $\hat{v}$  の 0 次の項は

$$Q_{2n+1}^0(A^\theta, \mathcal{F}) = (n+1) \int_0^1 ds P(A^\theta, (\mathcal{F}_s^\theta)^n) \quad (2.71)$$

となる.  $Q_{2n+1}$  の  $\hat{v}$  の 1 次の項は

$$\begin{aligned} &Q_{2n}^1(\hat{v}, A^\theta, \mathcal{F}) \\ &= (n+1) \int_0^1 ds P(\hat{v}, (\mathcal{F}_s^\theta)^n) + (n+1)n \int_0^1 ds (s^2 - s) P(A^\theta, [A^\theta, \hat{v}], (\mathcal{F}_s^\theta)^{n-1}) \end{aligned}$$

となる. ここで第一項を部分積分すると

$$\begin{aligned} \int_0^1 ds P(\hat{v}, (\mathcal{F}_s^\theta)^n) &= \int_0^1 ds (1-s) \frac{\partial}{\partial s} P(\hat{v}, (\mathcal{F}_s^\theta)^n) \\ &= \int_0^1 ds (1-s)n P(\hat{v}, dA^\theta + 2s(A^\theta)^2, (\mathcal{F}_s^\theta)^{n-1}) \end{aligned}$$

となる. 第二項については

$$\begin{aligned} &\int_0^1 ds (s^2 - s) P(A^\theta, [A^\theta, \hat{v}], (\mathcal{F}_s^\theta)^{n-1}) \\ &= \int_0^1 ds (s^2 - s) P([A^\theta, A^\theta], \hat{v}, (\mathcal{F}_s^\theta)^{n-1}) + \int_0^1 ds (s^2 - s) P(A^\theta, \hat{v}, [A^\theta, (\mathcal{F}_s^\theta)^{n-1}]) \\ &= \int_0^1 ds (s^2 - s) P(2(A^\theta)^2, \hat{v}, (\mathcal{F}_s^\theta)^{n-1}) + \int_0^1 ds (s-1) P(A^\theta, \hat{v}, -d(\mathcal{F}_s^\theta)^{n-1}) \end{aligned}$$

となる. ここで  $[A^\theta, A^\theta] = 2(A^\theta)^2, d\mathcal{F}_s^\theta + s[A^\theta, \mathcal{F}_s^\theta] = 0$  を用いた. これによって

$$\begin{aligned} Q_{2n}^1(\hat{v}, A^\theta, \mathcal{F}) &= (n+1)n \int_0^1 ds (1-s) \left( P(\hat{v}, dA^\theta, (\mathcal{F}_s^\theta)^{n-1}) - P(\hat{v}, A^\theta, d(\mathcal{F}_s^\theta)^{n-1}) \right) \\ &= (n+1)n \int_0^1 ds (1-s) P(\hat{v}, d(A^\theta, (\mathcal{F}_s^\theta)^{n-1})) \end{aligned} \quad (2.72)$$

がわかる. ここで,

$$P(\Sigma_1, d(\Sigma_2, \Sigma_3, \dots)) = P(\Sigma_1, d\Sigma_2, \Sigma_3, \dots) + (-1)^{p_2} P(\Sigma_1, \Sigma_2, d\Sigma_3, \dots) + \dots \quad (2.73)$$

とした.

## 2.4 指数定理

ここではスピノール束とスピン接続を定め, Atiyah-Singer の指数定理を紹介する.

ガンマ行列  $\{\gamma^a\}_{a=1, \dots, d}$  を

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = \gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a = 2\eta^{ab} \quad (2.74)$$

のように定める. これによって  $(\gamma^a)^\dagger = \gamma^a, (\gamma^a)^2 = 1$  となる. そしてこの行列の族  $\{\gamma^a\}$  が生成する係数  $\mathbb{R}$  の代数空間

$$Cl_d = \langle \gamma^1, \dots, \gamma^d \rangle_{\mathbb{R}} = \left\{ \sum_{i_1, \dots, i_p} c_{i_1 \dots i_p} \gamma^{i_1} \dots \gamma^{i_p} \mid c_{i_1 \dots i_p} \in \mathbb{R} \right\} \quad (2.75)$$

を実 Clifford 代数という.  $Cl_d$  はベクトル空間として

$$1 \cup \left\{ \gamma^{i_1} \gamma^{i_2} \dots \gamma^{i_p} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq d \right\} \quad (2.76)$$

で張られる. 同様に  $\{i\gamma^a\}$  が生成する係数  $\mathbb{R}$  の代数空間  $Cl'_d$  や,  $\{\gamma^a\}$  が生成する係数  $\mathbb{C}$  の代数空間  $\mathbb{C}Cl_d$  を

$$Cl'_d = \langle i\gamma^1, \dots, i\gamma^d \rangle_{\mathbb{R}} = \left\{ \sum_{i_1, \dots, i_p} c_{i_1 \dots i_p} i\gamma^{i_1} \dots i\gamma^{i_p} \mid c_{i_1 \dots i_p} \in \mathbb{R} \right\} \quad (2.77)$$

$$\mathbb{C}Cl_d = \langle \gamma^1, \dots, \gamma^d \rangle_{\mathbb{C}} = \left\{ \sum_{i_1, \dots, i_p} c_{i_1 \dots i_p} \gamma^{i_1} \dots \gamma^{i_p} \mid c_{i_1 \dots i_p} \in \mathbb{C} \right\} \quad (2.78)$$

と定義できる. ここで  $\mathbb{C}Cl_d$  は複素 Clifford 代数と呼ばれ,  $Cl_d, Cl'_d$  を部分代数として含む. そして行列環として

$$\mathbb{C}Cl_d = \begin{cases} \mathbb{C}(2^m) & (d = 2m) \\ \mathbb{C}(2^m) \oplus \mathbb{C}(2^m) & (d = 2m + 1) \end{cases} \quad (2.79)$$

とかける. ここで  $\mathbb{C}(2^m)$  は  $\mathbb{C}$  を成分とする  $2^m \times 2^m$  行列の全体である. よって  $\gamma^a$  は  $2^m$  ( $m = [d/2]$ ) 次元の複素ベクトル空間  $W_d = \mathbb{C}^{2^{[d/2]}}$  に作用することがわかる.  $W_d$  をスピノール空間と呼ぶ.  $[*]$  は Gauss 記号で,  $[x] = \max_{n \in \mathbb{Z}} \{n \leq x\}$  として定まっている.

$Cl_d, Cl'_d$  もともに線形行列で書くことができる (Table 1). この Clifford 代数の行列表示は, 後述の Dirac 演算子と可換, または反可換な反線形作用素を定義する時に役立つ.

$d \bmod 8$	1	2	3	4	5	6	7	8
$Cl_d = \langle \gamma^a \rangle_{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{R}(16)$
$Cl'_d = \langle i\gamma^a \rangle_{\mathbb{R}}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(16)$

**Table 1:** 実 Clifford 代数の分類.  $K(n)$  ( $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ) は体  $K$  を係数とする  $n \times n$  行列である. Clifford 代数の周期性  $Cl_{d+8} = Cl_d \otimes \mathbb{R}(16)$  により  $d = 1, 2, \dots, 8$  を調べれば十分である.

$(v_1, \dots, v_d) \in \mathbb{R}^d$  に対して  $v = v_a \gamma^a \in Cl_d$  を定めれば,  $\mathbb{R}^d \hookrightarrow Cl_d$  として  $\mathbb{R}^d$  を  $Cl_d$  に埋め込める. そこで,  $\mathbb{R}^d$  を  $Cl_d$  の部分空間と同一視し,  $v = v_a \gamma^a$  を単にベクトルと呼ぶ. スピン群は大きさ 1 のベクトルの偶数個の積の全体として定義される:

$$Spin(d) := \left\{ s = v_{i_1} \cdots v_{i_{2p}} \in Cl_d \mid (v_i)^2 = 1, p = 1, 2, \dots \right\} \quad (2.80)$$

例えば, 変数  $t$  に対して  $v_1 = \cos(t/2)\gamma^1 - \sin(t/2)\gamma^2, v_2 = \cos(t/2)\gamma^1 + \sin(t/2)\gamma^2$  とすれば  $(v_1)^2 = (v_2)^2 = 1$  であり,

$$\begin{aligned} s(t) &= v_1 v_2 = \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) (\gamma^1 \gamma^2 - \gamma^2 \gamma^1) \\ &= \cos t + (\sin t) \gamma^1 \gamma^2 \in Spin(d) \end{aligned} \quad (2.81)$$

である. よって  $Spin(d)$  の元は

$$s = \prod_{i < j} \left( \cos \theta_{i,j} + (\sin \theta_{i,j}) \gamma^i \gamma^j \right) \quad (2.82)$$

のようにかける.  $\{\theta_{i,j} \mid i < j\}$  は  $Spin(d)$  の連続な変数であり,  $Spin(d)$  はこれを座標とする  $\frac{1}{2}d(d-1)$  次元の Lie 群となる.

$Spin(d)$  の  $\mathbb{R}^d$  への作用は

$$(s, v) \mapsto \text{Ad}(s)v = sv s^{-1} \quad (s \in Spin(d), v \in \mathbb{R}) \quad (2.83)$$

として与えられる. これは  $SO(d)$  の  $\mathbb{R}^d$  への作用と同じである. 実際, (2.81) の  $s(t)$  について

$$\begin{aligned} \text{Ad}(s(t))v &= s(t)(v_1 \gamma^1 + v_2 \gamma^2 + \cdots) s(t)^{-1} \\ &= (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \dots, \gamma^d) \left( \begin{array}{cc|ccc} \cos 2t & \sin 2t & 0 & \cdots & 0 \\ -\sin 2t & \cos 2t & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.84)$$

となるから,  $\text{Ad}(s(t)) \in SO(d)$  で,  $\text{Ad} : Spin(d) \rightarrow SO(d)$  が全射準同型となることがわかる. さらに  $\text{Ker Ad} = \{1, -1\} = \mathbb{Z}_2$  だから, 準同型定理を用いると

$$Spin(d)/\mathbb{Z}_2 \cong SO(d) \quad (2.85)$$

となり,  $Spin(d)$  は  $SO(d)$  の二重被覆であることがわかる.

次に Lie 環  $\mathfrak{spin}(d)$  と  $\mathfrak{so}(d)$  の対応をみる. Lie 環  $\mathfrak{so}(d)$  の基底  $\{L^{ab} \mid a < b\}$  を

$$(L^{ab})_{ij} = \delta_i^a \delta_j^b - \delta_j^a \delta_i^b \quad (2.86)$$

のようにとる. 例えば  $a = 1, b = 2$  の時は

$$L^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (2.87)$$

となる.  $L^{ba} = -L^{ab}$  とすれば,  $L^{ab}$  同士の交換関係は

$$[L^{ab}, L^{cd}] = \eta^{bc} L^{ad} - \eta^{ac} L^{bd} + \eta^{ad} L^{bc} - \eta^{bd} L^{ac} \quad (2.88)$$

である. ここで  $\eta = \text{diag}(+1, \dots, +1)$  とした. これに対応する  $\mathfrak{spin}(d)$  基底は,  $\{\sigma^{ab} = \frac{1}{4}[\gamma^a, \gamma^b] \mid a < b\}$  である. 実際  $\sigma^{ba} = -\sigma^{ab}$  とすれば, 交換関係は

$$[\sigma^{ab}, \sigma^{cd}] = \eta^{bc} \sigma^{ad} - \eta^{ac} \sigma^{bd} + \eta^{ad} \sigma^{bc} - \eta^{bd} \sigma^{ac} \quad (2.89)$$

となる. よって  $\mathfrak{spin}(d) \rightarrow \mathfrak{so}(d)$  を  $\sigma^{ab} \mapsto L^{ab}$  で定義すれば, これは全単射だから, Lie 環の構造を保つ同型となる.

具体的には, (2.84) の両辺を  $t$  で微分し  $t = 0$  とすると

$$\frac{1}{2} \text{ad}(\gamma^1 \gamma^2) v = \frac{1}{2} [\gamma^1 \gamma^2, v] = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \dots, \gamma^d) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} \quad (2.90)$$

が得られる.  $\sigma^{ab} = \frac{1}{4}[\gamma^a, \gamma^b] = \frac{1}{2}\gamma^a \gamma^b$  に注意すれば, 左辺は  $\text{ad}(\sigma^{12})$  で, 右辺は  $L^{12}$  である. したがって上の同型写像は  $\text{ad} : \mathfrak{spin}(d) \rightarrow \mathfrak{so}(d), \text{ad}(\sigma^{ab}) = L^{ab}$  であることがわかる.

$SO(d)$  を  $Spin(d)$  の adjoint 表現でかけることがわかったが, 一般に  $SO(d)$  束を  $Spin(d)$  束として考えられるとは限らない. 例えば  $T^*M$  の構成で生じた変換関数の族  $\{L_{UV}\}$  について局所的に

$$\text{ad}(s_{UV}) = L_{UV} \quad (2.91)$$

を満たす  $s_{UV} : U \cap V \rightarrow Spin(d)$  を定義できるが, それが cocycle 条件を満たしているとは限らない. それは adjoint 表現が  $s, -s \in Spin(d)$  を同一視するからである. cocycle 条件を満たす変換関数の族  $\{s_{UV}\}$  が定義できる時, スピン構造を持つといい, スピン構造を持つための必要十分条件は 2 次の Stiefel-Whitney 類が 0 であることが知られている. スピノール空間  $W_d$  を  $\{s_{UV}\}$  を用いて張り合わせたものをスピノール束といい  $\mathbf{S}$  とかく.

上で定めた  $T^*M$  がスピン構造を持つ時を考える. このとき  $T^*M$  の接続から  $\mathbf{S}$  の接続を構成できる.  $T^*M$  の接続  $\omega$  は  $\mathfrak{so}(d)$  に値を持つから,  $\mathfrak{so}(d)$  の基底  $\{L^{ab}\}$  によって  $\omega = \frac{1}{2} \sum_{ab} \omega_{ab} L^{ab}$  と展開できる. ここで  $\omega_{ab} = \eta_{ac} \omega_b^c$  である. スピン構造の存在の仮定から,  $L^{ab} = \text{ad}(\sigma^{ab})$  であり,

$$\omega_\Delta = \frac{1}{2} \sum_{a,b} \omega_{ab} \sigma^{ab} \quad (2.92)$$

とすれば,  $\text{ad}(\omega_\Delta) = \omega$  を満たす. これによってスピン接続  $\omega_\Delta$  を定める. このスピン接続から生成される特性類は多様体のスピン構造についての情報を含んだものになると期待できる.

コンパクトな  $2n$  次元スピン多様体  $M^{2n}$  上でゲージ場と結合したスピノールを考える. スピノールに作用する Dirac 演算子を

$$\mathcal{D} := \gamma^a E_a^\mu (\partial_\mu + A_\mu + (\omega_\Delta)_\mu) \quad (2.93)$$

のように定める. ここで  $E_a^\mu$  は  $e^a_\mu$  の逆行列で

$$E_a^\mu e^b_\mu = \delta_a^b, \quad E_a^\mu e^a_\nu = \delta_\nu^\mu \quad (2.94)$$

を満たす.  $i\mathcal{D}$  はエルミート楕円型 1 階微分作用素であるので, 固有値は実数で, その縮退は有限個である.

カイラリティ演算子を

$$\gamma_5 := \eta \gamma^1 \gamma^2 \cdots \gamma^{2n} \quad (2.95)$$

によって定める.  $\eta$  は位相因子で, Euclidean signature の計量を用いる場合  $\eta = i^n$  となる. これによって  $(\gamma_5)^\dagger = \gamma_5, (\gamma_5)^2 = 1$  となるので, その固有値は  $\pm 1$  であり, スピノール束を  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_+ \oplus \mathbf{S}_-$  と分解できる.  $\gamma_5$  は  $\mathcal{D}$  と反可換  $\gamma_5 i\mathcal{D} = -i\mathcal{D} \gamma_5$  なので

$$i\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & i\mathcal{D}_- \\ i\mathcal{D}_+ & 0 \end{pmatrix} \left( i\mathcal{D}_\pm = i\mathcal{D} \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_5) \right) \quad (2.96)$$

のようにかける. さらにその 2 乗は

$$(i\mathcal{D})^2 = \begin{pmatrix} i\mathcal{D}_- i\mathcal{D}_+ & 0 \\ 0 & i\mathcal{D}_+ i\mathcal{D}_- \end{pmatrix} \quad (2.97)$$

となり,  $i\mathcal{D}_- i\mathcal{D}_+, i\mathcal{D}_+ i\mathcal{D}_-$  はそれぞれエルミート楕円型微分作用素で,  $\gamma_5$  と可換である.

$i\mathcal{D}$  の固有値  $\lambda \in \mathbb{R}$  に対応する固有関数を  $\psi$  とすれば,

$$i\mathcal{D}\psi = \lambda\psi \quad (2.98)$$

となる. ここで  $\psi$  は  $\gamma_5$  によって  $\psi = \psi_+ + \psi_-$  のように分解できる.  $\psi_\pm$  は  $\gamma_5$  の固有値  $\pm 1$  に対応する固有関数である.  $\lambda \neq 0$  の場合,  $\mathcal{D}$  と  $\gamma_5$  との反可換性から,  $\gamma_5 \psi = \psi_+ - \psi_-$  も固有関数となり,

$$i\mathcal{D}\gamma_5\psi = -\lambda\gamma_5\psi \quad (2.99)$$

だから固有値は  $-\lambda$  である。したがって  $\lambda, -\lambda$  に対応する固有関数の数は同じである。

また  $i\mathcal{D}$  の固有値 0 に対する固有関数  $\psi_0$  は、カイラリティによって

$$i\mathcal{D}\gamma_5\psi_0 = -\gamma_5i\mathcal{D}\psi_0 = 0 \quad (2.100)$$

となる。よってカイラリティは 0-mode を 0-mode に移す。そのため Dirac 演算子の 0-mode をカイラリティの固有関数に選ぶことができ、その固有値を  $\lambda_{0,+}^i, \lambda_{0,-}^j$  ( $i = 1, \dots, n_+, j = 1, \dots, n_-$ ) と書いておく。  $\lambda_{0,\pm}^i$  は全て 0 で、 $\pm$  はカイラリティの正負を表す。  $n_+, n_-$  はカイラリティ正の 0-mode の個数とカイラリティ負の 0-mode の個数である。  $i\mathcal{D}$  の固有値は  $\dots \leq -\lambda_2 \leq -\lambda_1 < 0 = \lambda_{0,+}^{i=1, \dots, n_+} = \lambda_{0,-}^{j=1, \dots, n_-} < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$  のようになり、この固有値の列を  $\text{Spec}(i\mathcal{D})$  とする。

この状況で  $\gamma_5$  のトレースを考える。固有値  $\lambda$  に対応する正規固有関数を  $\phi_\lambda$  として

$$\begin{aligned} \text{Tr } \gamma_5 &:= \lim_{M \rightarrow \infty} \text{Tr } \gamma_5 \exp \left\{ - \left( \frac{i\mathcal{D}}{M} \right)^2 \right\} \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{\lambda \in \text{Spec}(i\mathcal{D})} e^{-\left(\frac{\lambda}{M}\right)^2} \int_{M^{2n}} (\phi_\lambda(x), \gamma_5 \phi_\lambda(x)) \text{vol}_x \end{aligned} \quad (2.101)$$

のようにする。  $\text{vol}_x$  は多様体  $M^{2n}$  の体積要素で、 $(*, *)$  はスピノールの内積である。  $\lambda \neq 0$  の場合  $\phi_\lambda(x), \gamma_5 \phi_\lambda(x)$  はそれぞれ固有値  $\lambda, -\lambda$  の固有関数となるから、その内積は 0 となる。よって (2.101) は固有値 0 の部分のみが結果に現れ、

$$\text{Tr } \gamma_5 = \dim \text{Ker } i\mathcal{D}_+ - \dim \text{Ker } i\mathcal{D}_- = n_+ - n_- \quad (2.102)$$

のようになる。ここで Dirac 演算子の指数を

$$\text{ind}(i\mathcal{D}) := \dim \text{Ker } i\mathcal{D}_+ - \dim \text{Ker } i\mathcal{D}_- = n_+ - n_- \quad (2.103)$$

と定義する。右辺の積分表示は (2.101) から

$$\begin{aligned} \text{ind}(i\mathcal{D}) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{\lambda \in \text{Spec}(i\mathcal{D})} e^{-\left(\frac{\lambda}{M}\right)^2} \int_{M^{2n}} (\phi_\lambda(x), \gamma_5 \phi_\lambda(x)) \text{vol}_x \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{M^{2n}} \sum_{\lambda \in \text{Spec}(i\mathcal{D})} e^{-\left(\frac{\lambda}{M}\right)^2} ((\phi_{\lambda,+}(x), \phi_{\lambda,+}(x)) - (\phi_{\lambda,-}(x), \phi_{\lambda,-}(x))) \text{vol}_x \end{aligned}$$

となる。ここで  $\gamma_5$  を用いて  $\phi_\lambda = \phi_{\lambda,+} + \phi_{\lambda,-}$  と分解した。積分の中身の無限和は、 $e^{-\left(\frac{\lambda}{M}\right)^2}$  でうまく抑えられるので、絶対収束する。左辺が  $M$  に依らないから、積分の中身を  $M$  で漸近展開して、 $M$  に依存しない部分を計算すると、それは  $\omega, F$  の特性類で表すことができることがわかる。これは解析的な量の指数  $\text{ind}(i\mathcal{D})$  が多様体  $M^{2n}$  の位相構造、及び向きで定まり、Riemann 計量やスピン構造に依存しないことを意味する。

**Theorem 2.4** (Atiyah-Singer の指数定理). 偶数次元の閉スピン多様体  $(M^{2n}, h)$  において、スピノール束の Dirac 演算子  $\mathcal{D}$  について

$$\text{ind}(i\mathcal{D}) = \int_{M^{2n}} \hat{A}(M^{2n}) ch(F) \quad (2.104)$$

となる。ここで  $\hat{A}(M^{2n})$  は  $\hat{A}$  類と呼ばれ、多様体の曲率  $R$  の Pontrjagin 類でかける。  $ch(F)$  は Chern 指標と呼ばれ、ゲージ場の曲率  $F$  の Chern 類でかける。

$\hat{A}(M^{2n})$  を定義する. 多様体の曲率  $R = d\omega + \omega^2$  について,  $R$  は反対称行列だから局所的に

$$\frac{R}{2\pi} = P \left( \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & & & \\ \hline -x_1 & x_2 & & \\ \hline & -x_2 & \ddots & \\ \hline & & & x_n \\ \hline & & & -x_n \end{array} \right) P^{-1} \quad (2.105)$$

のようにブロック対角化できる.  $x_a$  はそれぞれ 2-form である. これはあくまでも局所的であり, 大域的にこのようにかけるとは限らない. それは一般に, 行列  $P$  を大域的に定義できないからである. しかし特性類は, その随伴不変性から,  $x_a$  のみに依存する. そこで  $x_a$  を用いて, 次のように  $\hat{A}(M^{2n})$  を定める:

$$\begin{aligned} \hat{A}(M^{2n}) &= \prod_a \frac{x_a/2}{\sinh x_a/2} \\ &= 1 + \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{12} \text{tr}(R^2) + \frac{1}{(4\pi)^4} \left[ \frac{1}{288} (\text{tr } R^2)^2 + \frac{1}{360} \text{tr } R^4 \right] + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2^2} \left( -\frac{1}{6} p_1 \right) + \frac{1}{2^4} \left( \frac{7}{360} p_1^2 - \frac{1}{90} p_2 \right) + \dots \end{aligned} \quad (2.106)$$

$ch(F)$  はゲージ場の曲率  $F$  を用いて

$$\begin{aligned} ch(F) &= \text{tr } e^{i\frac{F}{2\pi}} \\ &= r + \frac{i}{2\pi} \text{tr } F + \left( \frac{i}{2\pi} \right)^2 \text{tr } F^2 + \dots \\ &= r + c_1 + \frac{1}{2} (c_1^2 - 2c_2) + \dots \end{aligned} \quad (2.107)$$

とかける.

