数学科の M1 向けに学部の古典物理を書き直し特殊相対論を導入する

尾田欣也 *

〒167-8585 東京都 杉並区 善福寺 2-6-1
東京女子大学 数理科学科 情報理学専攻/大学院理学研究科 数学専攻

2021 年 7 月 5 日

概要

数学科の M1 むけに 3 コマなんか物理の話をせよ、という講義のノート。数学科の学生が学部 1 、2 年生で習う初歩的な力学と電磁気学の知識を前提とし、数学科の学生に馴染みのある Lie 群の言葉を用いて、ガリレイ対称性からローレンツ対称性、ポワンカレ対称性を議論し、特殊相対論の導入まで行きます。付録に電磁気を微分形式の言葉で書く、というのも載せました。

* 電子メール: odakin@lab.twcu.ac.jp

目次

2014 年に大阪大学で行った数学科の M1 向けの 3 コマの講義のノートが発掘されたので投稿します。たぶんちょっと数学が好きな物理学科の学部生にも、それなりに面白いんじゃないかと思います。素粒子論の研究者であれば誰でも知っているようなことしか書かれていませんが、こういうのを纏まった形で書いた文章というのはあまり無い気がするので公開しておきます。**太文字**は専門用語なので、知らなかったらぐぐるかウィキペディアでも見てください、というつもり。7 年前の文章なので文体がなんか今の私と異なっていますが、勢い重視でそのまま弄っていません。(最後の「まとめ」だけは今回たしました。)

1　導入

私は素粒子論というのをやっています。どんどん短い距離、短い時間、高いエネルギーを突き詰めていったときにこの世がどう記述されるか、を扱う学問です。

人類はどこまでこの世を理解できているか？ 今のところこの世には 4 つの力があることが知られています:

- **強い力**(strong force)、
- **弱い力**(weak force)、
- **電磁気力**(electromagnetic force)、
- **重力**(gravity)

です。電磁気力と重力は馴染みがあると思います。強い力は**原子核**(nucleus)の内部にある**核子**(nucleon)[*1] を構成する**クォーク**(quark)の間に働く力で、弱い力は原子核の**ベータ崩壊**(beta decay)を引き起こす力です。強い力と弱い力をふだん感じないのは、前者は**閉じ込め**(confinement)、後者は**対称性の自発的破れ**(spontaneous symmetry breaking)という機構によって、どちらも僕達がふだん見ているような長さスケールまでは到達できないようになっている、非常に短距離でしか働かない力だからです。現在の素粒子の**標準模型**(Standard Model)においては、弱い相互作用と電磁相互作用は**電弱相互作用**(electroweak interaction)というものに統一され、さらに**量子異常**(anomaly)というものを通じて強い相互作用とも統一的に扱われます。[*2] あとでもうちょっと言うけど重力だけ鬼っ子で一緒に扱えません。

我々はどこまでこの世を記述することに成功しているのか？ 現代の物理のあつかう長さスケールをまとめたのが表 1。[*3] 素粒子論ではふつう**自然単位系**(natural units)を用いていろいろな次元を換算します。その準備としての物理定数の値:

- **光速**(speed of light): $c := 299,792,458\,\mathrm{m/s} \simeq 3\times 10^8\,\mathrm{m/s}$。
- **プランク定数**(Planck's constant): $\hbar \simeq 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$。ふつうは $\hbar c \simeq 0.2\,\mathrm{GeV\,fm}$ で換算します。($\mathrm{eV} = 1.6\times 10^{-19}\,\mathrm{J}$。)
- (**ボルツマン定数**(Boltzmann constant): $k_B \simeq 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$。)

自然単位系では $\hbar = c\ (= k_B) = 1$ と置きます。そうすると、エネルギー、運動量、質量、時間$^{-1}$、(温度) がすべて 長さ$^{-1}$ の次元で書けます:

$$\mathrm{s} \simeq 3\times 10^8\,\mathrm{m}、\qquad \mathrm{GeV} \simeq \frac{1}{0.2\,\mathrm{fm}}。\qquad (\mathrm{eV} \simeq 10^4\,\mathrm{K}。) \tag{1}$$

[*1] **陽子**(proton)と**中性子**(neutron)をまとめて核子と呼びます。

[*2] 素粒子屋はふつうは力のことを(特に**場の理論**(field theory)で扱うときには)**相互作用**(interaction)と呼びますが同じものです。

[*3] 上のほう分かりにくいですが、アンドロメダ銀河を主とし我々の銀河系を従とする局部銀河群が、**おとめ座銀河団**(Virgo Cluster)を主とするおとめ座超銀河団に属している、という状況。pc は**パーセク**(parsec)という単位で、地球からの**年周視差**(stellar parallax)が 1 **秒角**(arc second) $= (1/3600)$ 度 となる距離。

表 1　長さスケール。ここでは、$\sim$ は「だいたいいっしょ」「(10 進法で) **桁**(order) ぐらいはあってる」という意味の等号とし、$\simeq$ は「最初の桁の値ぐらいはあってる」という意味とする。10 というのは「人間の指の数」という、あまり物理的な意味のない量ですが、人間が認識するには便利なので 10 進法を使っています。**SI 接頭辞**(SI prefix)については表 2 参照。

	10^{48}–10^{52} m $\sim$ 今見えている宇宙と同じような宇宙が広がっている距離 (宇宙のインフレーションを前提として)
	10^{26} m $=$ 100 Ym $\simeq$ 100 億光年 $\sim$ **ハッブル長さ**(Hubble length) $\sim$ 観測可能な宇宙の果て
10^{24} m $=$ Ym	$\simeq$ 1 億光年 $\sim$ 我々の属する**おとめ座超銀河団**(Virgo Supercluster)の大きさ
	10^{23} m $=$ 100 Zm $=$ 0.1 Ym $\simeq$ 1 千万光年 $\sim$ 我々の属する**局部銀河群**(Local Group)の大きさ
	Mpc $\sim 10^{22}$ m $=$ 10 Zm $=$ 0.01 Ym $\simeq$ 100 万光年 $\sim$ アンドロメダ銀河までの距離
10^{21} m $=$ Zm	$\simeq$ 10 万光年 $\sim$ 我々の銀河系の大きさ
10^{18} m $=$ Em	
	10^{16} m $=$ 10 Pm $\simeq$ 光年 $\simeq$ 0.3 pc $\sim$ 最寄りの恒星までの距離
10^{15} m $=$ Pm	
10^{12} m $=$ Tm	$\simeq$ 10 天文単位 $\sim$ 天王星や冥王星までの距離
	10^{11} m $=$ 100 Gm $=$ 0.1 Tm $\simeq$ 天文単位 $=$ 太陽までの距離
10^{9} m $=$ Gm	$\sim$ 太陽の大きさ
	10^{7} m $=$ 10 Mm $\sim$ 地球の大きさ
10^{6} m $=$ Mm	
10^{3} m $=$ km	$\sim$ 山の大きさ
10^{0} m $=$ m	$\sim$ 人の大きさ
10^{-3} m $=$ mm	
	10^{-5} m $=$ 10 μm $\sim$ 細胞の大きさ
10^{-6} m $=$ μm	
	10^{-7} m $=$ 100 nm $=$ 0.1 μm $\sim$ ウイルスの大きさ
	10^{-8} m $=$ 10 nm $=$ 0.01 μm $\sim$ 高分子の大きさ $\sim$ 2014 年現在の IC の加工寸法
10^{-9} m $=$ nm	
	10^{-11}–10^{-10} m $=$ 10–100 pm $=$ 0.01–0.1 nm $\sim$ 原子の大きさ
10^{-12} m $=$ pm	
10^{-15} m $=$ fm	$\sim$ **核子**(nuculeon) の大きさ $\sim$ **原子核**(nucleus)の大きさ
10^{-18} m $=$ am	$\sim$ 2014 年現在、人類が LHC 実験で直接探索できた最小の長さ
	(この長さより下は直接検証されていない仮想的なスケール)
10^{-21} m $=$ zm	
10^{-24} m $=$ ym	
	10^{-29} m $\sim$ **宇宙のインフレーション**(cosmic inflation)の長さスケール？
	10^{-32} m $\sim$ **大統一理論**(grand unified theory) (GUT) の長さスケール？
	10^{-33} m $\sim$ **超弦理論**(superstring thoery) の長さスケール？
	10^{-34} m $\sim$ **プランク長**(Planck length) $\sim$ **量子重力**(quantum gravity) の効いてくるスケール？

表 2　SI 接頭辞

接頭辞	読み方	英語の読み方	意味
Y	ヨタ	yotta	10^{24}
Z	ゼタ	zetta	10^{21}
E	エクサ	exa	10^{18}
P	ペタ	peta	10^{15}
T	テラ	tera	10^{12}
G	ギガ	giga	10^{9}
M	メガ	mega	10^{6}
k	キロ	kilo	10^{3}
m	ミリ	milli	10^{-3}
μ	マイクロ	micro	10^{-6}
n	ナノ	nano	10^{-9}
p	ピコ	pico	10^{-12}
f	フェムト	femto	10^{-15}
a	アト	atto	10^{-18}
z	ゼプト	zepto	10^{-21}
y	ヨクト	yocto	10^{-24}

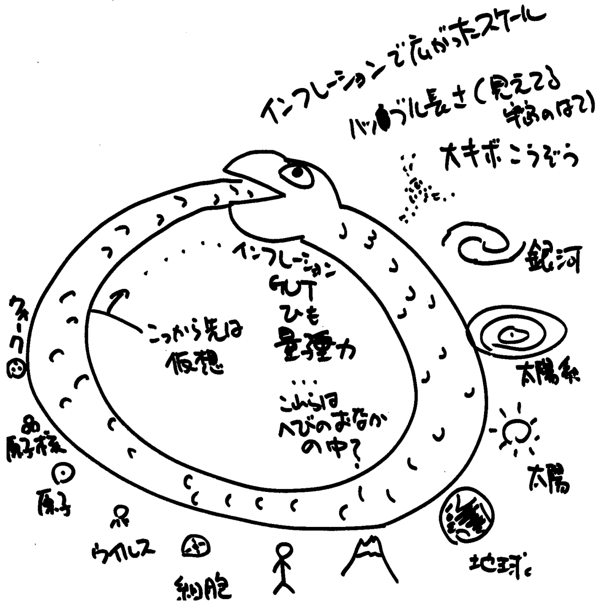

図 1　ウロボロスの蛇

表 1 の仮想的なスケール——宇宙のインフレーション、大統一理論、超弦理論のスケール、プランク長——は、いずれもこの換算により、エネルギーや質量のスケールを長さに換算したものです。[*4] めちゃくちゃ大きな長さとめちゃくちゃ小さな長さの両方にインフレーションのスケールが出てくるのが面白いですね。この状況を表したのが図 1 の、**ウロボロス**(Uroboros)と呼ばれる、自分の尻尾を食べている蛇の絵です。

2　ニュートン力学（非相対論的古典論）

2.1　ニュートン重力におけるガリレイ群

デカルト座標(Cartesian coordinates) x_1、x_2、x_3 をとり、**位置ベクトル**(position vector) $\vec{\boldsymbol{r}}$ を気分に応じて成分表示や行列表示で

$$\vec{\boldsymbol{r}} = (x_1,\, x_2,\, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

等々と書く。粒子 A の**質量**(mass)を m_A、位置を $\vec{\boldsymbol{r}}_A$ とするとき、**ニュートン重力**(Newtonian gravity)の下での**運動方程式**(equation of motion)は

$$m_A \frac{\mathrm{d}^2 \vec{\boldsymbol{r}}_A}{\mathrm{d}t^2} = -\sum_{B(\neq A)} G \frac{m_A m_B}{r_{AB}^2} \widehat{\boldsymbol{r}}_{AB}、 \tag{3}$$

ここで G は**ニュートン定数**(Newton's constant)、ベクトルに関しては以下の記法を用いる:

$$\vec{\boldsymbol{r}}_{AB} := \vec{\boldsymbol{r}}_A - \vec{\boldsymbol{r}}_B、\qquad r_{AB} := |\vec{\boldsymbol{r}}_{AB}|、\qquad \widehat{\boldsymbol{r}}_{AB} := \frac{\vec{\boldsymbol{r}}_{AB}}{r_{AB}}、\qquad |\widehat{\boldsymbol{r}}_{AB}| = 1。 \tag{4}$$

この系の持つ**対称性**(symmetry)は以下のとおり。運動方程式 (3) は以下の**変換**(transformation)に対して**不変**(invariant):

- **時間並進**(time translation): 時間軸の原点の平行移動、

$$t \to t' = t + \delta、 \tag{5}$$

  ここで δ は定数。運動方程式 (3) で時間に顕わに依っているのは左辺の微分だけだが、定数 δ は微分からは落ちる。よって不変。

- **空間並進**(spatial translation): 空間座標の原点の平行移動、

$$\vec{\boldsymbol{r}} \to \vec{\boldsymbol{r}}' = \vec{\boldsymbol{r}} + \vec{\boldsymbol{d}}、 \tag{6}$$

  ここで $\vec{\boldsymbol{d}} = (d_1,\, d_2,\, d_3)$ は定数ベクトル。運動方程式 (3) の左辺は微分を含むので定数 $\vec{\boldsymbol{d}}$ は落ちる。右辺はベクトルの差にしか依らないので $\vec{\boldsymbol{d}}$ は引き算で落ちる。よって不変。

[*4] プランク長は好みにより何通りか定義があるが、たとえば（自然単位系 $\hbar = c = 1$ で）

$$\sqrt{32\pi G} \simeq 10^{-34}\,\mathrm{m}、$$

ここで G は**ニュートン定数**(Newton constant)。プランク長より短い距離では量子重力が効いてくる。これより短い距離においては我々の**時空**(spacetime)の認識そのものが成り立たなくなる。そこから先がどうなるのかは、人類はまだ想像すらできない。（ちなみにプランク長は我々の時空がその長さまで 4 次元であり続けるという仮定のもとで出しているが、もっと大きな長さスケールで**余剰次元**(extra dimension)が開くと、量子重力が効いてくる長さスケールは 10^{-34} m よりも大きくなる。）

- **<ruby>時間反転<rt>time reversal</rt></ruby>**:

$$t \to t' = -t。 \tag{7}$$

自明に不変。

- **<ruby>空間反転<rt>space inversion</rt></ruby>**:

$$\vec{\boldsymbol{r}} \to \vec{\boldsymbol{r}}' = -\vec{\boldsymbol{r}}。 \tag{8}$$

この変換は**<ruby>パリティ変換<rt>parity transformation</rt></ruby>**とも呼ばれる。自明に不変。

- **<ruby>空間回転<rt>spatial rotation</rt></ruby>**: 原点周りの回転、

$$\vec{\boldsymbol{r}} \to \vec{\boldsymbol{r}}' = R\vec{\boldsymbol{r}}、 \tag{9}$$

$$r_i \to r_i' = R_{ij} r_j、 \tag{10}$$

ただし R は下にのべる性質をみたす定数行列、また、ローマ文字 $i, j, \cdots = 1, 2, 3$ は空間座標を表す添字——添字のことを「足」と呼んだりもする——とし、同じ添字が 2 度あらわれた時は、特に断りなきときはその添字は 1 から 3 まで足されているものとする:

$$R_{ij} r_j := \sum_{j=1}^{3} R_{ij} r_j、 \tag{11}$$

等々。また、両辺に足されていない添字——浮いた足と呼んだりする——があらわれた時は、その添字が 1、2、3 のすべての場合について式が成り立つ、ということを表している、という約束にする。
原点まわりの回転は原点からの距離を不変に保つので、

$$\vec{\boldsymbol{r}}'^2 = (R\vec{\boldsymbol{r}})^{\mathrm{T}} (R\vec{\boldsymbol{r}}) = \vec{\boldsymbol{r}}^{\mathrm{T}} \left(R^{\mathrm{T}} R\right) \vec{\boldsymbol{r}} \overset{!}{=} \vec{\boldsymbol{r}}^2、 \tag{12}$$

$$r_i'^2 = (R_{ij} r_j)(R_{ik} r_k) = (R_{ij} R_{ik}) r_j r_k \overset{!}{=} r_j^2 \qquad (\text{ここで } r_j^2 := \sum_{j=1}^{3} (r_j)^2 \text{ 等に注意})、 \tag{13}$$

が任意の $\vec{\boldsymbol{r}}$ に対して成り立つために、R は **<ruby>直交行列<rt>orthogonal matrix</rt></ruby>** の条件

$$R^{\mathrm{T}} R = \mathrm{I}、 \tag{14}$$

$$R_{ij} R_{ik} = \delta_{jk}、 \tag{15}$$

を満たさねばならない、ここで T は **<ruby>転置<rt>transpose</rt></ruby>**、I は**<ruby>単位行列<rt>unit matrix</rt></ruby>**、

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases} \tag{16}$$

は**<ruby>クロネッカーのデルタ<rt>Kronecker delta</rt></ruby>**。式 (14) の両辺の **<ruby>行列式<rt>determinant</rt></ruby>** をとると

$$(\det R)^2 = 1、 \qquad\qquad \det R = \pm 1、 \tag{17}$$

であるが、回転 R としては $\det R = 1$ のもののみ取り、$\det R = -1$ の変換は回転と空間反転 (8) を合わせた変換と考えることにする。ということで結局 R は **<ruby>特殊直交群<rt>special orthogonal group</rt></ruby>** $SO(3)$ の **<ruby>基本表現<rt>fundamental representation</rt></ruby>** となっている。

