電弱相互作用の修正標準理論

斎藤　武　関学理学部、物理・宇宙学科

Sec.1 で Weinberg-Salam(WS)の電弱相互作用の標準理論を簡潔にまとめ、Sec. 2 でその修正理論の一つとして、左右対称的理論を紹介しよう。関学理学部物理学科で行われてきた講義を纏めたものである。

１．Weinberg-Salam の電弱相互作用の標準模型

WS の模型は$SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ群に基づいている。以下簡単のため電子とニュートリノだけの系を考える。

$L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$=$SU(2)_L$の 2 重項、$R = e_R = 1$ 重項とし、ν_Rは考えない。Suffix のLはスピン左巻きを，Rは右巻きを表す。Free Lagrangian は次で与えられる：

(1)　$L_0 = \bar{L} i\gamma^\mu \partial_\mu L + \bar{R} i\gamma^\mu \partial_\mu R$

質量は 0 としている。これにゲージ原理にしたがって、$SU(2)_L \times U(1)_Y$ゲージ場を導入する。

それには(1)の中の微分を共変微分に置き換えればよい：

(2)　$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu - i\frac{1}{2}g'YB_\mu - i\frac{1}{2}g\tau_a A_\mu^a$ ，(第 1 の微分に対し, Y=－1)
(3)　$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu - i\frac{1}{2}g'YB_\mu,$　　　　(第 2 の微分に対し, Y=－2)

$A_\mu^a,\ a = 1, 2, 3$は$SU(2)_L$ゲージ場、B_μは$U(1)_Y$ゲージ場、$\tau_a/2$は$SU(2)$の生成子、Yはそれぞれの超電荷を表し、電荷$Q = (\tau_3 + Y)/2$で定義される。

これに伴って, $field\ strengths\ \ of\ A_\mu^a, B_\mu$で書かれたエネルギー項を付け加える:

(4)　$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}$
(5)　$F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$
(6)　$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\varepsilon_{abc}A_\mu^b A_\nu^c$

ε_{abc}は完全反対称テンソルである。微分以外の項は相互作用を表す：

(7)　$L_{int} = -\bar{L}\gamma\left(\frac{1}{2}g'B - \frac{1}{2}g\tau_a A^a\right)L - \bar{R}\gamma g'BR$

$\tau_a\ (a = 1, 2, 3)$は Pauli 行列である。$a = 1, 2$の部分は、$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$を用いる

と、

(8)　$\frac{g}{2}(\tau_1 A^1 + \tau_2 A^2) = \frac{g}{2}\begin{pmatrix} 0 & A^1 - iA^2 \\ A^1 + iA^2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{g}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}W^+ \\ \sqrt{2}W^- & 0 \end{pmatrix}$

ここで

(9)　$W_\mu^\pm = (A_\mu^1 \mp iA_\mu^2)/\sqrt{2}$

を用いた。また$a = 3$ の部分は、$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$より、

(10)　$-\frac{1}{2}g'B + \frac{1}{2}g\tau_3 A^3 = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} g'B - gA^3 & 0 \\ 0 & g'B + gA^3 \end{pmatrix}$

まとめると

(11)　$L_{int} = -\overline{\nu_L}\gamma\frac{g'B-gA^3}{2}\nu_L - \overline{e_L}\gamma\frac{g'B+gA^3}{2}e_L - \overline{e_R}\gamma g'Be_R + \frac{g}{\sqrt{2}}(\overline{\nu_L}\gamma e_L W^+ + \overline{e_L}\gamma\nu_L W^-)$

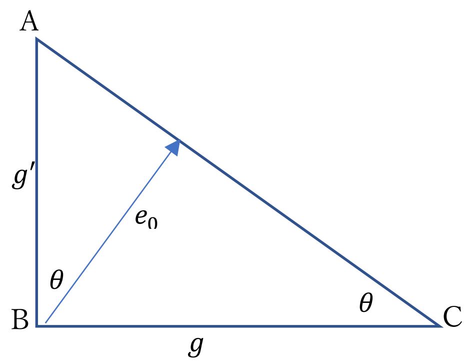
新しい変数A_μ, Z_μの導入

(12)　$\begin{pmatrix} B_\mu \\ A_\mu^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_\mu c - Z_\mu s \\ A_\mu s + Z_\mu c \end{pmatrix}$

によって将来中性ボソン質量の eigenstate になる A_μ, Z_μを導入する。A_μを電磁場と見なす。θは Weinberg angle と言われる。(11)の 1 項、2 項のゲージ項は次のようになる：

$$g'B - gA^3 = A(g'c - gs) - Z(g's + gc)$$
$$g'B + gA^3 = A(g'c + gs) + Z(-g's + gc)$$

A_μが電磁場なら、$g'c = gs = -e_0$(電子の電気素量)とすればよい(c = cosθ, $s = sin\theta$)。



その結果次のように纏められる：

$$g'B - gA^3 = -Z(g's + gc) = -Z\sqrt{g^2 + g'^2}$$

$$g'B + gA^3 = -2e_0 A - e_0 Z\frac{c^2 - s^2}{cs}$$

$$g'B = Ag'c - Zg's = -Ae_0 + Z\frac{e_0 s}{c}$$

(13) $L_{int} = e_0\bar{e}\gamma eA + \frac{1}{2}\sqrt{g^2 + g'^2}\,\overline{\nu_L}\gamma\nu_L Z + \frac{c^2 - s^2}{2cs}e_0\overline{e_L}\gamma e_L Z - \frac{e_0 s}{c}\overline{e_R}\gamma e_R Z$

$$+\frac{g}{\sqrt{2}}(\overline{\nu_L}\gamma e_L W^+ + \overline{e_L}\gamma\nu_L W^-)$$