ここで  $F$  として多様体の曲率  $R$  を用いれば Hirzebruch の符号数定理が得られる. このとき左辺の指数は多様体の符号数と呼ばれる量となる.

4次元多様体  $M$  における Atiyah-Singer の指数定理の応用を紹介する. まず多様体  $M$  の符号数を  $\tau(M)$  とすれば,  $\tau(M) = \frac{1}{3} \int p_1$  が得られるから,  $\text{ind}(i\mathcal{D}) = -\frac{1}{8}\tau(M)$  となる. さらに4次元の Clifford 代数の分類 (Table 1) より,  $Cl'_4 \simeq \mathbb{H}(2)$  だから, 反線形作用素で

$$P i\mathcal{D} = i\mathcal{D} P, \quad P \gamma_5 = \gamma_5 P, \quad P^2 = -1 \quad (2.108)$$

を満たすものがある.  $P$  はカイラリティを保存し,  $i\mathcal{D}$  の各固有値は偶数個の縮退があることを意味する. したがって4次元のスピノ多様体  $M$  においてその指数  $\text{ind}(i\mathcal{D}) = -\frac{1}{8}\tau(M)$  は必ず偶数になり, 符号数  $\tau(M)$  は16の倍数になる. 実際4次元スピノ多様体である K3 曲面において, その符号数は  $-16$  である.

スピノ接続は  $T^*M$  の接続  $\omega$  の行列基底を変えただけなので, 以下, 単に  $\omega_\Delta$  を  $\omega$  と書く.

### 3 ゲージアノマリー

$2n$  次元ワイルフェルミオンの分配関数

$$Z'[A] = \int d\bar{\psi}d\psi \exp\left(-\int \bar{\psi}i\mathcal{D}_+\psi\right) \quad (3.1)$$

$$\mathcal{D} = \gamma^\mu(\partial_\mu + A_\mu + \omega_\mu), \quad \mathcal{D}_+ = \mathcal{D}\frac{1}{2}(1 + \gamma_5)$$

のゲージアノマリーが  $2n+2$  次元 Dirac フェルミオンのカイラルアノマリーと対応していることを見る。  $A$  はゲージ接続,  $\omega$  はスピン接続である。積分測度  $\sqrt{g}d^{2n}x$  は省略する。

#### 3.1 経路積分の正当化と Wess-Zumino 整合性条件

ここでは (3.1) のゲージアノマリーを調べるために, 右辺のフェルミオンの経路積分を非摂動的に定義する。一旦整合性の取れた方法であれば, そのゲージ場の依存性やゲージ変換の下での振る舞いを解析することができる。この問題は Atiyah と Singer によって, 族の指数定理と  $K$  理論を用いた方法で数学的にも解析されている [17]。

まず, (3.1) のフェルミオン経路積分を非摂動的に定める。しかしこれは二つの理由で困難である。一つ目は通常の Dirac 演算子と同様にフェルミオン上の Gaussian 積分が発散するため, 物理的意味のある量にするために正則化を必要とすることである。二つ目は  $\mathcal{D}_+$  の経路積分を, 通常の Dirac 演算子  $\mathcal{D}$  の時とは違って, 演算子の determinant として解釈できないことである。 $\mathcal{D}_+$  はカイラリティ正の状態をカイラリティ負の状態に移すため  $i\mathcal{D}_+\phi_+ = \lambda\phi_+$  の解が存在せず,  $\mathcal{D}_+$  の固有値を定義できない。

固有値が定まれば Dirac 演算子のように経路積分を determinant として与えることができるので,  $\mathcal{D}_+$  の物理的な性質を保った新しい演算子を定義する。その新しい演算子は次の条件を満たす必要がある:

- (i)  $\mathcal{D}_+$  は十分小さいゲージ場  $A$  について well-defined な摂動を持つので, 新しい演算子も同じ摂動展開を持たなければならない。
- (ii) インスタントンの存在下でカイラリティを変える振幅を再現しなければならない。
- (iii) 分配関数の絶対値がゲージ不変でなければならない。

ここで (i), (ii) はそれぞれ,  $Z'[A]$  の摂動的な物理や非摂動的な挙動を再現するための要請である。(iii) については  $Z'[A]$  の絶対値がゲージ不変であることから来る要求である。実際,  $Z'[A]$  を形式的に  $\det(i\mathcal{D}_+)$  とかくと

$$Z'[A](Z'[A])^* = \det(i\mathcal{D}_+) \det(i\mathcal{D}_-) = |\det(i\mathcal{D})| \quad (3.2)$$

となり,  $i\mathcal{D}$  の固有値はゲージ変換に対して不変なので,  $Z'[A]$  の絶対値はゲージ不変である。新しい分配関数として

$$Z[A] = e^{-W[A]} = \int d\bar{\psi}d\psi \exp\left(-\int \bar{\psi}i\hat{D}\psi\right) =: \det(i\hat{D}) \quad (3.3)$$

$$\hat{D} = \mathcal{D}_+ + \mathcal{D}_- = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D}_- \\ \mathcal{D}_+ & 0 \end{pmatrix}$$



を考える．ここで  $\hat{D}$  は新しい演算子であり， $W[A]$  はそれに対する有効作用である． $\hat{D}$  は Dirac スピノールに作用し，well-defined な固有値問題を定義できるので，適切に正規化を施せば determinant を定義できる．これが条件 (i)-(iii) を満たすことを確かめる．

まず式 (3.3) の  $Z[A]$  において，カイラリティ負の状態を先に積分すれば

$$Z[A] = \int d\bar{\psi}d\psi \exp\left(-\int \bar{\psi}i\mathcal{D}_+\psi_+ - \int \bar{\psi}i\partial_-\psi_-\right) \propto Z[A]' \quad (3.4)$$

となる．ここで  $\propto$  はゲージ場  $A$  に依存しない定数倍を除いて等しいことを表す．よってゲージ依存性は  $Z'[A]$  と同じで，その摂動的，非摂動的な挙動は等価なことがわかる．したがって条件 (i)，(ii) を満たす．

次に  $\det(i\hat{D})$  の絶対値を計算する：

$$\begin{aligned} \det(i\hat{D}) \det(i\hat{D})^\dagger &= \det\begin{pmatrix} 0 & i\partial_- \\ i\mathcal{D}_+ & 0 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 0 & i\mathcal{D}_- \\ i\partial_+ & 0 \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} i\partial_-i\partial_+ & 0 \\ 0 & i\mathcal{D}_+i\mathcal{D}_- \end{pmatrix} \\ &= \det(i\partial_-i\partial_+) \det(i\mathcal{D}_+i\mathcal{D}_-) \\ &= \det(i\partial_-i\partial_+) |\det(i\mathcal{D})| \end{aligned}$$

よってゲージ不変であることがわかり，(iii) を満たす．したがって  $\det(i\hat{D}(A)) = \sqrt{|\det(i\mathcal{D}(A))|} e^{iW(A)}$  のようにかくことができ，アノマリーを持つのは位相部分  $e^{iW(A)}$  である．

$Z[A]$  が  $Z'[A]$  の物理を再現することがわかったので，(3.3) の分配関数  $Z[A]$  のアノマリーを，Fujikawa の方法を拡張することによって計算する [39–41]． $\hat{D}$  はカイラリティ正の部分だけがゲージ場と結合しているから， $g \in G$  による新しいゲージ変換を

$$\begin{aligned} A &\rightarrow A^g = g^{-1}(A + d)g \\ \psi &\rightarrow \psi^g = g^{-1}\psi_+ + \psi_- \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}^g = \bar{\psi}_-g + \bar{\psi}_+ \end{aligned} \quad (3.5)$$

のように定める．これによって  $Z[A]$  の古典的な作用は

$$\begin{aligned} \int \bar{\psi}i\hat{D}(A)\psi &\rightarrow \int \bar{\psi}^gi\hat{D}(A^g)\psi^g \\ &= \int \bar{\psi}_-^gi\mathcal{D}(A^g)_+\psi_+^g + \int \bar{\psi}_+i\partial_-\psi_- \\ &= \int \bar{\psi}i\hat{D}(A)\psi \end{aligned}$$

となるから不変である．ここで  $\hat{D}(A)$ ， $\mathcal{D}(A)$  は  $\hat{D}$ ， $\mathcal{D}$  がゲージ場  $A$  を頭に含んでいることを表す．そして形式的に

$$\begin{aligned} \det(i\hat{D}(A)) &\rightarrow \det(i\hat{D}(A^g)) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \partial_- \\ \mathcal{D}_+ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \det(g) \det(g^{-1}) \det(i\hat{D}(A)) = \det(i\hat{D}(A)) \end{aligned}$$

のようになるから、有限次元ではゲージ不変である。

しかし、ゲージ変換によって  $\hat{D}(A)$  の固有値は変化し得る。固有関数  $\phi$  を  $i\hat{D}(A)\phi = \lambda\phi$  のように取れば、 $\phi = \phi_+ + \phi_-$  のように分解でき、

$$i\mathcal{D}(A)_+\phi_+ = \lambda\phi_-, \quad i\mathcal{D}_-\phi_- = \lambda\phi_+ \quad (3.6)$$

を満たす。しかしゲージ変換  $g$  によって

$$i\hat{D}(A^g)\phi^g = \lambda(g^{-1}\phi_- + \phi_+) \neq \lambda\phi^g \quad (3.7)$$

となるから、 $\phi^g = g^{-1}\phi_+ + \phi_-$  は  $i\hat{D}(A^g)$  の固有値ではない。これは  $i\hat{D}$  の固有値がゲージ変換で変動することを意味する (これは Sec. 3.2 で確認する)。また  $i\hat{D}$  は  $i\mathcal{D}$  とは異なり、エルミートではないのでその固有値は複素数となる。

正則化された  $\det(i\hat{D})$  を求めるために  $\psi, \bar{\psi}$  を固有関数で展開する。  $i\hat{D}$  はエルミートではないから右固有関数  $\phi_n$  と左固有関数  $\chi_n$  があって

$$\begin{aligned} i\hat{D}\phi_n &= \lambda_n\phi_n \\ \chi_n^\dagger i\hat{D} &= \chi_n^\dagger \lambda_n \\ (\chi_n^\dagger, \phi_m) &:= \int \chi_n^\dagger \phi_m = \delta_{nm} \end{aligned} \quad (3.8)$$

を満たす。  $\lambda_n$  は複素数で、  $|\lambda_0| \leq |\lambda_1| \leq \dots$  とする。  $i\hat{D}$  は  $A$  に依存するため、この  $\{\phi_n\}, \{\chi_n\}$  は  $A$  による。この基底によって  $\psi, \bar{\psi}$  を

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_n a_n \phi_n, \quad a_n = (\chi_n^\dagger, \psi) \\ \bar{\psi} &= \sum_n \chi_n^\dagger \bar{b}_n, \quad \bar{b}_n = (\bar{\psi}, \phi_n) \end{aligned} \quad (3.9)$$

と展開できる。ここで  $a_n, \bar{b}_n$  は Grassmann 数であり (3.3) の  $d\bar{\psi}d\psi = c \prod_n d\bar{b}_n da_n$  と書き直すことができる。  $c$  は定数である。  $a_n, \bar{b}_n$  はそれぞれ、  $g = \exp(v)$  によるゲージ変換 (3.5) によって

$$\begin{aligned} a_n &\rightarrow a'_n = (\chi_n^\dagger, \psi^g) = \sum_m \exp(-v_+)_{nm} a_m \\ \bar{b}_n &\rightarrow \bar{b}'_n = (\bar{\psi}^g, \phi_n) = \sum_m \bar{b}_m \exp(+v_-)_{mn} \end{aligned} \quad (3.10)$$

と変化する。ここで  $v_+, v_-$  は Grassmann 数に作用する無限次元行列を表し、

$$\begin{aligned} (v_+)_{nm} &:= (\chi_n^\dagger, v \cdot \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\phi_m) \\ (v_-)_{mn} &:= (\chi_m^\dagger \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \cdot v, \phi_n) = (\chi_m^\dagger, v \cdot \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\phi_n) \end{aligned} \quad (3.11)$$

と定義される.  $\exp(\mp v_{\pm})$  は  $v_{\pm}$  の指数行列である. これによって積分測度  $d\bar{\psi}d\psi = c \prod_n d\bar{b}_n da_n$  のゲージ変換は

$$\begin{aligned} d\bar{\psi}d\psi &\rightarrow d\bar{\psi}^g d\psi^g = c \prod_n d\bar{b}'_n da'_n \\ &= c \prod_n d\bar{b}_n da_n \det(\exp(v_+)) \det(\exp(-v_-)) \\ &= c \prod_n d\bar{b}_n da_n \exp(\text{Tr}(v_+) - \text{Tr}(v_-)) \\ &= d\bar{\psi}d\psi \exp(\text{Tr}(v\gamma_5)) \end{aligned} \quad (3.12)$$

と変化することがわかる.  $\exp(\text{Tr}(v\gamma_5))$  は積分測度の Jacobian と解釈できる.  $v$  の行列表示には基底  $\{\phi_n\}, \{\chi_n\}$  を用いており,  $\phi_n(A^g) \neq \phi_n(A)^g, \chi_n(A^g) \neq \chi_n(A)^g$  のため,  $\exp(\text{Tr}(v\gamma_5))$  は  $A$  に依存していてゲージ不変ではない.

$\text{Tr}(v\gamma_5)$  を正則化するために  $i\hat{D}$  の固有値の列  $\{\lambda_0, \lambda_1, \dots\}$  を考える. この列は  $n \rightarrow \infty$  で  $|\lambda_n| \rightarrow \infty$  となる.  $i\hat{D} = i\gamma^\mu(\partial_\mu + A_\mu \frac{1}{2}(1 + \gamma_5))$  であり, 固有スピノール  $\phi_n$  について

$$(\phi_n^\dagger, i\hat{D}\phi_n) = (\phi_n^\dagger, i\gamma^\mu(\partial_\mu + \frac{1}{2}A_\mu)\phi_n) + (\phi_n^\dagger, i\gamma^\mu A_\mu \frac{1}{2}\gamma_5\phi_n) \quad (3.13)$$

となる.  $i\gamma^\mu(\partial_\mu + \frac{1}{2}A_\mu)$  は形式的自己共役なので右辺第一項は必ず実数である. さらに  $(i\gamma^\mu A_\mu \gamma_5)^\dagger = -i\gamma^\mu A_\mu \gamma_5$  だから右辺第二項は純虚数となる. このとき時空がコンパクトであれば

$$(\phi_n^\dagger, \gamma^\mu A_\mu \gamma_5\phi_n) \leq c(\phi_n^\dagger, \phi_n) \quad (3.14)$$

を満たす  $n$  に依存しない定数  $c$  が存在する. 例えば,  $\gamma^\mu A_\mu \gamma_5$  の固有値の絶対値よりも大きい値を与えれば十分である.  $(\phi_n^\dagger, i\hat{D}\phi_n) = \lambda_n(\phi_n^\dagger, \phi_n)$  だから

$$\text{Im } \lambda_n \leq \frac{1}{2}c \quad (3.15)$$

のように, 任意の  $n$  に対して固有値  $\lambda_n$  の虚部を定数  $c$  で抑えることができる.  $n \rightarrow \infty$  で  $|\lambda_n| \rightarrow \infty$  より,  $\text{Re } \lambda_n \rightarrow \infty$  となるから,  $n$  が十分大きければ

$$0 < \text{Re } \lambda_n^2 \rightarrow +\infty \quad (3.16)$$

である.

そこで (3.12) の trace を

$$\begin{aligned} \text{Tr}(v\gamma_5) &:= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_n (\chi_n^\dagger, v\gamma_5 e^{-(i\hat{D}/M)^2} \phi_n) \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_n e^{-(\lambda_n/M)^2} (\chi_n^\dagger, v\gamma_5 \phi_n) \end{aligned}$$

によって定義する. (3.16) より, この無限和は収束する.  $i\hat{D}$  の固有値がゲージ不変ではないため, 正則化  $e^{-(i\hat{D}/M)^2}$  はゲージに依存し, これがゲージアノマリーの起源となる.

また  $i\hat{D}$  をエルミート演算子に解析接続して, アノマリーを計算することもできる [42].  $i\hat{D} = i\gamma^\mu(\partial_\mu + A_\mu \frac{1}{2}(1 + \gamma_5))$  は,

$$i\mathcal{D}(V, V') = i\gamma^\mu(\partial_\mu + V_\mu + V'_\mu \gamma_5) \quad (3.17)$$

の特別な形である.  $V_\mu$  はベクトル場,  $V'_\mu$  は軸性ベクトル場と呼ばれ,  $V_\mu = V'_\mu = \frac{1}{2}A_\mu$  とすれば  $i\hat{D}$  となる. この演算子は  $(i\mathcal{D}(V, V'))^\dagger = i\mathcal{D}(V, -V')$  となりエルミートではないので,  $V' \rightarrow iV'$  のようにすることで  $i\mathcal{D}(V, iV')$  をエルミート演算子に変形する. そして  $i\mathcal{D}(V, iV')$  でのアノマリーを計算し, 最後に  $iV' \rightarrow V'$  と解析接続し,  $V_\mu = V'_\mu = \frac{1}{2}A_\mu$  とすれば同じ結果が得られる.

したがって (3.3) の  $Z[A]$  は

$$\begin{aligned} Z[A^g] &= \int d\bar{\psi}d\psi \exp\left(-\int \bar{\psi}i\hat{D}(A^g)\psi\right) \\ &= \int d\bar{\psi}^g d\psi^g \exp\left(-\int \bar{\psi}^g i\hat{D}(A^g)\psi^g\right) \\ &= \int d\bar{\psi}d\psi \exp(\text{Tr}(v\gamma_5)) \exp\left(-\int \bar{\psi}i\hat{D}(A)\psi\right) = \exp(\text{Tr}(v\gamma_5))Z[A] \end{aligned}$$

となる. 有効作用を用いればこれは

$$W[A^g] - W[A] = -\text{Tr}(v\gamma_5) = \int \text{tr}(va(A)) \quad (3.18)$$

である.  $\int \text{tr}(va(A)) = -\text{Tr}(v\gamma_5)$  をゲージアノマリーと呼ぶ.  $2n = 4$  次元ではこれは

$$\int \text{tr}(va(A)) = \frac{1}{24\pi^2} \int \text{tr}\left[v d(AdA + \frac{1}{2}A^3)\right] \quad (3.19)$$

となることが知られている [43, 44].

最後に Wess-Zumino 整合性条件 [7] について触れる. 無限小ゲージ変換  $\delta_v$  を用いれば, 上の式は  $\delta_v W[A] = W[A + Dv] - W[A] = \int \text{tr}(va(A))$  である. ゲージ変換の積を保存するためには, 無限小ゲージ変換は  $v_1, v_2 \in \mathfrak{g}$  について

$$[\delta_{v_1}, \delta_{v_2}] = \delta_{[v_1, v_2]} \quad (3.20)$$

を満たし, Lie 括弧積を保たなければならない. これを  $W[A]$  に作用させると, ゲージアノマリーは

$$\delta_{v_1} \int \text{tr}(v_2 a(A)) - \delta_{v_2} \int \text{tr}(v_1 a(A)) = \int \text{tr}([v_1, v_2] a(A)) \quad (3.21)$$

を満たす. これを Wess-Zumino 整合性条件と呼ぶ. この条件は Feynman diagram からゲージアノマリーを導く時に有用で, (3.19) において全ての項を総当たりで計算する以外の方法を提案する. それはまず主要項を計算し, 残りの項を (3.21) を満たすように求める方法である. 実際, 任意の偶数次元で (3.19) の最も微分を含む項は

$$\frac{i^{2n+2}}{(2\pi)^n (n+1)!} \text{tr}(v(dA)^n) \quad (3.22)$$

であり [16], 残りを (3.21) から一意的に計算できる.

