

2022 年度 東京女子大学大学院理学研究科 修士論文

ニュートリノ振動における波束効果  
Wave-packet effects in neutrino oscillation

東京女子大学大学院 理学研究科 数学専攻  
応用数理学分野 D21M206

三谷 日姫

2023 年 8 月 5 日

## 要旨

ニュートリノ振動現象の存在が確立してから 25 年が経過しようとしている。しかし依然として、ニュートリノの質量階層性や質量値などをはじめとして、多くの事柄が未解決のままで解明を待っている。以前の研究ではニュートリノ振動は主として平面波を用いて計算されてきたが、近年ではより本質的で精密な、波束を用いた定式化による議論が盛んになってきており、これが将来の理論的、実験的進展に寄与するものと期待されている。本研究ではニュートリノ振動の波束効果に焦点を置き、量子デコヒーレンス (量子もつれの解消) について調べた。その結果、ニュートリノの生成と検出に関わる二乗波束幅は、デコヒーレンス長と波束の伝搬を支配する局在化因子においては加法的に現れるのに対し、運動量保存因子では換算的 (逆数の和の逆数) に現れることを得た。また、遷移確率の全体的な規格化は換算的なものと加法的なものとの比で決まることを得た。加えて本修士論文では、独自研究の論述の前に、この研究を行うにあたって参考にした、いくつかの前提となる論文 (中でも特に、去年からの活発な論争「波束分離による量子デコヒーレンスの効果が、地上でのニュートリノ実験で観測できるかどうか」に関するもの) を紹介する。この論争に対する私の立場も、最後のまとめに記した。

## 謝辞

本論文の作成にあたり、終始熱心なご指導をいただいた尾田欣也教授に深く感謝しています。林青司教授と鈴木ひろみ助手には、日頃から研究の進み具合を気にかけていただき、優しい言葉で私を励まして下さいました。ありがとうございます。特任研究員の金田邦雄さんとは、毎週新しく掲載された論文について議論することで、多くの知識と刺激を得ることができました。ここに感謝の意を表します。

加えて、ご多忙にも関わらず、快く写真の利用に関してご協力頂いた東京大学宇宙線研究所附属神岡宇宙素粒子研究施設の方々にも感謝いたします。

最後に、院生室のメンバーには常に刺激的な議論を頂き、精神的にも支えられました。本当にありがとうございました。

## 記法

この修士論文では以下の記法を用いる:

- 時空次元は  $d + 1$  ( $d = 3$ ) とし、計量の符号は  $(-, +, \dots, +)$  を用いる。
- 時空の座標を  $x = (x^0, x^1, \dots, x^d) = (x^0, \mathbf{x})$  とし、 $x^\mu$  等と書いたときの添字  $\mu, \nu, \dots$  は  $0, 1, \dots, d$  を走る。
- 空間  $d = 3$  次元ベクトルの大きさを、 $p := |\mathbf{p}| = \sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^d)^2}$  等と書く。
- ニュートリノについて、 $SU(2)_L$  相互作用の固有状態を「フレーバー固有状態」と呼ぶ。フレーバー状態は添字  $\alpha, \beta, \dots$  でラベルし、これらは  $e, \mu, \tau$  を走るものとする。質量の固有状態は添字  $I, J, \dots$  でラベルし、これらは  $1, 2, 3$  を走るものとする。
- 演算子にはハット  $\hat{\phantom{A}}$  を (なるべく) つける。(ただし、ニュートリノの中心運動量  $\mathbf{P}$  から作られる単位ベクトルは  $\hat{\mathbf{P}} := \mathbf{P}/|\mathbf{P}|$  と書くがこれは演算子の意味ではない。)
- 交換子を  $[\hat{A}, \hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ 、反交換子を  $\{\hat{A}, \hat{B}\} := \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$  と書く。
- 特に断りのない限り自然単位系  $\hbar = c = k_B = 1$  を用いる。
- ニュートリノの生成過程を添字 S、検出過程を添字 D で表すことが多い。

## 目次

1	導入	6
2	波束形式	7
2.1	平面波（スカラー場）	7
2.2	ガウス波束	8
3	ニュートリノ振動の基礎	10
3.1	標準模型	10
3.2	標準模型におけるニュートリノ	10
3.3	ニュートリノの相互作用	11
3.4	標準模型におけるワインバーグ演算子	11
3.5	ニュートリノ混合	14
3.6	量子力学の枠内でのニュートリノ振動の取り扱い	16
3.7	パラメータの測定値	18
4	ニュートリノ振動と波束	20
4.1	波束によるニュートリノ振動	20
4.2	「同一エネルギー」「同一運動量」とは何か	20
4.3	ニュートリノ振動の波束的アプローチ	21
4.4	「同一エネルギー」や「同一運動量」の仮定を取る理由	24
4.5	量子力学的不確定性関係とニュートリノ振動	28
4.6	ニュートリノ振動が生成・検出過程から独立な確率で記述できる場合	32
4.7	この章のまとめ	33
5	デコヒーレンスをめぐる論争	34
5.1	ニュートリノ振動の減衰、デコヒーレンス、ニュートリノ波束の長さ	34
5.2	「ニュートリノ振動の減衰、デコヒーレンス、ニュートリノ波束の長さ」に対するコメント	45
5.3	「『ニュートリノ振動の減衰、デコヒーレンス、ニュートリノ波束の長さ』に対するコメント」への返信	51
6	ガウス波束によるデコヒーレンスの具体計算	54
6.1	スピノールの平面波	54
6.2	質量固有状態のガウス波束	56
6.3	ニュートリノ波束	60
6.4	ニュートリノ振動確率におけるデコヒーレンス	63
7	まとめ	65
付録 A	ニュートリノ実験の基礎	66

A.1	様々なニュートリノ源 . . . . .	66
A.2	ニュートリノの質量について . . . . .	67
A.3	スーパーカミオカンデ検出器 . . . . .	68
A.4	チェレンコフ光の検出 . . . . .	70
付録 B	具体的な表現での EPR 実験の計算 . . . . .	72
B.1	具体的な表現での量子もつれの計算 . . . . .	72
B.2	射影の誤植の確認 . . . . .	73
B.3	$B$ が得る測定結果の確率 . . . . .	73

## 図目次

1	荷電カレント反応と中性カレント反応 . . . . .	11
2	原子炉実験におけるニュートリノの生成・伝播・検出の模式図 (時空間局在図) . . . . .	42
3	図 2 の時空間図に重ね合わせた核反跳の相互作用の光円錐 . . . . .	46
4	Jones が主張する思考実験の図 . . . . .	47
5	$t_{N'} < t_N$ の場合の、ニュートリノ生成・伝播・検出の模式図 . . . . .	52
6	大気シャワーの概略図 . . . . .	66
7	順階層と逆階層の模式図 . . . . .	67
8	スーパーカミオカンデ検出器全体図 . . . . .	68
9	内水槽・外水槽 . . . . .	69
10	内水槽の様子 . . . . .	69
11	外水槽の様子 . . . . .	69
12	観測されるニュートリノやミューオンの分類 . . . . .	70
13	チェレンコフ光の概略図 . . . . .	70
14	チェレンコフ光の検出模式図 . . . . .	72

## 表目次

1	標準模型 . . . . .	10
2	ニュートリノと相互作用を持つ場 . . . . .	11
3	3つのニュートリノ混合に基づくデータ解析によって得られた値 . . . . .	18
4	スーパーカミオカンデによる大気データ有りの通常オーダー ( $l = 1, 2$ ) . . . . .	19
5	スーパーカミオカンデの期間ごとの主な性能 . . . . .	68
6	20 インチ PMT の特性 . . . . .	71

## 1 導入

ニュートリノ振動とはニュートリノが空間を直進する間に、フレーバー——相互作用の固有状態——が変化する現象である。この現象が観測されたことから、ニュートリノには質量が存在し、それを通じてフレーバーが混合していることが分かった(詳しくは3.5節を参照)。