Higgs 場の導入

粒子に質量を獲得させるためにはヒッグス場 ϕ を導入しなければならない：

(14) ヒッグス Lagrangian=$|(\partial_\mu - i\frac{1}{2}Yg'B_\mu - i\frac{1}{2}g\tau_a A_\mu^a)\phi|^2$, $\phi = \begin{pmatrix}\phi^+\\ \phi^0\end{pmatrix}$, $\mathrm{Y} = +1$

(15) Yukawa 結合＝$-G_e\bar{L}\phi R + h.c.$

(16) ヒッグス・ポテンシャル$\mathrm{V}(\phi) = \mu^2|\phi|^2 + \lambda|\phi|^4$

以上の系には$SU(2)_L \times U(1)_Y$ゲージ不変という対称性がある。ゲージ変換の generator は

(17) $\mathrm{U} = \exp\left[\mathrm{i}\frac{1}{2}\tau_a\theta^a(x)\right]$, $a = 0, 1, 2, 3$

によって与えられる。

Big bang の後、宇宙が高温のとき, $\mu^2 > 0$で系はゲージ対称的であったが、温度が冷えてきて、$\mu^2 < 0$ になったとしよう。この場合、ポテンシャルの極小値として 0 より低い極小値が存在する：この点は

(18) $|\phi| = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}}$

で与えられる。このポイントを真空と呼ぶことにすると、ϕ の真空期待値は

(19) $<\phi>_0 = \begin{pmatrix}0\\ V/\sqrt{2}\end{pmatrix}$, $V = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}$

となる。この意味は、地球上に一定の重力場が満ち満ちているように、この宇宙空間に一定のヒッグス場が満ち満ちているのである。(9)のように真空期待値が定まると、もはや local

な$SU(2)_L \times U(1)_Y$ゲージ対称性は失われる。これを対称性の自発的破れという(Nambu)。
(19)の結果、電子が質量を獲得する:

(20)　$m_e = G_e V/\sqrt{2}$　[(15)の Yukawa 項のϕを(19)で置き換えればよい]

W, Z ボソンの質量も定まる：

(21)　$M_W = \frac{Vg}{2}$,　$M_Z = \frac{V\sqrt{g^2+g'^2}}{2} = \frac{M_W}{cos\theta}$　[(14)の ϕ を(19)で置き換えればよい]

電磁場が残っているので、$U_{el}(1)$ゲージ対称性は残っている。弱い相互作用は W, Z ボソンを通じて起きるので、電弱相互作用が統一的に記述されたことになる。

W ボソンを交換する散乱ν＋e → e + νの振幅から

(22)　$\left(\frac{g}{2\sqrt{2}}\right)^2 \frac{1}{M_W^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} G_F$

が得られる。G_Fは Fermi 定数といわれ、古くから知られている：$G_F = 1.166 \times 10^{-5} GeV^{-2}$。

(21), (22)から真空期待値 V/$\sqrt{2}$が定まる：

(23)　$\frac{V}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{g} M_W = \frac{\sqrt{2}}{g}\left(\frac{g^2\sqrt{2}}{8G_F}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}G_F}\right)^{\frac{1}{2}} = 174GeV$

$|gsin\theta| = e_0$ =電気素量($e_0^2/4\pi = \alpha$ =1/137)の関係,および Z ボソン交換の実験値$sin^2\theta$ = 0.23を用いると、M_W, M_Zの質量が計算できそうである。しかし、α =1/137 は低エネルギー極限の値であり、W ボソンのエネルギー領域では running coupling constant として、α(M_W) =1/128 程度になることが知られている。この値を用いると、$M_W = 80GeV$, $M_Z = 91GeV$と計算できて実験値とよく合っている。しかし、逆に実験値を用いて、α(M_W) =1/128 が得られると言っても良い。

問題はν_Rを無いとしたことだ。このためニュートリノは質量 0 のままである。1998 年、戸塚一梶田らはニュートリノ振動を発見した。この振動はニュートリノの質量が 0 なら生じない(牧一中川一坂田 1962)。WS の理論は修正が必要になった。ν_Rを考慮しなければならないのだ。修正理論はいろいろあるが、その一つとして、左右対称的修正理論、特に文献[4]を元にして紹介しよう。

2．左右対称的修正標準模型

ゲージ群として、G = $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_Y$をとる[1][4]。

$\psi_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$=$SU(2)_L$，$\psi_R = \begin{pmatrix} \nu_R \\ e_R \end{pmatrix}$=$SU(2)_R$の 2 重項とする。Free Lagrangian は次で与えられる：

(1)　$L_0 = \overline{\psi_L} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + \overline{\psi_R} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R$

これに G のゲージ場A_μ^{La}, A_μ^{Ra}, B_μ, をゲージ原理にしたがって導入する。ただし B_μは共通にとる：

(2)　$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu - i\frac{1}{2}g_1 Y B_\mu - i\frac{1}{2}g_L \tau_a A_\mu^{La}$ ，(第 1 の微分に対し, Y=－1)

(3)　$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu - i\frac{1}{2}g_1 Y B_\mu - i\frac{1}{2}g_R \tau_a A_\mu^{Ra}$ ，(第 2 の微分に対し, Y=－1)

非可換ゲージ結合定数g_L, g_Rが等しいエネルギー領域では、G は左右対称的である。左右対称性が自発的に破れると、g_L, g_Rは一般に異なってくる。

ヒッグス場$\phi, \Delta_{L,R}$と ψ との湯川項は次のようにとる：

(4)　$L(\phi)_Y = -f\overline{\psi_L}\phi\psi_R - f\overline{\psi_R}\phi^*\psi_L - f\overline{\psi_L^c}\phi^T\psi_R^c - f\overline{\psi_R^c}\phi^{*T}\psi_L^c$