### 3.2 ゲージアノマリーの位相的な解析

ここでは [18, 19] に則り、トポロジカルな解析から、非摂動的でグローバルな障害を用いて摂動的なゲージアノマリーを導く。Sec. 3.1 の議論から  $\det(i\hat{D}(A)) = \sqrt{|\det(i\mathcal{D}(A))|}e^{iw(A)}$  のようにかくことができ、位相部分  $e^{iw(A)}$  がゲージ変換で動くことがわかった。ここで  $e^{iw(A)}$  が  $\det(i\mathcal{D}(A)) = 0$  となる接続  $A$  で定義できないことに注意すると、 $\det(i\mathcal{D}(A))$  の零点を囲むループの上で、 $e^{iw(A)}$  はその零点の巻き付き数に応じて非自明に変化する。そのため、この巻き付き数はゲージアノマリーと関連があり、 $e^{iw(A)}$  をゲージ接続の全体から  $S^1$  への写像と考える時の障害を意味する。巻き付き数を  $2n + 2$  次元の指数定理と対応付け、 $2n$  次元のゲージアノマリーを導出する。

まずゲージアノマリーと巻き付き数の関係を見る。ゲージ変換の全体の空間上のループを定めるために、ゲージ変換の 1 パラメータの族  $\{g(\theta, x) \in G\}_{\theta \in [0, 2\pi]}$  で

$$g(0, x) = g(2\pi, x) = 1 \quad (3.23)$$

を満たすものを考える。  $x$  は  $2n$  次元時空  $M^{2n}$  の座標を表し、 $\theta$  は  $S^1$  の座標である。これによって構造群を  $G$  とするゲージ場  $A$  は

$$A^\theta = g(\theta, x)(A + d)g(\theta, x)^{-1} \quad (3.24)$$

のように変化する。ここで  $d$  は  $x$  についての外微分で、 $A^{\theta=0} = A^{\theta=2\pi} = A$  となる。よって  $\{A^\theta\}_{\theta \in S^1}$  は接続の空間上のループとなる。さらに  $A^\theta$  の  $\theta$  による微分は、 $v = g^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta} g$  とすると

$$\frac{\partial}{\partial \theta} A^\theta = dv + A^\theta v - v A^\theta = D_{A^\theta} v \quad (3.25)$$

となる。よって  $\frac{\partial}{\partial \theta}$  は  $v = g^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta} g$  による無限小ゲージ変換そのものである。

ループ  $\{A^\theta\}_{\theta \in S^1}$  上で  $e^{-W[A]} = \det(i\hat{D}(A^\theta))$  を

$$e^{-W[A^\theta]} = \det(i\hat{D}(A^\theta)) = \sqrt{|\det(i\mathcal{D}(A))|}e^{iw(\theta, A)} \quad (3.26)$$

のようにかく。  $g(\theta, x)$  の定義から  $\theta = 0, 2\pi$  での  $A^\theta$  は同じ値をとるから、位相の部分は

$$w(2\pi, x) - w(0, x) = 2\pi m \quad (m \in \mathbb{Z}) \quad (3.27)$$

$$m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\partial}{\partial \theta} w(\theta, A) \quad (3.28)$$

となる。ここで  $m$  は  $e^{iw(\theta, A)} : S^1 \rightarrow S^1$  の巻き付き数を表す。有効作用  $W[A^\theta]$  の虚部は  $-w(A^\theta)$  であり、 $\frac{\partial}{\partial \theta}$  が無限小変換の生成子となるから

$$\delta_v W[A^\theta] = \frac{\partial}{\partial \theta} W[A^\theta] = -i \frac{\partial}{\partial \theta} w(\theta, A) \quad (3.29)$$

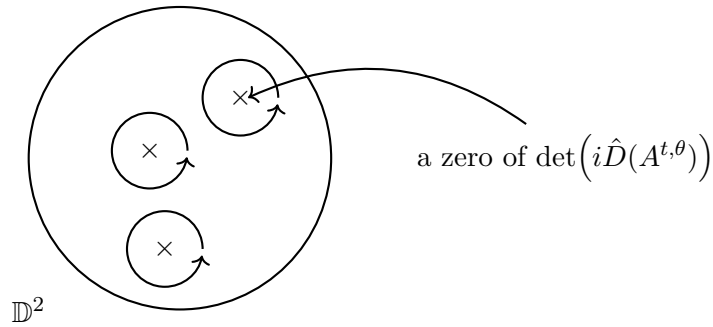
となる。これによって Sec. 3.1 のゲージアノマリーと巻き付き数の関係がわかった。

次にこの巻き付き数と指数の関係を議論する。簡単のため  $\det(i\hat{D}(A^\theta)) \neq 0$  を仮定して  $\det(i\hat{D}(A^\theta)) : S^1 \rightarrow \mathbb{C}^1$  を  $\det(i\hat{D}(A^{t, \theta})) : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{C}^1$  に拡張する。これによって  $e^{iw(\theta, A)}$  が

巻きつくところで  $\det(i\hat{D}(A^{t,\theta}))$  が 0 となる.  $A^{t,\theta}$  は  $\mathbb{D}^2$  でパラメータ付けられた  $M^{2n}$  上のゲージ場で

$$A^{t,\theta} = tA^\theta + (1-t)A_0 \quad (t \in [0, 1]) \quad (3.30)$$

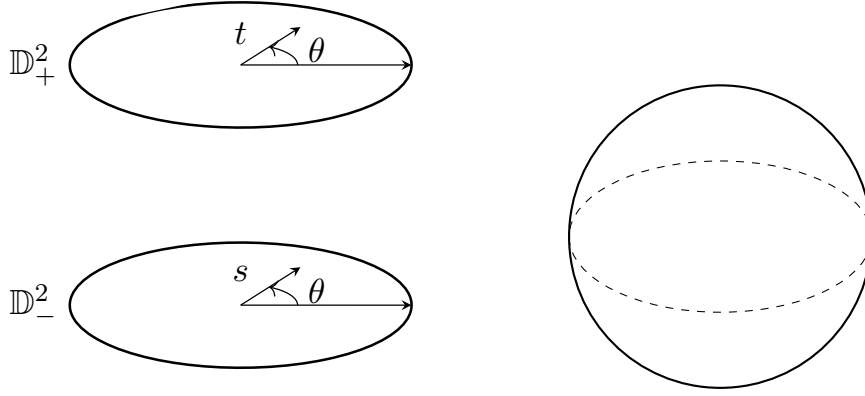
とする.  $A_0$  は  $A$  と同じインスタントン数をもつゲージ場である. 仮定より  $A$  のインスタントン数は 0 だから,  $A_0 = 0$  として良い.  $\det(i\hat{D}(A^\theta)) = 0$  の時, つまり  $i\mathcal{D}(A)$  が非自明な 0-mode を持つ時は, 相関関数を考えれば議論を拡張できる. また  $\det(i\hat{D}(A^{t=1,\theta})) = \det(i\hat{D}(A^\theta))$  に注意せよ. このとき  $\det(i\hat{D}(A^\theta))$  の巻き付き数  $m$  は,  $\det(i\hat{D}(A^{t,\theta}))$  の零点に巻きつく局所的な巻き付き数の和になる (Fig. 1).



**Figure 1:**  $\det(i\hat{D}(A^{t,\theta}))$  の零点にループが巻きつく様子

$\det(i\hat{D}(A^{t,\theta}))$  が 0 となるということは, 適切な  $(t, \theta)$  で 0-mode が存在することを意味する.  $i\hat{D}$  の 0-mode は,  $i\mathcal{D}$  のカイラリティ正の 0-mode である. そこで,  $i\hat{D}$  の代わりに  $2n$  次元時空  $M^{2n}$  での  $i\mathcal{D}$  を考察する.

$(t, \theta) \in \mathbb{D}^2$  でパラメータ付けされた  $M^{2n}$  上の Dirac 演算子  $i\mathcal{D}(A^{t,\theta})$  の振る舞いを知るために,  $S^2 \times M^{2n}$  上の Dirac 演算子  $i\mathcal{D}_{2n+2}$  を考える.  $S^2$  は 2 つの  $\mathbb{D}^2$  を境界  $S^1$  に沿ってはり合わせることで定義でき, その二つの  $\mathbb{D}^2$  を  $\mathbb{D}_\pm^2$  と書いて区別する.  $\mathbb{D}_+^2$  の座標を  $(t, \theta)$ ,  $\mathbb{D}_-^2$  の座標を  $(s, \theta)$  で表す. これらはそれぞれ極座標で  $t, s \in [0, 1]$  である.



**Figure 2:** 左の  $\mathbb{D}_+^2$  と  $\mathbb{D}_-^2$  の縁を張り合わせ、右の  $S^2$  を構成する

$S^2 \times M^{2n}$  に新しいゲージ場  $\mathcal{A}$  を定義する．まず  $\mathbb{D}_+^2 \times M^{2n}$  で

$$\mathcal{A}_+ = A^{t,\theta} = tg^{-1}(A+d)g + (1-t)A_0 \quad (3.31)$$

のように定める． $\mathcal{A}_+$  には余分な座標成分の  $dt, d\theta$  が含まれていない． $\mathbb{D}_-^2 \times M^{2n}$  での  $\mathcal{A}_-$  を次を満たすように定める： $\mathcal{A}_-$  は  $s=1$  で

$$\mathcal{A}_+|_{t=1} = g^{-1}(\mathcal{A}_-|_{s=1} + d + d_\theta)g \quad (3.32)$$

を満たし、微分可能である．ここで  $d_\theta$  は  $\theta$  による外微分を表す．これを満たすものとして

$$\mathcal{A}_- = A - sd_\theta g \cdot g^{-1} \quad (3.33)$$

があげられる． $d_\theta$  は  $s=0$  に特異点をもつため、それを打ち消すために  $s$  をかけた． $\mathcal{A}_-$  は  $\mathcal{A}_+$  と違って  $d\theta$  成分をもつ． $g(\theta, x)$  を新しい変換関数と考えることで  $S^2 \times M^{2n}$  での well-defined なファイバー束を定義でき、元の  $M^{2n}$  上のファイバー束は埋め込み  $M^{2n} \hookrightarrow S^2 \times M^{2n}$  による引き戻し束の部分束と考えることができる．これによって well-defined なゲージ接続  $\mathcal{A}$  を定義できてその曲率を

$$\mathcal{F} = (d + d_{t,s} + d_\theta)\mathcal{A} + \mathcal{A}^2 \quad (3.34)$$

のように与えられる． $d_{t,s}$  は  $\mathbb{D}_+^2$  上で  $t$  をとり  $\mathbb{D}_-^2$  上で  $s$  をとるようにする．

$S^2$  上のスピノール束としては自明なものを選び、 $S^2$  方向のスピン接続を 0 にする．このスピノール束は  $T^*M$  を持ち上げて作ったのではない． $T^*M$  から作ったスピノール束は Chern 数  $1, -1$  のベクトル束の直和となり、これ唯一つである．後述の断熱近似の範囲では  $S^2$  の曲率の効果が十分小さいとしてもよいため、自明なスピノール束で議論を進める．この場合も Atiyah-Singer の指数定理は成り立ち、どちらのスピノール束を選んでも  $\hat{A}$  類は同じになる． $\mathbb{D}_+^2 \times M^{2n}$ ,  $\mathbb{D}_-^2 \times M^{2n}$  上のスピノールをそれぞれ  $\psi(t, \theta, x)$ ,  $\tilde{\psi}(s, \theta, x)$  として

$$\psi(1, \theta, x) = g(\theta, x)\tilde{\psi}(1, \theta, x) \quad (3.35)$$

のように貼り付ける.

$S^2 \times M^{2n}$  上のスピノールに作用する Dirac 作用素を

$$i\mathcal{D}_{2n+2} = i \sum_{a=1}^{2n+2} \Gamma^a (\nabla_a + \mathcal{A}_a) \quad (3.36)$$

とかく.  $\Gamma^a$  は  $2n+2$  次元でのガンマ行列で,  $2n$  次元でのガンマ行列  $\gamma^\mu$  を用いると

$$\Gamma^\mu = \sigma_1 \otimes \gamma^\mu, \quad \Gamma^{2n+1} = \sigma_2 \otimes 1, \quad \Gamma^{2n+2} = \sigma_1 \otimes \gamma_5 \quad (3.37)$$

のようにかける.  $\gamma_5 := i^n \prod_{\mu=1}^{2n} \gamma^\mu$  は  $2n$  次元スピノールのカイラリティ演算子を表し,  $2n+2$  次元スピノールのカイラリティ演算子は

$$\Gamma_5 := i^{n+1} \prod_{a=1}^{2n+2} \Gamma^a = \sigma_3 \otimes 1 \quad (3.38)$$

で与える.

式 (3.36) の 0-mode を計算するために次のように演算子を変形する:

$$i\mathcal{D}_{2n+2}^\epsilon = \frac{1}{\epsilon} i \sum_{\mu=1}^{2n} \Gamma^\mu D_\mu + i \sum_{i=2n+1}^{2n+2} \Gamma^i D_i \quad (3.39)$$

これは  $M^{2n}$  の大きさを  $\epsilon$  倍することに対応し,  $\epsilon \rightarrow 0$  で相対的に, 余分な  $S^2$  よりも小さくなる. そのため, 余分な  $S^2$  で断熱近似を可能とする. この 0-mode は "Hamiltonian"

$$\mathcal{H}_\epsilon = (i\mathcal{D}_{2n+2}^\epsilon)^2 \quad (3.40)$$

$$= \frac{1}{\epsilon^2} (i\Gamma^\mu D_\mu)^2 + (i\Gamma^i D_i)^2 + \frac{i^2}{\epsilon} \Gamma^i \Gamma^\mu (D_i D_\mu - D_\mu D_i) \quad (3.41)$$

の 0-mode に対応するため, 式 (3.40) を考える.  $2n+2$  次元のスピノール  $\Psi$  は  $2n$  次元のスピノール  $\psi_1, \psi_2$  を用いて

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

とかける.  $\begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$  はそれぞれ  $\Gamma_5$  の固有値  $\chi = +1, -1$  の mode である. 前の議論で  $\mathbb{D}_+^2 \times M^{2n}$  上の  $i\mathcal{D}_{2n}^{t,\theta}$  の 0-mode がアノマリーに関係していたから,  $\mathbb{D}_+^2 \times M^{2n}$  上で議論する. これによって式 (3.40) は

$$\mathcal{H}_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^2} 1 \otimes (i\mathcal{D}_{2n}^{t,\theta})^2 + (i\phi_2)^2 + \frac{1}{\epsilon} \Gamma^i \Gamma^\mu i\partial_i (iA_\mu^{t,\theta}) \quad (3.43)$$

のようになる. もし  $(i\mathcal{D}_{2n}^{t,\theta})^2$  が  $\mathbb{D}_+^2$  上で真に 0 より大きい場合, 式 (3.43) の固有値は  $\frac{1}{\epsilon^2}$  で大きくなるため 0-mode をもつことができない. よって  $\mathcal{H}_\epsilon$  の 0-mode が存在するときは,  $(i\mathcal{D}_{2n}^{t,\theta})^2$  は  $\mathbb{D}_+^2$  のある点で 0 と交わる固有値を持たなければならない. 指数が 0 の Dirac 演算子の撰



動は 0-mode のカイラリティをまぜ、非 0-mode を生成するので、今考えているゲージ場では一般にこのような点は孤立点である。

逆に  $\mathbb{D}_+^2$  のある点で 0 となる  $i\mathcal{D}_{2n}^{t,\theta}$  の固有値  $\lambda(t, \theta)$  が存在する時、 $i\mathcal{D}_{2n+2}^\epsilon$  の 0-mode がその零点に局在し、局所的な巻き付き数と 0-mode のカイラリティが一致する (Appendix A).

$\mathbb{D}_-^2 \times M^{2n}$  では

$$\mathcal{H}_\epsilon \sim \frac{1}{\epsilon^2} 1 \otimes (i\mathcal{D}_{2n}(A))^2 \quad (3.44)$$

となり、仮定よりこれは 0-mode を持たない。  $\epsilon \rightarrow 0$  で  $\mathcal{H}_\epsilon \tilde{\psi} = 0$  の解は  $\tilde{\psi} = 0$  のみである。  $\mathbb{D}_+^2 \times M^{2n}$  上の局在した 0-mode はこの極限で、  $t = 1$  で 0 となるからこれは境界条件 (3.35) を満たす。したがって  $S^2 \times M^{2n}$  上の Dirac 方程式の 0-mode はそれぞれ、カイラリティに応じた局所巻き付き数をもつ零点に局在するため、巻き付き数  $m$  は

$$m = \text{ind}(i\mathcal{D}_{2n+2}) = \int_{S^2 \times M^{2n}} \hat{A}(S^2 \times M^{2n}) \text{ch}(\mathcal{F}) \quad (3.45)$$

のようになる。

これによってゲージアノマリーを特性類 (の降下) を用いてかくことができる。  $\hat{A}(S^2 \times M^{2n}) \text{ch}(\mathcal{F})$  の Chern-Simons 項を  $Q_{2n+1}(\mathcal{A}, \mathcal{F})$  とすれば、

$$\hat{A}(S^2 \times M^{2n}) \text{ch}(\mathcal{F}) = (d + d_\theta + d_{t,s}) Q_{2n+1}(\mathcal{A}, \mathcal{F}) \quad (3.46)$$

を満たす。よって (3.28) に (3.45) を代入すれば、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\partial}{\partial \theta} w(\theta, A) &= \int_{S^2 \times M^{2n}} \hat{A}(S^2 \times M^{2n}) \text{ch}(\mathcal{F}) \\ &= \int_{S^2 \times M^{2n}} (d + d_\theta + d_{t,s}) Q_{2n+1}(\mathcal{A}, \mathcal{F}) \\ &= \int_{\mathbb{D}_+^2 \times M^{2n}} (d + d_\theta + d_t) Q_{2n+1}(\mathcal{A}_+, \mathcal{F}_+) \\ &\quad + \int_{\mathbb{D}_-^2 \times M^{2n}} (d + d_\theta + d_s) Q_{2n+1}(\mathcal{A}_-, \mathcal{F}_-) \\ &= \int_{S^1 \times M^{2n}} \left( Q_{2n+1}(\mathcal{A}_+, \mathcal{F}_+) \Big|_{t=1} - Q_{2n+1}(\mathcal{A}_-, \mathcal{F}_-) \Big|_{s=1} \right) \end{aligned}$$

となる。ここで Stokes の定理を用い、  $t = 1, s = 1$  上の積分にした。最後の式の第二項の符号は、  $\partial(\mathbb{D}_-^2 \times M^{2n})$  が  $\partial(\mathbb{D}_+^2 \times M^{2n}) = S^1 \times M^{2n}$  の多様体としての反対の向きであることを反映している。  $\partial$  は多様体の境界を表す。左辺の積分が接続  $\mathcal{A}$  によらないことを利用して、

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_+ &\rightarrow \mathcal{A}_+ + t\hat{v} = A^{t,\theta} + \hat{v} \\ \mathcal{A}_- &\rightarrow \mathcal{A}_- + s d_\theta g \cdot g^{-1} = A \end{aligned} \quad (3.47)$$

のようにはずらす。ここで  $\hat{v} = g^{-1} d_\theta g$  である。そうすれば  $Q_{2n+1}(\mathcal{A}_-, \mathcal{F}_-) \rightarrow 0$  となるから

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\partial}{\partial \theta} w(\theta, A) = \int_{S^1 \times M^{2n}} Q_{2n+1}(A^\theta + \hat{v}, F^\theta) \quad (\hat{v} = g^{-1} d_\theta g) \quad (3.48)$$

のようにかける。

このとき被積分関数で  $d\theta$  を含むのは  $\hat{v}$  だけだから,  $Q_{2n+1}(A^\theta + \hat{v}, F^\theta)$  の  $\hat{v}$  の 1 次のみが積分に関係する. そこで (2.68) で  $dt$  の項をのぞき,  $\hat{v}^2 = 0$  を用いれば

$$Q_{2n+1}(A^\theta + \hat{v}, F^\theta) = Q_{2n}^1(\hat{v}, A^\theta, F^\theta) \quad (3.49)$$

となる. したがって

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\partial}{\partial \theta} w(\theta, A) = \int_{S^1 \times M^{2n}} d\theta Q_{2n}^1(v, A^\theta, F^\theta) \quad (3.50)$$

をえる. これを (3.29) に代入すれば,  $M^{2n}$  上で  $A^\theta$  を  $v = g^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta} g$  の方向に無限小ゲージ変換したときのゲージアノマリーは

$$\int \text{tr } v a(A^\theta) = \delta_v W[A^\theta] = -i \frac{\partial}{\partial \theta} w(\theta, A) = -2\pi i \int_{M^{2n}} Q_{2n}^1(v, A^\theta, F^\theta) \quad (3.51)$$

のようにかける.

(3.51) の右辺が Wess-Zumino 整合性条件 (3.21) を満たすことを確かめる. 上の議論ではゲージ変換のパラメータ空間を  $S^1$  としたが, これを Lie 群  $G$  まで拡張する. これは (3.48) の右辺の被積分関数を  $M^{2n} \times G$  の上で考えることに相当する. つまり  $G$  のパラメータを  $\{\theta^a\}$  として,  $\theta^a$  で変数付けされたゲージ変換を  $g = g(x, \theta)$  をとり,  $M^{2n} \times G$  上の接続  $A$  や曲率  $\mathcal{F}$  を

$$\begin{aligned} A &= g^{-1}(d + \hat{d} + A)g = A^\theta + \hat{v}, \quad (\hat{v} = g^{-1} \hat{d}g) \\ \mathcal{F} &= (d + \hat{d})A + A^2 = F^\theta \end{aligned} \quad (3.52)$$

とする. ここで  $d$  は  $M^{2n}$  方向の外微分,  $\hat{d}$  は  $G$  方向の外微分である.  $\hat{d}$  は (2.65) と同様に,  $A^\theta, F^\theta$  に対しての  $\hat{v} = v_a d\theta^a$  方向の無限小ゲージ変換と解釈できる.  $v_a$  は  $\hat{v}$  の  $d\theta^a$  成分で  $v_a = g^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta^a} g$  である. つまり  $A^\theta, F^\theta$  の関数や汎関数について,  $\hat{d} = d\theta^a \delta_{v_a}$  とかける. また  $\hat{v}$  については  $\hat{d}\hat{v} = -\hat{v}^2 = -\frac{1}{2}[v_a, v_b]d\theta^a d\theta^b$  であり,  $v_a$  方向の無限小ゲージ変換  $\delta_{v_a}$  と可換  $\delta_{v_a} \hat{v} = \hat{v} \delta_{v_a}$  である.