この変換で運動方程式 (3) を回してやると、式 (3) の両辺の左から R を掛けたものに帰着するが、さらにその両辺に左から R^{-1}（$= R^{\mathrm{T}}$）を掛けてやると、たしかに元の形に戻る。

- **ガリレイブースト**(Galilean boost): $\vec{\boldsymbol{r}}'$ 系からみて $\vec{\boldsymbol{r}}$ 系の原点が速度 $\vec{\boldsymbol{v}}$ で等速直線運動してみえるような座標系に移る変換、

$$\vec{\boldsymbol{r}}' = \vec{\boldsymbol{r}} + \vec{\boldsymbol{v}}t。\tag{18}$$

運動方程式 (3) の左辺は時間の二階微分なので $\vec{\boldsymbol{v}}t$ は落ちる。右辺は座標の差だけに依っているので空間並進のときとおなじ事情で落ちる。よって不変。

以上の変換（反転含まず）をまとめると、**ガリレイ変換**(Galilean transformation):

$$\begin{bmatrix} t \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} t' \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ v_2 & R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ v_3 & R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}。\tag{19}$$

次のようにも略記する:

$$\begin{bmatrix} t \\ \vec{\boldsymbol{r}} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} t' \\ \vec{\boldsymbol{r}}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \vec{\boldsymbol{0}}^{\mathrm{T}} \\ \vec{\boldsymbol{v}} & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ \vec{\boldsymbol{r}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta \\ \vec{\boldsymbol{d}} \end{bmatrix}。\tag{20}$$

変換の**自由度**(degrees of freedom)の数は、δ、$\vec{\boldsymbol{d}}$ で 4 個、$\vec{\boldsymbol{v}}$ で 3 個、**回転行列**(rotation matrix) R に入っている 3 つの角度で 3 個の計 10 個。（ちなみに回転行列は（どうやってもいいけど）たとえば次のようにパラメトライズできる:

$$R = R_{12}R_{23}R_{31}、\tag{21}$$

ここで

$$R_{12} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{12} & \sin\theta_{12} & 0 \\ -\sin\theta_{12} & \cos\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}、\quad R_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_{23} & \sin\theta_{23} \\ 0 & -\sin\theta_{23} & \cos\theta_{23} \end{bmatrix}、\quad R_{31} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{31} & 0 & -\sin\theta_{31} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta_{31} & 0 & \cos\theta_{31} \end{bmatrix}、\tag{22}$$

である。）

ガリレイ変換 (19) が**群**(group)をなすことは簡単に示せる:

1. 変換 $\left(\delta, \vec{\boldsymbol{d}}; \vec{\boldsymbol{v}}, R\right)$ と $\left(\delta', \vec{\boldsymbol{d}}'; \vec{\boldsymbol{v}}', R'\right)$ の合成変換は（どうでもいいけどいちおう書くと）、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} t'' \\ \vec{\boldsymbol{r}}'' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \vec{\boldsymbol{0}}^{\mathrm{T}} \\ \vec{\boldsymbol{v}}' & R' \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & \vec{\boldsymbol{0}}^{\mathrm{T}} \\ \vec{\boldsymbol{v}} & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ \vec{\boldsymbol{r}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta \\ \vec{\boldsymbol{d}} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} \delta' \\ \vec{\boldsymbol{d}}' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \vec{\boldsymbol{0}}^{\mathrm{T}} \\ \vec{\boldsymbol{v}}' & R' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \vec{\boldsymbol{0}}^{\mathrm{T}} \\ \vec{\boldsymbol{v}} & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ \vec{\boldsymbol{r}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \vec{\boldsymbol{0}}^{\mathrm{T}} \\ \vec{\boldsymbol{v}}' & R' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ \vec{\boldsymbol{d}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta' \\ \vec{\boldsymbol{d}}' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \vec{\boldsymbol{0}}^{\mathrm{T}} \\ \vec{\boldsymbol{v}}' + R'\vec{\boldsymbol{v}} & R'R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ \vec{\boldsymbol{r}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta + \delta' \\ \delta\vec{\boldsymbol{v}}' + R'\vec{\boldsymbol{d}} + \vec{\boldsymbol{d}}' \end{bmatrix}、 \end{aligned}\tag{23}$$

すなわち

$$\left(\delta', \vec{\boldsymbol{d}}'; \vec{\boldsymbol{v}}', R'\right) \circ \left(\delta, \vec{\boldsymbol{d}}; \vec{\boldsymbol{v}}, R\right) = \left(\delta + \delta', \delta\vec{\boldsymbol{v}}' + R'\vec{\boldsymbol{d}} + \vec{\boldsymbol{d}}'; \vec{\boldsymbol{v}}' + R'\vec{\boldsymbol{v}}, R'R\right)。\tag{24}$$

2. **結合則** (associativity): どうでもいいけどいちおうやると、

$$
\begin{aligned}
&\left(\delta'', \vec{\boldsymbol{d}}''; \vec{\boldsymbol{v}}'', R''\right) \circ \left(\left(\delta', \vec{\boldsymbol{d}}'; \vec{\boldsymbol{v}}', R'\right) \circ \left(\delta, \vec{\boldsymbol{d}}; \vec{\boldsymbol{v}}, R\right)\right) \\
&\quad = \left(\delta'', \vec{\boldsymbol{d}}''; \vec{\boldsymbol{v}}'', R''\right) \circ \left(\delta + \delta', \delta\vec{\boldsymbol{v}}' + R'\vec{\boldsymbol{d}} + \vec{\boldsymbol{d}}'; \vec{\boldsymbol{v}}' + R'\vec{\boldsymbol{v}}, R'R\right) \\
&\quad = \cdots、 \qquad (25) \\
&\left(\left(\delta'', \vec{\boldsymbol{d}}''; \vec{\boldsymbol{v}}'', R''\right) \circ \left(\delta', \vec{\boldsymbol{d}}'; \vec{\boldsymbol{v}}', R'\right)\right) \circ \left(\delta, \vec{\boldsymbol{d}}; \vec{\boldsymbol{v}}, R\right) \\
&\quad = \cdots、 \qquad (26)
\end{aligned}
$$

やっぱめんどくさい。まやればできます。(ていうかしょせん一次変換だから自明、とかでもいいか。)

3. **単位元** (identity element) (**恒等変換** (identity transformation)) の存在: $\delta = 0$、$\vec{\boldsymbol{d}} = 0$、$\vec{\boldsymbol{v}} = 0$、$R = \mathrm{I}$。

4. **逆元** (inverse element) の存在: 変換 (20) の **逆変換** (inverse transformation) は

$$
\begin{bmatrix} t' \\ \vec{\boldsymbol{r}}' \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} t \\ \vec{\boldsymbol{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \vec{\boldsymbol{0}}^{\mathrm{T}} \\ -R^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{v}} & R^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t' \\ \vec{\boldsymbol{r}}' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\delta \\ -R^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{d}} + cR^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{v}} \end{bmatrix}、 \qquad (27)
$$

つまりは

$$
\left(\delta, \vec{\boldsymbol{d}}; \vec{\boldsymbol{v}}, R\right)^{-1} = \left(-\delta, -R^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{d}} + \delta R^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{v}}; -R^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{v}}, R^{\mathrm{T}}\right)。 \qquad (28)
$$

この群を**ガリレイ群** (Galilean group) と呼ぶ。ちなみに一般の変換は、個別の変換から次のように合成できる:

$$
\left(\delta, \vec{\boldsymbol{d}}; \vec{\boldsymbol{v}}, R\right) = \underbrace{\left(\delta, \vec{\boldsymbol{d}}; \vec{\boldsymbol{0}}, \mathrm{I}\right)}_{\text{並進}} \circ \underbrace{\left(0, \vec{\boldsymbol{0}}; \vec{\boldsymbol{v}}, \mathrm{I}\right)}_{\text{ガリレイブースト}} \circ \underbrace{\left(0, \vec{\boldsymbol{0}}; \vec{\boldsymbol{0}}, R\right)}_{\text{回転}}、 \qquad (29)
$$

ただし時間並進と空間並進は可換なのでまとめて書いた。なので、個別の変換に対する物理法則の不変性がぜんぶ成り立てば、ガリレイ群のどんな変換に対しても不変になる。

2.2 回転群 $SO(3)$ のベクトル表現

一般に時刻 t と位置 $\vec{\boldsymbol{r}}$ の関数 f を

$$
f(t, x_1, x_2, x_3) = f(t, \vec{\boldsymbol{r}}) \qquad (30)
$$

等と書くことにする(この節の以下の議論で時間 t は全く関係ないが、どうせ後で出てくるのでついでに書いておく)。空間回転 (9)——つまりはガリレイ変換 (20) で $c = 0$、$\vec{\boldsymbol{d}} = \vec{\boldsymbol{v}} = 0$ としたもの——の下で、以下のように(空間座標と同じように)変換する量 $\vec{\boldsymbol{V}}$ を**ベクトル** (vector) と呼ぶ:

$$
\vec{\boldsymbol{V}}(t, \vec{\boldsymbol{r}}) \to \vec{\boldsymbol{V}}'(t', \vec{\boldsymbol{r}}') = R\vec{\boldsymbol{V}}(t, \vec{\boldsymbol{r}})、 \qquad (31)
$$

$$
V_i(t, \vec{\boldsymbol{r}}) \to V_i'(t', \vec{\boldsymbol{r}}') = R_{ij}V_j(t, \vec{\boldsymbol{r}})、 \qquad (32)
$$

ここで(および以下すべてで)、$'$ は微分ではなく、変換後の量を表すことにする。ベクトル量として例えば、$\vec{\boldsymbol{r}}$ 自身(つまり $\vec{\boldsymbol{V}}(t, \vec{\boldsymbol{r}}) = \vec{\boldsymbol{r}}$ としたもの)もベクトルである:

$$
\vec{\boldsymbol{r}}' = R\vec{\boldsymbol{r}}、 \qquad (33)
$$

$$
x_i' = R_{ij}x_j。 \qquad (34)
$$

次の**ナブラ**(nabla)と呼ばれる**演算子**(operator)もベクトル:

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} := (\partial_1,\, \partial_2,\, \partial_3) = \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{bmatrix} \tag{35}$$

ただし

$$\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}。 \tag{36}$$

証明. $\mathrm{d}x'_i = R_{ij}\mathrm{d}x_j$ の両辺に R_{ik} をかけて i について足しあげると $R_{ik}\mathrm{d}x'_i = \mathrm{d}x_k$ を得る。つまり $\partial x_k/\partial x'_i = R_{ik}$。したがって、

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} = \frac{\partial x_k}{\partial x'_i}\frac{\partial}{\partial x_k} = R_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}。 \tag{37}$$

つまりは $\partial'_i = R_{ik}\partial_k$ となり、これは式 (32) や (34) と同じ変換性。 □

回転に対して**2 階**(rank 2)の**テンソル**(tensor)として変換する量 T_{ij} があったとする:

$$T'_{ij}(t', \vec{\boldsymbol{r}}') = R_{ii'}R_{jj'}T_{i'j'}(t, \vec{\boldsymbol{r}})、 \tag{38}$$

ここで $'$ つきのダミーの（足しあげられている）添字 i'、j' は単に見やすさのために用いられており、特に変換後の量とかそういうことを意味してはいない。（テンソル T_{ij} の具体例としてはたとえば二つのベクトル $\vec{\boldsymbol{V}}$、$\vec{\boldsymbol{W}}$ から作られる量 $T_{ij} = V_iW_j$ とか。）このとき次の**ホッジ双対**(Hodge dual) $\star\vec{\boldsymbol{T}}$ はベクトルとして変換する:

$$(\star T)_i := \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}T_{jk}、 \tag{39}$$

ここで ϵ_{ijk} は**完全反対称テンソル**(totally anti-symmetric tensor):

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i,j,k) \text{ が } (1,2,3) \text{ の偶置換のとき、} \\ -1 & (i,j,k) \text{ が } (1,2,3) \text{ の奇置換のとき、} \\ 0 & \text{その他。} \end{cases} \tag{40}$$

証明. 実際に変換してみる:

$$(\star T)'_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}R_{jj'}R_{kk'}T_{j'k'}。 \tag{41}$$

いま、$\det R = 1$ であるから

$$\det R = \epsilon_{ijk}R_{i1}R_{j2}R_{k3} = 1、 \tag{42}$$

あるいは

$$\epsilon_{ijk}R_{ii'}R_{jj'}R_{kk'} = \epsilon_{i'j'k'}、 \tag{43}$$

ここで、両辺で浮いている添字は i'、j'、k' であり、足し上げられているダミーの添字は i、j、k である。この両辺に $R_{i''i'}$ をかけて i' について和をとると（直交行列の定義 $R_{i''i'}R_{ii'} = \delta_{i''i}$ も用いて）

$$\sum_{j,k} \epsilon_{i''jk} R_{jj'} R_{kk'} = \sum_{i'} R_{i''i'} \epsilon_{i'j'k'}、 \tag{44}$$

ここで、両辺で浮いている添字は i''、j'、k' であり、足し上げられているダミーの添字は j、k、i' であるが、ごちゃごちゃしてきたので足し算記号も顕わに復活した。これを式 (41) に入れると

$$(\star T)'_i = \frac{1}{2} R_{ii'} \epsilon_{i'j'k'} T_{j'k'} = R_{ii'} (\star T)_{i'} \tag{45}$$

を得る。 □

系 1. 特に、二つのベクトル $\vec{\boldsymbol{V}}$ と $\vec{\boldsymbol{W}}$ から作られる**ベクトル積**(vector product)

$$\left(\vec{\boldsymbol{V}} \times \vec{\boldsymbol{W}}\right)_i := \epsilon_{ijk} V_j W_k、 \tag{46}$$

$$\begin{bmatrix} (\vec{\boldsymbol{V}} \times \vec{\boldsymbol{W}})_1 \\ (\vec{\boldsymbol{V}} \times \vec{\boldsymbol{W}})_2 \\ (\vec{\boldsymbol{V}} \times \vec{\boldsymbol{W}})_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_2 W_3 - V_3 W_2 \\ V_3 W_1 - V_1 W_3 \\ V_1 W_2 - V_2 W_1 \end{bmatrix} \tag{47}$$

もまた、空間回転の下でベクトルとして変換する:

$$\left(\vec{\boldsymbol{V}}'(t', \vec{\boldsymbol{r}}') \times \vec{\boldsymbol{W}}'(t', \vec{\boldsymbol{r}}')\right)_i = R_{ij} \left(\vec{\boldsymbol{V}}(t, \vec{\boldsymbol{r}}) \times \vec{\boldsymbol{W}}(t, \vec{\boldsymbol{r}})\right)_j 。 \tag{48}$$

2.3 古典電磁気学おさらい

粒子 A の質量を m_A、電荷を q_A、位置を $\vec{\boldsymbol{r}}_A$ とするとき、**ローレンツ力**(Lorentz force)の下での運動方程式は

$$m_A \frac{\mathrm{d}^2 \vec{\boldsymbol{r}}_A}{\mathrm{d}t^2}(t) = q_A \left(\vec{\boldsymbol{E}}(t, \vec{\boldsymbol{r}}_A(t)) + \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}_A}{\mathrm{d}t}(t) \times \vec{\boldsymbol{B}}(t, \vec{\boldsymbol{r}}_A(t)) \right)、 \tag{49}$$

ただし時刻 t、位置 $\vec{\boldsymbol{x}}$ における**電場**(electric field)および**磁場**(magnetic field)は以下の**マクスウェル方程式**(Maxwell's equations)で決定される:

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}}(t, \vec{\boldsymbol{x}}) = \rho(t, \vec{\boldsymbol{x}})、 \qquad \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{B}}(t, \vec{\boldsymbol{x}}) = \frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}(t, \vec{\boldsymbol{x}}) + \vec{\boldsymbol{j}}(t, \vec{\boldsymbol{x}})、 \tag{50}$$

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}(t, \vec{\boldsymbol{x}}) = 0、 \qquad \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{E}}(t, \vec{\boldsymbol{x}}) = -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}(t, \vec{\boldsymbol{x}})、 \tag{51}$$

ここで自然単位系 $\epsilon_0 = c = 1$（ひいては $\mu_0 = 1$）を用いた。[*5] なお、すべての粒子の位置と速度を与えると、**電荷密度**(charge density)および**電流密度**(current density)は

$$\rho(t, \vec{\boldsymbol{x}}) = \sum_A q_A \, \delta^3(\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{r}}_A(t))、 \qquad \vec{\boldsymbol{j}}(t, \vec{\boldsymbol{x}}) = \sum_A q_A \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}_A}{\mathrm{d}t}(t) \, \delta^3(\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{r}}_A(t))、 \tag{52}$$