(5)　$L(\Delta)_M = -\mathrm{i}\overline{(\psi^c)_R}\tau_2\Delta_L\psi_L + i\overline{\psi_L}\Delta_L^*\tau_2(\psi^c)_R - \mathrm{i}\overline{(\psi^c)_L}\tau_2\Delta_R\psi_R + i\overline{\psi_R}\Delta_R^*\tau_2(\psi^c)_L$

(6)　$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1^0 & \phi_1^+ \\ \phi_2^- & \phi_2^0 \end{pmatrix}, \qquad \Delta_{L,R} = \begin{pmatrix} \Delta_{11}^+ & \Delta_{12}^{++} \\ \Delta_{21}^0 & \Delta_{22}^+ \end{pmatrix}_{L,R}$

(5)は Majorana 結合と言われる。ここではニュートリノを Majorana 粒子と見なしている。そうすると Seesaw 機構[2][3]が現れ、軽いニュートリノと重いニュートリノが得られる。ニュートリノの質量が何故小さいかが説明できて都合がよい。重いニュートリノは暗黒物質の有力な候補である。

Higgs 場の Lagrangian は次のとおり：

(7)
$$L_H = tr|D_\mu\Delta_L|^2 + tr|D_\mu\Delta_R|^2 + tr|D_\mu\phi|^2$$
$$+field\ strength\ terms\ of\ A_\mu^{La}, A_\mu^{Ra}, B_\mu$$
$$-V(Higgs\ potential\ for\ \phi, \Delta_L, \Delta_R)$$

共変微分は

(8)
$$D\phi = \partial\phi - i(g_L A^L\phi - g_R\phi A^R), \quad A^{L,R} = \frac{1}{2}\tau_a A^{a,L,R}$$

$$D\Delta_L = \partial\Delta_L - i\frac{1}{2}g_1 YB\Delta_L - ig_L(A^L\nabla_L - \nabla_L A^L), \qquad Y = +2$$

$$D\Delta_R = \partial\Delta_R - i\frac{1}{2}g_1 YB\Delta_R - ig_R(A^R\nabla_R - \nabla_R A^R). \qquad Y = +2$$

Higgs 場のゲージ変換は

(9)
$$\phi \to U_L \phi U_R^{-1}$$
$$\Delta_L \to U_L \Delta_L U_L^{-1}, \qquad \Delta_R \to U_R \Delta_R U_R^{-1}$$

Higgs ポテンシャルにより、左右対称性が自発的に破れたとし、Higgs 場の真空期待値を次のようにおく：

(10)
$$, \quad < \phi >_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}, \qquad < \Delta_{L,R} >_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ V_{L,R} & 0 \end{pmatrix}$$

仮定：$V_L \ll \kappa_{1,2} \ll V_R$

そうすると、(4)の Yukawa 項より

(11)
$$L(\phi)_Y = -f\overline{\psi_L} < \phi >_0 \psi_R - f\overline{\psi_R} < \phi^* >_0 \psi_L - f\overline{\psi_L^c} < \phi^T >_0 \psi_R^c - f\overline{\psi_R^c} < \phi^{*T} >_0 \psi_L^c$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}[f\kappa_1(\overline{\nu_L}\nu_R + \overline{\nu_R}\nu_L + \overline{\nu_L^c}\nu_R^c + \overline{\nu_R^c}\nu_L^c) + f\kappa_2(\overline{e_L}e_R + \overline{e_R}e_L)]$$

が得られる。最後の項から電子の質量が、$m_e = f\kappa_2/\sqrt{2}$で与えられることが分かる。一方(5)の Majorana 項から

(12)
$$L(\Delta)_Y = -\mathrm{i}\overline{(\psi^c)_R}\tau_2 < \Delta_L >_0 \psi_L + i\overline{\psi_L} < \Delta_L^+ >_0 \tau_2(\psi^c)_R$$
$$-\mathrm{i}\overline{(\psi^c)_L}\tau_2 < \Delta_R >_0 \psi_R + i\overline{\psi_R} < \Delta_R^+ >_0 \tau_2(\psi^c)_L$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}[V_L(\overline{\nu_R^c}\nu_L + \overline{\nu_L}\nu_R^c) + V_R(\overline{\nu_L^c}\nu_R + \overline{\nu_R}\nu_L^c)]$$

が得られる。これから次のような Seesaw mechanism[2][3]が発生する：

Seesaw mechanism

Majonara mass term は次のようにまとめられる：

(13)
$$m_D(\overline{\nu_L}\nu_R + \overline{\nu_R}\nu_L + \overline{\nu_L^c}\nu_R^c + \overline{\nu_R^c}\nu_L^c) + m_L(\overline{\nu_R^c}\nu_L + \overline{\nu_L}\nu_R^c) + m_R(\overline{\nu_L^c}\nu_R + \overline{\nu_R}\nu_L^c)$$
$$= (\bar{\nu} \quad \bar{N})\begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu \\ N \end{pmatrix}$$

ただし

(14) $\nu = \nu_L + (\nu_L)^c = \nu_L + \nu_R^c$

(15) $\mathrm{N} = \nu_R + (\nu_R)^c = \nu_R + \nu_L^c$

また、$m_D = f\kappa_1/\sqrt{2},\ m_L = V_L/\sqrt{2},\ m_R = V_R/\sqrt{2}$ である。$V_L = 0,\ \kappa_1 \ll V_R$ として、上の二

ニュートリノの mass matrix を対角化すると

(16) $$\bar{\psi}\begin{pmatrix} -\frac{m_D^2}{m_R} & 0 \\ 0 & m_R+\frac{m_D^2}{m_R} \end{pmatrix}\psi, \qquad \psi=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\nu-\frac{m_D}{m_R}N\\ N+\frac{m_D}{m_R}\nu\end{pmatrix}$$