これによって Wess-Zumino 整合性条件 (3.21) は

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} d\theta^a d\theta^b \left[ \delta_{v_a} \int \text{tr}(v_b a) - \delta_{v_b} \int \text{tr}(v_a a) - \int \text{tr}([v_a, v_b]a) \right] \\ &= \frac{1}{2} d\theta^a d\theta^b \left[ \int \text{tr}(v_b \delta_{v_a} a) - \int \text{tr}(v_a \delta_{v_b} a) - \int \text{tr}([v_a, v_b]a) \right] \\ &= - \int \text{tr}(\hat{v} \hat{d}a) - \int \text{tr}(\hat{v}^2 a) \\ &= \hat{d} \int \text{tr} \hat{v} a \end{aligned} \quad (3.53)$$

と等価であることがわかる.

したがって (3.51) の右辺の  $v$  を  $\hat{v}$  に置き換え, 降下方程式 (2.69) の上から 2 番目の式を用いれば,

$$\hat{d} \int_{M^{2n}} Q_{2n}^1(\hat{v}, A^\theta, F^\theta) = - \int_{M^{2n}} dQ_{2n-1}^2 = 0 \quad (3.54)$$

となる. ここで (2.69) の  $dt$  の項を無視した. よって (3.51) の右辺は Wess-Zumino 整合性条件を満たすことがわかる.

## 4 重力アノマリー

Sec. 3 を重力アノマリーに拡張する．簡単のため重力場のみとし，スピン Riemann 多様体  $(M^{2n}, h)$  について考える．そこでゲージ場  $A$  を 0 とし，ワイルフェルミオンの分配関数を

$$Z = \int d\bar{\psi}d\psi \exp\left(-\int \bar{\psi}i\hat{D}\psi\right) \quad (4.1)$$

$$\hat{D} = \not{D}_+ + \not{\partial}_- = \begin{pmatrix} 0 & \not{\partial}_- \\ \not{D}_+ & 0 \end{pmatrix}, \quad \not{D}_+ = \gamma^\mu(\partial_\mu + \omega_\mu)\frac{1}{2}(1 + \gamma_5)$$

とする． $\omega$  はスピン接続である．フェルミオンの作用の部分は局所 Lorentz 変換や一般座標変換の対称性をもつ．この 2 つの変換で生じるアノマリーをこの章で明らかにする．

### 4.1 重力アノマリーへの拡張

まず局所 Lorentz 変換の下でのアノマリーを導く．(4.1) においてスピノールにはスピン群が作用することに注意する．しばらくの間，多様体の接続を  $\omega$ ，その曲率を  $\Omega$  とし，スピン接続を  $\omega_\Delta$ ，その曲率を  $\Omega_\Delta$  として区別する． $\omega$  と  $\omega_\Delta$  の関係は  $\omega_\Delta = \frac{1}{2}\omega_{ab}\sigma^{ab}$  である．スピン群  $Spin(2n)$  のゲージ変換を  $s$  とすれば，スピノール  $\psi$ ，ガンマ行列  $\gamma_a$ ，スピン接続や曲率は

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow s^{-1}\psi \\ \gamma_a &\rightarrow s^{-1}\gamma_a s \\ \omega_\Delta &\rightarrow \omega_\Delta^s = s^{-1}(d + \omega_\Delta)s \\ \Omega_\Delta &\rightarrow s^{-1}\Omega_\Delta s \end{aligned} \quad (4.2)$$

のように変換する．ここで  $\omega_\Delta^s$  と多様体上の接続  $\omega$  との関係を明らかにする．そこで  $s^{-1}\gamma_a s = \gamma_b L^b_a$  となるように  $L \in SO(2n)$  を定める．これによって，上付き添字をもつベクトル  $v^a$  について， $v = \gamma_a v^a \in \mathbb{R}^{2n} \subset Cl_{2n}$  を定めると

$$v \rightarrow s^{-1}\gamma_a s v^a = \gamma_a (L^{-1})^a_b v^b \quad (4.3)$$

のようになる．これはスピン群  $s$  によるゲージ変換で， $L$  による局所 Lorentz 変換  $v^a \rightarrow (L^{-1})^a_b v^b$  が誘導されることを意味する．さらにスピン接続  $\omega_\Delta$  と接続  $\omega$  の関係から

$$\begin{aligned} \omega_\Delta^s &= s^{-1}\left(d + \frac{1}{2}\omega_{ab}\sigma_{ab}\right)s = s^{-1}ds + \frac{1}{2}\omega_{ab}\sigma_{cd}(L^{-1})^c_a(L^{-1})^d_b \\ &= s^{-1}ds + \frac{1}{2}(L^{-1})^c_a\omega_{ab}L^b_d\sigma_{cd}. \end{aligned}$$

$s^{-1}ds = (L^{-1}dL)_{cd}\sigma_{cd}$  を示す． $s = \exp\left(\frac{1}{2}\theta_{ab}\sigma_{ab}\right)$  とすれば

$$s^{-1}ds = \int_0^1 dt \exp\left(-t \operatorname{ad}\left(\frac{1}{2}\theta_{ab}\sigma_{ab}\right)\right) d\left(\frac{1}{2}\theta_{cd}\sigma_{cd}\right) \quad (4.4)$$

とかける．ここで  $\operatorname{ad}(X)Y = [X, Y]$  である．これの  $\sigma_{ab}$  成分を求めるために

$$\left[\frac{1}{2}\theta_{ab}\sigma_{ab}, \frac{1}{2}\theta'_{cd}\sigma_{cd}\right] = \theta_{ac}\theta'_{cb}\sigma_{ab} = \frac{1}{2}[\theta, \theta']_{ab}\sigma_{ab} \quad (4.5)$$

を用いる.  $\theta, \theta'$  はそれぞれ  $\theta_{ab}, \theta'_{ab}$  を成分とする行列であり, 反対称行列の全体  $\mathfrak{so}(2n)$  の元である. ここで  $\text{ad}(\sigma^{ab}) = L^{ab}$ ,  $(L^{ab})_{ij} = \delta_i^a \delta_j^b - \delta_j^a \delta_i^b$  を用いれば  $\theta = \frac{1}{2} \theta_{ab} L^{ab}$  であり,  $L = \exp \theta$  である. したがって

$$s^{-1} ds = \left[ \int_0^1 dt \exp(-t \text{ad}(\theta)) d\theta \right]_{ab} \frac{1}{2} \sigma^{ab} \quad (4.6)$$

$$= \frac{1}{2} [L^{-1} dL]_{ab} \sigma_{ab}. \quad (4.7)$$

以上のことから

$$\omega_{\Delta}^s = \frac{1}{2} (L^{-1} dL + L^{-1} \omega L)_{cd} \sigma_{cd} = \frac{1}{2} \omega_{cd}^L \sigma_{cd} \quad (4.8)$$

となり,  $s$  によるゲージ変換が局所 Lorentz 群のゲージ変換を引き起こすことが分かった. そのため,  $\omega_{\Delta}$  を単に  $\omega$  とかき,  $s$  による変換によって, 局所 Lorentz 変換  $L = \text{Ad}(s)$  のように変わるとする.

ゲージアノマリーの議論から, 重力アノマリーは 2 次元高い多様体の指数定理と対応し,  $\hat{A}$  を降下させることで得られると期待できる. 実際ゲージアノマリーの議論と同様に Spin 群のゲージ変換の族  $\{s(\theta, x)\}_{\theta \in S^1}$  を  $s(0, x) = s(2\pi, x) = 1$  が成り立つようにとり, スピン接続または  $\omega$  全体の集合上のループを構成すれば, 分配関数は

$$Z[e, \theta] = e^{-W[e, \theta]} = \det(i\hat{D}(e^{\theta}, \omega^{\theta})) = \sqrt{|\det(i\mathcal{D}(e, \omega))|} e^{iW(e, \omega)} \quad (4.9)$$

のようにかける. そして  $e^{iW(e, \omega)}$  の巻き付き数  $m$  と指数定理を対応させるために 2 次元高い多様体に拡張する.

ゲージアノマリーは 2 次元高い多様体  $M^{2n} \times S^2$  の非自明なトポロジカルな構造と密接に関係していたので, 重力アノマリーもそうであると期待される. しかしながら, 重力だけの場合では単純に積をとるだけでは非自明な指数を持たない. 例えば, 2 次元多様体  $M^2$  の場合,  $M^2 \times S^2$  の指数は自明となる. これは指数  $\text{ind}(i\mathcal{D})$  が多様体の符号数  $\tau$  に比例して  $\text{ind}(i\mathcal{D}) = -\frac{1}{8}\tau$  のようにかけて

$$\tau(M^2 \times S^2) = \tau(M^2) \times \tau(S^2) = 0 \quad (4.10)$$

のようになるからである. 一般に多様体  $X, Y$  について  $\tau(X \times Y) = \tau(X) \times \tau(Y)$  のようになり, 2 次元多様体の符号数は常に 0 となる. そのため重力だけの場合は,  $M^2$  をファイバーとし, 2 次元のパラメータ空間を底空間とするファイバー束の上で議論する必要がある. 具体的な例は [45] で構成されている. しかしゲージアノマリーの解析では, 0-mode は局所的な構造のみで構成され, 大域的で非自明なトポロジーの影響を受けなかった. そのため, 実際に非自明なトポロジカルな構造が存在するかどうかによらず, アノマリーが非自明な構造を利用するのに適した形を保ち続けていると仮定し,  $M^{2n} \times S^2$  の上で議論する.

よってゲージアノマリーの時と同様に,  $M^{2n} \times S^2$  上の 0-mode と  $e^{iW(e, \omega)}$  の巻き付き数  $m$  を対応づけることで,

$$m = \int_{M^{2n} \times S^2} \hat{A}(M^{2n} \times S^2) \quad (4.11)$$

が得られる．これによって  $\alpha \in \mathfrak{so}(2n)$  による無限小ゲージ変換で生じる重力アノマリーは

$$\delta_\alpha W[e, \omega] = -2\pi i \int_{M^{2n}} Q_{2n}^1(\alpha, \omega, \Omega) \quad (4.12)$$

とかける．この  $Q_{2n}^1$  は  $\hat{A}$  類から生成されるものである． $\hat{A}$  は 4 の倍数の次元の多様体の上で非自明なので，重力アノマリーが存在するのは  $2n = 4k + 2$  次元のときに限り，Wess-Zumino 整合性条件を満たす．(4.12) の右辺の重力アノマリーの表式を Lorentz form と呼ぶ．

一般座標変換の場合も同様の方法で求める．一般座標変換の族として

$$x \rightarrow x'(x, \theta) \quad (4.13)$$

をとる．ここで  $x'(x, 0) = x'(x, 2\pi) = x$  とする． $(\Lambda^{-1})^\mu_\nu = \frac{\partial x'^{\mu(\theta)}}{\partial x^\nu}$  とすれば，接続  $\Gamma$  や曲率  $R = d\Gamma + \Gamma^2$  は

$$\begin{aligned} \Gamma &\rightarrow \Gamma^\theta = \Lambda^{-1}(d + \Gamma)\Lambda \\ R &\rightarrow R^\theta = \Lambda^{-1}R\Lambda \end{aligned} \quad (4.14)$$

のように変換される．また局所 Lorentz 変換で用いた接続  $\omega$  や曲率  $\Omega$  は

$$\begin{aligned} \omega &= e(d + \Gamma)e^{-1} \\ \Omega &= eRe^{-1} \end{aligned} \quad (4.15)$$

の関係がある．そして同様の議論によって，一般座標変換でのアノマリーは  $\hat{A}$  類から生成される．

この  $\hat{A}$  類はその随伴不変性から， $\hat{A}(R) = \hat{A}(\Omega)$  が成り立ち，同じ指数密度から生成されることがわかる．局所 Lorentz 変換のアノマリーと一般座標変換でのアノマリーが同じトポロジカル不変量の密度から得られるのは，高次元のトポロジカルな障害に起因するアノマリーが本質的に同じであることを表している．これを Sec. 4.3 で明らかにする． $\hat{A} = dQ_{2n+1}(\Gamma, R)$  となるように Chern-Simons 項  $Q_{2n+1}(\Gamma, R)$  を定めれば，一般座標変換によって生じるアノマリーは

$$\delta_{v_\xi}^{C'} W[dx, \Gamma] = -2\pi i \int_{M^{2n}} Q_{2n}^1(v_\xi, \Gamma, R) \quad (4.16)$$

のようになる．この形も同様に Wess-Zumino 整合性条件をみだし，(4.16) の右辺の重力アノマリーの表式を Einstein form と呼ぶ．

**Example 4.1** (2次元時空における重力アノマリー)．2次元時空における重力アノマリーを求めるために4次元の  $\hat{A}$  類を考える．まず Lorentz form を導く．(2.106) より  $P = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{12} \text{tr}(R^2) = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{12} \text{tr}(\Omega^2)$  だから，Chern-Simons 項は

$$Q_3(\omega, \Omega) = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{12} \text{tr}\left(\omega d\omega + \frac{2}{3}\omega^3\right) = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{12} \text{tr}\left(\omega\Omega - \frac{1}{3}\omega^3\right) \quad (4.17)$$

となる． $\Omega$  を固定し， $\omega \rightarrow \omega + \alpha$  として  $\alpha$  の一次を求めると，Lorentz form は

$$Q_2^1(\alpha, \omega, \Omega) = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{12} \text{tr}\left(\alpha\Omega - \alpha\omega^2\right) = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{12} \text{tr}(\alpha d\omega) \quad (4.18)$$

であることがわかる.

同様に Einstein form については

$$Q_3(\Gamma, R) = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{12} \text{tr} \left( \Gamma d\Gamma + \frac{2}{3} \Gamma^3 \right) = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{12} \text{tr} \left( \Gamma R - \frac{1}{3} \Gamma^3 \right) \quad (4.19)$$

$$Q_2^1(v_\xi, \Gamma, R) = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{12} \text{tr} (v_\xi R - v_\xi \Gamma^2) = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{12} \text{tr} (v_\xi d\Gamma) \quad (4.20)$$

となる.

## 4.2 エネルギー運動量テンソル

カイラルアノマリーやゲージアノマリーは current の異常発散として現れたが, 重力アノマリーも同様にエネルギー運動量テンソルの異常な振る舞いとして現れる. 古典的にはエネルギー運動量テンソルは対称テンソルであり, その発散は0で保存する. しかし重力アノマリーが存在する場合はその限りではない. この章では局所 Lorentz 変換から生じるアノマリーがエネルギー運動量テンソルの反対称な成分として現れることと, 一般座標変換から生じるアノマリーが異常発散として現れることをみる.

エネルギー運動量テンソルの期待値は有効作用  $W$  の vielbein  $e$  による変分によって

$$e_{b\mu} \frac{\delta W}{\delta e^a_\mu} = \sqrt{h} T_{ab} = \sqrt{h} e_{b\mu} e_{a\nu} T^{\mu\nu} \quad (4.21)$$

と定められる. この  $T_{ab}$  を用いて無限小局所 Lorentz 変換  $L \simeq 1 + \alpha$  の下で有効作用  $W$  の変化を求めると

$$\delta_\alpha W = - \int d^{2n}x \alpha^a_b e^b_\mu \frac{\delta W}{\delta e^a_\mu} = - \int d^{2n}x \sqrt{h} \alpha^{ab} T_{ab} \quad (4.22)$$

のようになる.  $\alpha^{ab}$  は反対称なので, 有効作用  $W$  が局所 Lorentz 変換で不変でないことと  $T_{ab}$  が対称でないことは等価である. つまり重力アノマリーの Lorentz form はエネルギー運動量テンソルの非対称成分として現れる. 通常のゲージ不変性によって非物理的な自由度を除くユニタリゲージを取れるように, vielbein の導入に関連した非物理的な自由度を無視するために局所 Lorentz 変換の対称性を保つのは重要である.

無限小一般座標変換  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu - \xi^\mu$  の下でエネルギー運動量テンソルを求めるために  $p$ -form  $\Sigma$  に対する変換を

$$\delta_\xi^C \Sigma = \Sigma'(x') \Big|_{x'=x} - \Sigma(x) \quad (4.23)$$

と定める. ここで  $\Sigma'(x') = \Lambda_{\text{upper}}^{-1} \Sigma(x) \Lambda_{\text{lower}}$  であり, (2.29) で定めた  $\delta_{v_\xi}^{C'}$  を用いると

$$\delta_\xi^C = \delta_{v_\xi}^{C'} + (di_\xi + i_\xi d) \quad (4.24)$$

となる. ここで  $i_\xi$  は (2.52) で定めた内部積である. これによって vielbein は

$$\delta_\xi^C e^a_\mu = e^a_\nu \nabla_\mu \xi^\nu + \xi^\nu \nabla_\nu e^a_\mu \quad (4.25)$$

と変化する。したがってこの変換による有効作用  $W$  の変位は

$$\begin{aligned}\delta_\xi^C W &= \int d^{2n}x \delta_\xi^C e^a{}_\mu \frac{\delta W}{\delta e^a{}_\mu} = \int d^{2n}x (e^a{}_\nu \nabla_\mu \xi^\nu + \xi^\nu \nabla_\nu e^a{}_\mu) \frac{\delta W}{\delta e^a{}_\mu} \\ &= - \int d^{2n}x \sqrt{h} \xi^\nu (\nabla_\mu T_\nu{}^\mu + \omega_{ab,\nu} T^{ab})\end{aligned}$$

となる。ここで  $\nabla_\nu e^a{}_\mu = -\omega^a{}_{b,\nu} e^b{}_\mu$  を用いた。もしも  $T^{ab}$  が対称テンソルで局所 Lorentz 変換で不変な場合、 $\omega_{ab,\nu}$  の反対称性から第二項は 0 となり、

$$\delta_\xi^C W = - \int d^{2n}x \sqrt{h} \xi_\nu \nabla_\mu T^{\nu\mu}. \quad (4.26)$$

これは  $W$  の一般座標変換での変位がエネルギー運動量テンソルの非保存性と対応することを表す。  $\delta_\xi^C$  と  $\delta_{v_\xi}^{C'}$  の差は全微分項のみであるから  $\delta_\xi^C W = \delta_{v_\xi}^{C'} W$  であり、重力アノマリーの Einstein form と関係する。

### 4.3 Lorentz form と Einstein form の等価性

重力アノマリーの表式は Lorentz form と Einstein form の 2 つあり、それらは同じ指数密度  $\hat{A}$  から生成された。この 2 つが等価であることを示すため、counter term を構成する。

$\Gamma = e^{-1}(d+\omega)e$  を思い出すと、 $\omega$  を  $GL(2n, \mathbb{R})$  束の接続と見ることで  $\Gamma$  と  $\omega$  は  $GL(2n, \mathbb{R})$  のゲージ変換  $e = (e^a{}_\mu)$  によって繋がる。そこで  $\det e > 0$  を仮定すれば  $e_{t=0} = 1, e_{t=1} = e$  のゲージ変換の族が得られる。例えば、 $e$  の固有値が全て正であれば、 $e_t = 1 + t(e - 1)$  のように取れる。この  $e_t$  は counter term の構成に用いるだけなので、 $GL(2n, \mathbb{R})$  のトポロジカルな性質を考慮する必要はない。 $e_t$  を用いて

$$\begin{aligned}\omega^{e_t} &:= e_t^{-1}(d + \omega)e_t \\ e^{e_t} &:= (e_t^{-1}e)_\mu dx^\mu \\ \hat{v}_t &:= e_t^{-1}d_t e_t\end{aligned} \quad (4.27)$$

のように接続  $\omega$  や vielbein  $e$  のゲージ変換と無限小ゲージ変換の方向  $\hat{v}_t$  を定める。これによって counter term を

$$S = -2\pi i \int_{M^{2n}} \int_0^1 Q_{2n}^1(\hat{v}_t, \omega^{e_t}) \quad (4.28)$$

のように定義する。有効作用  $d_t W[e^{e_t}, \omega^{e_t}] = -2\pi i \int_{M^{2n}} Q_{2n}^1(\hat{v}_t, \omega^{e_t})$  を用いれば、

$$\begin{aligned}S &= \int_0^1 d_t W[e^{e_t}, \omega^{e_t}] \\ &= \int_0^1 dt \frac{\partial}{\partial t} W[e^{e_t}, \omega^{e_t}] \\ &= W[dx, \Gamma] - W[e, \omega]\end{aligned}$$

が得られる。したがって  $\pm S$  は重力アノマリーの表式を Lorentz form から Einstein form へ移したり、またはその逆も可能である。 $S$  は有限の微分のみを含むから、その意味で局所的な counter term である。Sec. 4.2 で議論した有効作用の対称性とエネルギー運動量テンソルの

関係から,  $S$  を有効作用に加えることで, エネルギー運動量テンソルを対称だが非保存なものから, 非対称だが保存するものに移すことができる [22]. この  $S$  の存在によって, Einstein form と Lorentz form が等価であることがわかり, 重力アノマリーの相殺条件は局所 Lorentz 変換か一般座標変換で考えるかに依存しない.

## Part II

# 研究

### 5 曲がったドメインウォールの寄与

$2n$  次元 Euclid 空間  $\mathbb{R}^{2n}$  に  $2n - 1$  次元のドメインウォールがある系を考える. エルミート Dirac 演算子として,

$$H_{DW} = \Gamma_5(\not{D}_{2n} + M\epsilon_A) \quad (5.1)$$

$$(\not{D}_{2n} = \Gamma^\mu \partial_\mu)$$

をとる. ここで  $A \subset \mathbb{R}^{2n}$  は  $\mathbb{R}^{2n}$  の領域で,  $A$  の境界がドメインウォールである.  $\epsilon_A$  は

$$\epsilon_A(x) = \begin{cases} -1 & (x \in A) \\ 1 & (x \notin A) \end{cases} \quad (5.2)$$

によって定義される. 曲がったドメインウォールで相関関数や固有値がどのように変化するかを調べる. 平坦なドメインウォールについては Appendix B で議論する.

#### 5.1 $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ の場合

まず  $\mathbb{R}^2$  上の  $S^1$  がドメインウォールの場合を調べる.  $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid r = |x| < r_0\}$  とすれば, これはドメインウォールが  $r = r_0$  にあることを意味し,  $\epsilon_A = \text{sign}(r - r_0)$  である. これを単に  $\epsilon$  とかく. ガンマ行列を

$$\Gamma^1 = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \Gamma^2 = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \Gamma_5 = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

のように定めれば考えるべき Hamiltonian は

$$H_{DW} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M\epsilon & e^{-i\theta} \left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ e^{i\theta} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) & M\epsilon \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

のようになる. ここで  $(x^1, x^2) = r(\cos \theta, \sin \theta)$  の極座標をとった. この Hamiltonian は全角運動量  $J = -i \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \sigma_3$  と可換であるので,  $H_{DW}, J$  の同時固有状態を求めることができる. ここでは  $r < r_0$  と  $r > r_0$  の領域で固有状態をそれぞれ求めてその解を連続的につなぐことで,  $\mathbb{R}^2$  の解を求める. 以下  $H_{DW}$  の固有値を  $E$  とし,  $J$  の固有値を  $j = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots$  とする.