となる、ここで

[*5] ちなみにこれらの定数を復活すると、電磁場と物質の相互作用を表す方程式たち (50) は

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}}(t, \vec{\boldsymbol{x}}) = \frac{\rho(t, \vec{\boldsymbol{x}})}{\epsilon_0}、 \qquad \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{B}}(t, \vec{\boldsymbol{x}}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}(t, \vec{\boldsymbol{x}}) + \frac{\vec{\boldsymbol{j}}(t, \vec{\boldsymbol{x}})}{\epsilon_0 c^2}、$$

となるが、まぁ気にしないでよい。

$$\delta^3(\vec{\boldsymbol{x}}) = \begin{cases} \infty & (\vec{\boldsymbol{x}} = 0)、\\ 0 & (\vec{\boldsymbol{x}} \neq 0)、\end{cases} \tag{53}$$

は**ディラックのデルタ関数**(Dirac delta function) で（ほんとは「関数」じゃなくて**シュワルツ超関数**(distribution)つーんすか？まーともかく）、任意の（あんまりタチの悪くない）関数 $f(\vec{\boldsymbol{x}})$ に対して

$$\int \mathrm{d}^3x\, \delta^3(\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{r}})\, f(\vec{\boldsymbol{x}}) = f(\vec{\boldsymbol{r}})、 \tag{54}$$

となるものとして定義される。*6 赤い色の部分が電磁場、青い色の部分が物質をあらわす変数である。

2.4 ゲージ不変性（講義では飛ばしたけどいちおう）

式 (51) は、**ヘルムホルツの分解定理**(Helmholtz's decomposition theorem)（忘れちゃった人は付録 B 参照）により、**スカラーポテンシャル**(scalar potential) ϕ と**ベクトルポテンシャル**(vector potential) $\vec{\boldsymbol{A}}$ を用いて

$$\vec{\boldsymbol{E}}(t, \vec{\boldsymbol{x}}) = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\phi(t, \vec{\boldsymbol{x}}) - \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t}(t, \vec{\boldsymbol{x}})、 \tag{55}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}(t, \vec{\boldsymbol{x}}) = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{A}}(t, \vec{\boldsymbol{x}})、 \tag{56}$$

と書き換えられる。（ちなみに式 (50) は

$$\begin{aligned} -\nabla^2\phi(t, \vec{\boldsymbol{x}}) - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}(t, \vec{\boldsymbol{x}}) &= \rho(t, \vec{\boldsymbol{x}})、\\ \vec{\boldsymbol{\nabla}}\left(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}\right)(t, \vec{\boldsymbol{x}}) - \nabla^2\vec{\boldsymbol{A}}(t, \vec{\boldsymbol{x}}) &= -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\frac{\partial\phi}{\partial t}(t, \vec{\boldsymbol{x}}) - \frac{\partial^2\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t^2}(t, \vec{\boldsymbol{x}}) + \vec{\boldsymbol{j}}(t, \vec{\boldsymbol{x}})、\end{aligned} \tag{57}$$

となり、粒子の運動方程式 (49) は

$$m_A \frac{\mathrm{d}^2\vec{\boldsymbol{r}}_A}{\mathrm{d}t^2}(t) = q_A\left(-\vec{\boldsymbol{\nabla}}\phi(t, \vec{\boldsymbol{r}}_A(t)) - \frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t}(t, \vec{\boldsymbol{r}}_A(t)) + \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}_A}{\mathrm{d}t}(t) \times \left(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{A}}\right)(t, \vec{\boldsymbol{r}}_A(t))\right)、 \tag{58}$$

となる。）

スカラーおよびベクトルポテンシャルの与え方は一意ではなく、**ゲージ変換**(gauge transformation)

$$\begin{aligned} \phi(t, \vec{\boldsymbol{x}}) &\to \phi'(t, \vec{\boldsymbol{x}}) = \phi(t, \vec{\boldsymbol{x}}) - \frac{\partial\chi}{\partial t}(t, \vec{\boldsymbol{x}})、\\ \vec{\boldsymbol{A}}(t, \vec{\boldsymbol{x}}) &\to \vec{\boldsymbol{A}}'(t, \vec{\boldsymbol{x}}) = \vec{\boldsymbol{A}}(t, \vec{\boldsymbol{x}}) + \vec{\boldsymbol{\nabla}}\chi(t, \vec{\boldsymbol{x}})、\end{aligned} \tag{59}$$

の下で電磁場は——すなわち電磁気学の方程式全体も——不変である、ここで $\chi(t, \vec{\boldsymbol{x}})$ は任意の関数。この自由度を用いて、**ローレンツゲージ**(Lorenz gauge)をとっておくと便利:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}(t, \vec{\boldsymbol{x}}) + \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}(t, \vec{\boldsymbol{x}}) = 0。 \tag{60}$$

このゲージでは、式 (57) は

*6 表式 (52) を用いると、粒子自身の作る電磁場からの、その粒子への反作用も入ってきて、これはその粒子の質量への無限大の補正となってあらわれる。これをどう相殺するか——**繰り込み**(renormalize)するか——というのはややこしい話になるのでここでは省略する。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\phi(t,\,\vec{\boldsymbol{x}}) = \rho(t,\,\vec{\boldsymbol{x}})\text{、}$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{\boldsymbol{A}}(t,\,\vec{\boldsymbol{x}}) = \vec{\boldsymbol{j}}(t,\,\vec{\boldsymbol{x}})\text{、} \tag{61}$$

と分離する。

2.5 電磁気学はガリレイ不変か？

電磁気学の方程式がガリレイ変換でどう変換するかを見てゆこう:

- 並進: 基本的に時空座標 t、$\vec{\boldsymbol{x}}$ は式 (49)、(50)、(51)、(52) に微分でしか（顕わには）出てこないので、電磁気学は時間並進、空間並進ともに自明に不変である。
- 時間反転: $t \to t' = -t$（および $\vec{\boldsymbol{x}} \to \vec{\boldsymbol{x}}' = \vec{\boldsymbol{x}}$）で

$$\frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t'} = -\frac{\partial}{\partial t}\text{、} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\text{、} \qquad \vec{\boldsymbol{r}}_A(t) \to \vec{\boldsymbol{r}}'_A(t') = \vec{\boldsymbol{r}}_A(t)\text{、} \tag{62}$$

なので、表式 (52) から

$$\rho(t,\,\vec{\boldsymbol{x}}) \to \rho\big(t',\,\vec{\boldsymbol{x}}'\big) = \rho(t,\,\vec{\boldsymbol{x}})\text{、} \tag{63}$$
$$\vec{\boldsymbol{j}}(t,\,\vec{\boldsymbol{x}}) \to \vec{\boldsymbol{j}}'\big(t',\,\vec{\boldsymbol{x}}'\big) = -\vec{\boldsymbol{j}}(t,\,\vec{\boldsymbol{x}})\text{、} \tag{64}$$

すなわち ρ は不変、$\vec{\boldsymbol{j}}$ は反転。このとき、

$$\vec{\boldsymbol{E}}(t,\,\vec{\boldsymbol{x}}) \to \vec{\boldsymbol{E}}'\big(t',\,\vec{\boldsymbol{x}}'\big) = \vec{\boldsymbol{E}}(t,\,\vec{\boldsymbol{x}})\text{、} \tag{65}$$
$$\vec{\boldsymbol{B}}(t,\,\vec{\boldsymbol{x}}) \to \vec{\boldsymbol{B}}'\big(t',\,\vec{\boldsymbol{x}}'\big) = -\vec{\boldsymbol{B}}(t,\,\vec{\boldsymbol{x}})\text{、} \tag{66}$$

すなわち $\vec{\boldsymbol{E}}$ は不変、$\vec{\boldsymbol{B}}$ は反転、としておくと、全体が不変になる。
- 空間反転: $\vec{\boldsymbol{x}} \to -\vec{\boldsymbol{x}}$（および $t \to t' = t$）で、

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \to \vec{\boldsymbol{\nabla}}' = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\text{、} \qquad \vec{\boldsymbol{r}}_A(t) \to \vec{\boldsymbol{r}}'_A(t') = -\vec{\boldsymbol{r}}_A(t) \tag{67}$$

なので、表式 (52) から

$$\rho(t,\,\vec{\boldsymbol{x}}) \to \rho'\big(t',\,\vec{\boldsymbol{x}}'\big) = \rho(t,\,\vec{\boldsymbol{x}})\text{、} \tag{68}$$
$$\vec{\boldsymbol{j}}(t,\,\vec{\boldsymbol{x}}) \to \vec{\boldsymbol{j}}'\big(t',\,\vec{\boldsymbol{x}}'\big) = -\vec{\boldsymbol{j}}(t,\,\vec{\boldsymbol{x}})\text{、} \tag{69}$$

すなわち ρ は不変、$\vec{\boldsymbol{j}}$ は反転。このとき、

$$\vec{\boldsymbol{E}}(t,\,\vec{\boldsymbol{x}}) \to \vec{\boldsymbol{E}}'\big(t',\,\vec{\boldsymbol{x}}'\big) = -\vec{\boldsymbol{E}}(t,\,\vec{\boldsymbol{x}})\text{、} \tag{70}$$
$$\vec{\boldsymbol{B}}(t,\,\vec{\boldsymbol{x}}) \to \vec{\boldsymbol{B}}'\big(t',\,\vec{\boldsymbol{x}}'\big) = \vec{\boldsymbol{B}}(t,\,\vec{\boldsymbol{x}})\text{、} \tag{71}$$

すなわち $\vec{\boldsymbol{E}}$ は反転、$\vec{\boldsymbol{B}}$ は不変、としておくと、全体が不変になる。
- **荷電共役**（charge conjugation）: すべての粒子の電荷を反転し

$$q_A \to -q_A\text{、} \qquad \rho(t,\,\vec{\boldsymbol{x}}) \to -\rho(t,\,\vec{\boldsymbol{x}})\text{、} \qquad \vec{\boldsymbol{j}}(t,\,\vec{\boldsymbol{x}}) \to -\vec{\boldsymbol{j}}(t,\,\vec{\boldsymbol{x}})\text{、} \tag{72}$$

電磁場も反転する

$$\vec{\boldsymbol{E}}(t,\,\vec{\boldsymbol{x}}) = -\vec{\boldsymbol{E}}(t,\,\vec{\boldsymbol{x}})、\qquad \vec{\boldsymbol{B}}(t,\,\vec{\boldsymbol{x}}) = -\vec{\boldsymbol{B}}(t,\,\vec{\boldsymbol{x}})。\tag{73}$$

このような変換の下で電磁気学は不変。この変換 (C) は時空の同じ点 $(t,\,\vec{\boldsymbol{x}})$ どうしを結びつける内部対称性であり、一見したところ空間反転すなわちパリティ変換 (P) や時間反転 (T) と関係なさそうだが、実は場の量子論の深いところでそれらと結びついている。興味のある人は$\overset{\text{CPT theorem}}{\textbf{CPT定理}}$でぐぐるべし。

- 空間回転: 回転 $x_i \to x'_i = R_{ij}x_j$ (および $t \to t' = t$) の下で、電磁場がベクトルとして、

$$\vec{\boldsymbol{E}}_i(t,\,\vec{\boldsymbol{x}}) \to \vec{\boldsymbol{E}}'_i\big(t',\,\vec{\boldsymbol{x}}'\big) = R_{ij}\vec{\boldsymbol{E}}_j(t,\,\vec{\boldsymbol{x}})\,、\tag{74}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}_i(t,\,\vec{\boldsymbol{x}}) \to \vec{\boldsymbol{B}}'_i\big(t',\,\vec{\boldsymbol{x}}'\big) = R_{ij}\vec{\boldsymbol{B}}_j(t,\,\vec{\boldsymbol{x}})\,、\tag{75}$$

と変換する、とすると、ぜんぶ不変。

- ガリレイブースト: 最後に残ったこいつがくせものである:

$$t \to t' = t、\tag{76}$$

$$\vec{\boldsymbol{x}} \to \vec{\boldsymbol{x}}' = \vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{v}}t。\tag{77}$$

結論からいうとこの変換に対して古典電磁気学は不変ではない。(ちょっと長くなるのでリストから抜ける。)

ガリレイブースト: まずはニュートン重力の場合 (18) と同様、

$$\vec{\boldsymbol{r}}_A(t) \to \vec{\boldsymbol{r}}'_A(t') = \vec{\boldsymbol{r}}_A(t) + \vec{\boldsymbol{v}}t、\tag{78}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}_A}{\mathrm{d}t}(t) \to \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}'_A}{\mathrm{d}t'}(t') = \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}_A}{\mathrm{d}t}(t) + \vec{\boldsymbol{v}}、\tag{79}$$

より、表式 (52) から

$$\rho'\big(t',\,\vec{\boldsymbol{x}}'\big) = \rho(t,\,\vec{\boldsymbol{x}})\,、\tag{80}$$

$$\vec{\boldsymbol{j}}'\big(t',\,\vec{\boldsymbol{x}}'\big) = \vec{\boldsymbol{j}}(t,\,\vec{\boldsymbol{x}}) + \rho(t,\,\vec{\boldsymbol{x}})\,\vec{\boldsymbol{v}}、\tag{81}$$

すなわち ρ は不変、$\vec{\boldsymbol{j}}$ はなんかブーストされる。一方、電磁場の変換性は未知である:

$$\vec{\boldsymbol{E}}'\big(t',\,\vec{\boldsymbol{x}}'\big) = \vec{\boldsymbol{E}}'(t,\,\vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{v}}t) = \ ?\tag{82}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}'\big(t',\,\vec{\boldsymbol{x}}'\big) = \vec{\boldsymbol{B}}'(t,\,\vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{v}}t) = \ ?\tag{83}$$

運動方程式は、

$$m_A\frac{\mathrm{d}^2\vec{\boldsymbol{r}}_A}{\mathrm{d}t^2}(t) = q_A\left(\vec{\boldsymbol{E}}'(t,\vec{\boldsymbol{r}}_A(t) + \vec{\boldsymbol{v}}t) + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}_A}{\mathrm{d}t}(t) + \vec{\boldsymbol{v}}\right) \times \vec{\boldsymbol{B}}'(t,\vec{\boldsymbol{r}}_A(t) + \vec{\boldsymbol{v}}t)\right)、\tag{84}$$

と変換されるので、もし運動方程式が任意の $\vec{\boldsymbol{r}}_A(t)$ に対してガリレイ不変であることを要求するなら

$$\vec{\boldsymbol{E}}'\big(t',\,\vec{\boldsymbol{x}}'\big) = \vec{\boldsymbol{E}}'(t,\,\vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{v}}t) \overset{!}{=} \vec{\boldsymbol{E}}(t,\,\vec{\boldsymbol{x}}) - \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}(t,\,\vec{\boldsymbol{x}})\,、\tag{85}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}'\big(t',\,\vec{\boldsymbol{x}}'\big) = \vec{\boldsymbol{B}}'(t,\,\vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{v}}t) \overset{!}{=} \vec{\boldsymbol{B}}(t,\,\vec{\boldsymbol{x}})\,、\tag{86}$$

が必要である。

いっぽう電磁場に関わる部分については、座標変換

$$\begin{bmatrix} t \\ \vec{\boldsymbol{x}} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} t' \\ \vec{\boldsymbol{x}}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \vec{\mathbf{0}}^{\mathrm{T}} \\ \vec{\boldsymbol{v}} & \mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ \vec{\boldsymbol{x}} \end{bmatrix} \tag{87}$$

より、微分が

$$\begin{bmatrix} \mathrm{d}t' \\ \mathrm{d}x'_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \vec{\mathbf{0}}^{\mathrm{T}} \\ v_i & \delta_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x_j \end{bmatrix}、\qquad \begin{bmatrix} \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \vec{\mathbf{0}}^{\mathrm{T}} \\ -v_i & \delta_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{d}t' \\ \mathrm{d}x'_j \end{bmatrix}、 \tag{88}$$

で与えられるので、

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial t}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x_i}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial t} - v_i \frac{\partial}{\partial x_i}、 \tag{89}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} = \frac{\partial t}{\partial x'_i}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}\frac{\partial}{\partial x_j} = \delta_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}、 \tag{90}$$

すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} - \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}}、 \tag{91}$$

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}' = \vec{\boldsymbol{\nabla}}。 \tag{92}$$

粒子の運動方程式を不変に保つような電磁場の変換 (85)、(86) の下では、マクスウェル方程式は

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \left(\vec{\boldsymbol{E}}(t, \vec{\boldsymbol{x}}) - \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}(t, \vec{\boldsymbol{x}})\right) = \rho(t, \vec{\boldsymbol{x}})、 \tag{93}$$

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{B}}(t, \vec{\boldsymbol{x}}) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}}\right)\left(\vec{\boldsymbol{E}}(t, \vec{\boldsymbol{x}}) - \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}(t, \vec{\boldsymbol{x}})\right) + \vec{\boldsymbol{j}}(t, \vec{\boldsymbol{x}}) + \rho(t, \vec{\boldsymbol{x}})\,\vec{\boldsymbol{v}}、 \tag{94}$$

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}(t, \vec{\boldsymbol{x}}) = 0、 \tag{95}$$

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \left(\vec{\boldsymbol{E}}(t, \vec{\boldsymbol{x}}) - \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}(t, \vec{\boldsymbol{x}})\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial t} - \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}}\right)\vec{\boldsymbol{B}}(t, \vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{v}}t)、 \tag{96}$$