ニュートリノ振動における量子デコヒーレンス(量子もつれの解消)は、近年盛んに議論されている面白い問題である(例えば論文[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]等を参照)。ニュートリノの量子状態は、質量固有状態と相互作用固有状態(以下フレーバー固有状態と呼ぶ)という2通りの基底を用いて表せる。前者はニュートリノがどのように伝播するかを決定し、後者はニュートリノの生成と検出のための荷電カレント相互作用を特徴づける。フレーバー遷移確率  $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta)$  は、フレーバー  $\nu_\alpha$  として生成されたニュートリノがフレーバー  $\nu_\beta$  として検出される確率を表す。ニュートリノはフレーバー固有状態として生成された後、質量固有状態の重ね合わせとして伝播する。このような重ね合わせ——エンタングルメント(以下(量子)もつれと呼ぶ)——は、干渉パターンの観測につながる可能性がある。また、さまざまな観測可能な効果により、ニュートリノのコヒーレンスはある段階で失われると予想されている。

以前の研究では、ニュートリノ振動は主として平面波を用いて計算されてきた。しかし、平面波として扱う場合、各平面波同士はどんなに離しても重なり合ってしまう、実際の実験状況とは異なるという問題が生じる。そのため、波束を用いた定式化による議論が近年盛んになってきた(上述の他に論文[8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]等を参照)。

波束とは場の量子論の最も基本的な構成要素の1つである。これを用いることで、平面波では観測することのできない効果が観測できるようになると期待されている。例えば、論文[1]では、ニュートリノ振動における Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein 効果に対する、コヒーレントおよびデコヒーレントな広がり効果について記されている。この論文で扱う範囲では、生成されたニュートリノを平面波で扱う場合も、波束で扱う場合も、実験では特に区別できないことが示されている。論文[9]では、ニュートリノ振動に対して、量子力学的な波束の取り扱いと場の量子論的な取り扱いの2つの手法を比較・検討している。論文[10]の著者らは、ニュートリノ振動の出現確率と消失確率について、S行列の結果に対する有限時間相関から、S行列が長基線事象の記述に不向きである、と主張している。

我々の計算では、具体的にガウス波束(詳しくは2.2節を参照)を用いて鞍点法で計算することにより、ニュートリノの生成と検出に関わる二乗波束幅は、デコヒーレンス長と波束の伝搬を支配する局在化因子においては加法的に現れるのに対し、運動量保存因子では換算的(逆数の和の逆数)に現れることを得た。また、遷移確率の全体的な規格化は換算的なものと加法的なものとの比で決まることを得た。

本論文の構成は次のとおりである。第2章では、この論文で取り扱う波束形式について、我々の表記法に基づき説明する。第3章では、ニュートリノ振動に関する基礎的な事項を説明する。第4章では、ニュートリノ振動と波束について、論文[15]に沿って概説する。第5章では、最近のデコヒーレンスをめぐる論争[4, 5, 6]を紹介する。第6章では、上述の、ガウス波束による鞍点法の計算とその結果を示す。第7章は、本修士論文のまとめである。付録には、ニュートリノ実験に関する基本的な事項をまとめた卒業論文を修正したものと、本文中で紹介した EPR 実験を具体的な表現で計算した結果を紹介する。

## 2 波束形式

この論文の独自計算においてはガウス波束を用いるが、その準備としてまずは2.1節で平面波を提示し、その後2.2節でガウス波束を示す。ニュートリノは、本来はスピン1/2のスピノール場で記述される（詳しくは6.1節を参照）が、ここではスピンの自由度を無視してスピン0のスカラール場と同様に扱う。簡単のため、空間1次元の場合に限って導入し、後の6章で3次元に一般化した表式を用いる。

この論文では、特に断りのない限り自然単位系  $\hbar = c = k_B = 1$  を用いる。ここで、 $\hbar$  は換算プランク定数、 $c$  は光速、 $k_B$  はボルツマン定数。

### 2.1 平面波（スカラール場）

場の量子論においては、自由（スカラール）場の一粒子状態を、場の生成演算子  $\hat{a}^\dagger(p)$  に真空状態  $|0\rangle$  に掛けて

$$|p\rangle := \hat{a}^\dagger(p) |0\rangle, \quad (2.1)$$

で定義する。座標基底  $|x\rangle$  は、運動量基底 (2.1) の双対として、以下で定義する：

$$\langle x | p \rangle := \frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (2.2)$$

ここで、 $x, p$  の規格化はそれぞれ

$$\langle x | x' \rangle = \delta(x - x'), \quad \langle p | p' \rangle = \delta(p - p'), \quad (2.3)$$

と取った。これは、次の計算からも確かめられる：

$$\begin{aligned} \langle x | \left( \int dp |p\rangle \langle p| \right) |x' \rangle &= \int dp \langle x | p \rangle \langle p | x' \rangle \\ &= \int \frac{dp}{2\pi} e^{ip(x-x')} \\ &= \delta(x - x'), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \langle p | \left( \int dx |x\rangle \langle x| \right) |p' \rangle &= \int dx \langle p | x \rangle \langle x | p' \rangle \\ &= \int \frac{dx}{2\pi} e^{i(p'-p)x} \\ &= \delta(p - p'). \end{aligned} \quad (2.5)$$

ここで、ディラックのデルタ関数

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{ipx}, \quad \delta(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} e^{ipx}, \quad (2.6)$$

を用いた。このとき、完全性関係はそれぞれ次のようになる：

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |x\rangle \langle x| = \hat{1}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dp |p\rangle \langle p| = \hat{1}. \quad (2.7)$$

## 2.2 ガウス波束

位置と運動量の中心がそれぞれ  $X$ 、 $P$  であるようなガウス波束  $|X, P\rangle$  は、運動量空間で以下で定義される:

$$\langle p | X, P \rangle := C e^{-\frac{1}{2\sigma_p^2}(p-P)^2} e^{-ipX}, \quad (2.8)$$

ここで、 $C$  は後で決める規格化定数である。座標空間では

$$\begin{aligned} \langle x | X, P \rangle &= \langle x | \left( \int dp |p\rangle \langle p| \right) |X, P\rangle \\ &= \int dp \langle x | p \rangle \langle p | X, P \rangle \\ &= \int dp \frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\pi}} C e^{-\frac{1}{2\sigma_p^2}(p-P)^2 - ipX} \\ &= \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \int dp e^{-\frac{1}{2\sigma_p^2}(p-P)^2 + ip(x-X)} \\ &= \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \int dp' e^{-\frac{1}{2\sigma_p^2}p'^2} e^{-\frac{\sigma_p^2}{2}(x-X)^2} e^{iP(x-X)} \\ &= C \sigma_p e^{-\frac{\sigma_p^2}{2}(x-X)^2} e^{iP(x-X)}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

ここで、 $(p - P - i(x - X)\sigma_p^2) =: p'$  とおき、ガウス積分を用いた。

規格化定数は

$$\begin{aligned} \langle X, P | X, P \rangle &= \langle X, P | \left( \int dp |p\rangle \langle p| \right) |X, P\rangle \\ &= \int dp |\langle p | X, P \rangle|^2 \\ &= |C|^2 \int dp e^{-\frac{1}{\sigma_p^2}(p-P)^2} \\ &= |C|^2 \sqrt{\pi} \sigma_p \\ &= 1, \end{aligned} \quad (2.10)$$

と取るとき

$$C = \frac{1}{(\pi \sigma_p^2)^{\frac{1}{4}}}, \quad (2.11)$$

と決まる。これは次のようにも確認できる:

$$\begin{aligned} \langle X, P | \left( \int dx |x\rangle \langle x| \right) |X, P\rangle &= \int dx |\langle x | X, P \rangle|^2 \\ &= |C|^2 \sigma_p^2 \int dx e^{-\frac{\sigma_p^2}{2}(x-X)^2} \\ &= 1. \end{aligned} \quad (2.12)$$