まず  $r < r_0$  において正則で  $r = r_0$  に局在する解を構成する.  $0 \leq \lambda < M$  に対して

$$\psi_{r < r_0} = \begin{pmatrix} a I_{j-\frac{1}{2}}(\sqrt{M^2 - \lambda^2} r) e^{(j-\frac{1}{2})i\theta} \\ b I_{j+\frac{1}{2}}(\sqrt{M^2 - \lambda^2} r) e^{(j+\frac{1}{2})i\theta} \end{pmatrix} \quad (5.5)$$



とおく. ここで  $a, b$  は定数で  $I_{j\pm\frac{1}{2}}$  は第 1 種変形 Bessel 関数である. 変形 Bessel 関数の性質を用いれば,

$$\begin{aligned} & e^{-i\theta} \left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) I_{j+\frac{1}{2}}(\sqrt{M^2 - \lambda^2} r) e^{(j+\frac{1}{2})i\theta} \\ &= e^{(j-\frac{1}{2})i\theta} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{j+\frac{1}{2}}{r} \right) I_{j+\frac{1}{2}}(\sqrt{M^2 - \lambda^2} r) \\ &= \sqrt{M^2 - \lambda^2} I_{j+\frac{1}{2}}(\sqrt{M^2 - \lambda^2} r) e^{(j+\frac{1}{2})i\theta} \end{aligned}$$

となるから,  $\psi_{r < r_0}$  に  $H_{DW}$  を作用させると

$$H_{DW} \psi_{r < r_0} = \begin{pmatrix} (-aM + b\sqrt{M^2 - \lambda^2}) I_{j-\frac{1}{2}}(\sqrt{M^2 - \lambda^2} r) e^{(j-\frac{1}{2})i\theta} \\ (-a\sqrt{M^2 - \lambda^2} + bM) I_{j+\frac{1}{2}}(\sqrt{M^2 - \lambda^2} r) e^{(j+\frac{1}{2})i\theta} \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

をえる.  $H_{DW}$  の固有状態となるように  $a, b$  を求めれば, 固有値は  $E = \pm\lambda$  であり, それぞれ

$$\begin{aligned} \psi_{r < r_0}^{E=\lambda, j} &= \begin{pmatrix} \sqrt{M^2 - \lambda^2} I_{j-\frac{1}{2}}(\sqrt{M^2 - \lambda^2} r) e^{(j-\frac{1}{2})i\theta} \\ (M + \lambda) I_{j+\frac{1}{2}}(\sqrt{M^2 - \lambda^2} r) e^{(j+\frac{1}{2})i\theta} \end{pmatrix} \\ \psi_{r < r_0}^{E=-\lambda, j} &= \begin{pmatrix} (M + \lambda) I_{j-\frac{1}{2}}(\sqrt{M^2 - \lambda^2} r) e^{(j-\frac{1}{2})i\theta} \\ \sqrt{M^2 - \lambda^2} I_{j+\frac{1}{2}}(\sqrt{M^2 - \lambda^2} r) e^{(j+\frac{1}{2})i\theta} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.7)$$

となる.

同様に  $r > r_0$  において正則で  $r = r_0$  に局在する解についても

$$\psi_{r > r_0} = \begin{pmatrix} aK_{j-\frac{1}{2}}(\sqrt{M^2 - \lambda^2} r) e^{(j-\frac{1}{2})i\theta} \\ bK_{j+\frac{1}{2}}(\sqrt{M^2 - \lambda^2} r) e^{(j+\frac{1}{2})i\theta} \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

を仮定すると,

$$\begin{aligned} \psi_{r > r_0}^{E=\lambda, j} &= \begin{pmatrix} (M + \lambda) K_{j-\frac{1}{2}}(\sqrt{M^2 - \lambda^2} r) e^{(j-\frac{1}{2})i\theta} \\ \sqrt{M^2 - \lambda^2} K_{j+\frac{1}{2}}(\sqrt{M^2 - \lambda^2} r) e^{(j+\frac{1}{2})i\theta} \end{pmatrix} \\ \psi_{r > r_0}^{E=-\lambda, j} &= \begin{pmatrix} \sqrt{M^2 - \lambda^2} K_{j-\frac{1}{2}}(\sqrt{M^2 - \lambda^2} r) e^{(j-\frac{1}{2})i\theta} \\ (M + \lambda) K_{j+\frac{1}{2}}(\sqrt{M^2 - \lambda^2} r) e^{(j+\frac{1}{2})i\theta} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.9)$$

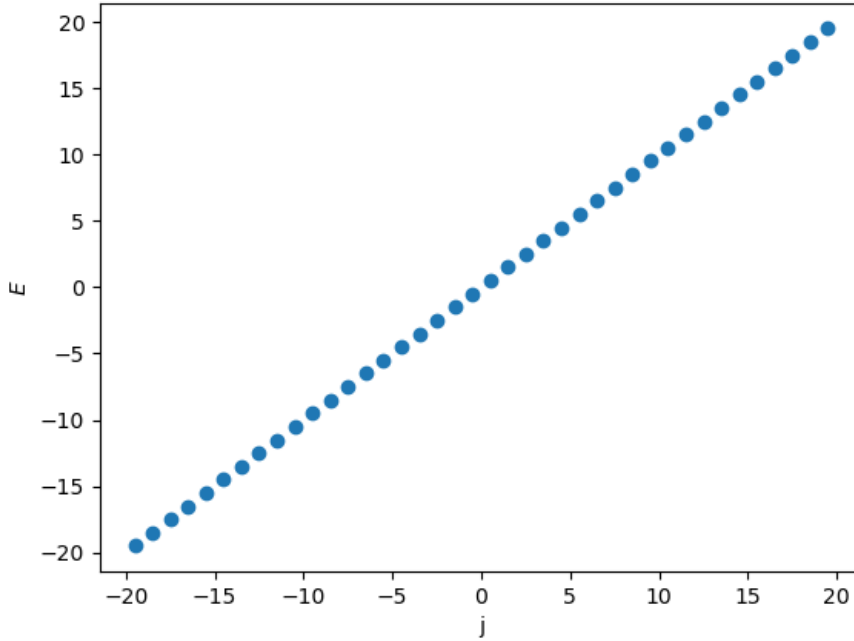
が固有関数となる.

$E = \lambda > 0, J = j$  の解が  $r = r_0$  で連続に接続する時,  $\psi_{r < r_0}^{E=\lambda, j}(r = r_0), \psi_{r > r_0}^{E=\lambda, j}(r = r_0)$  はともに平行でなければならないから, ある定数  $c$  があって

$$\begin{pmatrix} \sqrt{M^2 - \lambda^2} I_{j-\frac{1}{2}}(\sqrt{M^2 - \lambda^2} r_0) e^{(j-\frac{1}{2})i\theta} \\ (M + \lambda) I_{j+\frac{1}{2}}(\sqrt{M^2 - \lambda^2} r_0) e^{(j+\frac{1}{2})i\theta} \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} (M + \lambda) K_{j-\frac{1}{2}}(\sqrt{M^2 - \lambda^2} r_0) e^{(j-\frac{1}{2})i\theta} \\ \sqrt{M^2 - \lambda^2} K_{j+\frac{1}{2}}(\sqrt{M^2 - \lambda^2} r_0) e^{(j+\frac{1}{2})i\theta} \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

を満たす. 上の成分と下の成分の比をとり  $c$  を消去すると, この条件は

$$\frac{I_{j-\frac{1}{2}}}{I_{j+\frac{1}{2}}} \frac{K_{j+\frac{1}{2}}}{K_{j-\frac{1}{2}}}(\sqrt{M^2 - \lambda^2} r_0) = \frac{(M + \lambda)^2}{M^2 - \lambda^2} = \frac{M + \lambda}{M - \lambda} \quad (5.11)$$



**Figure 3:**  $M = 20, r_0 = 1$  での (5.13) を満たす  $E$  と  $j$  の関係

と同値である．同様に  $E = -\lambda < 0$  の解については

$$\frac{I_{j-\frac{1}{2}} K_{j+\frac{1}{2}}}{I_{j+\frac{1}{2}} K_{j-\frac{1}{2}}}(\sqrt{M^2 - \lambda^2 r_0}) = \frac{M - \lambda}{M + \lambda} \quad (5.12)$$

を満たす時，またその時に限り  $E = -\lambda$  が  $H_{DW}$  の固有値となる．この2つをまとめると

$$\frac{I_{j-\frac{1}{2}} K_{j+\frac{1}{2}}}{I_{j+\frac{1}{2}} K_{j-\frac{1}{2}}}(\sqrt{M^2 - E^2 r_0}) = \frac{M + E}{M - E} \quad (5.13)$$

となる．この条件を満たす  $E$  は有限個であり， $E$  が  $H_{DW}$  の固有値となるための制限を与える．Fig. 3 に数値計算の結果を載せる．

$M$  が十分大きい時に (5.13) を満たす  $E$  を求める． $\frac{1}{M}$  の部分を比較するため，変形 Bessel 関数の漸近形を用いると，

$$\frac{I_{j-\frac{1}{2}} K_{j+\frac{1}{2}}}{I_{j+\frac{1}{2}} K_{j-\frac{1}{2}}}(\sqrt{M^2 - E^2 r_0}) \simeq 1 + \frac{2j}{r_0 M} \quad (5.14)$$

$$\frac{M + E}{M - E} \simeq 1 + 2\frac{E}{M} \quad (5.15)$$

と変形できるから，

$$E \simeq \frac{j}{r_0} \quad (5.16)$$

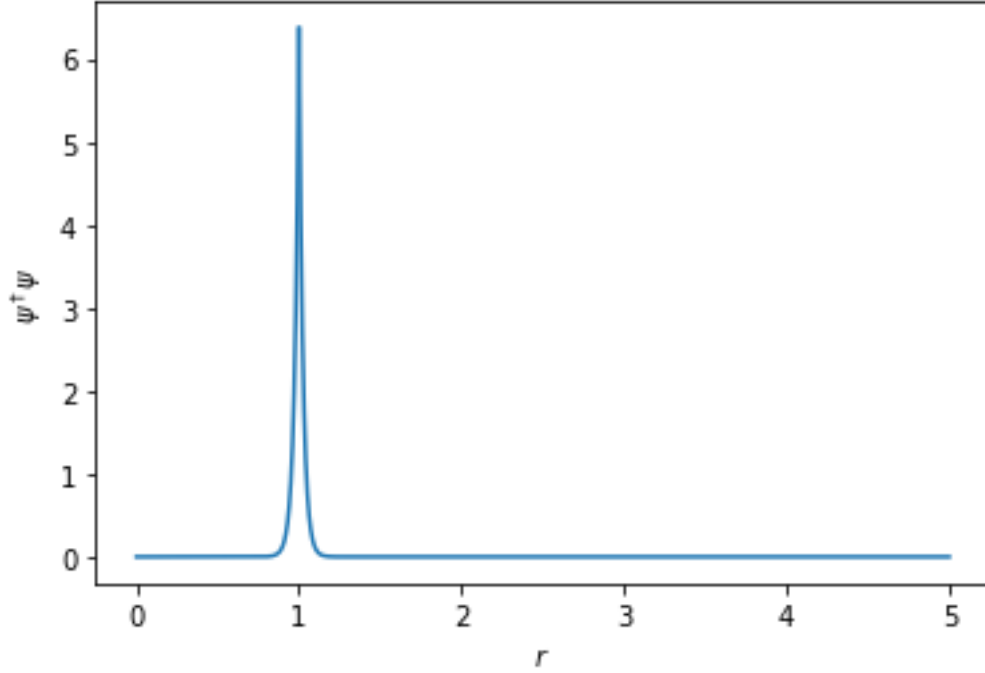


Figure 4:  $M = 20, r_0 = 1$  の時の  $j = \frac{1}{2}$  をもつエッジ状態の確率分布

となることがわかる. したがって  $\psi_{r < r_0}^{E,j}, \psi_{r > r_0}^{E,j}$  が連続的に繋がるのは  $E = \frac{j}{r_0}$  の場合に限る. この結果は [46, 47] と一致する.

そしてそれぞれを  $\int dx^1 dx^2 \psi^\dagger \psi = 1$  のように規格化し, 規格化した関数を  $\tilde{\psi}$  とかく.  $j = \frac{1}{2}$  の解の確率分布を Fig. 4 に示す.

$M$  が十分大きい時は (C.4) より,  $r = r_0$  の周りで

$$\tilde{\psi}^{E,j} \simeq \frac{M}{\sqrt{2\pi r M}} e^{-M|r-r_0|} \begin{pmatrix} e^{i(j-\frac{1}{2})\theta} \\ e^{i(j+\frac{1}{2})\theta} \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

のように近似できる. これは  $r = 0$  周りで良い近似ではないことに注意しなければならない. そして  $S^1$  の法線方向のガンマ行列を

$$\Gamma_{\text{normal}} = \frac{x^1}{r} \Gamma^1 + \frac{x^2}{r} \Gamma^2 = \cos \theta \Gamma^1 + \sin \theta \Gamma^2 \quad (5.18)$$

とすれば, この近似の範囲で  $\Gamma_{\text{normal}} \tilde{\psi}^{E,j} = \tilde{\psi}^{E,j}$  となり, エッジ状態は  $\Gamma_{\text{normal}}$  の固有値 +1 の状態である.

最後に  $M$  が十分大きいと仮定し, エッジ状態の相関関数  $F_{\text{edge}}$  を求める. 一般に点  $x, y$  の相関関数  $F$  は

$$(H_{DW})_x F(x; y) = \delta^2(x - y) \quad (5.19)$$

の解として定義される.  $(H_{DW})_x$  は  $x$  についての微分を表す. 正規直行基底を用いて書けば

$$\begin{aligned} F(x; y) &= \sum_{E,j} \frac{1}{E} \tilde{\psi}^{E,j}(x) (\tilde{\psi}^{E,j}(y))^\dagger \\ &= \sum_j \frac{1}{E} \tilde{\psi}_{\text{edge}}^{E,j}(x) (\tilde{\psi}_{\text{edge}}^{E,j}(y))^\dagger + \sum_{E,j} \frac{1}{E} \tilde{\psi}_{\text{bulk}}^{E,j}(x) (\tilde{\psi}_{\text{bulk}}^{E,j}(y))^\dagger \\ &= F_{\text{edge}}(x; y) + F_{\text{bulk}}(x; y) \end{aligned}$$

のようになる.  $F_{\text{edge}}(x; y), F_{\text{bulk}}(x; y)$  はそれぞれエッジ状態の伝播とバルク状態の伝播を表す. バルク状態において  $|E|$  の下限は  $M$  だから, 十分大きな  $M$  で  $F_{\text{bulk}} \sim \exp(-M|x-y|)$  の寄与は十分小さくなり, エッジの寄与  $F_{\text{edge}}$  が支配的になる.  $(r, \theta) = (r_0, 0) \rightarrow (r_0, \theta)$  の伝播は, Appendix C での計算によって

$$\begin{aligned} F_{\text{edge}}(r_0, \theta; r_0, 0) &= \sum_j \frac{1}{E} \tilde{\psi}^{E,j}(r_0, \theta) (\tilde{\psi}^{E,j}(r_0, 0))^\dagger \\ &\simeq \frac{M}{2} i \text{sign}(\theta) \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & e^{-i\frac{\theta}{2}} \\ e^{i\frac{\theta}{2}} & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

のようになる.

## 5.2 $S^1 \times \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ の場合

次に  $\mathbb{R}^4$  中の  $S^1 \times \mathbb{R}^2$  にドメインウォールが存在する場合を考える.  $S^1$  の半径を  $r_0$  として, 円柱座標  $(r, \theta, x^3, x^4)$  をとる. この時  $\epsilon = \text{sign}(r - r_0)$  であり, ガンマ行列を

$$\Gamma^i = \sigma_3 \otimes \sigma_i \quad (i = 1, 2), \quad \Gamma^3 = \sigma_1 \otimes 1, \quad \Gamma^4 = \sigma_2 \otimes 1$$

のように定め,  $\Gamma_5 = i(\Gamma^1 \Gamma^2) i(\Gamma^3 \Gamma^4)$  とすれば

$$H_{DW} = \Gamma_5 (\not{D} + \epsilon M) = -i \Gamma^3 \Gamma^4 H_{DW}^{S^1} + \Gamma_5 \left( \Gamma^3 \frac{\partial}{\partial x^3} + \Gamma^4 \frac{\partial}{\partial x^4} \right) \quad (5.20)$$

のようになる. ここで  $-i \Gamma^1 \Gamma^2 = 1 \otimes \sigma_3$  として

$$H_{DW}^{S^1} = 1 \otimes \sigma_3 \left( \sigma_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \sigma_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \epsilon M \right) \quad (5.21)$$

とした. () の内側は Sec. 5.1 で用いた Hamiltonian である.  $H_{DW}$  の固有値を求めるために 2 乗をとれば

$$H_{DW}^2 = \left( H_{DW}^{S^1} \right)^2 - (\partial_3)^2 - (\partial_4)^2 \quad (5.22)$$

のようになるから,  $H_{DW}^2$  の固有値は  $H_{DW} \cdot H_{DW}^{S^1}, \partial_3, \partial_4$  の固有値をそれぞれ  $E, \lambda, p_3, p_4$  とすれば

$$E^2 = (\lambda)^2 + p_3^2 + p_4^2 \quad (5.23)$$

となる．固有関数は

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi^{\pm\lambda,j} \\ 0 \end{pmatrix} e^{\pm ip_3 x^3} e^{\pm ip_4 x^4}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \psi^{\pm\lambda,j} \end{pmatrix} e^{\pm ip_3 x^3} e^{\pm ip_4 x^4} \quad (5.24)$$

である． $\Psi$  が  $H_{DW}^2$  の固有値  $E^2$  の状態の時， $(1 \pm \frac{H_{DW}}{|E|})\Psi$  が  $H_{DW}$  の固有値  $\pm|E|$  の状態となる．また，この解の形から  $\psi^{\lambda,j}$  が  $S^1$  に局在する mode であれば，それを含む  $\Psi$  はドメインウォール  $S^1 \times \mathbb{R}^2$  に局在する状態である．

$H_{DW}$  の相関関数を  $H_{DW}^2$  の固有関数から構成できる． $H_{DW}, H_{DW}^2$  の相関関数をそれぞれ  $F, G$  とすれば，これらはそれぞれ

$$(H_{DW})_x F(x; y) = \delta^4(x - y), \quad (H_{DW}^2)_x G(x; y) = \delta^4(x - y) \quad (5.25)$$

の解である．このとき， $F = H_{DW}G$  のように書くことができる．先ほどと同様に， $M$  が十分大きい時， $(r, \theta, x^3, x^4) = (r_0, 0, 0, 0) \rightarrow (r_0, \theta, x_3, x_4)$  へのエッジ状態の伝播は，Appendix D での計算によって

$$\begin{aligned} G_{\text{edge}}(r_0, \theta, x_3, x_4; r_0, 0, 0, 0) \\ &:= \int \frac{dp_3}{2\pi} \frac{dp_4}{2\pi} \sum_j \frac{e^{ip_3 x^3} e^{ip_4 x^4}}{\lambda^2 + p_3^2 + p_4^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \psi^{\lambda,j}(r_0, \theta) (\psi^{\lambda,j}(r_0, 0))^* \\ &= \int \frac{dp_3}{2\pi} \frac{dp_4}{2\pi} \frac{\pi M}{2\pi p} \frac{\sinh(pr_0(\pi - |\theta|))}{\cosh(pr_0\pi)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & e^{-i\frac{\theta}{2}} \\ e^{+i\frac{\theta}{2}} & e^{+i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} e^{ip_3 x^3} e^{ip_4 x^4} \end{aligned} \quad (5.26)$$

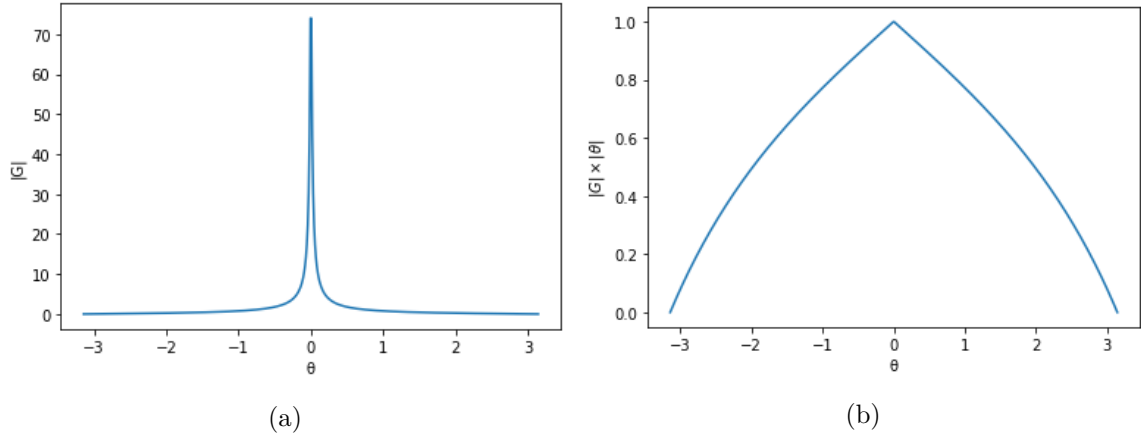
となる．ここで  $p = \sqrt{p_3^2 + p_4^2}$  とした．この被積分関数は  $|\theta| = 0, |\theta| > \pi$  で発散する． $\theta$  は  $S^1$  での座標だから，最終的な結果は周期  $2\pi$  の関数でなければならない．そこで  $0 < |\theta| < \pi$  で計算し，周期関数となるように  $|\theta| > \pi$  の領域へ接続する．

$x^3 = x^4 = 0$  の面で伝播を調べると，

$$\begin{aligned} G_{\text{edge}} &\simeq \int \frac{dp_3}{2\pi} \frac{dp_4}{2\pi} \frac{\pi M}{2\pi p} \frac{\sinh(pr_0(\pi - |\theta|))}{\cosh(pr_0\pi)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & e^{-i\frac{\theta}{2}} \\ e^{+i\frac{\theta}{2}} & e^{+i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{M}{4\pi r_0} \int_0^\infty \frac{\sinh(p(\pi - |\theta|))}{\cosh(p\pi)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & e^{-i\frac{\theta}{2}} \\ e^{+i\frac{\theta}{2}} & e^{+i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{M}{4\pi r_0} \left[ \frac{1}{|\theta|} + \frac{1}{4\pi} \left( \psi\left(\frac{2\pi + \theta}{4\pi}\right) + \psi\left(\frac{2\pi - \theta}{4\pi}\right) - \psi\left(\frac{4\pi + \theta}{4\pi}\right) - \psi\left(\frac{4\pi - \theta}{4\pi}\right) \right) \right] \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & e^{-i\frac{\theta}{2}} \\ e^{+i\frac{\theta}{2}} & e^{+i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{M}{4\pi r_0} \left[ \frac{1}{|\theta|} - \frac{\ln 2}{\pi} + \frac{\zeta(3)3}{16\pi^3} \theta^2 + \mathcal{O}(\theta^4) \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & e^{-i\frac{\theta}{2}} \\ e^{+i\frac{\theta}{2}} & e^{+i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

のようになる．ここで  $\psi$  はディガンマ関数で， $\zeta$  はゼータ関数である．そして

$$|G| := \frac{1}{|\theta|} + \frac{1}{4\pi} \left( \psi\left(\frac{2\pi + \theta}{4\pi}\right) + \psi\left(\frac{2\pi - \theta}{4\pi}\right) - \psi\left(\frac{4\pi + \theta}{4\pi}\right) - \psi\left(\frac{4\pi - \theta}{4\pi}\right) \right) \quad (5.27)$$



**Figure 5:** (a)  $|G|$  のグラフ.  $x^3 = x^4 = 0$  におけるエッジ状態の伝播の様子を表す. (b)  $|G|$  に  $|\theta|$  をかけたグラフ. この形から  $G$  は  $e^{-\theta}$  で減衰しないことがわかる.