ψ_1の質量は負になっているが、ψ_1のγ_5変換により正にすることが可能である。V_Rを大きく取ると、ψ_1の質量は小さくなるが、ψ_2の質量は大きくなる。これを Seesaw mechanism という。$1/V_R$の項を無視すれば、$\psi_1=\nu,\ \psi_2=N$となり、(14), (15)よりψ_1 =左巻きニュートリノ、 ψ_2 =右巻きニュートリノで構成されていることが分かる。Seesaw mechanism は、左巻きニュートリノが非常に軽く、右巻きニュートリノが非常に重い理由を明らかにした。

$W_\mu^\pm$ボソンの質量

(7)の Higgs Lagrangian, $L_H=tr\left|D_\mu\Delta_L\right|^2+tr\left|D_\mu\Delta_R\right|^2+tr|D_\mu\phi|^2$、において、３種の Higgs boson を真空期待値に置き換えると、

(17) $tr|D\Delta_L|^2=[|g_LW_L^+|^2+(g_1B-g_LA_L^3)^2]V_L^2/2$

(18) $tr|D\Delta_R|^2=[|g_RW_R^+|^2+(g_1B-g_RA_R^3)^2]V_R^2/2$

(19) $tr|D\phi|^2$

$$=\frac{1}{8}(g_LA_L^3-g_RA_R^3)^2(\kappa_1^2+\kappa_2^2)+\frac{1}{4}|\kappa_1g_LW_L^+-\kappa_2g_RW_R^+|^2+\frac{1}{4}|\kappa_2g_LW_L^+-\kappa_1g_RW_R^+|^2$$

(20) $$W_{L,R}^\pm=(A_{L,R}^1\mp iA_{L,R}^2)/\sqrt{2}$$

これらから$\boldsymbol{W_{L,R}^\pm}$**ボソンの質量項は**

(21) $$X=\frac{1}{2}|g_LW_L^+|^2V_L^2+\frac{1}{2}|g_RW_R^+|^2V_R^2+\frac{1}{4}|\kappa_1g_LW_L^+-\kappa_2g_RW_R^+|^2+\frac{1}{4}|\kappa_2g_LW_L^+-\kappa_1g_RW_R^+|^2$$
$$=\frac{1}{2}|W_L^+|^2g_L^2[V_L^2+\frac{1}{2}(\kappa_1^2+\kappa_2^2)]+\frac{1}{2}|W_R^+|^2g_R^2[V_R^2+\frac{1}{2}(\kappa_1^2+\kappa_2^2)]$$
$$-\frac{1}{2}\kappa_1\kappa_2g_Lg_R(W_L^+W_R^-+W_R^+W_L^-)$$

これを対角化するために、mass eigenstate $(W^\pm,W'^\pm)$を導入する：

(22) $$\begin{pmatrix}W_L^\pm\\ W_R^\pm\end{pmatrix}=U\begin{pmatrix}W^\pm\\ W'^\pm\end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix}cos\gamma & sin\gamma\\ -sin\gamma & cos\gamma\end{pmatrix}$$

その結果、Xは次のように書ける：

(23) $$X = |W|^2 M_W^2 + |W'|^2 M_{W'}^2 + (W^* W' + W'^* W)\lambda$$
$$M_{\boldsymbol{W}}^{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{G}_L U_{11}^2 + G_R U_{21}^2 - \kappa_1 \kappa_2 g_L g_R U_{11} U_{21}$$
$$M_{\boldsymbol{W'}}^{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{G}_L U_{12}^2 + G_R U_{22}^2 - \kappa_1 \kappa_2 g_L g_R U_{12} U_{22}$$
$$\lambda = U_{11} U_{12} G_L + U_{12} U_{22} G_R - \frac{1}{2}\kappa_1 \kappa_2 g_L g_R (U_{12} U_{21} + U_{22} U_{11})$$

ここで

(24) $$G_L = \frac{1}{2} g_L^2 [V_L^2 + \frac{1}{2}(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)]$$

(25) $$G_R = \frac{1}{2} g_R^2 [V_R^2 + \frac{1}{2}(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)]$$

クロス項λを 0 と置くと、 $V_L = 0,\ \kappa_1, \kappa_2 \ll V_R$ の仮定より、

(26) $$\frac{1}{2} tan2\gamma \cong \frac{\kappa_1 \kappa_2}{V_R^2} \frac{g_L}{g_R} \ll 1$$

を得る。したがって$\gamma \ll 1$である。ここれから W, W'の質量が得られる：

(27) $$M_W^2 = g_L^2 (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)/4$$

(28) $$M_{W'}^2 = g_R^2 V_R^2 / 2$$

Z, Z'ボソンの質量

Z, Z'ボソンの質量項 Y は、(17), (18), (19)から

(29) $$Y = \frac{1}{2}(g_1 B - g_L A_L^3)^2] V_L^2 + \frac{1}{2}(g_1 B - g_R A_R^3)^2] V_R^2 + \frac{1}{8}(g_L A_L^3 - g_R A_R^3)^2 (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)$$

を対角化すればよい。そのため mass eigenstate (A, Z, Z')を導入する：

(30) $$\begin{pmatrix} B \\ A_L^3 \\ A_R^3 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} A \\ Z \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} A + T_{12} Z + T_{13} Z' \\ T_{21} A + T_{22} Z + T_{23} Z' \\ T_{31} A + T_{32} Z + T_{33} Z' \end{pmatrix}$$

(31) $$T = \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & -s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ s_{13} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & -s_{23} \\ 0 & s_{23} & c_{23} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{12} c_{13} & -s_{12} c_{23} - c_{12} s_{23} s_{13} & s_{12} s_{23} - c_{12} c_{23} s_{13} \\ s_{12} c_{13} & c_{12} c_{23} - s_{12} s_{23} s_{13} & -c_{12} s_{23} - s_{12} c_{23} s_{13} \\ s_{13} & s_{23} c_{13} & c_{23} c_{13} \end{pmatrix}$$