どんな波束でも、ガウシアンで展開できることを主張するために、以下の完全性関係 (2.13) を示す:

$$\int \frac{dXdP}{2\pi} |X, P\rangle \langle X, P| = \hat{1}. \quad (2.13)$$

左辺を運動量基底で挟むと

$$\begin{aligned} \langle p| \left( \int \frac{dXdP}{2\pi} |X, P\rangle \langle X, P| \right) |p'\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int dXdP \langle p| X, P\rangle \langle X, P| p'\rangle \\ &= \frac{|C|^2}{2\pi} \int dXdP e^{-\frac{1}{2\sigma_p^2}(p-P)^2 - ipX} e^{-\frac{1}{2\sigma_p^2}(p'-P)^2 + ip'X} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int dX e^{i(p'-p)X} |C|^2 \int dP e^{-\frac{1}{2\sigma_p^2}(p-P)^2} e^{-\frac{1}{2\sigma_p^2}(p'-P)^2} \\ &= |C|^2 \sigma_p \sqrt{\pi} \delta(p - p') \\ &= \delta(p - p') \\ &= \langle p| p'\rangle, \end{aligned} \quad (2.14)$$

ここで、式 (2.6) と (2.11) を用いた。確認のために座標基底でも計算しておく:

$$\begin{aligned} \langle x| \left( \int \frac{dXdP}{2\pi} |X, P\rangle \langle X, P| \right) |x'\rangle &= \frac{|C|^2 \sigma_p^2}{2\pi} \int dXdP e^{-\frac{\sigma_p^2}{2}(x-X)^2 + ip(x-X)} e^{-\frac{\sigma_p^2}{2}(x'-X)^2 - ip(x'-X)} \\ &= |C|^2 \sigma_p^2 \frac{1}{2\pi} \int dP e^{iP(x-x')} \int dX e^{-\sigma_p^2(x-X)^2} \\ &= |C|^2 \sigma_p \sqrt{\pi} \delta(x - x') \\ &= \delta(x - x') \\ &= \langle x| x'\rangle. \end{aligned} \quad (2.15)$$

以上から、ガウス基底の完全性関係 (2.13) が示された。

他の具体的な計算については 6 章を参照。

### 3 ニュートリノ振動の基礎

この章ではニュートリノ振動に関する基礎的な事項を説明する。

#### 3.1 標準模型

標準模型とは、現在の素粒子物理学を記述する最も基本的な枠組みである（構成粒子は表 1 を参照）。素粒子の標準模型は、クォークとレプトン（どちらもスピン 1/2 のフェルミオン）で構成されており、それらは、ゲージ場（スピン 1 のボソン）を介して互いに相互作用する。ゲージ粒子は光子、ウィークボソン、グルーオンの 3 種類があり、それぞれが基本的な力である電磁気力、弱い力、強い力に対応する媒介粒子である。これらを記述する理論として、電弱理論（電磁気力と弱い力）と量子色力学（強い力）を統合したのが標準模型である。

クォークとレプトンはそれぞれ電荷が異なり、アップ型クォークは電荷  $+2/3$  を、ダウン型クォークは電荷  $-1/3$  を持つ。電子  $e$  などの荷電レプトンは電荷  $-1$  を、ニュートリノは電荷  $0$  を持つ。また、2012 年に発見されたヒッグス粒子に対応するヒッグス場は、様々な粒子に質量を与えている。単体での観測可能なレプトンに対し、クォークは他の粒子と結びついた複合粒子としてしか観測できない。クォークが強い力によって結びついた複合粒子のことをハドロンと呼ぶ。特にクォーク 3 個から構成されるものをバリオン、クォーク 2 個から構成されるものをメソンと呼ぶ。

表 1 標準模型

		第 1 世代	第 2 世代	第 3 世代
フェルミオン	クォーク	アップクォーク $u$ ダウンクォーク $d$	チャームクォーク $c$ ストレンジクォーク $s$	トップクォーク $t$ ボトムクォーク $b$
	レプトン	電子 $e$ 電子ニュートリノ $\nu_e$	ミューオン $\mu$ ミューニュートリノ $\nu_\mu$	タウオン $\tau$ タウニュートリノ $\nu_\tau$
ボソン	ゲージ場 スカラー場	光子 $\gamma$ 、ウィークボソン $Z^0, W^\pm$ 、グルーオン $g$ ヒッグス粒子 $H^0$		

#### 3.2 標準模型におけるニュートリノ

ニュートリノは電荷を持たないレプトンであり、1/2 のスピンを持つフェルミオンの 1 つである。原子核の  $\beta$  崩壊においてエネルギー保存則が破れているように思われる現象を説明する粒子として、1930 年に W. E. Pauli によって考案された。弱い相互作用と重力相互作用でしか反応しないため検出が非常に困難であり、反応を観測するためには高感度な検出器を用意する必要がある。

ニュートリノは 3 世代存在することが確認されており、それぞれ荷電レプトンと対をなし、反粒子も存在する：

$$\begin{bmatrix} \nu_e \\ e^- \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \bar{\nu}_e \\ e^+ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{\nu}_\mu \\ \mu^+ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{\nu}_\tau \\ \tau^+ \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

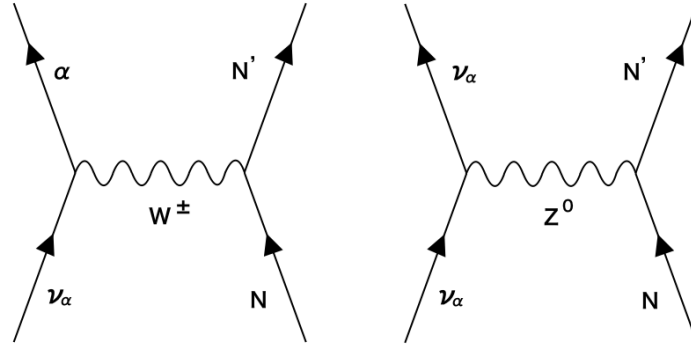


図1 荷電カレント反応 (左) と中性カレント反応 (右)

このニュートリノが実験により観測されたのは、Pauli が提案してから 20 年以上経った 1956 年、F. Reines と C. L. Cowan による原子炉実験 [16] であった。その後、1962 年に L. M. Lederman, M. Schwartz, J. Steinberger らが率いる研究グループが、ニュートリノには 2 つの異なる種類があることを発見した [17]。これが、 $\nu_e$  と  $\nu_\mu$  である。さらに 2000 年には、Fermi 国立加速器研究所で行われた DONUT 実験により  $\nu_\tau$  の存在が明らかになった [18]。

### 3.3 ニュートリノの相互作用

ニュートリノは弱い相互作用と重力相互作用のみで反応するが、質量が非常に小さいため、重力相互作用ではほとんど反応しない。そのため、主なニュートリノの反応は弱い相互作用であり、 $W^+$ 、 $W^-$ 、 $Z^0$  の三種類のゲージボソンが媒介粒子となっている。この反応は電荷の交換方法により、荷電カレント反応 (3.2) と中性カレント反応 (3.3) に分類される (図 1 参照) :

$$\nu_\alpha + N \rightarrow \alpha + N', \quad (3.2)$$

$$\nu_\alpha + N \rightarrow \nu_\alpha + N'. \quad (3.3)$$

このとき、 $\alpha = e, \mu, \tau$  であり、 $N = u, d, s$  である。 $W^\pm$  は荷電カレント反応、 $Z^0$  は中性カレント反応を媒介する。

### 3.4 標準模型におけるワインバーグ演算子

標準模型の作用で、ニュートリノ、およびニュートリノと相互作用を持つ場は表 2 のとおり:

表2 ニュートリノと相互作用を持つ場

レプトン二重項	ヒッグス二重項	$U(1)_Y$ ゲージ場	$SU(2)_L$ ゲージ場
$\begin{bmatrix} \nu_\alpha(x) \\ e_\alpha(x) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} H^+(x) \\ H^0(x) \end{bmatrix}$	$B_\mu(x)$	$W_\mu^a(x)$

ただし、本修士論文の添字の記法は以下のとおり:

- $\alpha, \beta, \dots$  はフレーバー  $e, \mu, \tau$  を走る添字、
- $\mu, \nu, \dots$  は  $0, 1, 2, 3$  を走る時空の添字、
- $a, b, \dots$  は  $1, 2, 3$  を走る  $SU(2)_L$  の随伴表現の添字。

これらを用いた、標準模型におけるニュートリノの運動項と相互作用項は以下のとおり:

$$\begin{aligned}
S = \int d^{d+1}x & \left[ - \sum_{\alpha} \left[ \overline{\nu_{\alpha}(x)} \quad \overline{e_{\alpha}(x)} \right] \gamma^{\mu} (\partial_{\mu} + ig_Y Y B_{\mu}(x) + ig T^a W_{\mu}^a(x)) P_L \begin{bmatrix} \nu_{\alpha}(x) \\ e_{\alpha}(x) \end{bmatrix} \right. \\
& - \sum_{\alpha, \beta} y_{\alpha\beta} \left[ \overline{\nu_{\alpha}(x)} \quad \overline{e_{\alpha}(x)} \right] \begin{bmatrix} H^+(x) \\ H^0(x) \end{bmatrix} P_R e_{\beta}(x) - \sum_{\alpha, \beta} y_{\alpha\beta}^* \overline{e_{\beta}(x)} \left[ H^{+*}(x) \quad H^{0*}(x) \right] P_L \begin{bmatrix} \nu_{\alpha}(x) \\ e_{\alpha}(x) \end{bmatrix} \\
& \left. - \sum_{\alpha, \beta} \frac{\kappa_{\alpha\beta}}{2} \left( \left[ \overline{\nu_{\alpha}(x)} \quad \overline{e_{\alpha}(x)} \right] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^{+*}(x) \\ H^{0*}(x) \end{bmatrix} \right) \left( \begin{bmatrix} H^+(x) & H^0(x) \\ -1 & 0 \end{bmatrix} P_L \begin{bmatrix} \nu_{\beta}(x) \\ e_{\beta}(x) \end{bmatrix} \right) \right], \tag{3.4}
\end{aligned}$$

ここで、初めて出てきた記号の定義は以下のとおり:

- $g_Y$  と  $g$  はそれぞれ  $U(1)_Y$  と  $SU(2)_L$  のゲージ結合定数、
- $y_{\alpha\beta}$  は荷電レプトンの湯川結合定数、
- $\kappa_{\alpha\beta}$  はワインバーグ演算子 (下記) の質量次元  $-1$  の結合定数、
- $d = 3$  は空間次元、
- $\gamma^{\mu}$  はガンマ行列であり、カイラリティの射影は

$$P_L := \frac{1 + \gamma_5}{2}, \quad P_R := \frac{1 - \gamma_5}{2}. \tag{3.5}$$

式 (3.4) の最後の行が、ワインバーグ演算子と呼ばれる、標準模型の場合だけを用いて書ける最低次のニュートリノの質量項である [19]。レプトン二重項  $\begin{bmatrix} \nu_{\alpha}(x) \\ e_{\alpha}(x) \end{bmatrix}$  の上では、 $Y = -\frac{1}{2}$  であり、 $SU(2)_L$  については、

$$T^a W_{\mu}^a = \frac{\sigma^a}{2} W_{\mu}^a = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} W_{\mu}^3 & W_{\mu}^1 - iW_{\mu}^2 \\ W_{\mu}^1 + iW_{\mu}^2 & -W_{\mu}^3 \end{bmatrix} =: \frac{1}{2} \begin{bmatrix} W_{\mu}^3 & \sqrt{2}W_{\mu}^+ \\ \sqrt{2}W_{\mu}^- & -W_{\mu}^3 \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

である。

$P_L \begin{bmatrix} \nu_{\alpha}(x) \\ e_{\alpha}(x) \end{bmatrix}$  と  $P_R e_{\alpha}(x)$  の場の再定義により、湯川行列  $y_{\alpha\beta}$  を常に対角化し、その成分を実数かつ正とすることができ:

$$\begin{aligned}
S = \int d^{d+1}x & \left[ - \sum_{\alpha} \left[ \overline{\nu_{\alpha}(x)} \quad \overline{e_{\alpha}(x)} \right] \gamma^{\mu} (\partial_{\mu} + ig_Y B_{\mu} + ig_Y Y + ig T^a W_{\mu}^a(x)) P_L \begin{bmatrix} \nu_{\alpha}(x) \\ e_{\alpha}(x) \end{bmatrix} \right. \\
& - \sum_{\alpha} y_{\alpha} \left[ \overline{\nu_{\alpha}(x)} \quad \overline{e_{\alpha}(x)} \right] \begin{bmatrix} H^+(x) \\ H^0(x) \end{bmatrix} P_R e_{\alpha}(x) - \sum_{\alpha, \beta} y_{\alpha} \overline{e_{\beta}(x)} \left[ H^{+*}(x) \quad H^{0*}(x) \right] P_L \begin{bmatrix} \nu_{\alpha}(x) \\ e_{\alpha}(x) \end{bmatrix} \\
& \left. - \sum_{\alpha, \beta} \frac{\kappa_{\alpha\beta}}{2} \left( \left[ \overline{\nu_{\alpha}(x)} \quad \overline{e_{\alpha}(x)} \right] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^{+*}(x) \\ H^{0*}(x) \end{bmatrix} \right) \left( \begin{bmatrix} H^+(x) & H^0(x) \\ -1 & 0 \end{bmatrix} P_L \begin{bmatrix} \nu_{\beta}(x) \\ e_{\beta}(x) \end{bmatrix} \right) \right], \tag{3.7}
\end{aligned}$$

ここで、 $\kappa$  も適当に再定義されている。

この係数行列は (作用が実であるために) エルミート

$$\kappa_{\alpha\beta}^* = \kappa_{\beta\alpha}, \quad (3.8)$$

なので、ユニタリー行列で対角化できる:

$$\kappa_{\alpha\beta} = \sum_{I,J} U_{\alpha I} (\kappa_I \delta_{IJ}) U_{\beta J}^*. \quad (3.9)$$

この  $U$  がニュートリノ振動をつかさどる (PKMTY) MNS 行列である (詳しくは 3.5 節を参照)。

対称性の自発的な破れの後

$$\begin{bmatrix} H^+(x) \\ H^0(x) \end{bmatrix} \rightarrow \left\langle \begin{bmatrix} H^+(x) \\ H^0(x) \end{bmatrix} \right\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

となり

$$\begin{aligned} S \rightarrow \int d^{d+1}x & \left[ - \sum_{\alpha} [\overline{\nu_{\alpha}(x)} \quad \overline{e_{\alpha}(x)}] \gamma^{\mu} \left( \partial_{\mu} + \frac{i}{2} \begin{bmatrix} -g_Y B_{\mu} + g W_{\mu}^3 & \sqrt{2} g W_{\mu}^+ \\ \sqrt{2} g W_{\mu}^- & -g_Y B_{\mu} - g W_{\mu}^3 \end{bmatrix} \right) P_L \begin{bmatrix} \nu_{\alpha}(x) \\ e_{\alpha}(x) \end{bmatrix} \right. \\ & - \sum_{\alpha} m_{\alpha} \overline{e_{\alpha}(x)} e_{\alpha}(x) \\ & \left. - \sum_{\alpha,\beta} \frac{m_{\alpha\beta}}{2} \overline{\nu_{\alpha}(x)} P_L \nu_{\beta}(x) \right], \quad (3.11) \end{aligned}$$