とにおいて, Fig. 5 にその形を示す. これによって  $H_{DW}$  のエッジ状態の相関は  $|\theta|$  で円周に沿ってべきで減衰することがわかる.

また  $x^3, x^4$  方向への伝播は (5.26) において,  $p_3, p_4$  方向の積分を先に実行することで計算でき, (D.10) より

$$G_{\text{edge}} \simeq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{r_0} \sqrt{(x^3)^2 + (x^4)^2}}} e^{-\frac{1}{2r_0} \sqrt{(x^3)^2 + (x^4)^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \frac{M}{2\pi r_0} \begin{pmatrix} 1 + e^{-i\theta} \\ 1 + e^{i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

のようになる. これによって,  $x^3, x^4$  方向へは  $e^{-\frac{1}{2r_0} \sqrt{(x^3)^2 + (x^4)^2}}$  で減衰することがわかる.

したがって, エッジ状態は  $S^1$  方向へは質量のない粒子のように伝播し, 対して  $x^3, x^4$  へは質量  $\frac{1}{2r_0}$  の粒子のように伝播する.

## 6 格子上の曲がったドメインウォール

以上のことを格子に拡張する. 格子では Dirac 演算子ではなく Willson 項を加えた Willson-Dirac 演算子

$$D_W = \sum_{\mu} \left[ \gamma_{\mu} \frac{\nabla_{\mu}^f + \nabla_{\mu}^b}{2} - \frac{r}{2} \nabla_{\mu}^f \nabla_{\mu}^b \right] + \epsilon m \quad (6.1)$$

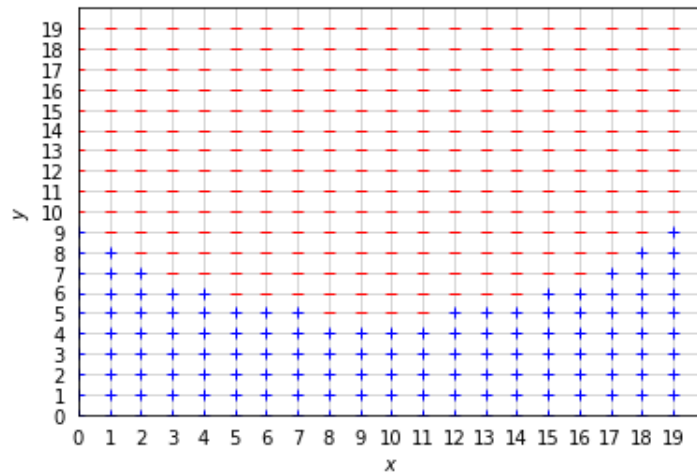
$$(\nabla_{\mu}^f \psi)_x = \psi_{x+\hat{\mu}} - \psi_x,$$

$$(\nabla_{\mu}^b \psi)_x = \psi_x - \psi_{x-\hat{\mu}}$$

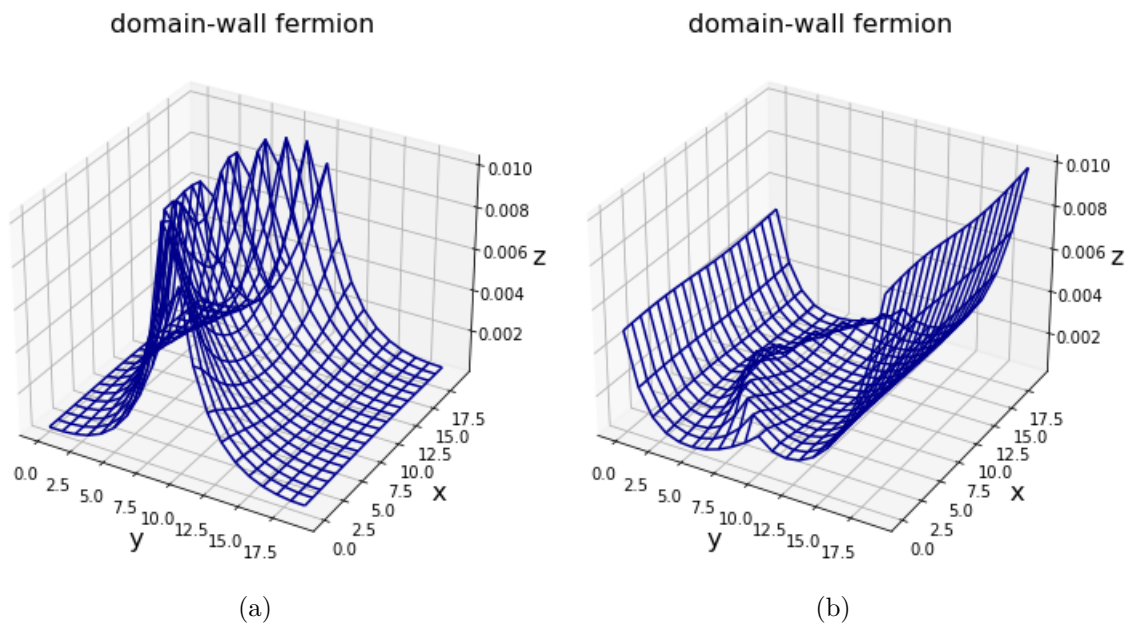
を考える. これを格子点が  $n \times n$  個の正方格子の上で定め, その座標を  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  とする. そして  $(x, y) \sim (x+n, y) \sim (x+n, y+n) \sim (x, y+n)$  のように縁を同一視して  $T^2$  を構成する.  $T^2$  上の座標にも  $(x, y)$  を用い,  $x, y$  はそれぞれ  $0 \leq x, y \leq n-1$  の値をとるとする. そして Sec. 5 のように質量の符号のある領域で反転させる.

$T^2$  上にドメインウォールを

$$\epsilon(x, y) = \begin{cases} -1 & \left( y > \frac{x(x-n+1)}{n-1} + \frac{n-1}{2} \right) \\ 1 & \left( y < \frac{x(x-n+1)}{n-1} + \frac{n-1}{2} \right) \end{cases} \quad (6.2)$$



**Figure 6:** 20 × 20 の格子上的ドメインウォール. 1つだけ曲り, もう一方は平らである.



**Figure 7:** (a) : 曲がったドメインウォールに局在する状態  
(b) : 平らなドメインウォールに局在する状態

のようにとれば,  $y = \frac{x(x-n+1)}{n-1} + \frac{n-1}{2}$  に曲がったドメインウォールが生じて, さらに  $y = 0$  に平らなドメインウォールができる (Fig. 6). 曲がったドメインウォールは連続極限で放物線となる.

(6.1) の固有値と固有状態を求め, 局在する解を調べると Fig. 7a, 7b のようになり, それぞれに局在した状態が生じる.

## 7 総括

### 7.1 まとめ

Sec. 3 ではゲージアノマリーを2つの方法で導出した. Sec. 3.1 ではゲージアノマリーを経路積分の Jacobin として導いた. この論文では trace を計算しなかったが, 具体的な表式を得るには平面波を使って trace をとり, Feynman 図の寄与を計算することで求めることができる. Sec. 3.2 ではゲージ変換で分配関数の位相部分が変わることを用いて, トポロジカルな観点からゲージアノマリーを解析した. 位相部分の非自明な変化を巻き付き数で表すことができ, それが高次元の位相不変量である Dirac 指数と対応することを確かめた. この Dirac 指数はカイラルアノマリーと呼ばれているものである. これによってゲージアノマリーが高次元のトポロジカルな障害に由来し, 高次元のカイラルアノマリーの降下で得られることが分かった. そのため, ゲージアノマリーとカイラルアノマリーはアノマリー流入によって打ち消しあう.

Sec. 4 ではゲージ変換との類似性を用いて, ゲージアノマリーの解析を重力アノマリーに応用した. 重力アノマリーの場合も, 分配関数の非自明な位相変化が高次元のトポロジーと結び付き, 高次元のアノマリー流入として理解できることを確かめた. しかしながら, ゲージアノマリーの場合と異なり, 高次元に埋めこむ場合は注意しなければならないことがある. それは Dirac 指数の性質から, 単純に多様体の積を取るだけでは非自明なトポロジーが生じないことである. 非自明なトポロジーを得たい場合はパラメータ空間を底空間として, 考えている多様体をファイバーとして埋めこむ必要がある.

重力アノマリーの表式を見るだけであれば, 導出に関わるのは局所的な部分だけだから, 非自明なトポロジーが存在するかどうかを気にする必要はない. そのため, ゲージアノマリーの議論を重力アノマリーに拡張可能である.

また, 重力には古典的に2つの対称性が存在する. 一般座標変換と局所 Lorentz 変換である. この2つの変換から生じるアノマリーは, 高次元の同じトポロジーと対応するから本質的には同一のものである. 実際, この2つを結ぶ局所的な counter term を構成できた. 一般座標変換でアノマリーが生じる場合, それはエネルギー運動量テンソルの異常な発散として現れる. 対して局所 Lorentz 変換の場合は, エネルギー運動量テンソルが添字の入れ替えについて反対称な部分としてアノマリーが現れる. 一般座標変換と局所 Lorentz 変換でのアノマリーが局所的な counter term で記述できるので, エネルギー運動量テンソルの定義を保存しないが添字の入れ替えで対称なものから保存するが入れ替えで非対称なものへ変えたり, またその逆も可能である. そしてそのどちらもアノマリーの相殺条件は同じである.

Sec. 5 では曲がったドメインウォールによって, 局在する mode がどのような影響を受けるのかを調べた. 具体的にはドメインウォールが  $S^1, S^1 \times \mathbb{R}^2$  の場合を考えた. 固有関数を具体的に構成し, エッジ状態やその固有値を求めた. エッジ状態の固有値は  $M$  で抑えられ,  $M$  より大きい固有値に対応する状態はバルクを伝播する振動解であった. つまり  $M$  が十分大きい時, ドメインウォール上の伝播に関わるのはエッジ状態である. また平坦な時と違い, コンパクトな方向があるため, その固有値は離散化されている. エッジ状態の相関関数を計算すると, その伝播の仕方から, 質量のないフェルミオンのように振る舞っていることが分かった. Sec. 6 では格子においても曲がったドメインウォールに局在する状態が存在することが分かった.



## 7.2 展望

この研究の大きな目標はドメインウォールを用いた重力の再現であるので今回構成したエッジ状態が実際に曲面の重力を感じているかどうかを調べる。冒頭でも述べた通り、任意の Riemann 多様体は Euclid 空間に埋め込まれた曲面として考えられる。今回の研究でエッジ状態がドメインウォールに沿って伝播していたため、エッジ状態は曲面の幾何学的な情報を持っていると推測できる。そこでこの幾何学的な情報をうまく抽出し、重力の寄与を含んだカイラルアノマリーなどを定式化したい。

またトポロジーが複雑な多様体を埋めるには、それなりに大きな Euclid 空間が必要である。そのためドメインウォールの codimension が 2 より大きい場合の構成の仕方やその時の振る舞いなどを調べなければならない。例えば Callan-Harvey 機構ではドメインウォールを 2 枚設置し、交わる部分に局在する mode が存在することを示していた [14]。これをうまく拡張し codimension が 2 以上のドメインウォールの構成を模索する。

最後に上の 2 つを組み合わせ、カイラルアノマリーの流入として重力アノマリーを定式化したい。正方格子で重力を考えることはできないが、ドメインウォールを格子の上で曲げることができ、格子上で重力の寄与を計算できると期待できる。

## 8 謝辞

修士 2 年という一年間で、研究や論文について指導して下さった深谷英則先生に心より感謝いたします。そしてアノマリーのゼミに参加して下さった大野木哲也先生、山口哲先生に感謝申し上げます。執筆中に差し入れをくれた芝野さんを始め、支えて下さった研究室の方々、一緒に遊んでくれた友人、家族に改めてお礼申し上げます。

### A $\det(i\mathcal{D}_{2n}^{t,\theta})$ の零点に局在する mode

$\mathbb{D}_+^2$  のある点で 0 となる  $i\mathcal{D}_{2n}^{t,\theta}$  の固有値  $\lambda(t, \theta)$  が存在する時の  $i\mathcal{D}_{2n+2}^\epsilon$  の 0-mode を議論する。そのために Sec. 3.2 の Hamiltonian(3.43)

$$\mathcal{H}_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^2} 1 \otimes (i\mathcal{D}_{2n}^{t,\theta})^2 + (i\phi_2)^2 + \frac{1}{\epsilon} \Gamma^i \Gamma^\mu i\partial_i (iA_\mu^{t,\theta})$$

を考える。この Hamiltonian は  $2n+2$  次元スピノール  $\Psi$  に作用し、 $\Psi$  は  $2n$  次元のスピノール  $\psi_1, \psi_2$  を用いて

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

とかける。 $i\mathcal{D}_{2n}^{t,\theta}$  の固有値  $\lambda(t, \theta)$  に対応する  $2n$  次元の固有スピノールを単に  $\psi^{t,\theta}(x)$  とすれば、これは次を満たす：

$$i\mathcal{D}_{2n}^{t,\theta} \psi^{t,\theta}(x) = \lambda(t, \theta) \psi^{t,\theta}(x) \quad (\text{A.1})$$

$\lambda = 0$  となる点の近傍で Euclid 座標  $(\phi_1, \phi_2)$  をとり、 $\phi_i = 0$  で  $\lambda = 0$  となるようにする。 $\gamma_5 \psi^{\phi_1, \phi_2}$  は  $-\lambda(t, \theta)$  の固有関数だから  $\lambda = 0$  となる mode は 2 つ存在し、 $\phi_i = 0$  に存在する 0-mode の空間は

$$\tilde{\psi}_\pm = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_5) \psi^{\phi_i=0}(x) \quad (\text{A.2})$$

の2つの関数で必ず展開できる． $\psi_{\pm}$  を規格化した  $\tilde{\psi}_{\pm}$  とし，これを基底とする一次摂動で  $\lambda(\phi_1, \phi_2)$  を計算する：摂動ポテンシャルは

$$\delta \left( i\mathcal{D}_{2n}^{\phi_1, \phi_2} \right) = \sum_j (i\partial_j \mathcal{A}) \phi_j \left( \partial_j \mathcal{A} := \frac{\partial}{\partial \phi_j} \mathcal{A}^{\phi_1, \phi_2} \Big|_{\phi_i=0} \right) \quad (\text{A.3})$$

のようになり， $\lambda = \mathcal{O}(\phi_1, \phi_2)$  に注意すれば， $\phi_i$  の1次で

$$\begin{aligned} \left( i\mathcal{D}_{2n}^{\phi_i=0} + \delta \left( i\mathcal{D}_{2n}^{\phi_1, \phi_2} \right) \right) \left( \psi + \delta \left( \psi^{\phi_1, \phi_2} \right) \right) &= \lambda(\phi_1, \phi_2) \left( \psi + \delta \left( \psi^{\phi_1, \phi_2} \right) \right) \\ \delta \left( i\mathcal{D}_{2n}^{\phi_1, \phi_2} \right) \psi + \left( i\mathcal{D}_{2n}^{\phi_i=0} \right) \delta \left( \psi^{\phi_1, \phi_2} \right) &= \lambda \psi \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

となる．このとき  $\psi = a\psi_+ + b\psi_-$  のように分解され，両辺に  $\psi_{\pm}^{\dagger}$  をかけて  $M^{2n}$  上で積分することで第2項は消えて，

$$\lambda b = \int_{M^{2n}} \psi_-^{\dagger} \delta \left( i\mathcal{D}_{2n}^{\phi_1, \phi_2} \right) a \psi_+ = \sum_j \int_{M^{2n}} \psi_-^{\dagger} (i\partial_j \mathcal{A}) \psi_+ \phi_j a \quad (\text{A.5})$$

$$\lambda a = \int_{M^{2n}} \psi_+^{\dagger} \delta \left( i\mathcal{D}_{2n}^{\phi_1, \phi_2} \right) b \psi_- = \sum_j \int_{M^{2n}} \psi_+^{\dagger} (i\partial_j \mathcal{A}) \psi_- \phi_j b \quad (\text{A.6})$$

のようになる．

ここで

$$z_j := \int_{M^{2n}} \psi_-^{\dagger} (i\partial_j \mathcal{A}) \psi_+ \quad (\text{A.7})$$

$$z_j^* := \int_{M^{2n}} \psi_+^{\dagger} (i\partial_j \mathcal{A}) \psi_- \quad (\text{A.8})$$

とすれば， $z_j$  は複素数で， $z_j^*$  はその複素共役となり，

$$\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sum_j z_j^* \phi_j \\ \sum_j z_j \phi_j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

という固有値方程式が得られ，これの解は

$$\lambda(\phi_1, \phi_2) = \pm |z_1 \phi_1 + z_2 \phi_2|. \quad (\text{A.10})$$

$\text{Re}(z_1^* z_2) = 0$  となる座標は， $(\phi_1, \phi_2)$  を回転させることでいつでも定義できるから，

$$\lambda(\phi_1, \phi_2)^2 = |z_1|^2 \phi_1^2 + |z_2|^2 \phi_2^2. \quad (\text{A.11})$$

次に式 (3.43) の 0-mode を求める．そのために

$$\psi^{\phi_1, \phi_2}(x) = f_+(\phi_1, \phi_2) \psi_+(x) + f_-(\phi_1, \phi_2) \psi_-(x) \quad (\text{A.12})$$

のように展開しておく．(3.43) の第3項は  $\Gamma^{2n+1} \Gamma^{\mu} = -i\sigma_3 \otimes \gamma^{\mu}$ ,  $\Gamma^{2n+2} \Gamma^{\mu} = 1 \otimes \gamma_5 \gamma^{\mu}$  に注意して，

$$\Gamma^i \Gamma^{\mu} i\partial_i \left( iA_{\mu}^{\phi_1, \phi_2} \right) = \sigma_3 \otimes \frac{\partial}{\partial \phi_1} (i\mathcal{A}) + 1 \otimes i\gamma_5 \frac{\partial}{\partial \phi_2} (i\mathcal{A}). \quad (\text{A.13})$$

このとき  $\Gamma_5 = \sigma_3 \otimes 1$  だから、 $2n+2$ 次元の chirality が  $\chi$  の mode を考えることで式 (3.43) の  $\mathcal{H}_\epsilon$  を  $2n$ 次元スピノールに作用する行列として表示できる：

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial \phi_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial \phi_2^2} + \frac{1}{\epsilon^2} (|z_1|^2 \phi_1^2 + |z_2|^2 \phi_2^2) \right) \begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix} + \frac{1}{\epsilon} \begin{pmatrix} 0 & \chi z_1^* + iz_2^* \\ \chi z_1 - iz_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix} \quad (\text{A.14})$$

ここで  $E$  は式 (3.43) の固有値である。この式の前半は調和振動子の Schrödinger 方程式そのものであるから、

$$\begin{pmatrix} f_+(\phi_1, \phi_2) \\ f_-(\phi_1, \phi_2) \end{pmatrix} = \exp \left[ -\frac{1}{2\epsilon} (|z_1| \phi_1^2 + |z_2| \phi_2^2) \right] \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

とすれば式 (A.14) は

$$\frac{1}{\epsilon} \begin{pmatrix} |z_1| + |z_2| & \chi z_1^* + iz_2^* \\ \chi z_1 - iz_2 & |z_1| + |z_2| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

のようになり、したがって、

$$E = \frac{1}{\epsilon} \left( |z_1| + |z_2| \pm \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\chi \text{Im}(z_1^* z_2)} \right). \quad (\text{A.17})$$

よってこの近似の下で

$$\chi \text{Im}(z_1^* z_2) = |z_1| |z_2| \quad (\text{A.18})$$

が成り立つ時、またその時に限り  $\mathcal{H}_\epsilon$  は 0-mode をもてる。  $\text{Re}(z_1^* z_2) = 0$  の座標をとっているから、  $|z_1| |z_2|, \text{Im}(z_1^* z_2)$  の大きさは同じであり、式 (A.18) を満たす  $\chi$  は真に  $\text{Im}(z_1^* z_2)$  の符号である：

$$\chi = \text{sign}(\text{Im}(z_1^* z_2)) \quad (\text{A.19})$$

さらにこの 0-mode は (A.15) で見るように  $\phi_i = 0$  に局在している。

最後に  $\det(i\hat{D}_{2n}(A^\theta))$  の巻き付き数と  $2n+2$ 次元のカイラリティ  $\chi$  の関係を論じる。そのために  $i\hat{D}_{2n}(A^{t,\theta})$  の固有値を  $\det(i\hat{D}(A^{t,\theta}))$  のゼロ点付近で考える。Sec. 3.2 と同様に、ゼロ点を中心とする Euclid 座標  $\phi_i$  をとり、  $\phi_i = 0$  に  $i\hat{D}_{2n}^{\phi=0}$  の 0-mode が存在すると仮定する。  $i\hat{D}_{2n}^{\phi=0}$  はエルミートではないから、この 0-mode は右固有関数  $e_0$  と左固有関数  $f_0$  を指し、(3.8) のようにそれぞれ

$$i\hat{D}_{2n}^{\phi=0} e_0 = 0, \quad f_0^\dagger i\hat{D}_{2n}^{\phi=0} = 0, \quad (f_0^\dagger, e_0) = 1 \quad (\text{A.20})$$

を満たす。  $f_0$  については  $(i\hat{D}_{2n}^{\phi=0})^\dagger f_0 = 0$  としても良い。  $e_0, f_0$  は上で定めた  $i\mathcal{D}_{2n}^{\phi=0}$  の 0-mode  $\psi_\pm$  と、定数スピノール  $\eta = \eta_+ + \eta_-$  を用いて

$$e_0 = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \eta_- \end{pmatrix}, \quad f_0 = \begin{pmatrix} \eta_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} \quad (\text{A.21})$$

のように書くことができる.  $(f_0^\dagger, e_0) = 1$  を満たすように  $\eta$  の大きさを調節する.