ここで、$c_{ij} = cos\theta_{ij},\ s_{ij} = sin\theta_{ij},\ \theta_{ij}$が mixing angle である。$A$が電磁場と解釈されるためには、ゲージ結合項(32)の中で、$-e_0 \bar{e} \gamma^\mu e A_\mu$なる形にまとまる必要がある。$e_0$は電気素

量である。

(32) $$\overline{\psi_L}\gamma^\mu(-\tfrac{1}{2}g_1B_\mu+\tfrac{1}{2}g_L\tau_aA_\mu^{La})\psi_L+\overline{\psi_R}\gamma^\mu(-\tfrac{1}{2}g_1B_\mu+\tfrac{1}{2}g_R\tau_aA_\mu^{Ra})\psi_R\quad,$$

$$=\overline{\nu_L}\gamma x_L\nu_L+\overline{e_L}\gamma y_Le_L+\frac{g_L}{\sqrt{2}}\overline{\nu_L}\gamma W_L^+e_L+\frac{g_L}{\sqrt{2}}\overline{e_L}\gamma W_L^-\nu_L$$

$$+\overline{\nu_R}\gamma x_R\nu_R+\overline{e_R}\gamma y_Re_R+\frac{g_R}{\sqrt{2}}\overline{\nu_R}\gamma W_R^+e_R+\frac{g_L}{\sqrt{2}}\overline{e_R}\gamma W_R^-\nu_R$$

ここで

(33) $$x_L=\tfrac{1}{2}(-g_1B+g_LA_L^3)$$
$$=\tfrac{1}{2}A(-g_1T_{11}+g_LT_{21})+\tfrac{1}{2}Z(-g_1T_{12}+g_LT_{22})+\tfrac{1}{2}Z'(-g_1T_{13}+g_LT_{23})$$

(34) $$y_L=\tfrac{1}{2}(-g_1B-g_LA_L^3)$$
$$=\tfrac{1}{2}A(-g_1T_{11}-g_LT_{21})+\tfrac{1}{2}Z(-g_1T_{12}-g_LT_{22})+\tfrac{1}{2}Z'(-g_1T_{13}-g_LT_{23})$$

(35) $$x_R=\tfrac{1}{2}(-g_1B+g_RA_R^3)$$
$$=\tfrac{1}{2}A(-g_1T_{11}+g_RT_{31})+\tfrac{1}{2}Z(-g_1T_{12}+g_RT_{32})+\tfrac{1}{2}Z'(-g_1T_{13}+g_RT_{33})$$

(36) $$y_R=\tfrac{1}{2}(-g_1B-g_RA_R^3)$$
$$=\tfrac{1}{2}A(-g_1T_{11}-g_RT_{31})+\tfrac{1}{2}Z(-g_1T_{12}-g_RT_{32})+\tfrac{1}{2}Z'(-g_1T_{13}-g_RT_{33})$$

そのための条件は

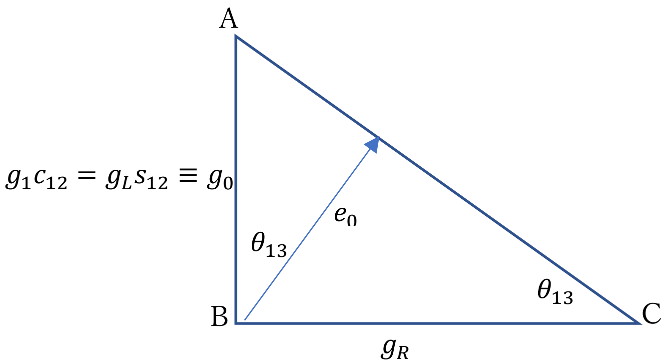
(37) $$g_1T_{11}=g_LT_{21}=g_RT_{31}=e_0$$

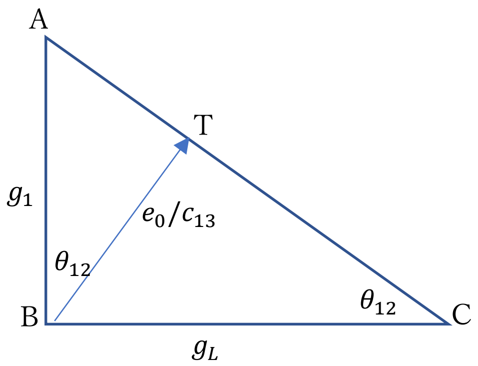
つまり

(38) $$g_1c_{12}c_{13}=e_0$$
$$g_Ls_{12}c_{13}=e_0$$
$$g_Rs_{13}=e_0$$

これから次の関係が得られる：

(39) $$\frac{1}{e_0^2}=\frac{1}{g_1^2}+\frac{1}{g_L^2}+\frac{1}{g_R^2}$$





(29)の Y にもどってこれを対角化する。 $V_L = 0$ の仮定より、

$$g_1 B - g_R A_R^3 = Z(g_1 T_{12} - g_R T_{32}) + Z'(g_1 T_{13} - g_R T_{33})$$
$$g_L A_L^3 - g_R A_R^3 = Z(g_L T_{22} - g_R T_{32}) + Z'(g_L T_{23} - g_R T_{33})$$