が得られる、ここで、荷電レプトン  $e, \mu, \tau$  の質量を

$$m_{\alpha} := \frac{y_{\alpha} v}{\sqrt{2}}, \quad (3.12)$$

と書き、ニュートリノのマヨラナ質量行列を

$$m_{\alpha\beta} := \kappa_{\alpha\beta} v^2, \quad (3.13)$$

と書いた。式 (3.11) の最後の行のニュートリノのマヨラナ質量項を書き換えると

$$\begin{aligned} - \sum_{\alpha,\beta} \frac{m_{\alpha\beta}}{2} \overline{\nu_{\alpha}(x)} P_L \nu_{\beta}(x) &= - \sum_{\alpha,\beta} \frac{\kappa_{\alpha\beta} v^2}{2} \overline{\nu_{\alpha}(x)} P_L \nu_{\beta}(x) \\ &= - \frac{v^2}{2} \sum_{\alpha,\beta} \sum_{I,J} U_{\alpha I} (\kappa_I \delta_{IJ}) U_{\beta J}^* \overline{\nu_{\alpha}(x)} P_L \nu_{\beta}(x) \\ &= - \sum_I \frac{\kappa_I v^2}{2} \overline{\nu_I(x)} P_L \nu_I(x), \quad (3.14) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \nu_{\alpha}(x) &= \sum_I U_{\alpha I} \nu_I(x), \\ \nu_I(x) &= \sum_{\beta} U_{\alpha I}^* \nu_{\beta}(x). \quad (3.15) \end{aligned}$$

まとめると

$$S = \int d^{d+1}x \left\{ - \sum_{\alpha} [\sum_I U_{\alpha I}^* \overline{\nu_I(x)} \quad \overline{e_{\alpha}(x)}] \gamma^{\mu} \left( \partial_{\mu} + \frac{i}{2} \begin{bmatrix} -g_Y B_{\mu} + g W_{\mu}^3 & \sqrt{2} g W_{\mu}^+ \\ \sqrt{2} g W_{\mu}^- & -g_Y B_{\mu} - g W_{\mu}^3 \end{bmatrix} \right) \right. \\ \times P_L \left[ \begin{array}{c} \sum_J U_{\alpha J} \nu_J(x) \\ e_{\alpha}(x) \end{array} \right] \\ \left. - \sum_{\alpha} m_{\alpha} \overline{e_{\alpha}(x)} e_{\alpha}(x) - \sum_I \frac{m_I}{2} \overline{\nu_I(x)} P_L \nu_I(x) \right\}. \quad (3.16)$$

特に、 $U$  によって混合されるのは、座標空間の方であることに注意 (6.1 節を参照)。

### 3.5 ニュートリノ混合

自由ニュートリノ量子場の  $I$  番目の質量固有状態を平面波で展開すると、

$$\hat{\nu}_I(x) = \sum_s \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} 2E_I(\mathbf{p})} \left( \hat{\alpha}_I(s; \mathbf{p}) \mathcal{U}_I(s; \mathbf{p}) e^{-iE_I(\mathbf{p})x^0 + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \hat{\alpha}_I^{\dagger}(s; \mathbf{p}) \mathcal{V}_I(s; \mathbf{p}) e^{iE_I(\mathbf{p})x^0 - i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right), \quad (3.17)$$

ここで、ローレンツ共変な生成消滅演算子は

$$\left\{ \hat{\alpha}_I(s; \mathbf{p}), \hat{\alpha}_J^{\dagger}(s'; \mathbf{p}') \right\} = \delta_{IJ} \delta_{ss'} 2E_I(\mathbf{p}) \delta^d(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad \text{他} = 0. \quad (3.18)$$

ニュートリノがマヨラナのときは、 $\mathcal{V}_I(s; \mathbf{p})$  は、 $\mathcal{U}_I(s; \mathbf{p})$  の関数として与えられる。<sup>\*1</sup>

余談だが、ローレンツ非共変な消滅演算子

$$\hat{a}_I(s; \mathbf{p}) := \frac{\hat{\alpha}_I(s; \mathbf{p})}{\sqrt{2E_I(\mathbf{p})}}, \quad (3.19)$$

を用いると、量子力学で出てくる反交換関係が得られる:

$$\left\{ \hat{a}_I(s; \mathbf{p}), \hat{a}_J^{\dagger}(s'; \mathbf{p}') \right\} = \delta_{IJ} \delta_{ss'} \delta^d(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad \text{他} = 0. \quad (3.20)$$

この非共変な生成消滅演算子で書いたときには、

$$\hat{\nu}_I(x) = \sum_s \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \sqrt{2E_I(\mathbf{p})}} \left( \hat{a}_I(s; \mathbf{p}) \mathcal{U}_I(s; \mathbf{p}) e^{-iE_I(\mathbf{p})x^0 + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \hat{a}_I^{\dagger}(s; \mathbf{p}) \mathcal{V}_I(s; \mathbf{p}) e^{iE_I(\mathbf{p})x^0 - i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right). \quad (3.21)$$

<sup>\*1</sup> Weinberg の教科書 [20] の記法と比べると

$$\frac{\mathcal{U}_I(s; \mathbf{p})}{\sqrt{2E_I(\mathbf{p})}} = u_I(s; \mathbf{p}), \quad \frac{\mathcal{V}_I(s; \mathbf{p})}{\sqrt{2E_I(\mathbf{p})}} = v_I(s; \mathbf{p}),$$

であり、具体的には、マヨラナのときは

$$\mathcal{V}(s; \mathbf{p}) = (-\beta \epsilon) \mathcal{U}_I^*(s; \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 0 & -\epsilon \\ \epsilon & 0 \end{bmatrix} \mathcal{U}_I^*(s; \mathbf{p}),$$

ここに、 $\epsilon = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  である。

$|\nu_\alpha\rangle$  と  $|\nu_I\rangle$  を、それぞれ相互作用（フレーバー）、質量固有状態とする：

$$\langle\nu_\alpha|\nu_\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}, \quad \langle\nu_I|\nu_J\rangle = \delta_{IJ}. \quad (3.22)$$

すると

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_I |\nu_I\rangle \langle\nu_I|\nu_\alpha\rangle = \sum_I U_{\alpha I}^* |\nu_I\rangle, \quad (3.23)$$

$$|\nu_I\rangle = \sum_\alpha |\nu_\alpha\rangle \langle\nu_\alpha|\nu_I\rangle = \sum_\alpha U_{\alpha I} |\nu_\alpha\rangle, \quad (3.24)$$

と書ける。ここで、ユニタリー行列  $U$  は以下で定義した：

$$U_{\alpha I} := \langle\nu_\alpha|\nu_I\rangle. \quad (3.25)$$

この  $U_{\alpha I}$  が、式 (3.9) や (3.15) で出てくる (PKMTY) MNS 行列に他ならない。<sup>\*2</sup>

フレーバー固有状態は次のようにも書ける：

$$\begin{aligned} \hat{\nu}_\alpha(x) &= \sum_I U_{\alpha I} \sum_s \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} 2E_I(\mathbf{p})} \left( \hat{\alpha}_I(s; \mathbf{p}) \mathcal{U}_I(s; \mathbf{p}) e^{-iE_I(\mathbf{p})x^0 + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \hat{\alpha}_I^\dagger(s; \mathbf{p}) \mathcal{V}_I(s; \mathbf{p}) e^{iE_I(\mathbf{p})x^0 - i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right) \\ &= \sum_I U_{\alpha I} \sum_s \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \sqrt{2E_I(\mathbf{p})}} \left( \hat{\alpha}_I(s; \mathbf{p}) \mathcal{U}_I(s; \mathbf{p}) e^{-iE_I(\mathbf{p})x^0 + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \hat{\alpha}_I^\dagger(s; \mathbf{p}) \mathcal{V}_I(s; \mathbf{p}) e^{iE_I(\mathbf{p})x^0 - i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right). \end{aligned} \quad (3.26)$$