$i\hat{D}_{2n}^\phi$  の  $\phi_i = 0$  で 0 となる固有値  $z = \mathcal{O}(\phi_1, \phi_2)$  を,  $\phi_i$  の一次の摂動で求める.  $i\hat{D}_{2n}^\phi = i\hat{D}_{2n}^{\phi=0} + \delta(i\hat{D}_{2n}^\phi)$  であり, (A.3) のように

$$\delta(i\hat{D}_{2n}^\phi) = \sum_j (i\partial_j A_+) \phi_j \quad \left( \partial_j A := \frac{\partial}{\partial \phi_j} A^{\phi_1, \phi_2} \Big|_{\phi_i=0} \right) \quad (\text{A.22})$$

とかける. したがって固有値  $z$  は  $\phi$  の一次で

$$\begin{aligned} (i\hat{D}_{2n}^{\phi_i=0} + \delta(i\hat{D}_{2n}^\phi)) (e_0 + \delta(e_0^\phi)) &= z (e_0 + \delta(e_0^\phi)) \\ \delta(i\hat{D}_{2n}^\phi) e_0 + (i\hat{D}_{2n}^{\phi=0}) \delta(e_0^\phi) &= z e_0 \end{aligned}$$

となるから, 両辺に  $f_0^\dagger$  をかけて積分すれば

$$\begin{aligned} z &= (f_0^\dagger, \delta(i\hat{D}_{2n}^\phi) e_0) = \sum_j \int_{M^{2n}} f_0^\dagger (i\partial_j A_+) e_0 \phi_j \\ &= \sum_j \int_{M^{2n}} \psi_-^\dagger (i\partial_j A) \psi_+ \phi_j = z_1 \phi_1 + z_2 \phi_2 \end{aligned}$$

をえる.

この  $z_j$  は式 (A.7) と同じものである.  $z = x + iy$ ,  $z_j = x_j + iy_j$  ( $j = 1, 2$ ) とすれば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.23})$$

よって  $(\phi_1, \phi_2)$  平面上の楕円と  $z$  平面上の円が対応し, 円の向きは行列の行列式の符号でわかる. したがって,  $z$  の巻き付き数は

$$\text{sign} \left( \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \right) = \text{sign}(\text{Im}(z_1^* z_2)) = \chi. \quad (\text{A.24})$$

これによって  $i\mathcal{D}_{2n+2}$  の 0-mode のカイラリティと局所的な巻き付き数が対応した.

なぜ局在した状態のエネルギーへの  $\epsilon$  の高次の補正がこの同一視に影響を与えないのか説明する.  $i\mathcal{D}_{2n}^{t, \theta}$  が  $(t_1, \theta_1)$  で 0-mode を持ち, 局所的な巻き付き数が正であるとする. このとき  $\mathcal{H}_\epsilon$  の正のカイラリティを持つ局在した mode を構成できる. もし高次の  $\epsilon$  による補正で固有値が非ゼロ, 例えば  $\lambda = a_1 \epsilon + a_2 \epsilon^2 + \dots$  のようになる時,  $i\mathcal{D}_{2n+2}^\epsilon$  を作用させることで同じ固有値で負のカイラリティを持つ状態を生成できる. この状態は  $\epsilon \rightarrow 0$  で 0-mode となるから, 上の議論から反対の局所的な巻き付き数を持つ別の固有値に対応づけることができる. よって巻き付き数の計算では, このような mode の寄与は相殺し合い, 高次補正の影響を受けない. これは摂動計算が常にゼロ点付近の局所的な情報のみで計算でき, このゼロ点がトポロジカルに必要なのか, 除去可能なのかどうかを, 局所的な情報だけで判断できないからである. 局在した状態をゼロ点から解放するための唯一の手段は非摂動効果, 本質的にはポテンシャルの異なるゼロ点同士のトンネル効果を表すインスタントンである. インスタントンが巻き付き数の異なる 2 つゼロ点を接続し, そこに局在した 0-mode を解放するので, 巻き付き数の計算に影響を与えない.

## B 平らなドメインウォール

$2n$  次元 Euclid 空間で Euclid 座標  $(x, s)$  をとり,  $s = 0$  にドメインウォールが存在すると仮定する. このときエルミート Dirac 演算子は

$$H_{DW} = \Gamma_5 \sum_{\mu=1}^{2n-1} \Gamma^\mu \partial_\mu + \Gamma_5 \left( \Gamma^s \frac{\partial}{\partial s} + M \epsilon(s) \right). \quad (\text{B.1})$$

$$(\Gamma^\mu = \sigma_1 \otimes \gamma^\mu, \Gamma^s = \sigma_3 \otimes 1_{2^{n-1} \times 2^{n-1}})$$

ここで  $\Gamma_5 = \sigma_2 \otimes 1_{2^{n-1} \times 2^{n-1}}$  は  $2n$  次元でのカイリティを表し,  $\epsilon(s) = \text{sign}(s)$  である.  $1_{2^{n-1} \times 2^{n-1}}$  は  $2^{n-1} \times 2^{n-1}$  行列の単位行列である. 以下誤解のない時は, 単位行列を大きさによらず単に 1 と書いたり, または省略する.  $H_{DW}$  の Green 関数  $F$  を求める. つまり,  $(x', s')$  を固定して

$$H_{DW} F(x, s; x', s') = \delta^{2n-1}(x - x') \delta(s - s') 1 \otimes 1 \quad (\text{B.2})$$

を解く. ドメインウォールでの伝播を調べるから  $s' = 0$  とおき,  $x$  方向の並進対称性を用いて  $x' = 0$  とする. そして  $F(x, s; 0, 0)$  を単に  $F = F(x, s)$  とかく.

このとき  $F$  は

$$H_{DW}^2 G = \delta^{2n-1}(x) \delta(s) 1 \otimes 1 \quad (\text{B.3})$$

の解  $G$  を用いて  $F = H_{DW} G$  とかける. よってまずは  $G$  を求める.  $H_{DW}^2$  は

$$H_{DW}^2 = -\partial_s^2 - (\not{D}_{2n-1})^2 + M^2 - 2M\Gamma^s \delta(s) \quad (\text{B.4})$$

$$= (-\partial_s^2 - \partial_x^2 + M^2 - 2M\sigma_3 \delta(s)) \otimes 1 \quad (\text{B.5})$$

となる. Flat を仮定しているから,  $\not{D}^2 = \partial_\mu \partial^\mu$  である.  $\Gamma^s = \sigma_3 \otimes 1$  に注意すれば,  $H_{DW}^2$  の  $2n-1$  次元スピノールに作用するのは単位行列で,  $G(x, s) = G_{2 \times 2} \otimes 1$  のような形をしていることがわかる.  $G_{2 \times 2}$  を  $x$  方向に Fourier 変換したものを  $\tilde{G}(p, s)$  とかけば,

$$G(x, s) = \int \frac{d^{2n-1}p}{(2\pi)^{2n-1}} e^{ix \cdot p} \tilde{G}(p, s) \otimes 1 \quad (\text{B.6})$$

$$\therefore (-\partial_s^2 + p^2 + M^2 - 2M\sigma_3 \delta(s)) \tilde{G}(p, s) = \delta(s) 1_{2 \times 2} \quad (\text{B.7})$$

を満たす.  $-\partial_s^2 + p^2 + M^2 - 2M\Gamma^s \delta(s)$  の固有状態は

$$\varphi_{\pm, o}^\omega = \frac{u_\pm}{\sqrt{4\pi}} (e^{i\omega s} - e^{-i\omega s}) \quad (\text{B.8})$$

$$\varphi_{\pm, e}^\omega = \frac{u_\pm}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + M^2}} \left( (i\omega \mp M) e^{i\omega|s|} + (i\omega \pm M) e^{-i\omega|s|} \right) \quad (\text{B.9})$$

$$\varphi^{edge} = u_+ \sqrt{M} e^{-M|s|} \quad (\text{B.10})$$

のようになる. 下付きの  $\pm$  は  $\Gamma^s$  の固有値を表し, 下付きの  $e, o$  はパリティ変換で even か odd かを表す.  $H_{DW}^2$  の固有値はそれぞれ

$$(-\partial_s^2 + p^2 + M^2 - 2M\Gamma^s \delta(s)) \varphi_{\pm, a}^\omega = (\omega^2 + p^2 + M^2) \varphi_{\pm, a}^\omega \quad (a = o, e) \quad (\text{B.11})$$

$$(-\partial_s^2 + p^2 + M^2 - 2M\Gamma^s \delta(s)) \varphi^{edge} = p^2 \varphi^{edge} \quad (\text{B.12})$$

であり, これを用いれば

$$\begin{aligned}\tilde{G}(p, s) &= \sum_{\sigma=\pm, a=0, e} \int_0^\infty d\omega \frac{\varphi_{\sigma, a}^\omega(s) (\varphi_{\sigma, a}^\omega(0))^\dagger}{p^2 + \omega^2 + M^2} + \frac{\varphi^{edge}(s) (\varphi^{edge}(0))^\dagger}{p^2} \\ &= \sum_{\sigma=\pm} \int_0^\infty d\omega \frac{\varphi_{\sigma, e}^\omega(s) (\varphi_{\sigma, e}^\omega(0))^\dagger}{p^2 + \omega^2 + M^2} + \frac{u_+ u_+^\dagger M e^{-M|s|}}{p^2}\end{aligned}$$

となる. ここで  $\varphi_{\pm, 0}^\omega(0) = 0$  を用いた. これの前半部分の  $\sigma = +$  の部分を最初に計算すると

$$\begin{aligned}I_{++} &:= \int_0^\infty d\omega \frac{\varphi_{+, e}^\omega(s) (\varphi_{+, e}^\omega(0))^\dagger}{p^2 + \omega^2 + M^2} \\ &= \frac{u_+ u_+^\dagger}{4\pi} \int_0^\infty d\omega \frac{(i\omega - M)e^{i\omega|s|} + (i\omega + M)e^{-i\omega|s|}}{(\omega^2 + p^2 + M^2)(\omega^2 + M^2)} (-2i\omega) \\ &= \frac{u_+ u_+^\dagger}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty d\omega \frac{2\omega(\omega + iM)e^{i\omega|s|}}{(\omega^2 + p^2 + M^2)(\omega^2 + M^2)}\end{aligned}$$

が得られ,  $a^2 = p^2 + M^2, a > 0$  において被積分関数を部分分数分解すれば

$$\frac{2\omega(\omega + iM)}{(\omega^2 + p^2 + M^2)(\omega^2 + M^2)} = \frac{2\omega}{(\omega - ia)(\omega + ia)(\omega - iM)} \quad (\text{B.13})$$

$$= \frac{1}{\omega - ia} + \frac{1}{\omega + ia} + \frac{2iM}{\omega - iM}. \quad (\text{B.14})$$

$\omega$  を複素数に拡張して留数定理を用いる.  $e^{i\omega|s|}$  をより  $\text{Im}(w) > 0$  の極に注目すればよくて, (B.14) の第 2 項の寄与を無視できて

$$\begin{aligned}I_{++} &= \frac{u_+ u_+^\dagger}{4\pi} \left( \frac{1}{ia - iM} \int_{-\infty}^\infty d\omega \frac{e^{i\omega|s|}}{\omega - ia} + \frac{2iM}{-M^2 + a^2} \int_{-\infty}^\infty d\omega \frac{e^{i\omega|s|}}{\omega - iM} \right) \\ &= \frac{u_+ u_+^\dagger}{4\pi} \left( \frac{1}{ia - iM} 2\pi i e^{-a|s|} + \frac{2iM}{-M^2 + a^2} 2\pi i e^{-M|s|} \right) \\ &= \frac{u_+ u_+^\dagger}{2} \left( \frac{e^{-\sqrt{p^2 + M^2}|s|}}{\sqrt{p^2 + M^2} - M} - \frac{2M}{p^2} e^{-M|s|} \right).\end{aligned}$$

よって  $\tilde{G}(p, s)$  の  $(+, +)$  成分は, 上の第 2 項と edge-mode の寄与が相殺して

$$\tilde{G}_{++}(p, s) = \frac{1}{2} \frac{e^{-\sqrt{p^2 + M^2}|s|}}{\sqrt{p^2 + M^2} - M} \quad (\text{B.15})$$

のようになる.  $F$  の  $(+, +)$  成分は

$$G_{++} = \frac{1}{2} \int \frac{d^{2n-1}p}{(2\pi)^{2n-1}} \frac{e^{-\sqrt{p^2 + M^2}|s|}}{\sqrt{p^2 + M^2} - M} e^{ip \cdot x} \quad (\text{B.16})$$

$$= \int \frac{d^{2n-1}p}{(2\pi)^{2n-1}} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\sqrt{p^2 + M^2}}{\sqrt{p^2 + M^2} - M} \frac{e^{ip \cdot x} e^{i\omega s}}{p^2 + \omega^2 + M^2} \quad (\text{B.17})$$

となる。このとき (E.1) を用いて  $e^{-\sqrt{p^2+M^2}}$  を処理した。まず (B.17) の  $\frac{\sqrt{p^2+M^2}}{\sqrt{p^2+M^2-M}}$  の部分を無視して積分を実行する。(E.2),(E.3) を用いると

$$\begin{aligned}
H &:= \int \frac{d^{2n-1}p}{(2\pi)^{2n-1}} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{ip \cdot x} e^{i\omega s}}{p^2 + \omega^2 + M^2} \\
&= \int dt \int \frac{d^{2n-1}p}{(2\pi)^{2n-1}} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{dM'}{2\pi} \frac{e^{ip \cdot x} e^{i\omega s}}{p^2 + \omega^2 + (M')^2} e^{iM't} e^{-iMt} \\
&= \frac{1}{(2n-1)\text{vol}(S^{2n})} \int dt \frac{e^{-iMt}}{(x^2 + t^2 + s^2)^{n-\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{1}{(2n-1)\text{vol}(S^{2n})} \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(n-\frac{1}{2})} \left(\frac{M}{2}\right)^{n-1} \frac{K_{n-1}(M\sqrt{x^2+s^2})}{\sqrt{x^2+s^2}^{n-1}} \\
&= \frac{1}{\text{vol}(S^{2n})} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(n+\frac{1}{2})} \left(\frac{M}{2}\right)^{n-1} \frac{K_{n-1}(M\sqrt{x^2+s^2})}{\sqrt{x^2+s^2}^{n-1}} \tag{B.18}
\end{aligned}$$

となる。 $K_{n-1}$  は第 2 種変形 Bessel 関数である。

このとき  $H$  は

$$(-\partial_s^2 - \partial_x^2 + M^2)H = \delta^{2n-1}(x)\delta(s) \tag{B.19}$$

を満たしていることに注意せよ。よって  $H$  は  $2n$  次元 Euclid 空間のスカラー場の伝播関数である。 $G_{++}$  と  $H$  の関係は (B.16) から、

$$\left(\frac{\partial}{\partial|s|} + M\right)G_{++} = \frac{\partial}{\partial|s|}H \tag{B.20}$$

であることがわかり、 $G_{++} = e^{-M|s|}g$  とすれば  $g$  は

$$\frac{\partial}{\partial|s|}g = e^{M|s|} \frac{\partial}{\partial|s|}H \tag{B.21}$$

を満たすことがわかり、 $|s|, |x| \rightarrow \infty$  で  $g \rightarrow 0$  を仮定すれば

$$g = - \int_{|s|}^{\infty} ds' e^{Ms'} \frac{\partial}{\partial s'} H \tag{B.22}$$

$$\therefore G_{++} = H + M e^{-M|s|} \int_{|s|}^{\infty} ds' e^{Ms'} H(x, s'). \tag{B.23}$$

この積分は  $n > 1$  では収束するため、数値計算はしやす形になっている。そして  $s$  方向には指数関数的に減少し、さらに下の議論から  $x$  方向に冪で減衰することがわかる。

$x$  が十分大きい時は  $H \sim \frac{e^{-M\sqrt{x^2+s^2}}}{\sqrt{x^2+s^2}^{n-1/2}}$  のようになり  $s \rightarrow 0$  を考えると積分の部分は

$$\int_0^{\infty} ds' e^{Ms'} H(x, s') \sim \int_0^{\infty} ds' \frac{e^{-M\sqrt{x^2+(s')^2}+Ms'}}{\sqrt{x^2+(s')^2}^{n-\frac{1}{2}}}. \tag{B.24}$$

$t = \sqrt{x^2+s^2} - s$  とおけば、 $s = 0$  の時  $t = |x|$  で  $s \rightarrow \infty$  で  $t \rightarrow 0$  であり、さらに

$$dt = \frac{-t}{\sqrt{x^2+s^2}} ds, \quad \sqrt{x^2+s^2} = \frac{t^2+s^2}{2t} \tag{B.25}$$

だから、積分は

$$\int_0^\infty ds' \frac{e^{-M\sqrt{x^2+(s')^2}+Ms'}}{\sqrt{x^2+(s')^2}^{2n-\frac{1}{2}}} = \int_0^{|x|} dt e^{-Mt} \frac{(2t)^{n-\frac{3}{2}}}{t(t^2+x^2)^{n-\frac{3}{2}}} \quad (\text{B.26})$$

のようになる。ここで  $t \leq |x|$  だから

$$\frac{1}{t^2+x^2} = \frac{1}{x^2} \frac{1}{1+\frac{t^2}{x^2}} = \frac{1}{x^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(-\frac{t^2}{x^2}\right)^m \quad (\text{B.27})$$

とすれば積分を厳密に計算できて、 $M$  が十分大きい時は

$$\int_0^{|x|} dt e^{-Mt} \frac{(2t)^{n-\frac{3}{2}}}{t(t^2+x^2)^{n-\frac{3}{2}}} \sim \left(\frac{1}{x^2}\right)^{n-\frac{3}{2}} \quad (\text{B.28})$$

となる。よって  $s=0$ ,  $x \gg 1$  では

$$G_{++}(x, 0) \sim \left(\frac{1}{x^2}\right)^{n-\frac{3}{2}} = \frac{1}{x^{2n-3}} \quad (\text{B.29})$$

のように振舞う。よってドメインウォール上で  $2n-1$  次元 massless 粒子のように伝播することがわかった。これで  $G_{++}$  の計算が終わった。

次に  $G_{--}$  を計算する。同様の議論で

$$I_{--} := \int_0^\infty d\omega \frac{\varphi_{-,e}^\omega(s) (\varphi_{-,e}^\omega(0))^\dagger}{p^2 + \omega^2 + M^2} \quad (\text{B.30})$$

$$= \frac{u_- u_-^\dagger}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty d\omega \frac{2\omega(\omega - iM) e^{i\omega|s|}}{(\omega^2 + p^2 + M^2)(\omega^2 + M^2)} \quad (\text{B.31})$$

となり、 $a^2 = p^2 + M^2$ ,  $a > 0$  において被積分関数を部分分数分解すれば

$$\frac{2\omega(\omega - iM)}{(\omega^2 + p^2 + M^2)(\omega^2 + M^2)} = \frac{2\omega}{(\omega - ia)(\omega + ia)(\omega + iM)} \quad (\text{B.32})$$

$$= \frac{1}{\omega - ia} + \frac{1}{\omega + ia} + \frac{-2iM}{\omega + iM}. \quad (\text{B.33})$$

よって第1項を計算すればよく、

$$I_{--} = \frac{u_- u_-^\dagger}{2} \frac{e^{-\sqrt{p^2+M^2}|s|}}{\sqrt{p^2+M^2}+M}$$

をえるから、 $F(x, s)$  の  $(-, -)$  成分は

$$G_{--} = \int \frac{d^{2n-1}p}{(2\pi)^{2n-1}} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\sqrt{p^2+M^2}}{\sqrt{p^2+M^2}+M} \frac{e^{ip \cdot x} e^{i\omega s}}{p^2 + \omega^2 + M^2} \quad (\text{B.34})$$

$$= H - M e^{+M|s|} \int_{|s|}^\infty ds' e^{-Ms'} H(x, s') \quad (\text{B.35})$$

となり  $x, s$  方向について指数関数的に減少する。これによって

$$G(x, s) = \left(u_+ u_+^\dagger G_{++}(x, s) + u_- u_-^\dagger G_{--}(x, s)\right) \otimes 1 \quad (\text{B.36})$$

に  $H_{DW}$  を作用させれば原点  $(0, 0)$  から  $(x, s)$  へのドメインウォールフェルミオンの伝播関数  $F$  が求まる。



### C ドメインウォール $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ のエッジ状態の相関関数

まず,  $M$  が十分大きいという仮定の下で  $\psi^{E,j}$  を規格化する.  $\psi^{E,j}$  は  $r < r_0$  で (5.7) の  $\psi_{r < r_0}^{E,j}$  に,  $r > r_0$  で (5.9) の  $\psi_{r > r_0}^{E,j}$  に比例し, この 2 つが  $r = r_0$  で連続的に接続した関数である.  $\alpha$  を任意の実数として, 変形 Bessel 関数の積分は

$$\int_0^{r_0} dr r I_\nu(\alpha r)^2 = \frac{r_0^2}{2} \left( \left( 1 + \frac{\nu^2}{\alpha^2 r_0^2} \right) I_\nu(\alpha r_0)^2 - (I_\nu(\alpha r_0)')^2 \right) \quad (\text{C.1})$$

となる.  $\alpha$  が十分大きければ, Bessel 関数の漸近形を用いて

$$\int_0^{r_0} dr r I_\nu(\alpha r)^2 \simeq \frac{e^{2\alpha r_0}}{8\pi\alpha^2} \quad (\text{C.2})$$

のように近似される. 同様に

$$\int_{r_0}^\infty dr r K_\nu(\alpha r)^2 = -\frac{r_0^2}{2} \left( \left( 1 + \frac{\nu^2}{\alpha^2 r_0^2} \right) K_\nu(\alpha r_0)^2 - (K_\nu(\alpha r_0)')^2 \right) \simeq \frac{\pi e^{-2\alpha r_0}}{8\alpha^2} \quad (\text{C.3})$$

が得られる.