と変換されることが分かる。

結論: 電磁気学は、ガリレイ変換のうち、ガリレイブーストに対して不変ではない。等速直線運動をしている座標系に移ると物理法則が変わっちゃう！

3 特殊相対論的古典論

数学とちがって自然科学は土台となる公理が（まだ？）ない。自然科学の行き方: とりあえず理論を作ってみて（できるだけありとあらゆる）実験と合えば勝ち。

でどうすんの？パンがなければケーキを食べればいいじゃない: 理論がガリレイ変換で不変じゃないなら、ガリレイ変換をなんらかの極限として含むような、もっとリッチな別の変換の下での不変性を要求すればいいじゃない。並進不変性、回転不変性はそのまま成り立つとするとブーストを一般化すればよいことになる。

こういうときの理論の変換の一般化のしかたの定跡のひとつ: どんな量を不変に保ちたいかをまず考える。何を不変にする？光の速さ c を不変にしてみよう。

3.1 ローレンツ変換

時刻 t_s に位置 $\vec{x}_s$ を発した光の球面波の時刻 t における位置 $\vec{x}$ は、

$$\left(\vec{x}-\vec{x}_s\right)^2 = c^2\left(t-t_s\right)^2 \tag{97}$$

を満たす。で、新しい座標系 $\left(t', \vec{x}'\right)$ でも、光が速度 c の球面波であり続けるようにしたい、ちゅーわけです:

$$\left(\vec{x}'-\vec{x}'_s\right)^2 = c^2\left(t'-t'_s\right)^2 。\tag{98}$$

どんな変換をしてみようか。とりあえず、ガリレイ変換 (19) を一般化してみよう。以下では（慣例に従って）座標の添字は上付きで書くことにして

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 \\ \Lambda^2{}_0 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_3 \\ \Lambda^3{}_0 & \Lambda^3{}_1 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta \\ d^1 \\ d^2 \\ d^3 \end{bmatrix} \tag{99}$$

という形の一次変換を考えてみよう。[*7] 時間軸を 0 番目の座標と思って

$$x^0 := ct、 \qquad\qquad d^0 := \delta \tag{100}$$

等と書くと、

$$\begin{bmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 \\ \Lambda^2{}_0 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_3 \\ \Lambda^3{}_0 & \Lambda^3{}_1 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d^0 \\ d^1 \\ d^2 \\ d^3 \end{bmatrix}、 \tag{101}$$

つまりは

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu + d^\mu \tag{102}$$

ですね、ただしギリシャ文字の添字 $\mu, \nu, \ldots$ は 0 から 3 までを走るとし、上付きと下付きで 2 つ表れたときには断りなく和を取るものとする、つまり式 (102) 右辺第一項では $\sum_{\nu=0}^{3}$ を略記。回転群の表現のときと同様、両辺に浮いた添字が現れたら、0 から 3 までぜんぶの場合を尽くすそのすべてについて成立するものとする。いっそ足を全部略して、行列とベクトルみたく思って

$$x' = \Lambda x + d、 \tag{103}$$

と書いたりもする。

この新しい 4 次元座標——**4元ベクトル**(four vector)——を用いると、式 (97) は

$$-\left(x^0-x_s^0\right)^2 + \left(x^1-x_s^1\right)^2 + \left(x^2-x_s^2\right)^2 + \left(x^3-x_s^3\right)^2 = 0 \tag{104}$$

[*7] 変換後の時間 t' に元の空間座標 x^i が入ってくるので、光速 c（仮定により定数）で次元を合わせている。ま数学の人には次元とかどうでもいいかもだけど物理屋には重要なのでいちおう。

ですね。この表式は、座標が引き算で入ってるので並進については自明に不変。なので以下では $d=0$ の変換を考えればよい。

とりあえず見た目がごちゃごちゃするので $x_s=0$ の場合、すなわち、時刻 $t=0$ に原点 $\vec{\boldsymbol{x}}=0$ を発した光を考える（どうせ x_s を入れといても以下の議論はまったく同様に成立するので)。そうすっと結局、

$$-\left(x^0\right)^2+\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2+\left(x^3\right)^2 \tag{105}$$

の形を不変に保つような、4 次元の回転

$$x \to x' = \Lambda x \tag{106}$$

を考えよ、という問題に帰着しました。その答は数学のみなさんはもう知っていて、Λ は特殊直交群 $SO(1,3)$ の基本表現であればよい、というわけです。おさらいするには、次のような **計量**(metric) を定義しておくと便利:

$$\eta_{\mu\nu}=\begin{cases}-1 & (\mu=\nu=0)、\\ 1 & (\mu=\nu \text{ かつ } \mu\neq 0)、\\ 0 & (\text{その他})。\end{cases} \tag{107}$$

$$\eta=\begin{bmatrix}\eta_{00}&\eta_{01}&\eta_{02}&\eta_{03}\\ \eta_{10}&\eta_{11}&\eta_{12}&\eta_{13}\\ \eta_{20}&\eta_{21}&\eta_{22}&\eta_{23}\\ \eta_{30}&\eta_{31}&\eta_{32}&\eta_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}。 \tag{108}$$

特殊直交群 $SO(1,3)$ の基本表現とは、

$$\Lambda^{\mathrm{T}}\,\eta\,\Lambda=\eta \tag{109}$$

を満たす 4 行 4 列の行列 Λ たち全体。Λ で時空の座標を回す変換を **ローレンツ変換**(Lorentz transformation) という。[*8] こういう計量の入った（平らな）空間を **ミンコフスキー空間**(Minkowski space) という。ガリレイ変換のときと同様、ローレンツ変換と並進を合わせて **ポワンカレ変換**(Poincaré transformation) という。ポワンカレ変換も群をなすことをガリレイ変換のときと同様に示せる。この群を **ポワンカレ群**(Poincaré group) という。

ローレンツ変換をパラメトライズするには、どうやってもいいけど例えば

$$\Lambda = B_1B_2B_3\mathcal{R}、 \tag{110}$$

で

$$B_1=\begin{bmatrix}\cosh\varphi_1&\sinh\varphi_1&0&0\\ \sinh\varphi_1&\cosh\varphi_1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}、\quad B_2=\begin{bmatrix}\cosh\varphi_2&0&\sinh\varphi_2&0\\0&1&0&0\\ \sinh\varphi_2&0&\cosh\varphi_2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}、\quad B_3=\begin{bmatrix}\cosh\varphi_3&0&0&\sinh\varphi_3\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\ \sinh\varphi_3&0&0&\cosh\varphi_3\end{bmatrix}、 \tag{111}$$

ただし $-\infty<\varphi_i<\infty$、および

$$\mathcal{R}=\begin{bmatrix}1&\vec{\mathbf{0}}^{\mathrm{T}}\\ \vec{\mathbf{0}}&R\end{bmatrix}、 \tag{112}$$

[*8] 時空の座標以外の量（たとえば電場とか磁場とか）はどう回るの？ それは適当に決めて、結果が実験と合うかどうかを見る、というのが自然科学の行き方、でしたね。

ここで R は式 (21) の回転行列、とかしたり。自由度は 6 個ですね。ブースト B_i の別の**パラメタ化** (parametrization) として、

$$\cosh\varphi_i = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_i^2}}、\qquad \sinh\varphi_i = \frac{\beta_i}{\sqrt{1-\beta_i^2}}、\tag{113}$$

ただし $-1 < \beta_i < 1$、というのもある。あとは

$$\cosh\varphi_i = \sqrt{1+u_i^2}、\qquad \sinh\varphi_i = u_i、\tag{114}$$

ここで $-\infty < u_i < \infty$、とか。（あとで $\vec{\boldsymbol{v}} := \vec{\boldsymbol{\beta}}c$ が普通の速度、$\vec{\boldsymbol{u}}$ が**4元速度** (four velocity) の空間成分に対応することを見る。）

3.2 ブーストの物理的意味

ブーストにより、位置 $\vec{\boldsymbol{x}}_s$ に静止している粒子の運動がどう変わるかを見てみよう（$\vec{\boldsymbol{x}}_s$ は定数）。この粒子の軌跡——**世界線** (world line)——は、この座標系の時刻 t をもちいて次のようにパラメタ化できる:

$$\begin{bmatrix} x^0 \\ \vec{\boldsymbol{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{\boldsymbol{x}}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{\boldsymbol{0}} \end{bmatrix} ct。\tag{115}$$

これを例えば B_1 で回してみましょう:

$$\begin{bmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\varphi_1 & \sinh\varphi_1 \\ \sinh\varphi_1 & \cosh\varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x_s^1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} \begin{bmatrix} ct+\beta_1 x_s^1 \\ x_s^1+\beta_1 ct \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}} \begin{bmatrix} c\left(t+\frac{v_1 x_s^1}{c^2}\right) \\ x_s^1+v_1 t \end{bmatrix}、\tag{116}$$

$$x'^2 = x^2、\tag{117}$$

$$x'^3 = x^3、\tag{118}$$

ここで式 (113) のパラメタ化を用い、$\vec{\boldsymbol{v}} := \vec{\boldsymbol{\beta}}c$ とした。

いま考えてるような、それ自身**多様体** (manifold) になってるような群を**リー群** (Lie group) といってその性質は**リー代数** (Lie algebra) を調べれば分かる、と。[*9] まぁ要は恒等変換のそばの無限小変換たち（の恒等写像からのズレのなす代数（環））を調べるんでしたね。で、ちゃんとはやらないんだけどまぁその精神で、ブースト $B_1B_2B_3$ から恒等変換のそばで β_i の二次以上を無視すると

$$B_1B_2B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_2 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\beta^2)、\tag{119}$$

となる。このとき

$$\begin{bmatrix} x'^0 \\ \vec{\boldsymbol{x}}' \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} c\left(t+\frac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}_s}{c^2}\right) \\ \vec{\boldsymbol{x}}_s+\vec{\boldsymbol{v}}t \end{bmatrix}。\tag{120}$$

ガリレイブーストと同じ形が出た！ どうやら、ローレンツ変換 (113) のパラメタ β_i は、$\beta_i \ll 1$ のときには、速度 v_i で等速直線運動している座標系への座標変換と

[*9] 数学の人はリー代数ではなくて**リー環** (Lie ring) と呼ぶけど同じものです。

$$\beta_i = \frac{v_i}{c} \tag{121}$$

で結びついているようだ。なお、式 (120) の時間のおつり $\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}_s/c^2$ はどないしてくれんねんと思うかもしれませんが、我々が日常的に扱う運動のスケールは、たとえば距離がせいぜい $|\vec{\boldsymbol{x}}_s| \lesssim 1\,\mathrm{km}$、速度が $|\vec{\boldsymbol{v}}| \lesssim 100\,\mathrm{km/h}$ とかですか？ これでみてみると（以下**桁**（order of magnitude）だけの議論と思って）

$$\left|\frac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}_s}{c^2}\right| \lesssim \frac{100\,\mathrm{km/h}\times 1\,\mathrm{km}}{(3\times 10^8\,\mathrm{m/s})^2}\frac{1\,\mathrm{h}}{3600\,\mathrm{s}} \sim \frac{10^5\,\mathrm{m}\times 10^3\,\mathrm{m}}{10^{17}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2}\frac{1}{10^3\,\mathrm{s}} \sim 10^{-12}\,\mathrm{s}。 \tag{122}$$

我々はこんな精度で時間を測定してないですよね。というわけでこれくらいずれてても（特殊相対性理論が出た明治時代のころの）観測とは矛盾しない。[*10]

3.3 共変な速度

ここから先の議論は自然単位系 $c=1$ で考えたほうが見やすいけど、とりあえず c も残しときます。見苦しかったら頭のなかで $c=1$ と置いてください。

運動している粒子を考える。時刻 t におけるその位置を $\vec{\boldsymbol{x}}(t)$、速度を $\vec{\boldsymbol{v}}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}}{\mathrm{d}t}(t)$ と書く（この節の $\vec{\boldsymbol{v}}(t)$ は上で出てきたローレンツ変換のパラメタ $\vec{\boldsymbol{v}}$ とは別物です、紛らわしくてすみません)。微小時間 Δt 後には、その粒子は

$$\vec{\boldsymbol{x}}(t+\Delta t) = \vec{\boldsymbol{x}}(t) + \vec{\boldsymbol{v}}(t)\,\Delta t \tag{123}$$

に移動する。これを 4 元ベクトルとして書くと

$$\begin{bmatrix} ct + c\,\Delta t \\ \vec{\boldsymbol{x}}(t+\Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ct \\ \vec{\boldsymbol{x}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\,\Delta t \\ \vec{\boldsymbol{v}}(t)\,\Delta t \end{bmatrix} \tag{124}$$

となる。4 元ベクトルをまとめて $x = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$ と書くと

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta x \tag{125}$$

ですね。繰り返しになるけど、時刻 t における速度 $\vec{\boldsymbol{v}}(t)$ は

$$\vec{\boldsymbol{v}}(t) = \lim_{\Delta t\to 0} c\frac{\Delta\vec{\boldsymbol{x}}}{\Delta x^0}。 \tag{126}$$

ここから座標変換をしてゆく。いま、$\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)$ は二つの時空位置ベクトル $x(t+\Delta t)$ と $x(t)$ の差分なので、この量は並進 $x \to x' = x + d$ に対しては自明に不変。よって速度も並進不変。ローレンツ変換に対しては？微小変位 Δx はローレンツ変換に対して不変ではないが、**共変**（covariant）である——ローレンツ変換の**表現**（representation）になっている。すなわち、変換 $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu$ に対して

$$\Delta x^\mu \to \Delta x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\,\Delta x^\nu \tag{127}$$

[*10] 現代ではたとえば携帯の GPS とかでも特殊相対論的な補正も、あまつさえ一般相対論的な補正（地球の重力による時間の遅れ）も入ってたりします（入れないと合わない)。人工衛星の速度が**第一宇宙速度**（escape velocity）$\simeq 8\,\mathrm{km/s} \sim 10^4\,\mathrm{km/h}$ のオーダーで、距離が地球のサイズ $\sim 10^4\,\mathrm{km}$ のオーダーなので、式 (122) は 6 桁変わって $10^{-6}\,\mathrm{s}$。これは光速 $c = 3.\times 10^8\,\mathrm{m/s}$ で距離に換算するとだいたい $\sim 10^2\,\mathrm{m}$ のオーダーですね。けっこうでかい。

で、ベクトル表現——座標と同じ変換をする表現——になっている（自明だけど）。一方、速度は不変量でも共変量でもない:

$$c\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}x^0} \to c\frac{\mathrm{d}x'^i}{\mathrm{d}x'^0} = c\frac{\Lambda^i{}_\nu\,\mathrm{d}x^\nu}{\Lambda^0{}_\rho\,\mathrm{d}x^\rho} = c\frac{\Lambda^i{}_0 + \frac{\Lambda^i{}_j}{c}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}}{\Lambda^0{}_0 + \frac{\Lambda^0{}_k}{c}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}}\text{。} \tag{128}$$

とくになんか分母が悲惨な感じ。（具体的には、たとえば x^1 軸方向へのブースト B_1 をしたあとの新しい座標系では

$$\Delta x' = \begin{bmatrix} \Delta x^0 \cosh\varphi_1 + \Delta x^1 \sinh\varphi_1 \\ \Delta x^0 \sinh\varphi_1 + \Delta x^1 \cosh\varphi_1 \\ \Delta x^2 \\ \Delta x^3 \end{bmatrix} \tag{129}$$

で、この座標系での速度は

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}'}{\mathrm{d}t'} = \lim_{\Delta t\to 0} c\frac{\Delta\vec{x}'}{\Delta x'^0} = \left(\frac{\sinh\varphi_1 + \frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t}\cosh\varphi_1}{\cosh\varphi_1 + \frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t}\sinh\varphi_1}, \frac{\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t}}{\cosh\varphi_1 + \frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t}\sinh\varphi_1}, \frac{\frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}t}}{\cosh\varphi_1 + \frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t}\sinh\varphi_1}\right)\text{、} \tag{130}$$

となりますね。）

ともかくまず、Δx からローレンツ不変量を作ってみる:

$$\begin{aligned}(\Delta x)^2 &:= \eta_{\mu\nu}\,\Delta x^\mu\,\Delta x^\nu = (\Delta x)^{\mathrm{T}}\,\eta\,(\Delta x) \\ &= -\left(\Delta x^0\right)^2 + \left(\Delta x^1\right)^2 + \left(\Delta x^2\right)^2 + \left(\Delta x^3\right)^2 = -\left(c\Delta t\right)^2\left(1 - \left(\frac{\vec{v}(t)}{c}\right)^2\right)\text{。}\end{aligned} \tag{131}$$

時空間内の移動のしかたとして、物理では 3 種類の粒子が出てくる:

- **質量のある**(massive)粒子: つねに**時間的**(time-like)に移動する: $(\Delta x)^2 < 0$。つねに速度は光速より小さい: $|\vec{v}(t)| < c$。
- **無質量**(massless)粒子: つねに**光的**(light-like)に移動する: $(\Delta x)^2 = 0$。つねに速度は光速: $|\vec{v}(t)| = c$。
- **タキオン**(tachyon): つねに**空間的**(space-like)に移動する: $(\Delta x)^2 > 0$。つねに速度は光速より大きい: $|\vec{v}(t)| > c$。