これらを(29)に代入すると

(40)
$$Y = \frac{1}{2} Z^2 M_Z^2 + \frac{1}{2} Z'^2 M_{Z'}^2 + \mu Z Z'$$
$$M_Z^2 = (g_1 T_{12} - g_R T_{32})^2 V_R^2 + \frac{1}{4}(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)(g_L T_{22} - g_R T_{32})^2$$
$$M_{Z'}^2 = (g_1 T_{13} - g_R T_{33})^2 V_R^2 + \frac{1}{4}(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)(g_L T_{23} - g_R T_{33})^2$$
$$\mu = (g_1 T_{12} - g_R T_{32})(g_1 T_{13} - g_R T_{33}) V_R^2 + \frac{1}{4}(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)(g_L T_{22} - g_R T_{32})(g_L T_{23} - g_R T_{33})$$

Aの質量項は表れないので質量 0 である。対角化の条件$\mu = 0$, および、仮定 $\kappa_1, \kappa_2 \ll V_R$ より、

$$(g_1 T_{12} - g_R T_{32})(g_1 T_{13} - g_R T_{33}) = \delta (g_L T_{22} - g_R T_{32})(g_L T_{23} - g_R T_{33})$$
$$\delta = \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{4 V_R^2} \ll 1$$

したがって、この式の解は

$$g_1 T_{12} - g_R T_{32} = -g_1 s_{12} c_{23} - g_1 c_{12} s_{13} s_{23} - g_R s_{23} c_{13} = -(g_1 s_{12} c_{23} + \lambda s_{23}) = 0(\delta)$$
$$g_1 T_{13} - g_R T_{33} = g_1 s_{12} s_{23} - g_1 c_{12} s_{13} c_{23} - g_R c_{13} c_{12} = g_1 s_{12} s_{23} - \lambda c_{23} = 0(\delta)$$
$$\lambda = \sqrt{g_0^2 + g_R^2}$$

の何れかである。第 1 の解は

(41)
$$\tan\theta_{23} = -\frac{g_1 s_{12}}{\lambda} + 0(\delta)$$

第 2 の解は $\tan\theta_{23} = \frac{\lambda}{g_1 s_{12}} + 0(\delta)$であるが、$\theta_{23} \to \theta_{23} + \pi/2$の変換で第 1 の解に帰着するので考えなくてよい。(41)を少し変形する。上の三角形より、

(42) $$\frac{g_1 c_{12}}{\lambda} = s_{13}$$

が得られるので、これを(41)に代入すると、0(δ)を無視して

(43) $$1 + tan^2\theta_{23} = \frac{1}{c_{23}^2} = 1 + \frac{s_{12}^2 s_{13}^2}{c_{12}^2}$$

$$\frac{c_{12}^2}{c_{23}^2} = c_{12}^2 + s_{12}^2(1 - c_{13}^2) = 1 - s_{12}^2 c_{13}^2$$

したがって, 次のような new mixing angle θ'が定義できる：

A New Mixing Angle [4]

(44) $$cos^2\theta' + sin^2\theta' = 1, \quad cos\theta' = c' = \frac{c_{12}}{c_{23}} \qquad sin\theta' = s' = s_{12}c_{13}$$

Z, Z'ボソンの質量の計算

$$M_Z^2 = (g_1 T_{12} - g_R T_{32})^2 V_R^2 + \frac{1}{4}(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)(g_L T_{22} - g_R T_{32})^2$$
$$M_{Z'}^2 = (g_1 T_{13} - g_R T_{33})^2 V_R^2 + \frac{1}{4}(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)(g_L T_{23} - g_R T_{33})^2$$

において

$g_1 T_{12} - g_R T_{32} = -(g_1 s_{12} c_{23} + \lambda s_{23}) = K\delta$, ($K$は定数)

$$g_L T_{22} - g_R T_{32} = g_L c_{12} c_{23} - g_L s_{12} s_{13} s_{23} - g_R c_{13} s_{23} = g_L c_{12} c_{23} - \lambda s_{23} = g_L c_{12} c_{23} + g_1 s_{12} c_{23}$$
$$= c_{23}\sqrt{g_1^2 + g_L^2}$$

ここでλとして(41)を用いた。M_Z^2の第 1 項は$\sim V_R^{-2}$のオーダーなので無視できて、

(45) $$M_Z^2 = \frac{1}{4}(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)(g_1^2 + g_L^2)c_{23}^2$$

(46) $$M_{Z'}^2 = (g_R / c_{12} c_{23})^2 V_R^2$$

M_Z, M_Wの ratio をとると、

(47) $$\frac{M_Z^2}{M_W^2} = \frac{(g_1^2 + g_L^2)c_{23}^2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)/4}{g_L^2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)/4} = \left(1 + \frac{g_1^2}{g_L^2}\right)c_{23}^2 = (1 + tan^2\theta_{12})c_{23}^2 = \frac{c_{23}^2}{c_{12}^2} = \frac{1}{c'^2}$$

ϕの真空期待値とW、Zボソンの質量

(32)のゲージ結合項から低エネルギーνe散乱のWボソン交換振幅が計算できる：

(48) $\left(\frac{g_L}{2\sqrt{2}}cos\gamma\right)^2\frac{1}{M_W^2}=\frac{G_F}{\sqrt{2}}$

G_Fはフェルミ定数である。また、$M_W^2=g_L^2(\kappa_1^2+\kappa_2^2)/4$ なので、 両式からM_W^2を消去すると、ϕの真空期待値が計算できる：

(49) $\sqrt{(\kappa_1^2+\kappa_2^2)/2}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{4G_F}}=174GeV$

ここで $\gamma \ll 1$ なので $\cos\gamma=1$ とした。$g_L=\frac{e_0}{s_{12}c_{13}}=\frac{e_0}{s'}$ なので、$M_W=80GeV$と計算できる。ただし、θ' をWeinberg angleと見なし、電気素量をWボソン質量におけるrunning value 0.3122をとっている。また、$M_Z=\frac{M_W}{c'}=91GeV$ となる。