連続の条件から,  $M$  が十分大きい時の接続係数  $c$  は (5.10) によって定義され,  $c \simeq \frac{1}{\pi} e^{2\sqrt{M^2 - E^2}r}$  である. したがって

$$\begin{aligned} \int dx^1 dx^2 (\psi^{E,j})^\dagger \psi^{E,j} &\simeq 2\pi \left[ \frac{e^{2Mr_0}}{8\pi M^2} (2M^2) + \frac{1}{\pi^2} e^{4Mr} \frac{\pi e^{-2\alpha r_0}}{8\alpha^2} (2M^2) \right] \\ &= 2\pi \frac{e^{2Mr_0}}{8\pi} \times 4 = e^{2Mr_0} \end{aligned}$$

を得る. よって規格化された波動関数を  $\tilde{\psi}^{E,j}$  とすれば,  $r = r_0$  の周りで

$$\tilde{\psi}^{E,j} \simeq \begin{cases} \frac{M}{\sqrt{2\pi r M}} e^{-Mr_0} \begin{pmatrix} e^{Mr} e^{i(j-\frac{1}{2})\theta} \\ e^{Mr} e^{i(j+\frac{1}{2})\theta} \end{pmatrix} & (r < r_0) \\ \frac{M}{\sqrt{2\pi r M}} e^{Mr_0} \begin{pmatrix} e^{-Mr} e^{i(j-\frac{1}{2})\theta} \\ e^{-Mr} e^{i(j+\frac{1}{2})\theta} \end{pmatrix} & (r > r_0) \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

のように振る舞う.  $r < r_0$  の領域で  $1/\sqrt{r}$  が正則でないように見えるが,  $r = 0$  でこの近似は有効でないので  $\tilde{\psi}$  は原点でも正則である.

これを用いてエッジ状態の相関関数  $F_{\text{edge}}$  を調べると

$$F_{\text{edge}}(r_0, \theta : r_0, 0) = \sum_j \frac{1}{E} \tilde{\psi}^{E,j}(r_0, \theta) (\tilde{\psi}^{E,j}(r_0, 0))^\dagger = \frac{M}{2\pi r_0} \sum_j \frac{r_0}{j} \begin{pmatrix} e^{i(j-\frac{1}{2})\theta} \\ e^{i(j+\frac{1}{2})\theta} \end{pmatrix} (1 \ 1). \quad (\text{C.5})$$

ここで  $j$  は  $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \dots$  をとる. この無限和は

$$\sum_j \frac{1}{j} e^{i(j-\frac{1}{2})\theta} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n + \frac{1}{2}} e^{in\theta} = \pi i \text{sign}(\theta) e^{-i\frac{\theta}{2}} \quad (\text{C.6})$$

のようになるから,

$$F_{\text{edge}}(r_0, \theta : r_0, 0) = \frac{M}{2} i \text{sign}(\theta) \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} \\ e^{+i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} (1 \ 1) = \frac{M}{2} i \text{sign}(\theta) \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & e^{-i\frac{\theta}{2}} \\ e^{i\frac{\theta}{2}} & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.7})$$

## D ドメインウォール $S^1 \times \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ のエッジ状態の相関関数

$M$  が十分大きい時の (5.26) を求める. (C.4) を用いれば,

$$\begin{aligned} G_{\text{edge}}(r_0, \theta, x_3, x_4; r_0, 0, 0, 0) &:= \int \frac{dp_3}{2\pi} \frac{dp_4}{2\pi} \sum_j \frac{e^{ip_3 x_3} e^{ip_4 x_4}}{\lambda^2 + p_3^2 + p_4^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \tilde{\psi}^{\lambda, j}(r_0, \theta) (\tilde{\psi}^{\lambda, j}(r_0, 0))^\dagger \\ &\simeq \int \frac{dp_3}{2\pi} \frac{dp_4}{2\pi} \sum_j \frac{e^{ip_3 x_3} e^{ip_4 x_4}}{\lambda^2 + p_3^2 + p_4^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \frac{M}{2\pi r_0} \begin{pmatrix} e^{i(j-\frac{1}{2})\theta} \\ e^{i(j+\frac{1}{2})\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ここで,  $\tilde{\psi}$  はエッジ状態だから,  $\lambda = \frac{j}{r_0}$  であり,  $\sum_j$  を先に計算する.  $p = \sqrt{p_3^2 + p_4^2}$  として,  $j = \pm\frac{1}{2}, \dots$  なので  $j = n + \frac{1}{2}$ , ( $n \in \mathbb{Z}$ ) とすれば,

$$\sum_j \frac{1}{\lambda^2 + p^2} e^{i(j-\frac{1}{2})\theta} = \sum_n \frac{r_0^2}{(n + \frac{1}{2})^2 + r_0^2 p^2} e^{in\theta} \quad (\text{D.1})$$

となる. Fourier 係数の形からこの関数は  $e^{-i\frac{\theta}{2}} e^{-r_0 p |\theta|}$  に近い形となるはずである. そこでこれの Fourier 係数を求めると

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{-in\theta} e^{-i\frac{\theta}{2}} e^{-r_0 p |\theta|} = \frac{1}{(n + \frac{1}{2})^2 + r_0^2 p^2} \left( 2r_0 p + 2 \left( n + \frac{1}{2} \right) e^{-r_0 p \pi} (-1)^n \right) \quad (\text{D.2})$$

$$\therefore \sum_n \frac{e^{in\theta}}{(n + \frac{1}{2})^2 + r_0^2 p^2} \left( 1 + \frac{n + \frac{1}{2}}{r_0 p} e^{-r_0 p \pi} (-1)^n \right) = \frac{2\pi}{2r_0 p} e^{-i\frac{\theta}{2}} e^{-r_0 p |\theta|} \quad (\text{D.3})$$

が得られる. これを用いれば,

$$\begin{aligned} &\sum_n \frac{e^{in\theta}}{(n + \frac{1}{2})^2 + r_0^2 p^2} \\ &= \sum_n \frac{e^{in\theta}}{(n + \frac{1}{2})^2 + r_0^2 p^2} \left( 1 + \frac{n + \frac{1}{2}}{r_0 p} e^{-r_0 p \pi} (-1)^n - \frac{n + \frac{1}{2}}{r_0 p} e^{-r_0 p \pi} (-1)^n \right) \\ &= \frac{\pi}{r_0 p} e^{-i\frac{\theta}{2}} e^{-r_0 p |\theta|} + \sum_n \frac{e^{in\theta}}{(n + \frac{1}{2})^2 + r_0^2 p^2} \frac{n + \frac{1}{2}}{-r_0 p} e^{-r_0 p \pi} (-1)^n \\ &= \frac{\pi}{r_0 p} e^{-i\frac{\theta}{2}} e^{-r_0 p |\theta|} + e^{-2r_0 p \pi} \sum_n \frac{e^{in\theta}}{(n + \frac{1}{2})^2 + r_0^2 p^2} \left( \frac{n + \frac{1}{2}}{-r_0 p} e^{r_0 p \pi} (-1)^n + 1 - 1 \right) \\ &= \frac{\pi}{r_0 p} e^{-i\frac{\theta}{2}} e^{-r_0 p |\theta|} + e^{-2r_0 p \pi} \frac{\pi}{-r_0 p} e^{-i\frac{\theta}{2}} e^{+r_0 p |\theta|} - e^{-2r_0 p \pi} \sum_n \frac{e^{in\theta}}{(n + \frac{1}{2})^2 + r_0^2 p^2}. \end{aligned}$$

よって

$$(1 + e^{-2r_0 p \pi}) \sum_n \frac{e^{in\theta}}{(n + \frac{1}{2})^2 + r_0^2 p^2} = \frac{\pi}{r_0 p} e^{-i\frac{\theta}{2}} (e^{-r_0 p |\theta|} - e^{-2r_0 p \pi} e^{+r_0 p |\theta|})$$

を得る. 左辺の  $(1 + e^{-2r_0 p \pi})$  を移項すれば

$$\begin{aligned} \sum_n \frac{e^{in\theta}}{(n + \frac{1}{2})^2 + r_0^2 p^2} &= \frac{\pi}{r_0 p} e^{-i\frac{\theta}{2}} \frac{e^{-r_0 p |\theta|} - e^{-2r_0 p \pi} e^{+r_0 p |\theta|}}{1 + e^{-2r_0 p \pi}} \\ &= \frac{\pi}{r_0 p} e^{-i\frac{\theta}{2}} \frac{\sinh(r_0 p (\pi - |\theta|))}{\cosh(r_0 p \pi)} \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

となる。したがって  $x^3 = x^4 = 0$  での相関関数は

$$G_{\text{edge}} \simeq \int \frac{dp_3}{2\pi} \frac{dp_4}{2\pi} \frac{\pi M}{2\pi p} \frac{\sinh(pr_0(\pi - |\theta|))}{\cosh(pr_0\pi)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & e^{-i\frac{\theta}{2}} \\ e^{+i\frac{\theta}{2}} & e^{+i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \quad (\text{D.5})$$

となる。ここでディガンマ関数  $\psi$

$$\psi(z) := \int_0^\infty dt \left( \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}} \right) \quad (\text{D.6})$$

を導入すれば,

$$\int_0^\infty dt \frac{e^{-\lambda t}}{\cosh t} = \frac{1}{2} \left( \psi\left(\frac{\lambda+3}{4}\right) - \psi\left(\frac{\lambda+1}{4}\right) \right) \quad (\lambda > -1) \quad (\text{D.7})$$

だから,  $0 < |\theta| < \pi$  で

$$\int_0^\infty dp \frac{\sinh(r_0 p(\pi - |\theta|))}{\cosh(r_0 p\pi)} = \frac{1}{4\pi r_0} \left[ \psi\left(\frac{2\pi + |\theta|}{4\pi}\right) + \psi\left(\frac{2\pi - |\theta|}{4\pi}\right) - \psi\left(\frac{|\theta|}{4\pi}\right) - \psi\left(\frac{4\pi - |\theta|}{4\pi}\right) \right]. \quad (\text{D.8})$$

ディガンマ関数の性質  $\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}$  を用いると

$$\psi\left(\frac{|\theta|}{4\pi}\right) = \psi\left(\frac{|\theta|}{4\pi} + 1\right) - \frac{4\pi}{|\theta|} \quad (\text{D.9})$$

となるから  $x^3 = x^4 = 0$  での相関関数は

$$G_{\text{edge}} \simeq \frac{M}{4\pi r_0} \left[ \frac{1}{|\theta|} + \frac{1}{4\pi} \left( \psi\left(\frac{2\pi + \theta}{4\pi}\right) + \psi\left(\frac{2\pi - \theta}{4\pi}\right) - \psi\left(\frac{4\pi + \theta}{4\pi}\right) - \psi\left(\frac{4\pi - \theta}{4\pi}\right) \right) \right] \\ \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & e^{-i\frac{\theta}{2}} \\ e^{+i\frac{\theta}{2}} & e^{+i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}$$

となる。

また (5.26) の  $x^3, x^4$  方向の依存性をみる。  $p_3, p_4$  での積分を先に実行すれば,

$$G_{\text{edge}}(r_0, \theta, x_3, x_4; r_0, 0, 0, 0) \\ \simeq \int \frac{dp_3}{2\pi} \frac{dp_4}{2\pi} \sum_j \frac{e^{ip_3 x^3} e^{ip_4 x^4}}{\lambda^2 + p_3^2 + p_4^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \frac{M}{2\pi r_0} \begin{pmatrix} e^{i(j-\frac{1}{2})\theta} \\ e^{i(j+\frac{1}{2})\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \\ = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2} + 1) \text{vol}(S^2)} \sum_j K_0\left(\frac{|j|}{r_0} \sqrt{(x^3)^2 + (x^4)^2}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \frac{M}{2\pi r_0} \begin{pmatrix} e^{i(j-\frac{1}{2})\theta} \\ e^{i(j+\frac{1}{2})\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$x^3, x^4$  が十分大きければ

$$G_{\text{edge}} \simeq \frac{2}{4\pi} \sum_j \sqrt{\frac{\pi}{2\frac{|j|}{r_0} \sqrt{(x^3)^2 + (x^4)^2}}} e^{-\frac{|j|}{r_0} \sqrt{(x^3)^2 + (x^4)^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \frac{M}{2\pi r_0} \begin{pmatrix} e^{i(j-\frac{1}{2})\theta} \\ e^{i(j+\frac{1}{2})\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \simeq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{r_0} \sqrt{(x^3)^2 + (x^4)^2}}} e^{-\frac{1}{2r_0} \sqrt{(x^3)^2 + (x^4)^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \frac{M}{2\pi r_0} \begin{pmatrix} 1 + e^{-i\theta} \\ 1 + e^{i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.10})$$

のようになる。ここで  $x^3, x^4$  が十分大きいので  $j = \pm\frac{1}{2}$  の部分の影響が最も大きくなり、他の項を無視できる。

## E Fourier 変換の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ipx}}{p^2 + a^2} \frac{dp}{2\pi} = \frac{e^{-a|x|}}{2a} \quad (\text{E.1})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{p^2} e^{ip \cdot x} = \frac{1}{(d-2) \text{vol}(S^{2n})} \frac{1}{x^{d-2}} \quad (\text{E.2})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-izt} dt}{(t^2 + 1)^{\nu + \frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} K_{\nu}(z) \quad (\text{E.3})$$

## References

- [1] S. L. Adler, *Axial-vector vertex in spinor electrodynamics*, *Phys. Rev.* **177** (1969) 2426.
- [2] J. S. Bell and R. Jackiw, *A pcac puzzle:  $\pi_0 \rightarrow \gamma\gamma$  in the  $\sigma$ -model*, *Il Nuovo Cimento A (1965-1970)* **60** (1969) 47.
- [3] S. Weinberg, *The  $u(1)$  problem*, *Phys. Rev. D* **11** (1975) 3583.
- [4] G. 't Hooft, *Symmetry breaking through bell-jackiw anomalies*, *Phys. Rev. Lett.* **37** (1976) 8.
- [5] C. Callan, R. Dashen and D. Gross, *The structure of the gauge theory vacuum*, *Physics Letters B* **63** (1976) 334 .
- [6] R. Jackiw and C. Rebbi, *Vacuum periodicity in a yang-mills quantum theory*, *Phys. Rev. Lett.* **37** (1976) 172.
- [7] J. Wess and B. Zumino, *Consequences of anomalous ward identities*, *Physics Letters B* **37** (1971) 95 .
- [8] M. F. Atiyah and I. M. Singer, *The index of elliptic operators on compact manifolds*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **69** (1963) 422.
- [9] M. F. Atiyah and I. M. Singer, *The index of elliptic operators: I*, *Annals of Mathematics* **87** (1968) 484.
- [10] M. F. Atiyah and G. B. Segal, *The index of elliptic operators: Ii*, *Annals of Mathematics* **87** (1968) 531.
- [11] M. F. Atiyah and I. M. Singer, *The index of elliptic operators: Iii*, *Annals of Mathematics* **87** (1968) 546.
- [12] K. Fujikawa, *Path-integral measure for gauge-invariant fermion theories*, *Phys. Rev. Lett.* **42** (1979) 1195.
- [13] S. Ryu, J. E. Moore and A. W. W. Ludwig, *Electromagnetic and gravitational responses and anomalies in topological insulators and superconductors*, *Phys. Rev. B* **85** (2012) 045104.
- [14] C. Callan and J. Harvey, *Anomalies and fermion zero modes on strings and domain walls*, *Nuclear Physics B* **250** (1985) 427 .
- [15] L. Rosenberg, *Electromagnetic interactions of neutrinos*, *Phys. Rev.* **129** (1963) 2786.
- [16] L. Alvarez-Gaumé and E. Witten, *Gravitational anomalies*, *Nuclear Physics B* **234** (1984) 269 .

- [17] M. F. Atiyah and I. M. Singer, *Dirac operators coupled to vector potentials*, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **81** (1984) 2597 [<https://www.pnas.org/content/81/8/2597.full.pdf>].
- [18] L. Alvarez-Gaumé and P. Ginsparg, *The topological meaning of non-abelian anomalies*, *Nuclear Physics B* **243** (1984) 449 .
- [19] L. Alvarez-Gaumé and P. Ginsparg, *The structure of gauge and gravitational anomalies*, *Annals of Physics* **161** (1985) 423 .
- [20] A. J. Niemi and G. W. Semenoff, *Axial-anomaly-induced fermion fractionization and effective gauge-theory actions in odd-dimensional space-times*, *Phys. Rev. Lett.* **51** (1983) 2077.
- [21] A. N. Redlich, *Gauge noninvariance and parity nonconservation of three-dimensional fermions*, *Phys. Rev. Lett.* **52** (1984) 18.
- [22] L. Alvarez-Gaumé, S. Della Pietra and G. Moore, *Anomalies and odd dimensions*, *Annals of Physics* **163** (1985) 288 .
- [23] D. B. Kaplan, *A method for simulating chiral fermions on the lattice*, *Physics Letters B* **288** (1992) 342–347.
- [24] Y. Shamir, *Chiral fermions from lattice boundaries*, *Nuclear Physics B* **406** (1993) 90 .
- [25] E. Witten, *Fermion path integrals and topological phases*, *Rev. Mod. Phys.* **88** (2016) 035001.
- [26] H. Fukaya, T. Onogi and S. Yamaguchi, *Atiyah-patodi-singer index from the domain-wall fermion dirac operator*, *Physical Review D* **96** (2017) .
- [27] H. Fukaya, M. Furuta, S. Matsuo, T. Onogi, S. Yamaguchi and M. Yamashita, *A physicist-friendly reformulation of the atiyah-patodi-singer index and its mathematical justification*, 2020.
- [28] H. Fukaya, N. Kawai, Y. Matsuki, M. Mori, K. Nakayama, T. Onogi et al., *The atiyah-patodi-singer index on a lattice*, *Progress of Theoretical and Experimental Physics* **2020** (2020) .
- [29] X. Dai, T. L. Hughes, X.-L. Qi, Z. Fang and S.-C. Zhang, *Helical edge and surface states in hgte quantum wells and bulk insulators*, *Phys. Rev. B* **77** (2008) 125319.
- [30] A. M. Essin, J. E. Moore and D. Vanderbilt, *Magnetoelectric polarizability and axion electrodynamics in crystalline insulators*, *Phys. Rev. Lett.* **102** (2009) 146805.
- [31] M. F. Atiyah, V. K. Patodi and I. M. Singer, *Spectral asymmetry and riemannian geometry. i*, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **77** (1975) 43–69.
- [32] M. F. Atiyah, V. K. Patodi and I. M. Singer, *Spectral asymmetry and riemannian geometry. ii*, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **78** (1975) 405–432.
- [33] M. F. Atiyah, V. K. Patodi and I. M. Singer, *Spectral asymmetry and riemannian geometry. iii*, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **79** (1976) 71–99.
- [34] J. Nash, *The imbedding problem for riemannian manifolds*, *Annals of Mathematics* **63** (1956) 20.
- [35] M. L. Gromov and V. A. Rokhlin, *Embeddings and immersions in riemannian geometry*, *Russian Mathematical Surveys* **25** (1970) 1.
- [36] E. Witten, *Global gravitational anomalies*, *Communications in Mathematical Physics* **100** (1985) 197.

- [37] F. Hirzebruch, *On steenrod's reduced powers, the index of inertia, and the todd genus*, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* **39** (1953) 951.
- [38] F. Hirzebruch, *Arithmetic genera and the theorem of riemann-roch for algebraic varieties*, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* **40** (1954) 110.
- [39] M. B. Einhorn and D. R. T. Jones, *Comment on fujikawa's path-integral derivation of the chiral anomaly*, *Phys. Rev. D* **29** (1984) 331.
- [40] A. P. Balachandran, G. Marmo, V. P. Nair and C. G. Trahern, *Nonperturbative proof of the non-abelian anomalies*, *Phys. Rev. D* **25** (1982) 2713.
- [41] K. Fujikawa, *Evaluation of the chiral anomaly in gauge theories with  $\gamma_5$  couplings*, *Phys. Rev. D* **29** (1984) 285.
- [42] A. Andrianov and L. Bonora, *Finite-mode regularization of the fermion functional integral*, *Nuclear Physics B* **233** (1984) 232.
- [43] D. J. Gross and R. Jackiw, *Effect of anomalies on quasi-renormalizable theories*, *Phys. Rev. D* **6** (1972) 477.
- [44] S. L. Adler and W. A. Bardeen, *Absence of higher-order corrections in the anomalous axial-vector divergence equation*, *Phys. Rev.* **182** (1969) 1517.
- [45] M. Atiyah, *The signature of fibre-bundles*, *Global analysis (papers in Honor of K. Kodaira)* (1969) 73.
- [46] K.-I. Imura, Y. Takane and A. Tanaka, *Spin berry phase in anisotropic topological insulators*, *Phys. Rev. B* **84** (2011) 195406.
- [47] M. Governale, B. Bhandari, F. Taddei, K.-I. Imura and U. Zülicke, *Finite-size effects in cylindrical topological insulators*, *New Journal of Physics* **22** (2020) 063042.