われわれの**真空**(vacuum)では、無質量粒子は**光子**(photon)。その他の**素粒子**(elementary particle)は質量あり。タキオンは、場の量子論においては、**間違った真空**(false vacuum)で場を展開した帰結として出てくる、と考える。タキオンが居るような真空は不安定で、自発的にタキオンがいない真空に崩壊する。

質量のある粒子については、粒子の軌跡を無限の微小ステップに区切ったとき、各ステップごとに、**固有時間隔**(proper time) $\Delta\tau$ を

$$\Delta\tau := \frac{\sqrt{-\left(\Delta x\right)^2}}{c} = \Delta t\sqrt{1 - \left(\frac{\vec{v}}{c}\right)^2} \tag{132}$$

で定義しておくと、この量はローレンツ不変量で、どの座標系でみても（計算しても）変わらない。

ローレンツ共変な量 Δx をローレンツ不変な量 $\Delta\tau$ で割っておくと、この量はやはりローレンツ共変な量になる:

$$u^\mu := \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x^\mu}{\Delta\tau} = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\vec{v}}{c}\right)^2}}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\text{、} \tag{133}$$

ただし右辺の時間微分は（いままでどおり）粒子の軌跡に沿った微分。これを**4元速度**(four velocity)と呼ぶ。座標変換 $x^\mu \to \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu$ の下で

$$u^\mu \to \Lambda^\mu{}_\nu\, u^\nu。\tag{134}$$

定義から

$$u^0 = \frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{\vec{\boldsymbol{v}}}{c}\right)^2}}、\tag{135}$$

ここで $\mathrm{d}x^0 = c\,\mathrm{d}t$ を用いた。また、固有時の定義 (131) から、

$$(u^\mu)^2 := \eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -\left(u^0\right)^2 + \left(u^1\right)^2 + \left(u^2\right)^2 + \left(u^3\right)^2 = -c^2。\tag{136}$$

したがって 4 元速度の時間成分は独立ではない:

$$u^0 = c\sqrt{1+\left(\frac{\vec{\boldsymbol{u}}}{c}\right)^2}。\tag{137}$$

まとめると、

$$\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau} = c\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = c\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\vec{\boldsymbol{v}}}{c}\right)^2}} = c\sqrt{1+\left(\frac{\vec{\boldsymbol{u}}}{c}\right)^2}。\tag{138}$$

また、$\vec{\boldsymbol{u}}$ と $\vec{\boldsymbol{v}}$ は一対一対応している:

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}}{\mathrm{d}x^0}\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\vec{\boldsymbol{v}}}{\sqrt{1-\left(\frac{\vec{\boldsymbol{v}}}{c}\right)^2}}、\tag{139}$$

逆解きすると

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{\vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1+\left(\frac{\vec{\boldsymbol{u}}}{c}\right)^2}} = c\frac{\vec{\boldsymbol{u}}}{u^0}。\tag{140}$$

取りうる値の範囲は $-c < v^i < c$ および $-\infty < u^i < \infty$。

そうすると、粒子の運動方程式は、$\mathcal{F}^\mu \to \Lambda^\mu{}_\nu\,\mathcal{F}^\nu$ とベクトルとして変換するような**4元力**(four force)をもちいて、

$$m\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} = \mathcal{F}^\mu \tag{141}$$

と書けていれば、両辺がローレンツ共変、すなわち方程式全体としてはローレンツ不変になる。

唐突だがここで、質量がある粒子の**4元運動量**(four velocity) p^μ を

$$p^\mu := mu^\mu \tag{142}$$

で定義する。4 元運動量の空間成分は、非相対論的な運動量 $\vec{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{NR}} = m\vec{\boldsymbol{v}}$ とは

$$\vec{\boldsymbol{p}} = \frac{m\vec{\boldsymbol{v}}}{\sqrt{1-\left(\frac{\vec{\boldsymbol{v}}}{c}\right)^2}} = \frac{\vec{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{NR}}}{\sqrt{1-\left(\frac{\vec{\boldsymbol{v}}}{c}\right)^2}} \tag{143}$$

で結びついており、$|\vec{\boldsymbol{v}}| \ll c$ では一致する。一方、4 元運動量の時間成分（を適当に光速で次元を合わせたもの）は、エネルギーと思うことにする:

$$E := p^0 c。 \tag{144}$$

そうすると、式 (135) から

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\vec{\boldsymbol{v}}}{c}\right)^2}} = mc^2 + \frac{m}{2}\vec{\boldsymbol{v}}^2 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\vec{\boldsymbol{v}}}{c}\right)^4\right) \tag{145}$$

で、速度が光速より十分遅い時には、高校で習ってよく知っている運動エネルギーが第 2 項目に出てきた。第 1 項目が有名なアインシュタインの**静止エネルギー**(rest energy)。質量（の変化）がエネルギーに転化する、というアイデアが原爆の開発につながった、というのは有名な話ですね。（原子力発電所は原爆と同じ反応を無理矢理ゆっくりやったあげくにお湯を沸かして蒸気でタービンを回す、というハイテクのようでローテクなアレで、ちょっと「無理矢理ゆっくり」に失敗するとドカンと行く、というのを我々は実体験で学びました。）

質量、というのは、4 元運動量から構成したローレンツ不変量

$$(p)^2 := -\left(p^0\right)^2 + \left(p^1\right)^2 + \left(p^2\right)^2 + \left(p^3\right)^2 \tag{146}$$

に他ならない:

$$m^2 = \frac{-(p)^2}{c^2}。 \tag{147}$$

この関係は無質量粒子についても成り立つ、と思うことにする。つまり、無質量粒子 $m = 0$ については、

$$E_{\text{無質量}} = |\vec{\boldsymbol{p}}|\, c。 \tag{148}$$

3.4 ローレンツ共変なマクスウェル方程式

電場と磁場は 3 次元ベクトルが二つあってなんかローレンツ共変な量を作るのに難儀しそう。一方ベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルはまとめて 4 元ベクトルを作るのに良さそうなので試してみよう。次のように定義してみる:

$$\left(A^\mu\right)_{\mu=0}^3 = \left(A^0, \vec{\boldsymbol{A}}\right) := \left(\frac{\phi}{c}, \vec{\boldsymbol{A}}\right)、 \tag{149}$$

ここで光速 c は次元を合わせるために入れた。（繰り返すがこうやって作っていった理論が正しいかどうか——ほんとうにそれがこの自然を記述する理論になっているのか——は実験と比べることで蓋然的にしか決まらない（原理的に！）というのが自然科学と数学の違い。）同様に、電荷密度と電流密度で次のように 4 元ベクトルを作ってみる:

$$\left(j^\mu\right)_{\mu=0}^3 = \left(j^0, \vec{\boldsymbol{j}}\right) := \left(\rho c, \vec{\boldsymbol{j}}\right)。 \tag{150}$$

任意の 4 元ベクトル V^μ に対して

$$V_\mu := \eta_{\mu\nu} V^\nu、\qquad V_0 = -V^0、\qquad V_i = V^i \tag{151}$$

を定義する、ただし $i = 1, 2, 3$。あと $\eta^{\mu\nu}$ は $\eta_{\mu\nu}$ の逆行列として定義される:

$$\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho} = \delta^\mu{}_\rho。 \tag{152}$$

が、いまの場合は結局 $\eta_{\mu\nu}$ といっしょになる:

$$(\eta^{\mu\nu})^3_{\mu,\nu=1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。 \tag{153}$$

ローレンツ変換の定義より、上付きの足と下付きの足を潰すとローレンツ不変量になる: すなわち、

$$V^\mu \to \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu、 \tag{154}$$
$$W^\mu \to \Lambda^\mu{}_\nu W^\nu、 \tag{155}$$

に対して

$$V^\mu W_\mu = V^\mu \eta_{\mu\nu} W^\nu = V^{\mathrm{T}} \eta W \quad \longrightarrow \quad (\Lambda V)^{\mathrm{T}} \eta (\Lambda W) = V^{\mathrm{T}} \left(\Lambda^{\mathrm{T}} \eta \Lambda\right) W = V^{\mathrm{T}} \eta W = V^\mu W_\mu、 \tag{156}$$

でたしかに不変。あと $V^\mu W_\mu = V_\mu W^\mu$ に注意。

場の強さ(field strength)とよばれる反対称テンソルを

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{157}$$

で定義する、ここで

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}。 \tag{158}$$

このとき、若干の計算により電磁場が次のように与えられることがわかる:

$$E^i = cF^{0i}、\qquad B_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} F^{jk}、 \tag{159}$$

ここで $\partial^0 = -\partial_0 = -c^{-1}\partial/\partial t$ 等に注意。(電場や磁場は、なにか 4 元ベクトルの空間成分、というわけではないので、電磁場の添字の上下は意味なしで、どっちで書いてもよい。)マクスウェル方程式は

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{j^\nu}{\epsilon_0 c^2}。 \tag{160}$$

(自然単位系なら $\epsilon_0 = c = 1$。)

3.5 ローレンツ共変なローレンツ力

ローレンツ力 $\vec{\boldsymbol{F}}$ は

$$\begin{aligned} F_i &= q\left(E_i + \epsilon_{ijk} v_j B_k\right) = q\left(cF^{0i} + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} v_j \epsilon_{klm} F_{lm}\right) = q\left(cF^{0i} + \frac{1}{2}\left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right) v_j F_{lm}\right) \\ &= q\left(cF^{0i} + \frac{1}{2}\left(v_j F_{ij} - v_j F_{ji}\right)\right) = q\left(F_{i0} c + F_{ij} v_j\right) = q\left(F_{i0} c + F_{ij} c \frac{u^j}{u^0}\right) = q\frac{c}{u^0}\left(F_{i\nu} u^\nu\right)。 \end{aligned} \tag{161}$$

というわけで、運動方程式に入ってくる運動量を、相対論的なものに変更すると、顕わにローレンツ共変な運動方程式が得られる:

$$\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = qF^{\mu\nu}u_\nu、 \tag{162}$$

ここで、(粒子の軌跡にそって)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{u^0}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \tag{163}$$

を用いた。

ちなみにゲージ変換 (59) も共変に

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi \tag{164}$$

と書ける。あとローレンツゲージ条件 (60) も実はローレンツ不変:

$$\partial_\mu A^\mu = 0。 \tag{165}$$

このゲージの下では式 (61) は

$$-\Box A^\mu = j^\mu、 \tag{166}$$

とローレンツ共変に書ける、ここで $\Box := \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = -\left(\partial_0\right)^2 + \left(\partial_1\right)^2 + \left(\partial_2\right)^2 + \left(\partial_3\right)^2$ はローレンツ不変な**ダランベルシアン演算子**(d'Ambertian operator)。

以上のような、ローレンツ不変(もっというと並進も入れてポワンカレ不変)な理論のことを**特殊相対論**(special relativity)という。

3.6 微小ブーストに対する電磁場の変換性

最後に電磁場が変換パラメタ $\vec{\boldsymbol{\beta}} = \vec{\boldsymbol{v}}/c$(定数)の微小ブースト (119) でどう変換するかを見ておこう。まず座標変換は

$$\begin{bmatrix} c\,\mathrm{d}t' \\ \mathrm{d}x^{i\prime} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & v_j/c \\ v^i/c & \delta^i{}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x^j \end{bmatrix}、 \qquad \begin{bmatrix} c\,\mathrm{d}t' \\ \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}' \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & \vec{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{T}}/c \\ \vec{\boldsymbol{v}}/c & \mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}} \end{bmatrix}、 \tag{167}$$

$$\begin{bmatrix} c^{-1}\partial'_t \\ \partial'_i \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -v^j/c \\ -v_i/c & \delta_i{}^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^{-1}\partial_t \\ \partial_j \end{bmatrix}、 \qquad \begin{bmatrix} c^{-1}\partial'_t \\ \vec{\boldsymbol{\nabla}}' \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -\vec{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{T}}/c \\ -\vec{\boldsymbol{v}}/c & \mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^{-1}\partial_t \\ \vec{\boldsymbol{\nabla}} \end{bmatrix}、 \tag{168}$$

ただし $\approx$ は $\vec{\boldsymbol{v}}/c$ の二次以上を無視していることを表す、また $v^i := v_i$。すなわち

$$\mathrm{d}t' \approx \mathrm{d}t + \frac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}}{c^2}、 \qquad \frac{\partial}{\partial t'} \approx \frac{\partial}{\partial t} - \vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}} \tag{169}$$

$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}' \approx \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}t、 \qquad \vec{\boldsymbol{\nabla}}' \approx \vec{\boldsymbol{\nabla}} - \frac{\vec{\boldsymbol{v}}}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}。 \tag{170}$$

四元ポテンシャルの変換は

$$\begin{bmatrix} \phi'\left(t', \vec{\boldsymbol{x}}'\right)/c \\ \vec{\boldsymbol{A}}'\left(t', \vec{\boldsymbol{x}}'\right) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & \vec{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{T}}/c \\ \vec{\boldsymbol{v}}/c & \mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi(t, \vec{\boldsymbol{x}})/c \\ \vec{\boldsymbol{A}}(t, \vec{\boldsymbol{x}}) \end{bmatrix}、 \tag{171}$$

すなわち

$$\phi'\big(t', \vec{\boldsymbol{x}}'\big) \approx \phi(t, \vec{\boldsymbol{x}}) + \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}(t, \vec{\boldsymbol{x}})\text{、} \tag{172}$$

$$\vec{\boldsymbol{A}}'\big(t', \vec{\boldsymbol{x}}'\big) \approx \vec{\boldsymbol{A}}(t, \vec{\boldsymbol{x}}) + \frac{\vec{\boldsymbol{v}}\,\phi(t, \vec{\boldsymbol{x}})}{c^2}\text{。} \tag{173}$$

このとき電場 (55) の変換は

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{E}}'\big(t', \vec{\boldsymbol{x}}'\big) &= -\vec{\boldsymbol{\nabla}}'\phi'\big(t', \vec{\boldsymbol{x}}'\big) - \frac{\partial}{\partial t'}\vec{\boldsymbol{A}}'\big(t', \vec{\boldsymbol{x}}'\big) \\
&\approx -\left(\vec{\boldsymbol{\nabla}} - \frac{\vec{\boldsymbol{v}}}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\Big(\phi(t, \vec{\boldsymbol{x}}) + \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}(t, \vec{\boldsymbol{x}})\Big) - \left(\frac{\partial}{\partial t} - \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}}\right)\left(\vec{\boldsymbol{A}}(t, \vec{\boldsymbol{x}}) + \frac{\vec{\boldsymbol{v}}\,\phi(t, \vec{\boldsymbol{x}})}{c^2}\right) \\
&= \vec{\boldsymbol{E}}(t, \vec{\boldsymbol{x}}) + \frac{\vec{\boldsymbol{v}}}{c^2}\left(\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t}(t, \vec{\boldsymbol{x}})\right) - \vec{\boldsymbol{\nabla}}\Big(\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}(t, \vec{\boldsymbol{x}})\Big) + \Big(\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}}\Big)\left(\vec{\boldsymbol{A}}(t, \vec{\boldsymbol{x}}) + \frac{\vec{\boldsymbol{v}}\,\phi(t, \vec{\boldsymbol{x}})}{c^2}\right) \\
&\approx \vec{\boldsymbol{E}}(t, \vec{\boldsymbol{x}}) - \vec{\boldsymbol{\nabla}}\Big(\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}(t, \vec{\boldsymbol{x}})\Big) + \Big(\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}}\Big)\vec{\boldsymbol{A}}(t, \vec{\boldsymbol{x}})\text{。}
\end{aligned} \tag{174}$$

成分で書くと

$$\begin{aligned}
E_i'\big(t', \vec{\boldsymbol{x}}'\big) &\approx E_i(t, \vec{\boldsymbol{x}}) - v_j\partial_i A_j(t, \vec{\boldsymbol{x}}) + v_j\partial_j A_i(t, \vec{\boldsymbol{x}}) \\
&= E_i(t, \vec{\boldsymbol{x}}) - v_j F_{ij}(t, \vec{\boldsymbol{x}})\text{。}
\end{aligned} \tag{175}$$

式 (159) より

$$F_{ij} = \epsilon_{ijk}B_k \tag{176}$$

なのでこれを代入すると

$$E_i'\big(t', \vec{\boldsymbol{x}}'\big) \approx E_i(t, \vec{\boldsymbol{x}}) - v_j\epsilon_{ijk}B_k(t, \vec{\boldsymbol{x}})\text{、} \tag{177}$$

つまりは

$$\vec{\boldsymbol{E}}'\big(t', \vec{\boldsymbol{x}}'\big) \approx \vec{\boldsymbol{E}}(t, \vec{\boldsymbol{x}}) - \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}(t, \vec{\boldsymbol{x}})\text{。} \tag{178}$$