ν、eに対するGauge coupling

(32)のgauge couplingの項から、Zボソンと左ニュートリノとの結合定数$g_{\nu Z}$は次のように与えられる：

(50) $\bar{\nu}_L\gamma x_L\nu_L=g_{\nu Z}\,\bar{\nu}_L\gamma\nu_L Z,$

(51) $g_{\nu Z}=\frac{1}{2}(-g_1T_{12}+g_LT_{22})=\frac{1}{2}(g_1s_{12}c_{23}+g_1c_{12}s_{23}s_{13}+g_Lc_{12}c_{23}-g_Ls_{12}s_{23}s_{13})$

$=\frac{1}{2}(g_1s_{12}c_{23}+g_Lc_{12}c_{23})=\frac{1}{2}c_{23}\sqrt{g_1^2+g_L^2}=\frac{1}{2}\frac{c_{23}}{c_{13}s_{12}c_{12}}=\frac{c_0}{2c's'}$

同様に、Zボソンと電子との結合定数は次のように定まる：

(52) $\bar{e}_L\gamma x_Le_L=\bar{e}_L\gamma e_LZ\frac{1}{2}(g_1T_{12}+g_LT_{22})=\bar{e}_L\gamma e_LZg(eZ)_L$

(53) $g(eZ)_L=\frac{c_0}{2c's'}(c'^2-s'^2)$

(54) $\bar{e}_R\gamma x_Re_R=\bar{e}_R\gamma e_RZ\frac{1}{2}(g_1T_{12}+g_RT_{32})=\bar{e}_R\gamma e_RZg(eZ)_R$

(55) $g(eZ)_R=-\frac{c_0s'}{c'}$

これらは、θ' を Weinberg angle と見なすと Weinberg-Salam の理論に一致する。

WS の $SU(2)_L \times U(1)_Y$のゲージ定数g', gは、ここでは次のように与えられる：

(56)　$g' = g_1 c_{13} c_{23} = \frac{e_0}{c_{12}} c_{23} = \frac{e_0}{c'}$

(57)　$g = \frac{e_0}{s'} = \frac{e_0}{s_{12} c_{13}} = g_L$

この二つの結果は新しい結果である。

Mixing angle θ_{ij}は$\varepsilon = g_L/g_R$とθ'で表される：

(58)　$\theta_{12} = sin^{-1} \frac{sin\theta'}{\sqrt{1-\varepsilon^2 sin^2\theta'}}$

(59)　$\theta_{13} = sin^{-1}(\varepsilon sin\theta')$

(60)　$\theta_{23} = cos^{-1} \sqrt{\frac{1-\epsilon^2 tan^2\theta'}{1-\varepsilon^2 sin^2\theta'}}$

証明

定義から　$\varepsilon = \frac{g_L}{g_R} = \frac{s_{13}}{s_{12} c_{13}} = \frac{s_{13}}{s'}$、　それ故　$s_{13} = \varepsilon s'$ が示された(59)。

また　$\varepsilon^2 = \frac{1}{s'^2} - \frac{1}{s_{12}^2}$　より、$s_{12} = \frac{s'}{\sqrt{1-\varepsilon^2 s'^2}}$　が得られる(58)。

最後に、定義$c' = \frac{c_{12}}{c_{23}}$ より、$c_{23} = \frac{c_{12}}{c'} = \frac{\sqrt{1-s_{12}^2}}{c'}$. これに(58)を代入すると(60)が出る。

注意：

パラメーターの数は$g_1, g_L, g_R, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$の 6 コである。これらに対する束縛条件は(38)の 3 コ、(41) の 1 コの計 4 コ存在する。したがって独立なパラメーターの数は 2 コとなる。6 コのパラメーターは全てεとθ'で表される。

$M_{Z'}$, $M_{W'}$の ratio

(61)　$\frac{M_{W'}}{M_{Z'}} = \frac{g_R V_R/\sqrt{2}}{g_R V_R/(c_{13} c_{23})} = \frac{c_{13} c_{23}}{\sqrt{2}}$

これに(59), (60)を代入すると次の関係が得られる：

(62)　$\left(\frac{M_{W'}}{M_{Z'}}\right)^2 = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon^2 tan^2\theta')$,　$\varepsilon = g_L/g_R$

結論

1. 中性ゲージボソンA, Z, Z'に対する質量行列を対角化する条件から

$$\tan\theta_{23} = -\frac{s_{12}s_{13}}{c_{12}} + \delta, \quad \delta = \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{4V_R^2} \ll 1$$

が得られた。δを無視すると、この条件から、new mixing angle θ'を定義することができる：

$$s' = s_{12}c_{13}, \quad c' = \frac{c_{12}}{c_{23}} \qquad s'^2 + c'^2 = 1$$

2. パラメーターの数は$\boldsymbol{g_1, g_L, g_R, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}}$の 6 コである。これらに対する束縛条件は (38)の 3 コ、(41) の 1 コの計 4 コ存在する。したがって独立なパラメーターの数は 2 コとなる。6 コのパラメーターは全て$\boldsymbol{\varepsilon}$と$\boldsymbol{\theta'}$で表される。

3. 軽い W, Z ボソンは$\boldsymbol{\theta'}$のみで記述できる：

$$M_W = g_L\sqrt{\frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{4}} = \frac{e_0}{s'} \times (174GeV)$$

$$\frac{M_Z}{M_W} = \frac{1}{c'}$$

$$g_{\nu Z} = -\frac{e_0}{2s'c'}$$

$$g(eZ)_L = \frac{e_0(c'^2 - s'^2)}{2s'c'}, \quad g(eZ)_R = -\frac{e_0 s'}{c'}$$

これらの結果は、θ'を Weinberg angle θ_Wと見なせば、WS モデルの結果と完全に一致する。ここで WS モデルのゲージパラメーターg', gは次のように与えられる：

$$g' = g_1 c_{13} c_{23} = \frac{e_0}{c_{12}} c_{23} = \frac{e_0}{c'}\ , \qquad g = \frac{e_0}{s'} = \frac{e_0}{s_{12}c_{13}} = g_L$$