ニュートリノ振動とはニュートリノが空間を直進する間に、フレーバーが変化する現象である。これは、フレーバー固有状態  $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$  と質量固有状態  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  で分類されたニュートリノが互いに混ざり合っていることに起因する。 $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  はそれぞれ異なる振動数を持ち、重ね合わせることで表現される：

$$\begin{bmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

ここで、行列  $U$  は MNS (Maki-Nakagawa-Sakata) 行列 (ユニタリー行列) であり、<sup>\*3</sup>

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{23} & \sin \theta_{23} \\ 0 & -\sin \theta_{23} & \cos \theta_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_{13} & 0 & \sin \theta_{13} e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_{13} e^{i\delta} & 0 & \cos \theta_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_{12} & \sin \theta_{12} & 0 \\ -\sin \theta_{12} & \cos \theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

と表される。ここで、 $\theta_{IJ}$  は質量固有状態の混合角、 $\delta$  は CP 位相と呼ばれ、CP 対称性の破れを与えるパラメータである。

<sup>\*2</sup> 本当は、スピノール場であるニュートリノが混合されるのは座標の固有状態 (6.1 節参照) のみであり、運動量固有状態の混合は非自明であるが、これまでの研究ではスピンの自由度を無視してスカラー場の混合と同様に考えられてきた。この章では簡単のため、このような適当な取り扱いに準じて記す。

<sup>\*3</sup> あるいは PKMTYMNS 行列と呼ぶべきかもしれない [21, 22, 23]。

### 3.6 量子力学の枠内でのニュートリノ振動の取り扱い

真空中におけるニュートリノ振動を考える。ニュートリノが静止している系での質量固有状態の時間発展は、シュレディンガー方程式より

$$-i \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ \nu_3(t) \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ \nu_3(t) \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

また、相対論的  $m \ll p$  なニュートリノのエネルギー  $E$  は質量  $m$  を用いて次のように近似できる:

$$E = \sqrt{p^2 + m^2} = p + \frac{m^2}{2p} + \dots \simeq p + \frac{m^2}{2E}, \quad (3.30)$$

ここで、 $p \simeq E$  と近似した。

ニュートリノの質量固有値をそれぞれ  $m_1, m_2, m_3$  とすると

$$-i \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ \nu_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p + \frac{m_1^2}{2E} & 0 & 0 \\ 0 & p + \frac{m_2^2}{2E} & 0 \\ 0 & 0 & p + \frac{m_3^2}{2E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ \nu_3(t) \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

この  $p$  は、後々で平面波の指数に共通に入ってきて単に共通の位相因子を与えるだけだから、落とす:

$$-i \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ \nu_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_1^2}{2E} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2^2}{2E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_3^2}{2E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ \nu_3(t) \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

同様に、後々の共通の位相因子として  $\frac{m_1^2}{2E}$  を引くと

$$\begin{aligned} -i \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ \nu_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2^2 - m_1^2}{2E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_3^2 - m_1^2}{2E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ \nu_3(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta m_{21}^2}{2E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta m_{31}^2}{2E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ \nu_3(t) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

ここで、 $\Delta m_{21}^2 = m_2^2 - m_1^2$ 、 $\Delta m_{31}^2 = m_3^2 - m_1^2$  である。

フレーバー固有状態を  $\nu_\alpha$ 、質量固有状態を  $\nu_k$  と書くと

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* |\nu_k\rangle e^{-iE_k t}. \quad (3.34)$$

このときの遷移確率は



$$\begin{aligned}
P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) &= |\langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle|^2 \\
&= \left| \sum_I U_{\alpha I} U_{\beta I}^* e^{-iE_I t} \right|^2 \\
&= \sum_I \sum_J U_{\alpha I} U_{\beta I}^* U_{\alpha J}^* U_{\beta J} e^{-i(E_I - E_J)t} \\
&= \sum_I |U_{\alpha I}|^2 |U_{\beta I}|^2 + \sum_{I \neq J} U_{\alpha I} U_{\beta I}^* U_{\alpha J}^* U_{\beta J} e^{-i(E_I - E_J)t}. \tag{3.35}
\end{aligned}$$

いま、 $E_I - E_J \simeq \frac{\Delta m_{IJ}^2}{2E}$  であり、これと、ユニタリ条件

$$\delta_{\alpha\beta} = \left| \sum_I U_{\alpha I} U_{\beta I}^* \right|^2 = \sum_I |U_{\alpha I}|^2 |U_{\beta I}|^2 + \sum_{I \neq J} U_{\alpha I} U_{\beta I}^* U_{\alpha J}^* U_{\beta J}, \tag{3.36}$$

を、式 (3.35) に代入すると、以下を得る:

$$\begin{aligned}
P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) &= \delta_{\alpha\beta} + \sum_{I \neq J} U_{\alpha I} U_{\beta I}^* U_{\alpha J}^* U_{\beta J} \left( e^{-i(E_I - E_J)t} - 1 \right) \\
&= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{I > J} \text{Re}(U_{\alpha I} U_{\beta I}^* U_{\alpha J}^* U_{\beta J}) \sin^2 \frac{\Delta m_{IJ}^2}{4E} t + 2 \sum_{I > J} \text{Im}(U_{\alpha I} U_{\beta I}^* U_{\alpha J}^* U_{\beta J}) \sin^2 \frac{\Delta m_{IJ}^2}{2E} t, \tag{3.37}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\text{Re}(e^{-i(E_I - E_J)t} - 1) &= -2 \sin^2 \frac{(E_I - E_J)t}{2} \\
&\simeq -2 \sin^2 \frac{\Delta m_{IJ}^2}{4E} t, \tag{3.38}
\end{aligned}$$

$$\text{Im}(e^{-i(E_I - E_J)t} - 1) \simeq -\sin^2 \frac{\Delta m_{IJ}^2}{2E} t, \tag{3.39}$$

を用いた。ちなみに、飛行距離  $L$  は光速  $c$  を用いて  $L = ct$  であり、自然単位を考えているので  $L = t$  と書ける。

簡単のために 2 世代の振動を考えると、ニュートリノは  $\nu_1, \nu_2$  の重ね合わせで表され互いに干渉する:

$$\begin{bmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix}. \tag{3.40}$$

このとき、遷移確率  $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha)$  は

$$\begin{aligned}
P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha) &= \left| \cos^2 \theta e^{i\left(p + \frac{m_1^2}{2E_1}\right)t} + \sin^2 \theta e^{i\left(p + \frac{m_2^2}{2E_2}\right)t} \right|^2 \\
&= \left| e^{ipt} \left( \cos^2 \theta e^{i\frac{m_1^2}{2E_1}t} + \sin^2 \theta e^{i\frac{m_2^2}{2E_2}t} \right) \right|^2 \\
&= \left| \cos^2 \theta e^{i\frac{m_1^2}{2E_1}t} + \sin^2 \theta e^{i\frac{m_2^2}{2E_2}t} \right|^2 \\
&= \left( \cos^2 \theta e^{i\frac{m_1^2}{2E_1}t} + \sin^2 \theta e^{i\frac{m_2^2}{2E_2}t} \right) \left( \cos^2 \theta e^{i\frac{m_1^2}{2E_1}t} + \sin^2 \theta e^{i\frac{m_2^2}{2E_2}t} \right) \\
&= 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\Delta m^2}{4E} t \right). \tag{3.41}
\end{aligned}$$

また、遷移確率  $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta)$  は

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\Delta m^2}{4E} t \right), \quad (3.42)$$

と計算できる。また、 $L = t$  と書けるので次のようにも書き表せる:

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\Delta m^2}{4E} L \right), \quad (3.43)$$