いっぽう磁場 (56) の変換は、

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{B}}'\big(t', \vec{\boldsymbol{x}}'\big) &= \vec{\boldsymbol{\nabla}}' \times \vec{\boldsymbol{A}}'\big(t', \vec{\boldsymbol{x}}'\big) \\
&\approx \left(\vec{\boldsymbol{\nabla}} - \frac{\vec{\boldsymbol{v}}}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right) \times \left(\vec{\boldsymbol{A}}(t, \vec{\boldsymbol{x}}) + \frac{\vec{\boldsymbol{v}}\,\phi(t, \vec{\boldsymbol{x}})}{c^2}\right) \\
&\approx \vec{\boldsymbol{B}}(t, \vec{\boldsymbol{x}}) + \frac{\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times (\vec{\boldsymbol{v}}\,\phi(t, \vec{\boldsymbol{x}}))}{c^2} - \frac{\vec{\boldsymbol{v}} \times \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t}(t, \vec{\boldsymbol{x}})}{c^2}\text{。}
\end{aligned} \tag{179}$$

第 2 項を成分で書くと

$$\left(\frac{\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times (\vec{\boldsymbol{v}}\,\phi(t, \vec{\boldsymbol{x}}))}{c^2}\right)_i = \frac{\epsilon_{ijk}v_k\partial_j\phi(t, \vec{\boldsymbol{x}})}{c^2} = \left(\frac{-\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{\nabla}}\phi(t, \vec{\boldsymbol{x}})}{c^2}\right)_i\text{、} \tag{180}$$

つまりは

$$
\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{B}}'(t',\,\vec{\boldsymbol{x}}') &\approx \vec{\boldsymbol{B}}(t,\,\vec{\boldsymbol{x}}) + \frac{\vec{\boldsymbol{v}} \times \left(-\vec{\boldsymbol{\nabla}}\phi(t,\,\vec{\boldsymbol{x}}) - \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t}(t,\vec{\boldsymbol{x}})\right)}{c^2} \\
&= \vec{\boldsymbol{B}}(t,\,\vec{\boldsymbol{x}}) + \frac{\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{E}}(t,\,\vec{\boldsymbol{x}})}{c^2}。
\end{aligned}
\tag{181}
$$

まとめると、

$$
\vec{\boldsymbol{E}}'(t',\,\vec{\boldsymbol{x}}') \approx \vec{\boldsymbol{E}}(t,\,\vec{\boldsymbol{x}}) - \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}(t,\,\vec{\boldsymbol{x}})、 \tag{182}
$$

$$
\vec{\boldsymbol{B}}'(t',\,\vec{\boldsymbol{x}}') \approx \vec{\boldsymbol{B}}(t,\,\vec{\boldsymbol{x}}) + \frac{\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{E}}(t,\,\vec{\boldsymbol{x}})}{c^2}、 \tag{183}
$$

となる。ここからさらに $\vec{\boldsymbol{v}}/c \to 0$ の極限を取ると式 (85)、(86) に帰着する。

4 まとめ

駆け足で、以下のことを見てきました。学部で習ったニュートン重力はガリレイ不変であること。電磁気力はガリレイ不変ではないこと。ガリレイ・ブーストをローレンツ・ブーストに一般化すると、電磁気力をローレンツ不変（ポワンカレ不変）にできること。これを特殊相対論ということ。ローレンツ・ブーストの微小極限がガリレイ・ブーストに帰着すること。

ここでは扱っていませんが、実はニュートン重力はローレンツ共変にはなっていません。ニュートン重力とローレンツ共変性を両立させようと思うと<ruby>**局所ローレンツ共変性**<rt>local-Lorentz covariance</rt></ruby>を通じて<ruby>**一般共変性**<rt>general covariance</rt></ruby>に至り、<ruby>**一般相対論**<rt>general relativity</rt></ruby>に行きつきます。その話は本講義の範囲を超えるので他のところで勉強してください。

以上の話はすべて古典論（非量子論）の範囲でしたが、実は自然は<ruby>**量子力学**<rt>quantum mechanics</rt></ruby>で書かれています。知られている 4 つの力のうち、強い力、弱い力、電磁気力の 3 つは量子力学と特殊相対論をあわせた<ruby>**場の量子論**<rt>quantum field theory</rt></ruby>で記述できることが分かっています。重力の量子論は？まだできていません。もう 1 世紀ぐらい未完のままです。どうなるのでしょうか？楽しみですね。

以下付録

付録 A　微分形式によるマクスウェル方程式の書き換え

マクスウェル方程式はなんかごちゃごちゃしてて汚いが、**微分形式**(differential form)を使って書き直すとちょっとはきれいになる。まずはその準備のおさらい。d 次元ユークリッド空間において、一般の**微分p形式**(p-form)

$$\omega_p = \frac{1}{p!}\left(\omega_p\right)_{i_1 \ldots i_p} \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p} \tag{184}$$

のホッジ双対

$$\star\omega_p = \frac{1}{(d-p)!}\left(\star\omega_p\right)_{i_1 \ldots i_{d-p}} \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_{d-p}} \tag{185}$$

は次で与えられる:

$$\star\omega_p := \frac{1}{p!\,(d-p)!}\left(\omega_p\right)_{i_1 \ldots i_p} \epsilon_{i_1 \ldots i_p j_1 \ldots j_{d-p}} \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_{d-p}}、 \tag{186}$$

$$\left(\star\omega_p\right)_{i_1 \ldots i_{d-p}} = \frac{1}{p!}\left(\omega_p\right)_{i_1 \ldots i_p} \epsilon_{i_1 \ldots i_p j_1 \ldots j_{d-p}}、 \tag{187}$$

ここで $\star\omega_p$ は $(d-p)$ 形式、また完全反対称テンソルは

$$\epsilon_{i_1 \ldots i_d} = \begin{cases} 1 & (i_1, \ldots, i_d) \text{ が } (1, \ldots, d) \text{ の偶置換の場合、} \\ -1 & (i_1, \ldots, i_d) \text{ が } (1, \ldots, d) \text{ の奇置換の場合、} \\ 0 & \text{その他の場合。} \end{cases} \tag{188}$$

d 次元ユークリッド空間においては、p 形式のホッジ双対を 2 回とると

$$\star\star\,\omega_p = (-1)^{p(d-p)}\,\omega_p \tag{189}$$

となる。

（ちなみに、ここでは使わないけど、微小線要素が

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu \tag{190}$$

と計量 $g_{\mu\nu}$ を用いて与えられる一般の d 次元空間では、ホッジ双対はつぎであたえられる:

$$\star\omega_p := \frac{\sqrt{|g|}}{p!\,(d-p)!}\left(\omega_p\right)^{\mu_1 \ldots \mu_p} \epsilon_{\mu_1 \ldots \mu_p \nu_1 \ldots \nu_{d-p}} \mathrm{d}x^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\nu_{d-p}}、 \tag{191}$$

$$\left(\star\omega_p\right)_{\nu_1 \ldots \nu_{d-p}} = \frac{\sqrt{|g|}}{p!}\left(\omega_p\right)^{\mu_1 \ldots \mu_p} \epsilon_{\mu_1 \ldots \mu_p \nu_1 \ldots \nu_{d-p}}、 \tag{192}$$

ただし**レヴィ・チヴィタ記号**(Levi-Civita symbol) $\epsilon_{i_1 \ldots i_d}$ は式 (188) と同じで定義し、足は $g_{\mu\nu}$ およびその逆行列 $g^{\mu\nu}$ で上げ下げし、g は $g_{\mu\nu}$ の**行列式**(determinant):

$$g := \det_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}。 \tag{193}$$

なお行列式の定義から

$$g^{1\,\nu_1}\ldots g^{d\,\nu_d}\epsilon_{\nu_1\ldots\nu_d}=\det_{\mu,\nu}g^{\mu\nu}=\frac{1}{\det_{\mu,\nu}g_{\mu\nu}}=\frac{1}{g} \tag{194}$$

なので、足の上げ下げの規則から

$$\epsilon^{\mu_1\ldots\mu_d}:=g^{\mu_1\nu_1}\ldots g^{\mu_d\nu_d}\epsilon_{\nu_1\ldots\nu_d}=\frac{\epsilon_{\mu_1\ldots\mu_d}}{g}。 \tag{195}$$

したがって

$$\frac{1}{d!}\epsilon_{\mu_1\ldots\mu_d}\epsilon^{\mu_1\ldots\mu_d}=\frac{1}{g}。) \tag{196}$$

A.1　3 次元ユークリッド空間の微分形式を用いた書き換え

具体的に 3 次元ユークリッド空間において p 形式 ω_p を成分で書くと

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= \omega_0、 &(197)\\
\omega_1 &= (\omega_1)_i\ \mathrm{d}x_i、 &(198)\\
\omega_2 &= \frac{1}{2}(\omega_2)_{ij}\ \mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j、 &(199)\\
\omega_3 &= \frac{1}{3!}(\omega_3)_{ijk}\ \mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_k。 &(200)
\end{aligned}$$

それらのホッジ双対は

$$\begin{aligned}
\star\omega_0 &= \frac{1}{3!}\omega_0\epsilon_{ijk}\,\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_k、 & (\star\omega_0)_{ijk} &= \omega_0\epsilon_{ijk} &(201)\\
\star\omega_1 &= \frac{1}{2}(\omega_1)_i\,\epsilon_{ijk}\,\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_k、 & (\star\omega_1)_{jk} &= (\omega_1)_i\,\epsilon_{ijk}、 &(202)\\
\star\omega_2 &= \frac{1}{2}(\omega_2)_{ij}\,\epsilon_{ijk}\,\mathrm{d}x_k、 & (\star\omega_2)_k &= \frac{1}{2}(\omega_2)_{ij}\,\epsilon_{ijk}、 &(203)\\
\star\omega_3 &= \frac{1}{3!}(\omega_3)_{ijk}\,\epsilon_{ijk}、 & \star\omega_3 &= \frac{1}{3!}(\omega_3)_{ijk}\,\epsilon_{ijk}、 &(204)
\end{aligned}$$

である。[*11] ちなみにもういちどやると $\star\star\omega_p=\omega_p$ が得られる。あと体積要素は

$$\star 1=\frac{1}{3!}\epsilon_{ijk}\,\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_k=\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3 \tag{205}$$

で、これを積分したのが体積になりますね:

$$\mathrm{vol}\,M=\int_M\star 1。 \tag{206}$$

あるいは以下のようにも書ける:

[*11] 特に

$$\star(\mathrm{d}x_i)=\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\,\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_k。$$

である。

$$\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_k = \epsilon_{ijk} \star 1。\tag{207}$$

これを用いて 3 形式は次のようにも書き換えられる

$$\omega_3 = \frac{1}{3!} (\omega_3)_{ijk} \, \epsilon_{ijk} \star 1 = (\omega_3)_{123} \, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3。\tag{208}$$

一般に 1 形式 $\omega = \omega_i \, \mathrm{d}x_i$ の **外微分**（exterior derivative）をとると、

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}x_i \wedge \partial_i \omega = \partial_i \omega_j \, \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = \frac{1}{2} (\partial_i \omega_j - \partial_j \omega_i) \, \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j。\tag{209}$$

外微分については**演算子**（operator）として次が成り立つんでしたね:

$$\mathrm{d}\mathrm{d} = \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \, \partial_i \partial_j = 0。\tag{210}$$

式 (209) からさらにホッジ双対をとると

$$\star (\mathrm{d}\omega) = \frac{1}{2} (\partial_i \omega_j - \partial_j \omega_i) \, \epsilon_{ijk} \, \mathrm{d}x_k = \left(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{\omega}} \right)_k \mathrm{d}x_k。\tag{211}$$

回転（rotation, curl）が出てきた！

あるいは先に $\omega = \omega_i \, \mathrm{d}x_i$ のホッジ双対を取ると

$$\star\omega = \frac{1}{2} \omega_i \epsilon_{ijk} \, \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_k。\tag{212}$$

さらに外微分を取ると

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\star\omega) = \mathrm{d}x_l \wedge \partial_l (\star\omega) &= \frac{1}{2} \partial_l \omega_i \, \epsilon_{ijk} \, \mathrm{d}x_l \wedge \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_k = \frac{1}{2} \partial_l \omega_i \, \epsilon_{ijk} \epsilon_{ljk} \star 1 \\ &= \frac{1}{2} \partial_l \omega_i \, (\delta_{il}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{jl}) \star 1 = \partial_i \omega_i \star 1 = \left(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}} \right) \star 1、\end{aligned}\tag{213}$$

ここで

$$\epsilon_{i_1 j_1 k} \epsilon_{i_2 j_2 k} = \delta_{i_1 i_2} \delta_{j_1 j_2} - \delta_{i_1 j_2} \delta_{j_1 i_2}\tag{214}$$

を用いた。**発散**（divergence）が出てきた！ちなみにもう一度ホッジ双対をとると

$$\star \mathrm{d} \star \omega = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}}。\tag{215}$$

電磁場 $\vec{\boldsymbol{E}}$、$\vec{\boldsymbol{B}}$ から次のような 1 形式をつくる:

$$E := E_i \, \mathrm{d}x_i、\qquad B := B_i \, \mathrm{d}x_i、\tag{216}$$

ここで i については（相変わらず）断りなく 1 から 3 まで和を取ってる記法。3 次元の微分形式で書かれたマクスウェル方程式は、

$$\mathrm{d} \star E = \star\rho、\qquad \star \mathrm{d}B = \frac{\partial E}{\partial t} + j、\tag{217}$$

$$\mathrm{d} \star B = 0、\qquad \star \mathrm{d}E = -\frac{\partial B}{\partial t}、\tag{218}$$

ここで

$$j := j_i \, \mathrm{d}x_i。 \tag{219}$$

この形なら、$\star\star = 1$ と $\mathrm{dd} = 0$ から連続の式

$$0 = \star\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{d}\star j、\qquad 0 = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \star\mathrm{d}\star j、 \tag{220}$$

も一目瞭然。式 (217) の電荷密度も、$\star\rho = \rho\star 1$ なので、ちゃんと体積要素に比例して出てきて密度っぽい感じですね。

$\mathrm{d}\star B = 0$ なので、**ポワンカレの補題**(Poincaré lemma)により、

$$\star B = \mathrm{d}A \tag{221}$$

なる 1 形式 A が存在する。これのホッジ双対を取ると

$$B = \star\mathrm{d}A、 \tag{222}$$

すなわち、式 (211) より

$$B_i \, \mathrm{d}x_i = \left(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{A}}\right)_i \mathrm{d}x_i。 \tag{223}$$

式 (56) が出てきた！

式 (222) を $\star\mathrm{d}E = -\partial B/\partial t$ に代入して両辺のホッジ双対をとると

$$\mathrm{d}\left(E + \frac{\partial A}{\partial t}\right) = 0。 \tag{224}$$

ポワンカレの補題から

$$E + \frac{\partial A}{\partial t} = -\mathrm{d}\phi \tag{225}$$

なる 0 形式 ϕ が存在する（マイナス符号は便宜のため)。すなわち

$$E_i \, \mathrm{d}x_i = \left(-\partial_i\phi - \frac{\partial A_i}{\partial t}\right) \mathrm{d}x_i。 \tag{226}$$

式 (55) が出てきた！ 結局、むかし電磁気で出てきたヘルムホルツの定理とは、ポワンカレの補題の特別な場合であったということですね。

以上得られた電磁場とスカラー・ベクトルポテンシャルの関係をまとめると、

$$E = -\mathrm{d}\phi - \frac{\partial A}{\partial t}、 \tag{227}$$

$$B = \star\mathrm{d}A。 \tag{228}$$

ゲージ変換は、0 形式 χ を用いて

$$\phi \to \phi' = \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}、 \tag{229}$$

$$A \to A' = A + \mathrm{d}\chi、 \tag{230}$$

と書けます。

A.2　4 次元ミンコフスキー空間の微分形式を用いた書き換え

具体的に 4 次元ミンコフスキー空間において p 形式 ω_p を成分で書くと

$$\omega_0 = \omega_0\text{、} \tag{231}$$
$$\omega_1 = (\omega_1)_\mu \, \mathrm{d}x^\mu\text{、} \tag{232}$$
$$\omega_2 = \frac{1}{2}(\omega_2)_{\mu\nu} \, \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu\text{、} \tag{233}$$
$$\omega_3 = \frac{1}{3!}(\omega_3)_{\mu\nu\rho} \, \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\rho\text{、} \tag{234}$$
$$\omega_4 = \frac{1}{4!}(\omega_4)_{\mu\nu\rho\sigma} \, \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\sigma\text{。} \tag{235}$$

こんどは（ちょっとだけ）非自明な計量 η が入っているので足の上下に意味があることに注意。完全反対称テンソルを

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ が } (0,1,2,3) \text{ の偶置換、} \\ -1 & (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ が } (0,1,2,3) \text{ の奇置換、} \\ 0 & \text{その他、} \end{cases} \tag{236}$$

とする。いま $\eta^{\mu\nu}$ や $\eta_{\mu\nu}$ で足を上げ下げしてるので、

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\text{、} \qquad \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -4!\text{、} \tag{237}$$