4. 一方、重たい W', Z' ボソンは$\boldsymbol{\theta'}$と$\boldsymbol{\varepsilon}$の二つのパラメーター、および$\boldsymbol{V_R}$で記述される。

5. 最後に、Majorana ニュートリノについて： 十分大きなV_Rに対し、その右ニュートリノ成分の質量は十分に小さく、左ニュートリノ成分の質量は十分に大きくとれる。左ニュートリノは暗黒物質の有力な候補の一つと期待される。

なお、原子核の二重ベータ崩壊において、ニュートリノの放出を伴わない 0ν 崩壊モードは、ニュートリノが Majorana 粒子でなければ起きない過程である。WS の電弱相互作用の標準模型では禁止されている。もしも 0ν 崩壊モードが観測されたら、ニュートリノが Majorana 粒子である決定的証拠となる。

Appendix

Higgs mass formula

Mohapatra-Senjanovic potential

$$V(\Delta_L,\Delta_R,\phi)=V\left(V_L+h_L,V_R+h_R,\kappa+h_\phi\right)$$
$$=V_0+\left(h_L\frac{\partial}{\partial V_L}+h_R\frac{\partial}{\partial V_R}+h_\phi\frac{\partial}{\partial\kappa}\right)V_0+\frac{1}{2}\left(h_L\frac{\partial}{\partial V_L}+h_R\frac{\partial}{\partial V_R}+h_\phi\frac{\partial}{\partial\kappa}\right)^2V_0$$

$$=V_0+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}h_L & h_R & h_\phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M_{LL}^2 & M_{LR}^2 & M_{L\kappa}^2\\ M_{LR}^2 & M_{RR}^2 & M_{R\kappa}^2\\ M_{L\kappa}^2 & M_{R\kappa}^2 & M_{\kappa\kappa}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_L\\ h_R\\ h_\phi\end{pmatrix}$$

ここで $\phi=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\kappa+h_\phi & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$とし、$V_0$は次のように置いてある：

$V_0=-\mu^2(V_L^2+V_R^2)+\frac{\rho}{4}(V_L^4+V_R^4)+\frac{\alpha}{2}(V_L^2+V_R^2)\kappa^2+\beta V_LV_R\kappa^2+f(\kappa),\quad f(\kappa)=-a\kappa^2+\frac{b}{4}\kappa^4$

極値の計算：

$$\frac{\partial V_0}{\partial V_L}=-2\mu^2V_L+\rho V_L^3+\rho' V_LV_R^2+\alpha V_L\kappa^2+\beta V_R\kappa^2=0$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial V_R}=-2\mu^2V_R+\rho V_R^3+\rho' V_RV_L^2+\alpha V_R\kappa^2+\beta V_L\kappa^2=0$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial\kappa}=[\alpha(V_L^2+V_R^2)+2\beta V_LV_R]\kappa+\frac{df}{d\kappa}=0$$

最初の二つの式から次の二つの等式が得られる：

$$V_LV_R=\frac{\beta\kappa^2}{\rho-\rho'}=\lambda\qquad V_L^2+V_R^2=\frac{2\mu^2-\alpha\kappa^2}{\rho}=r^2$$

この等式の解として、$\lambda<r$ のとき、左右非対称な解、$V_L<V_R$ が得られる。簡単のため、$V_L=\alpha=\beta=0$の場合を考えると、質量行列の各項は次のようになる：

$$M_{LL}^2=\frac{\partial^2V_0}{\partial V_L^2}=2\rho V_L^2+(\rho'-\rho)V_R^2=(\rho'-\rho)V_R^2$$

$$M_{RR}^2=\frac{\partial^2V_0}{\partial V_R^2}=2\rho V_R^2-(\rho-\rho')V_L^2=2\rho V_R^2$$

$$M_{\kappa\kappa}^2=\frac{\partial^2V_0}{\partial\kappa^2}=2b\kappa^2$$

$$M_{LR}^2 = \frac{\partial^2 V_0}{\partial V_L \partial V_R} = \kappa^2 \beta \frac{\rho + \rho'}{\rho - \rho'} = 0$$

$$M_{R\kappa}^2 = \frac{\partial^2 V_0}{\partial V_R \partial \kappa} = 2\kappa(\alpha V_R + \beta V_L) = 0 M_{L\kappa}^2 = \frac{\partial^2 V_0}{\partial \kappa \partial V_L} = 2\kappa(\alpha V_L + \beta V_R) = 0$$

したがって、

$M_{LL} = \sqrt{\rho' - \rho} V_R \quad M_{RR} = \sqrt{2\rho} V_R \quad M_{\kappa\kappa} = \sqrt{2b}\kappa = 125 GeV$とみなす。

125GeV より重いヒッグス粒子が、２種あることが予想される。

文献

1. J. C. Pati and A. Salam, Phys. Rev. D10, 275(1974).
R. N. Mohapatra and J. C. Pati, Phys. Rev. D11,566(1975).
R. N. Mohapatra and G. Senjanovic, Phys. Rev. D23, 165(1981)
2. T. Yanagida, Proceedings of the workshop on the unifird theory and baryon number in the universe, edited by O.Sawada and A.Sugamoto(KEK report no. 79-18, 1979), p.95.
3. M. Gell-mann, P. Ramond and R. Slansky, in Supergravity, edited by P. van Niewenhuizen and D. Z. Freedman(North-Holland, Amsterdam, 1979), p.315.
4. A. Kokado and T. Saito, "New mixing angles in the left-right symmetric model," Phys. Rev. D92, 125008(2015).