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\Delta m^2}{4E} L \right). \quad (3.44)$$

式 (3.43)、(3.44) は足し合わせると 1 になることから確率の保存が成り立つことも確認できる。以上より、ニュートリノが質量を持ち、かつゼロではないニュートリノ混合があるとき、ニュートリノ振動が生じることが分かる。

ニュートリノ振動の位相がちょうど  $180^\circ (= \pi)$  になる距離——ニュートリノ振動の典型的な距離——をニュートリノ振動長  $l_{\text{osc}}$  と呼ぶ:

$$\frac{\Delta m^2}{4E} l_{\text{osc}} := \pi, \quad (3.45)$$

すなわち

$$l_{\text{osc}} := \frac{4\pi E}{\Delta m^2}. \quad (3.46)$$

### 3.7 パラメータの測定値

ニュートリノ振動は、ニュートリノ混合を示す 3 つの混合角  $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$  と、ニュートリノの質量二乗差  $\Delta m_{21}^2, \Delta m_{32}^2$  (ここに  $\Delta m_{ij}^2 := m_i^2 - m_j^2$ )、そして、ニュートリノと反ニュートリノそれぞれの振動の違いを表すパラメータ  $\delta_{\text{CP}}$  を用いて表せる。このうち、太陽ニュートリノの観測による  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$  の観測、原子炉ニュートリノからの  $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$  の観測から、 $\theta_{12}$  と  $\Delta m_{21}^2$  が測定された。また、大気ニュートリノ観測や K2K 実験などで  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$  が確認され、 $\theta_{23}$  と  $\Delta m_{32}^2$  が測定された。 $\theta_{13}$  に関しては、T2K 実験による  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$  の観測から測定されている (それぞれのニュートリノ源については付録 A.1 節を参照)。

Particle Data Group (PDG) による値 [24] は表 3 のとおり (順階層・逆階層については、付録 A.2 節を参照) :

表 3 3 つのニュートリノ混合に基づくデータ解析によって得られた値

$\sin^2 \theta_{12}$	$0.307 \pm 0.013$	
$\sin^2 \theta_{23}$	$0.539 \pm 0.022$	逆階層
$\sin^2 \theta_{23}$	$0.546 \pm 0.021$	順階層
$\sin^2 \theta_{13}$	$(2.20 \pm 0.07) \times 10^{-2}$	
$\Delta m_{21}^2$	$(7.53 \pm 0.18) \times 10^{-5} \text{ eV}^2$	
$\Delta m_{32}^2$	$(-2.536 \pm 0.034) \times 10^{-3} \text{ eV}^2$	逆階層
$\Delta m_{32}^2$	$(2.453 \pm 0.033) \times 10^{-3} \text{ eV}^2$	順階層
$\delta_{\text{CP}}$	$1.36_{-0.16}^{+0.20} \pi^\circ$	

一方、最新のグローバルフィットの最適値 [25] は表 4 のとおり:

表 4 スーパーカミオカンデによる大気データ有りの通常オーダー ( $l = 1, 2$ )

	最適値 $\pm 1\sigma$	$3\sigma$ 幅
$\sin^2 \theta_{12}$	$0.304^{+0.012}_{-0.012}$	$0.269 \rightarrow 0.343$
$\sin^2 \theta_{23}$	$0.450^{+0.019}_{-0.016}$	$0.408 \rightarrow 0.603$
$\sin^2 \theta_{13}$	$0.02246^{+0.00062}_{-0.00062}$	$0.02060 \rightarrow 0.02435$
$\theta_{12}/^\circ$	$33.45^{+0.77}_{-0.75}$	$31.27 \rightarrow 35.87$
$\theta_{23}/^\circ$	$42.1^{+1.1}_{-0.9}$	$39.7 \rightarrow 50.9$
$\theta_{13}/^\circ$	$8.62^{+0.12}_{-0.12}$	$8.25 \rightarrow 8.98$
$\delta_{\text{CP}}/^\circ$	$230^{+36}_{-25}$	$144 \rightarrow 350$
$\frac{\Delta m_{21}^2}{10^{-5} \text{ eV}^2}$	$7.42^{+0.21}_{-0.20}$	$6.82 \rightarrow 8.04$
$\frac{\Delta m_{3l}^2}{10^{-3} \text{ eV}^2}$	$2.510^{+0.027}_{-0.027}$	$+2.430 \rightarrow +2.593$

## 4 ニュートリノ振動と波束

この章ではニュートリノ振動の波束による取り扱いを、論文 [15] に沿って概説する。以下、S は生成過程、D は検出過程とする。

### 4.1 波束によるニュートリノ振動

ニュートリノ振動の考え方が提唱されてから既に半世紀以上が経過し [21, 22, 23]、この現象が実験的に確立してからも四半世紀が経過している [26]。しかし今に至っても、ニュートリノ振動理論の多くの基本的な問題点が依然として議論されている。未だに議論されている問題には次のようなものがある。

1. あるフレーバー状態を構成するニュートリノの質量固有状態について、よく用いられる「同一エネルギー」と「同一運動量」の仮定は、どちらも間違っていることが知られているが、なぜ振動確率の正しい結果を導くのか。
2. ニュートリノ振動における量子力学的な不確定性関係とは何か。
3. ニュートリノの波束の大きさは何によって決まるか。
4. ニュートリノ振動の観測可能性を保証するコヒーレンスと局在の条件は、ニュートリノのエネルギー不確かさと運動量不確かさにどう依存するか。
5. ニュートリノ振動を矛盾なく記述するために、実際に波束は必要か。
6. 振動が普遍的な（つまり、生成や検出過程に依存しない）確率で記述できるのはどのような場合か。
7. 定常信号源近似はいつ成立するか。
8. Mössbauer 型実験で生成・検出されるような、無反跳で生成・検出されたニュートリノは振動するか。
9. 荷電レプトンの振動は可能か。

### 4.2 「同一エネルギー」「同一運動量」とは何か

真空中のニュートリノ振動確率の導出は、通常、与えられたフレーバー固有状態を構成する質量固有状態が「同一エネルギー」 [27, 28, 29, 30] や「同一運動量」 [31, 32, 33, 34] であるという仮定がされる。どちらの仮定からも、標準的なニュートリノ振動確率が導けることが、以下のように分かる：質量ニュートリノ  $\nu_I$ 、フレーバー固有状態ニュートリノ  $\nu_a$  に対応する状態  $|\nu_I\rangle$ 、 $|\nu_a\rangle$  は、レプトンの混合行列  $U$  を用いて、次のように関係づけられる：

$$\nu_a = \sum_I U_{aI} \nu_I, \quad |\nu_a\rangle = \sum_I U_{aI}^* |\nu_I\rangle. \quad (4.1)$$

ここで、最初に生成されたフレーバー状態  $|\nu(0)\rangle = |\nu_a\rangle$  を構成するすべての質量固有状態が「同一運動量」を持っていると仮定すると、時間  $t$  が経過した後、 $I$  番目の質量固有状態は単に位相因子  $\exp(-iE_I t)$  を取り、 $|\nu(t)\rangle$  は

$$|\nu(t)\rangle = \sum_I U_{aI}^* e^{-iE_I t} |\nu_I\rangle, \quad (4.2)$$

となる。この状態を  $|\nu_b\rangle$  に射影し、得られる遷移振幅の二乗係数を取ると、時間間隔  $t$  の後に得られるニュートリノのフレーバー遷移確率は

$$P(\nu_a \rightarrow \nu_b; t) = \left| \sum_I U_{bI} e^{-iE_I t} U_{aI}^* \right|^2, \quad (4.3)$$