に注意。4 次元のホッジ双対を $*$ で書くことにすると、

$$*\omega_0 = \frac{1}{4!}\omega_0 \, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \, \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\sigma\text{、} \qquad (*\omega_0)_{\mu\nu\rho\sigma} = \omega_0 \, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \tag{238}$$
$$*\omega_1 = \frac{1}{3!}(\omega_1)^\mu \, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \, \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\sigma\text{、} \qquad (*\omega_1)_{\nu\rho\sigma} = (\omega_1)^\mu \, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\text{、} \tag{239}$$
$$*\omega_2 = \frac{1}{4}(\omega_2)^{\mu\nu} \, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \, \mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\sigma\text{、} \qquad (*\omega_2)_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\omega_2)^{\mu\nu} \, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\text{、} \tag{240}$$
$$*\omega_3 = \frac{1}{3!}(\omega_3)^{\mu\nu\rho} \, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \, \mathrm{d}x^\sigma\text{、} \qquad (*\omega_3)_\sigma = \frac{1}{3!}(\omega_3)^{\mu\nu\rho} \, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\text{、} \tag{241}$$
$$*\omega_4 = \frac{1}{4!}(\omega_4)^{\mu\nu\rho\sigma} \, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\text{、} \qquad *\omega_4 = \frac{1}{4!}(\omega_4)^{\mu\nu\rho\sigma} \, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\text{、} \tag{242}$$

である。一般に 4 次元ミンコフスキー空間で p 形式のホッジ双対を 2 回とると

$$**\omega_p = -(-1)^{p(4-p)} \, \omega_p\text{。} \tag{243}$$

ユークリッド空間の場合 (189) と比べて余分なマイナス符号は式 (237) から来ている（もっと一般には式 (195) の行列式 g から来ている）。体積要素は

$$*1 = \frac{1}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \, \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\sigma = \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3\text{。} \tag{244}$$

これから

$$\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\sigma = -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} * 1 \tag{245}$$

で、一般の 4 形式は

$$\omega_4 = -\frac{1}{4!} (\omega_4)_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} * 1 = (\omega_4)_{0123} \, \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 \tag{246}$$

とも書ける。

4 元ベクトルポテンシャルと電流密度から 1 形式を作る:

$$A := A_\mu \, \mathrm{d}x^\mu、 \qquad j := j_\mu \, \mathrm{d}x^\mu。 \tag{247}$$

場の強さは A の外微分となっている:

$$\begin{aligned} F &= \mathrm{d}A、\\ \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \, \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu &= \frac{1}{2} \left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu。 \end{aligned} \tag{248}$$

4 次元のホッジ双対は

$$*F = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \, \mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\sigma、 \qquad (*F)_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}。 \tag{249}$$

さらに外微分を取ると

$$\mathrm{d} * F = \mathrm{d}x^\kappa \wedge \partial_\kappa * F = \frac{1}{4} \partial_\kappa F^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \, \mathrm{d}x^\kappa \wedge \mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\sigma \tag{250}$$

もっぺんホッジ双対をとると

$$\begin{aligned} *\mathrm{d} * F &= \frac{1}{4} \partial_\kappa F^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\kappa\rho\sigma\tau} \, \mathrm{d}x_\tau = \frac{1}{4} \partial_\kappa F^{\mu\nu} \left(\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\kappa\tau\rho\sigma}\right) \mathrm{d}x_\tau \\ &= \frac{1}{4} \partial_\kappa F^{\mu\nu} (-2) \left(\delta^\kappa_\mu \delta^\tau_\nu - \delta^\tau_\mu \delta^\kappa_\nu\right) \mathrm{d}x_\tau = -\frac{1}{2} \left(\partial_\mu F^{\mu\nu} \, \mathrm{d}x_\nu - \partial_\nu F^{\mu\nu} \, \mathrm{d}x_\mu\right) = -\partial_\mu F^{\mu\nu} \mathrm{d}x_\nu。 \end{aligned} \tag{251}$$

というわけでマクスウェル方程式は

$$*\mathrm{d} * F = -j、 \tag{252}$$

$$\mathrm{d}F = 0。 \tag{253}$$

(いま自然単位系で書いてる。)

付録 B　ベクトル解析おさらい

この章だけ他の講義ノートの使い回しなので強調のしかた等が異なるが、そのままにしてある。

B.1　ベクトル解析の恒等式

ベクトル恒等式: 任意のベクトル場 $\vec{\boldsymbol{A}}$ に対して、

$$
\begin{aligned}
\left[\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \left(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{A}}\right)\right]_i &= \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \partial_j \left(\sum_{l,m} \epsilon_{klm} \partial_l A_m \right) = \sum_{j,l,m} \left(\sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \right) \partial_j \partial_l A_m \\
&= \sum_{j,l,m} \left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \right) \partial_j \partial_l A_m = \sum_{j,l,m} \delta_{il}\delta_{jm} \partial_j \partial_l A_m - \sum_{j,l,m} \delta_{im}\delta_{jl} \partial_j \partial_l A_m \\
&= \left(\sum_l \delta_{il} \partial_l \right) \left(\sum_{j,m} \delta_{jm} \partial_j A_m \right) - \left(\sum_{j,l} \delta_{jl} \partial_j \partial_l \right) \left(\sum_m \delta_{im} A_m \right) \\
&= \partial_i \left(\sum_j \partial_j A_j \right) - \left(\sum_j \partial_j^2 \right) A_i = \partial_i \left(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} \right) - \nabla^2 A_i \\
&= \left[\vec{\boldsymbol{\nabla}} \left(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} \right) - \nabla^2 \vec{\boldsymbol{A}} \right]_i 、
\end{aligned} \tag{254}
$$

すなわち

任意のベクトル場 $\vec{\boldsymbol{A}}$ に対して、

$$
\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \left(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{A}}\right) = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \left(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} \right) - \nabla^2 \vec{\boldsymbol{A}}。 \tag{255}
$$

ちなみにもうちょっと一般の場合のベクトル恒等式: 任意のベクトル $\vec{\boldsymbol{A}}$、$\vec{\boldsymbol{B}}$、$\vec{\boldsymbol{C}}$ に対して、

$$
\begin{aligned}
\left[\vec{\boldsymbol{A}} \times \left(\vec{\boldsymbol{B}} \times \vec{\boldsymbol{C}}\right)\right]_i &= \sum_{j,k} \left(\epsilon_{ijk} A_j \left(\sum_{l,m} \epsilon_{klm} B_l C_m \right) \right) = \sum_{j,l,m} \left(\sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \right) A_j B_l C_m \\
&= \sum_{j,l,m} \left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{lj} \right) A_j B_l C_m = \sum_{j,l,m} \delta_{il}\delta_{jm} A_j B_l C_m - \sum_{j,l,m} \delta_{im}\delta_{lj} A_j B_l C_m \\
&= \sum_j A_j B_i C_j - \sum_j A_j B_j C_i = \sum_j A_j B_i C_j - \left(\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} \right) C_i。
\end{aligned} \tag{256}
$$

一般にはこの表式で終わりだが、

$\vec{\boldsymbol{A}}$ と $\vec{\boldsymbol{B}}$ が可換 (すなわち任意の $i, j = 1, 2, 3$ に対して $A_i B_j = B_j A_i$) なら

$$
\vec{\boldsymbol{A}} \times \left(\vec{\boldsymbol{B}} \times \vec{\boldsymbol{C}}\right) = \vec{\boldsymbol{B}} \left(\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{C}} \right) - \left(\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} \right) \vec{\boldsymbol{C}}、 \tag{257}
$$

一方、$\vec{\boldsymbol{B}}$ と $\vec{\boldsymbol{C}}$ が可換なら

$$
\vec{\boldsymbol{A}} \times \left(\vec{\boldsymbol{B}} \times \vec{\boldsymbol{C}}\right) = \left(\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{C}} \right) \vec{\boldsymbol{B}} - \left(\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} \right) \vec{\boldsymbol{C}}。 \tag{258}
$$

式 (257) を用いると式 (255) が得られる。

B.2 フーリエ変換

関数 $f(\vec{\boldsymbol{x}})$ のフーリエ変換は

$$\widetilde{f}(\vec{\boldsymbol{k}}) = \int \frac{\mathrm{d}^3 x}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}} f(\vec{\boldsymbol{x}})、 \tag{259}$$

で与えらえる。フーリエ逆変換は

$$f(\vec{\boldsymbol{x}}) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}} \widetilde{f}(\vec{\boldsymbol{k}})。 \tag{260}$$

詳しくはウィキペディアでも読んでください。

B.3 デルタ関数

ディラックのデルタ関数 $\delta(x)$ は

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & (x = 0 \text{ のとき})、\\ 0 & (x \neq 0 \text{ のとき})、\end{cases} \tag{261}$$

および、

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x'\, f(x')\, \delta(x - x') \tag{262}$$

が任意の関数 f について成り立つ、

ということから定義される。特に、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x'\, \delta(x - x') = 1、 \qquad \delta(-x) = \delta(x)、 \tag{263}$$

$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}、 \qquad \delta(f(x)) = \sum_{f(y)=0 \text{ なる全ての } y} \frac{\delta(x - y)}{|f'(y)|}、 \tag{264}$$

等々。同様に、3 次元空間のデルタ関数は（デカルト座標を $\vec{\boldsymbol{x}} = (x_1, x_2, x_3)$ としたとき）、

$$\delta^3(\vec{\boldsymbol{x}}) = \delta(x_1)\, \delta(x_2)\, \delta(x_3) = \begin{cases} \infty & (\vec{\boldsymbol{x}} = 0 \text{ のとき})、\\ 0 & (\vec{\boldsymbol{x}} \neq 0 \text{ のとき})、\end{cases} \tag{265}$$

および、

$$f(\vec{\boldsymbol{x}}) = \int \mathrm{d}^3 x'\, f(\vec{\boldsymbol{x}}')\, \delta^3(\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{x}}') \tag{266}$$

が任意の関数 f について成り立つ、ということから定義される、ただしここでは f はスカラー関数にかぎらず、任意のベクトルやテンソルであったとしても成立するものとする。

B.4 ヘルムホルツ分解定理のための準備

補題 1. デルタ関数のフーリエ表示: 一般に d 次元空間において（ってこの講義では $d=3$ の場合のみでよいけど)、

$$\boxed{\delta^d(\vec{\boldsymbol{x}}) = \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}}。 \tag{267}}$$

証明. 実際にフーリエ変換してみる:

$$\widetilde{\delta}^d(\vec{\boldsymbol{k}}) = \int \frac{\mathrm{d}^d x}{(2\pi)^{d/2}} e^{-i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}} \delta^d(\vec{\boldsymbol{x}}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}。 \tag{268}$$

したがって

$$\delta^d(\vec{\boldsymbol{x}}) = \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^{d/2}} \widetilde{\delta}^d(\vec{\boldsymbol{k}}) e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}} = \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}}。 \tag{269}$$

□

一般に d 次元空間において（座標の添字を右上につけて）行列表示および成分表示で

$$\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^d \end{bmatrix} = \left(x^1, \ldots, x^d\right)、 \qquad \vec{\boldsymbol{\nabla}} = \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_d \end{bmatrix} = (\partial_1, \ldots, \partial_d) = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^d}\right)、 \tag{270}$$

等々と書く（この講義では $d=3$ の場合だけでよいけど)。このとき、

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{x}} = d、 \tag{271}$$

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \left(\vec{\boldsymbol{x}}^2\right) = 2\vec{\boldsymbol{x}}、 \tag{272}$$

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} |\vec{\boldsymbol{x}}| = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \sqrt{\vec{\boldsymbol{x}}^2} = \frac{2\vec{\boldsymbol{x}}}{2\sqrt{\vec{\boldsymbol{x}}^2}} = \frac{\vec{\boldsymbol{x}}}{|\vec{\boldsymbol{x}}|}、 \tag{273}$$

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} |\vec{\boldsymbol{x}}|^n = n |\vec{\boldsymbol{x}}|^{n-1} \vec{\boldsymbol{\nabla}} |\vec{\boldsymbol{x}}| = n\vec{\boldsymbol{x}} |\vec{\boldsymbol{x}}|^{n-2}、 \tag{274}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 |\vec{\boldsymbol{x}}|^n &= n \left(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{x}}\right) |\vec{\boldsymbol{x}}|^{n-2} + n\vec{\boldsymbol{x}} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}} |\vec{\boldsymbol{x}}|^{n-2} \\ &= nd |\vec{\boldsymbol{x}}|^{n-2} + n(n-2)\, \vec{\boldsymbol{x}} \cdot \vec{\boldsymbol{x}} |\vec{\boldsymbol{x}}|^{n-4} \\ &= n(d+n-2) |\vec{\boldsymbol{x}}|^{n-2}、 \end{aligned} \tag{275}$$

なので、一般に $d \geq 3$ の場合、$n = -(d-2)$ ととると、

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{\boldsymbol{x}}|^{d-2}} = \begin{cases} 0 & (\vec{\boldsymbol{x}} \neq 0 \text{ のとき}) \\ \infty \text{ あるいは } -\infty & (\vec{\boldsymbol{x}} = 0 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{276}$$

となる。つまり

$$\delta^d(\vec{\boldsymbol{x}}) \propto \nabla^2 \frac{1}{|\vec{\boldsymbol{x}}|^{d-2}} \tag{277}$$

である。比例係数を求めるために、半径 r の d 次元**球**(ball) V（その表面—$d-1$ 次元**球面**(sphere)—は ∂V と書く）で積分してみよう（分かりにくければ $d=3$ と置いてしまってよい）:

$$\begin{aligned}\int_V \mathrm{d}^d x\, \nabla^2 \frac{1}{|\vec{\boldsymbol{x}}|^{d-2}} &= \int_V \mathrm{d}^d x\, \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}} \frac{1}{|\vec{\boldsymbol{x}}|^{d-2}} = \int_{\partial V} \mathrm{d}^{d-1} x\, \widehat{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}} \frac{1}{|\vec{\boldsymbol{x}}|^{d-2}} = \Omega_{d-1} r^{d-1} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^{d-2}} \\ &= -(d-2)\,\Omega_{d-1}、\end{aligned} \tag{278}$$

ここで、球面上の外向きの法線ベクトルを $\widehat{\boldsymbol{n}} = \vec{\boldsymbol{x}}/|\vec{\boldsymbol{x}}|$ とし、Ω_{d-1} は d 次元単位球の表面積（$d-1$ 次元球面の面積）で、$d=3$ の場合は（中学校で習ったとおり）$\Omega_2 = 4\pi$ である; いま、球面上では

$$\widehat{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}} = \frac{\partial}{\partial\, |\vec{\boldsymbol{x}}|} = \frac{\partial}{\partial r} \tag{279}$$

であることに注意（くわしく説明しないが直観的にはいいですよね？）。まとめると、

$$\int \mathrm{d}^3 x\, \nabla^2 \frac{1}{|\vec{\boldsymbol{x}}|} = -4\pi。 \tag{280}$$

したがって

デルタ関数のラプラシアンによる表式:

$$\delta^3(\vec{\boldsymbol{x}}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{|\vec{\boldsymbol{x}}|}。 \tag{281}$$

（ここからこの節おわりまで余談だが、一般の次元について求めるには、まず以下のガウス積分を求める:

$$I_1 := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-x^2}。 \tag{282}$$

ガウス様に従って次のようにする:

$$\begin{aligned}(I_1)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\, e^{-y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\, e^{-\left(x^2+y^2\right)} = \int_0^{\infty} 2\pi r\, \mathrm{d}r\, e^{-r^2} \\ &= \pi \int_0^{\infty} \mathrm{d}(r^2)\, e^{-r^2} = \pi \left[-e^{-r^2}\right]_{r^2=0}^{r^2=\infty} = \pi、\end{aligned} \tag{283}$$

なので、$I_1 = \sqrt{\pi}$。まとめると、

ガウス積分:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi}。 \tag{284}$$

これを用いて、

$$\int \mathrm{d}^d x\, e^{-\vec{x}^2} = (I_1)^d = \pi^{d/2}、 \tag{285}$$

一方角度積分を先にすると

$$\int \mathrm{d}^d x\, e^{-\vec{x}^2} = \Omega_{d-1} \int_0^\infty r^{d-1} \mathrm{d}r\, e^{-r^2} =: \Omega_{d-1} I_d、 \tag{286}$$

したがって

$$\Omega_{d-1} = \frac{\pi^{d/2}}{I_d}。 \tag{287}$$

あと残るのは、

$$\begin{aligned} I_d &= \int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^{d-1}\, e^{-x^2} = \int_0^\infty \mathrm{d}x \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x^d}{d}\right) e^{-x^2} = \left[\frac{x^d}{d} e^{-x^2}\right]_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^\infty \mathrm{d}x\, \frac{x^d}{d}\left(-2x e^{-x^2}\right) \\ &= \frac{2}{d}\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^{d+1} e^{-x^2} = \frac{2}{d} I_{d+2}、 \end{aligned} \tag{288}$$

つまり漸化式は

$$\begin{aligned} I_{2(n+1)} &= n I_{2n} \\ &= n\,(n-1)\, I_{2(n-1)} = \cdots = n!\, I_2 = \Gamma(n+1)\, I_2、 \end{aligned} \tag{289}$$

初項は

$$I_2 = \int_0^\infty \mathrm{d}x\, x\, e^{-x^2} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}(x^2)}{2} e^{-x^2} = \left[-\frac{e^{-x^2}}{2}\right]_{x^2=0}^{x^2=\infty} = \frac{1}{2}。 \tag{290}$$

従って、

$$I_d = \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{2}。 \tag{291}$$

まとめておこう。

> d 次元**球**(ball)の表面積、すなわち $d-1$ 次元**球面**(sphere)の面積は、半径を 1 とするとき、
>
> $$\Omega_{d-1} = \frac{2\,\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}。 \tag{292}$$

この講義では必要ないが一応ならべておくと

$$\begin{aligned} &\Omega_1 = 2\pi、 && \Omega_2 = 4\pi、 && \Omega_3 = 2\pi^2、 && \Omega_4 = \frac{8\pi^2}{3}、 && \Omega_5 = \pi^3、 \\ &\Omega_6 = \frac{16\pi^3}{15}、 && \Omega_7 = \frac{\pi^4}{3}、 && \Omega_8 = \frac{32\pi^4}{105}、 && \Omega_9 = \frac{\pi^5}{12}、 && \Omega_{10} = \frac{64\pi^5}{945}、 \end{aligned} \tag{293}$$

等々。Ω_1 は単位円周の長さ、Ω_2 が単位球面の面積にちゃんとなってますね。まとめると、

d 次元のデルタ関数は

$$\delta^d(\vec{\boldsymbol{x}}) = -\frac{1}{(d-2)\,\Omega_{d-1}}\nabla^2\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{x}}|^{d-2}}。 \tag{294}$$

以上で余談終わり。)

B.5 ヘルムホルツ分解定理

この節はウィキペディア英語版参照。

以下の式ではすべて $\vec{\boldsymbol{\nabla}}$ は $\vec{\boldsymbol{x}}$ についての微分、$\vec{\boldsymbol{\nabla}}'$ は $\vec{\boldsymbol{x}}'$ についての微分であるとして、

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{x}}) &= \int \mathrm{d}^3x'\,\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{x}}')\,\delta^3(\vec{\boldsymbol{x}}-\vec{\boldsymbol{x}}') = \int \mathrm{d}^3x'\,\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{x}}')\left(-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{x}}-\vec{\boldsymbol{x}}'|}\right) \\ &= -\frac{1}{4\pi}\nabla^2\int \mathrm{d}^3x'\,\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{x}}')}{|\vec{\boldsymbol{x}}-\vec{\boldsymbol{x}}'|}、\end{aligned} \tag{295}$$

ここで ∇^2 は $\vec{\boldsymbol{x}}$ にしかかかっていないことに注意。式 (255) より、任意のベクトル $\vec{\boldsymbol{a}}$ に対して $\nabla^2\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{\nabla}}\left(\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}\right) - \vec{\boldsymbol{\nabla}}\times\left(\vec{\boldsymbol{\nabla}}\times\vec{\boldsymbol{a}}\right)$ であるから、

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{x}}) &= -\frac{1}{4\pi}\vec{\boldsymbol{\nabla}}\left(\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\int \mathrm{d}^3x'\,\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{x}}')}{|\vec{\boldsymbol{x}}-\vec{\boldsymbol{x}}'|}\right) + \frac{1}{4\pi}\vec{\boldsymbol{\nabla}}\times\left(\vec{\boldsymbol{\nabla}}\times\int \mathrm{d}^3x'\,\frac{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{x}}')}{|\vec{\boldsymbol{x}}-\vec{\boldsymbol{x}}'|}\right) \\ &= -\frac{1}{4\pi}\vec{\boldsymbol{\nabla}}\left(\int \mathrm{d}^3x'\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{x}}')\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}}\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{x}}-\vec{\boldsymbol{x}}'|}\right) - \frac{1}{4\pi}\vec{\boldsymbol{\nabla}}\times\left(\int \mathrm{d}^3x'\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{x}}')\times\vec{\boldsymbol{\nabla}}\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{x}}-\vec{\boldsymbol{x}}'|}\right)。\end{aligned} \tag{296}$$

ここで $\vec{\boldsymbol{\nabla}}\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{x}}-\vec{\boldsymbol{x}}'|} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}'\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{x}}-\vec{\boldsymbol{x}}'|}$ を用いると、

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{x}}) = \frac{1}{4\pi}\vec{\boldsymbol{\nabla}}\left(\int \mathrm{d}^3x'\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{x}}')\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}}'\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{x}}-\vec{\boldsymbol{x}}'|}\right) + \frac{1}{4\pi}\vec{\boldsymbol{\nabla}}\times\left(\int \mathrm{d}^3x'\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{x}}')\times\vec{\boldsymbol{\nabla}}'\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{x}}-\vec{\boldsymbol{x}}'|}\right)。 \tag{297}$$

さらに部分積分を用いる:

$$\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}}\psi = -\left(\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}\right)\psi + \vec{\boldsymbol{\nabla}}\left(\vec{\boldsymbol{a}}\psi\right)、 \tag{298}$$

$$\vec{\boldsymbol{a}}\times\vec{\boldsymbol{\nabla}}\psi = \left(\vec{\boldsymbol{\nabla}}\times\vec{\boldsymbol{a}}\right)\psi - \vec{\boldsymbol{\nabla}}\times\left(\vec{\boldsymbol{a}}\psi\right)、 \tag{299}$$

ここで、下の式が上の式と符号が違うのはベクトル積をひっくり返すところからきている（成分で計算すれば示せる)。いま、$\vec{\boldsymbol{F}}$ としては無限遠方で十分早く 0 に近づくものを考えることにするとうしろの表面項はどちらも落とすことができて、[*12]

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{x}}) = -\frac{1}{4\pi}\vec{\boldsymbol{\nabla}}\left(\int \mathrm{d}^3x'\left(\vec{\boldsymbol{\nabla}}'\cdot\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{x}}')\right)\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{x}}-\vec{\boldsymbol{x}}'|}\right) + \frac{1}{4\pi}\vec{\boldsymbol{\nabla}}\times\left(\int \mathrm{d}^3x'\left(\vec{\boldsymbol{\nabla}}'\times\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{x}}')\right)\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{x}}-\vec{\boldsymbol{x}}'|}\right)、 \tag{300}$$

[*12] 表面項もちゃんとまじめに計算すると、具体的には $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{x}})$ が $|\vec{\boldsymbol{x}}|\to\infty$ で $|\vec{\boldsymbol{x}}|^{-1}$ より速く 0 に近づけば OK である事がわかる。詳しくは Wikipedia 英語版の Helmholtz decomposition の項を参照。

を得る。無限遠方で落ちる、というのは物理的には宇宙の彼方まで永遠と広がったような場は考えない、というごく自然な仮定。以上をまとめると、

定理 1 (**ヘルムホルツ分解** Helmholtz decomposition). 無限遠方で十分速く 0 に近づく $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{x}})$ について、

$$\Phi(\vec{\boldsymbol{x}}) = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3x' \frac{\vec{\boldsymbol{\nabla}}' \cdot \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{x}}')}{|\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{x}}'|}、\qquad \vec{\boldsymbol{C}}(\vec{\boldsymbol{x}}) = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3x' \frac{\vec{\boldsymbol{\nabla}}' \times \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{x}}')}{|\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{x}}'|}、 \tag{301}$$

とすると、

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{x}}) = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\Phi(\vec{\boldsymbol{x}}) + \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{C}}(\vec{\boldsymbol{x}})、 \tag{302}$$

という分解が得られる。

系 2. 至るところで $\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} = 0$ のとき

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{C}} \tag{303}$$

となる $\vec{\boldsymbol{C}}$ が存在する。

系 3. 至るところで $\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{F}} = 0$ のとき

$$\vec{\boldsymbol{F}} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\Phi \tag{304}$$

となる Φ が存在する。

B.6 ヘルムホルツ分解定理の、フーリエ変換による別証明

この節はウィキペディア英語版を参照。

定理 2 (**ヘルムホルツ分解** Helmholtz's decomposition). ベクトル場 $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{x}})$ は、適当なスカラー場 $\Phi(\vec{\boldsymbol{x}})$ とベクトル場 $\vec{\boldsymbol{C}}(\vec{\boldsymbol{x}})$ をもちいて次のように分解できる:

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{x}}) = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\Phi(\vec{\boldsymbol{x}}) + \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{C}}(\vec{\boldsymbol{x}})。 \tag{305}$$

証明. 次のようにフーリエ変換:

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{x}}) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^{3/2}} \vec{\boldsymbol{G}}(\vec{\boldsymbol{k}})\, e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}}、\qquad \vec{\boldsymbol{G}}(\vec{\boldsymbol{k}}) = \int \mathrm{d}^3x\, \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{x}})\, e^{-i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}}。 \tag{306}$$

念のため成分でも書くと、$j = 1, 2, 3$ について

$$F_j(\vec{\boldsymbol{x}}) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^{3/2}} G_j(\vec{\boldsymbol{k}}) e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}}、 \tag{307}$$

行列表示では、

$$\begin{bmatrix} F_1(\vec{\boldsymbol{x}}) \\ F_2(\vec{\boldsymbol{x}}) \\ F_3(\vec{\boldsymbol{x}}) \end{bmatrix} = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \begin{bmatrix} G_1(\vec{\boldsymbol{k}}) \\ G_2(\vec{\boldsymbol{k}}) \\ G_3(\vec{\boldsymbol{k}}) \end{bmatrix} e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}} = \begin{bmatrix} \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^{3/2}} G_1(\vec{\boldsymbol{k}}) e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}} \\ \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^{3/2}} G_2(\vec{\boldsymbol{k}}) e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}} \\ \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^{3/2}} G_3(\vec{\boldsymbol{k}}) e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}} \end{bmatrix}、 \tag{308}$$

等々、いろいろな書き方ができるがぜんぶ同じもの。このとき $\vec{\boldsymbol{G}}$ から次のスカラー $G_\perp$ とベクトル $\vec{\boldsymbol{G}}_\parallel$ を定義する:

$$G_\perp(\vec{\boldsymbol{k}}) := \vec{\boldsymbol{G}}(\vec{\boldsymbol{k}}) \cdot \widehat{\boldsymbol{k}}、 \tag{309}$$

$$\vec{\boldsymbol{G}}_\parallel(\vec{\boldsymbol{k}}) := \vec{\boldsymbol{G}}(\vec{\boldsymbol{k}}) \times \widehat{\boldsymbol{k}}、 \tag{310}$$

ただし

$$k := \left|\vec{\boldsymbol{k}}\right|、 \qquad \widehat{\boldsymbol{k}} := \frac{\vec{\boldsymbol{k}}}{k}、 \qquad \left|\widehat{\boldsymbol{k}}\right| = 1。 \tag{311}$$

このとき（式 (310) を代入することにより）

$$\widehat{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{G}}_\parallel(\vec{\boldsymbol{k}}) = \left(\widehat{\boldsymbol{k}} \cdot \widehat{\boldsymbol{k}}\right) \vec{\boldsymbol{G}}(\vec{\boldsymbol{k}}) - \left(\widehat{\boldsymbol{k}} \cdot \vec{\boldsymbol{G}}(\vec{\boldsymbol{k}})\right) \widehat{\boldsymbol{k}} = \vec{\boldsymbol{G}}(\vec{\boldsymbol{k}}) - G_\perp(\vec{\boldsymbol{k}})\, \widehat{\boldsymbol{k}}、 \tag{312}$$

が得られる。すなわち

$$\vec{\boldsymbol{G}}(\vec{\boldsymbol{k}}) = \widehat{\boldsymbol{k}}\, G_\perp(\vec{\boldsymbol{k}}) + \widehat{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{G}}_\parallel(\vec{\boldsymbol{k}}) \tag{313}$$

と分解できた。このとき

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{x}}) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^{3/2}}\, e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}} \left[\widehat{\boldsymbol{k}}\, G_\perp(\vec{\boldsymbol{k}}) + \widehat{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{G}}_\parallel(\vec{\boldsymbol{k}})\right]。 \tag{314}$$

この表式をぐっと睨むと次のような関数が私達を幸せにしてくれることが分かる:

$$\Phi(\vec{\boldsymbol{x}}) := i \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}}\, G_\perp(\vec{\boldsymbol{k}})}{k}、 \tag{315}$$

$$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{x}}) := -i \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}}\, \vec{\boldsymbol{G}}_\parallel(\vec{\boldsymbol{k}})}{k}。 \tag{316}$$

実際、

$$-\vec{\boldsymbol{\nabla}}\Phi(\vec{\boldsymbol{x}}) = -i \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}} \frac{i\vec{\boldsymbol{k}}}{k} G_\perp(\vec{\boldsymbol{k}}) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}}\, \widehat{\boldsymbol{k}}\, G_\perp(\vec{\boldsymbol{k}})、 \tag{317}$$

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{x}}) = -i \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}} i\vec{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{G}}_\parallel(\vec{\boldsymbol{k}})}{k} = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}}\, \widehat{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{G}}_\parallel(\vec{\boldsymbol{k}})、 \tag{318}$$

なので（式 (314) と見比べて）式 (305) を満たしていることがわかる。 □

系 4. 次を定義する:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_\perp(\vec{\boldsymbol{x}}) := \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^{3/2}}\, e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}}\,\widehat{\boldsymbol{k}}\,G_\perp(\vec{\boldsymbol{k}}) = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\Phi(\vec{\boldsymbol{x}})、\tag{319}$$

$$\vec{\boldsymbol{F}}_\parallel(\vec{\boldsymbol{x}}) := \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^{3/2}}\, e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}}\,\widehat{\boldsymbol{k}}\times\vec{\boldsymbol{G}}_\parallel(\vec{\boldsymbol{k}}) = \vec{\boldsymbol{\nabla}}\times\vec{\boldsymbol{C}}(\vec{\boldsymbol{x}})。\tag{320}$$

これにより、$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{x}})$ は、

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}\times\vec{\boldsymbol{F}}_\perp(\vec{\boldsymbol{x}}) = 0、\qquad \vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\vec{\boldsymbol{F}}_\parallel(\vec{\boldsymbol{x}}) = 0、\tag{321}$$

を満たす 2 つの場に分解できた。

系 5. ヘルムホルツ分解 (305) が与えられるとき、

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\vec{\boldsymbol{F}} = -\nabla^2\Phi、\tag{322}$$

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}\times\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{\nabla}}\left(\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\vec{\boldsymbol{C}}\right) - \nabla^2\vec{\boldsymbol{C}}。\tag{323}$$

証明. やるだけ。 □

系 6. ヘルムホルツ分解 (305) が与えられたとき、

$$0 = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\Psi + \vec{\boldsymbol{\nabla}}\times\vec{\boldsymbol{D}}\tag{324}$$

を満たすような Ψ と $\vec{\boldsymbol{D}}$ の組を加えた

$$\Phi' = \Phi + \Psi、\qquad \vec{\boldsymbol{C}}' = \vec{\boldsymbol{C}} + \vec{\boldsymbol{D}}、\tag{325}$$

もまた別のヘルムホルツ分解を与える:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\Phi' + \vec{\boldsymbol{\nabla}}\times\vec{\boldsymbol{C}}'。\tag{326}$$

証明. 微分演算の線形性から自明。 □

系 7. 系 6 のとき、Ψ と $\vec{\boldsymbol{D}}$ は以下を満たす:

$$\nabla^2\Psi = 0、\tag{327}$$

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}\left(\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\vec{\boldsymbol{D}}\right) - \nabla^2\vec{\boldsymbol{D}} = 0。\tag{328}$$

証明. 式 (324) の発散 $\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot$ をとると (327) が得られ、式 (324) の回転 $\vec{\boldsymbol{\nabla}}\times$ をとると (328) が得られる。 □

系 8. $\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\vec{\boldsymbol{F}} = 0$ のとき、

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{\nabla}}\times\vec{\boldsymbol{C}}\tag{329}$$

を満たす $\vec{\boldsymbol{C}}$ が存在する。

証明. $\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\vec{\boldsymbol{F}}$ に分解 (305) を代入すると式 (322) なので、今の場合は

$$\nabla^2\Phi = 0 \tag{330}$$

である。系 6、7 より、Φ に $\nabla^2\Psi = 0$ を満たす任意の関数 Ψ を足してもやはりヘルムホルツ分解を与える。つまり、Ψ として $\Psi = -\Phi$ と取り、$\vec{\boldsymbol{D}}$ は (324) から決めれば、$\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{\nabla}}\times\vec{\boldsymbol{C}}'$ である。 □

系 9. $\vec{\boldsymbol{\nabla}}\times\vec{\boldsymbol{F}} = 0$ のとき、

$$\vec{\boldsymbol{F}} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\Phi \tag{331}$$

を満たす Φ が存在する。

証明. $\vec{\boldsymbol{\nabla}}\times\vec{\boldsymbol{F}}$ に分解 (305) を代入すると式 (323) なので、今の場合は

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}\left(\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\vec{\boldsymbol{C}}\right) - \nabla^2\vec{\boldsymbol{C}} = 0 \tag{332}$$

が成立。系 6、7 により、$\vec{\boldsymbol{C}}$ に $\vec{\boldsymbol{\nabla}}\left(\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\vec{\boldsymbol{D}}\right) - \nabla^2\vec{\boldsymbol{D}} = 0$ を満たす任意の $\vec{\boldsymbol{D}}$ を足してもやはりヘルムホルツ分解を与える。つまり、$\vec{\boldsymbol{D}}$ として $-\vec{\boldsymbol{C}}$ と取り、Ψ は (324) から決めれば、$\vec{\boldsymbol{F}} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\Phi'$ である。 □