ここで、質量  $m_I$ 、運動量  $p$  の相対論的ニュートリノのエネルギー  $E_I$  は

$$E_I = \sqrt{p^2 + m_I^2} \simeq p + \frac{m_I^2}{2p}, \quad (4.4)$$

であり、 $L \simeq t$  を満たす。<sup>\*4</sup> このとき、真空中のニュートリノ振動を記述する標準的な式は

$$P(\nu_a \rightarrow \nu_b; t) = \left| \sum_I U_{bI} e^{-i\frac{\Delta m_{IJ}^2 L}{2p}} U_{aI}^* \right|^2, \quad (4.5)$$

と求まる。 $\Delta m_{IJ}^2 = m_I^2 - m_J^2$  とした。

同様に、最初に生成されたフレーバー状態  $|\nu_a\rangle$  を構成するすべての質量固有状態が「同一エネルギー」を持つと仮定する。 $I$  番目の質量固有状態は位相因子  $\exp(i\mathbf{p}_I \cdot \mathbf{x})$  を取り、質量  $m_I$  とエネルギー  $E$  の相対論的ニュートリノに対し

$$p_I = \sqrt{E^2 - m_I^2} \simeq E - \frac{m_I^2}{2E}, \quad (4.6)$$

を用いると、先ほどと同じ振動確率の標準式 (4.5) が得られる。ただし、この場合は  $L \neq t$  である。

これら 2 つの振動確率の導出は、非常に単純かつ明瞭である。しかし、これらの仮定（「同一エネルギー」や「同一運動量」）を取ることは、どちらも間違っている。4.4 節でこの問題について詳しく述べる。

### 4.3 ニュートリノ振動の波束的アプローチ

$\mathbf{x} = 0$  を中心とするニュートリノ状態  $\nu_a$  が  $t = 0$  で生成されたとすると、 $(t, \mathbf{x})$  でのニュートリノ波束は

$$|\nu_a(\mathbf{x}, t)\rangle = \sum_I U_{aI}^* \Psi_I(\mathbf{x}, t) |\nu_I\rangle, \quad (4.7)$$

ここで、 $\Psi_I(\mathbf{x}, t)$  は質量  $m_I$  のニュートリノ波束である：

$$\Psi_I(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} f_I^S(\mathbf{p} - \mathbf{p}_I) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - iE_I(p)t}, \quad (4.8)$$

ただし、 $E_I(p)$  は式 (4.4) で定義されたものであり、 $f_I^S(\mathbf{p} - \mathbf{p}_I)$  は平均運動量を  $\mathbf{p}_I$  とする運動量分布関数である。典型的な状況においては、関数  $f_I^S(\mathbf{p} - \mathbf{p}_I)$  は、運動量ピーク幅  $\sigma_{pS} \ll p_I$  を持つ。<sup>\*5</sup>

<sup>\*4</sup> この修士論文では、三次元ベクトルの大きさを  $p := |\mathbf{p}| = \sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2}$  と書く記法を用いる。

<sup>\*5</sup> もしこれを

$$\int d^3 p |f_I^S(\mathbf{p} - \mathbf{p}_I)|^2 = 1,$$

に従って規格化するならば、波動関数  $\Psi_I(\mathbf{x}, t)$  は

$E_I(p)$  を平均運動量  $p_I$  周りでテイラー展開すると、

$$E_I(p) = E_I(p_I) + \left. \frac{\partial E_I(p)}{\partial p^j} \right|_{p_I} (p - p_I)^j + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 E_I(p)}{\partial p^j \partial p^k} \right|_{p_I} (p - p_I)^j (p - p_I)^k + \dots \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} &= E_I(p_I) + \frac{p_I^j}{E_I(p_I)} (p - p_I)^j + \frac{1}{2E_I(p_I)} \left( \delta^{jk} - \frac{p_I^j p_I^k}{E_I^2(p_I)} \right) (p - p_I)^j (p - p_I)^k + \dots \\ &= E_I(p_I) + \frac{\mathbf{p}_I \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}_I)}{E_I(p_I)} + \frac{1}{2E_I(p_I)} \left( (\mathbf{p} - \mathbf{p}_I)^2 - \frac{(\mathbf{p}_I \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}_I))^2}{E_I^2(p_I)} \right) + \dots, \end{aligned} \quad (4.10)$$

ここで  $\big|_{p_I}$  は、 $\mathbf{p}$  を  $\mathbf{p}_I$  で置き換えたことを表す。

この章では、1次の項までを考える。このとき式 (4.8) は次のように書き換えられる：

$$\begin{aligned} \Psi_I(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{d^3 \tilde{\mathbf{p}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} f_I^S(\tilde{\mathbf{p}}) e^{i(\tilde{\mathbf{p}} + \mathbf{p}_I) \cdot \mathbf{x}} e^{-i(E_I(p_I) + \frac{\mathbf{p}_I \cdot \tilde{\mathbf{p}}}{E_I(p_I)})t} \\ &= e^{i\mathbf{p}_I \cdot \mathbf{x} - iE_I(p_I)t} g_I^S(\mathbf{x} - \mathbf{v}_I t), \end{aligned} \quad (4.11)$$

ここで、 $\tilde{\mathbf{p}} := \mathbf{p} - \mathbf{p}_I$  とおき、 $g_I^S(\mathbf{x} - \mathbf{v}_I t)$  を次のように定義した：

$$g_I^S(\mathbf{x} - \mathbf{v}_I t) := \int \frac{d^3 \tilde{\mathbf{p}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} f_I^S(\tilde{\mathbf{p}}) e^{i\tilde{\mathbf{p}} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{v}_I t)}. \quad (4.12)$$

この近似のもとでは、波束の群速度  $\mathbf{v}_I$  は

$$\mathbf{v}_I = \left. \frac{\partial E_I(p_I)}{\partial \mathbf{p}} \right|_{p_I} = \left. \frac{\mathbf{p}}{E_I(p_I)} \right|_{p_I}, \quad (4.13)$$

である。このことから、この近似のもとでは波束は群速度  $\mathbf{v}_I$  で形を変えずに動くことが分かる。

上で定義した  $\sigma_p$  は、ハイゼンベルグの不確定性関係から、座標空間の波束の大きさを  $\sigma_x$  とするとき、 $\sigma_x \gtrsim \sigma_p^{-1}$  を満たし、 $g_I^S(\mathbf{x} - \mathbf{v}_I t)$  は  $|\mathbf{x} - \mathbf{v}_I t| \gtrsim \sigma_x$  で減少する。上述のように、波束の運動量の広がり2次以上を無視して考える場合、ニュートリノ状態  $\nu_a$  の波束は、式 (4.11) の  $\Psi_I(\mathbf{x}, t)$  を式 (4.7) に代入した形で表される：

$$|\nu_a(\mathbf{x}, t)\rangle = \sum_I U_{aI}^* e^{i\mathbf{p}_I \cdot \mathbf{x} - iE_I(p_I)t} g_I^S(\mathbf{x} - \mathbf{v}_I t) |\nu_I\rangle. \quad (4.14)$$

次に、検出されたニュートリノ状態  $\nu_b$  を位置  $\mathbf{L}$  にピークを持つ波束として次のように定義する：

$$|\nu_b(\mathbf{x} - \mathbf{L})\rangle = \sum_I U_{bI}^* \Psi_I^D(\mathbf{x} - \mathbf{L}) |\nu_I\rangle. \quad (4.15)$$

これは、式 (4.11) を用いることで、次のようにも書き換えられる：

$$|\nu_b(\mathbf{x} - \mathbf{L})\rangle = \sum_I U_{bI}^* e^{i\mathbf{p}_I \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{L})} g_I^D(\mathbf{x} - \mathbf{L}) |\nu_I\rangle. \quad (4.16)$$

---


$$\int d^3x |\Psi_I(\mathbf{x}, t)|^2 = 1,$$

のように規格化される。しかし、今回は後述する別の規格化 (4.20) を用いる。

このとき、振幅  $\mathcal{A}_{ab}(\mathbf{L}, t)$  は式 (4.7) と (4.15) から、次のようになる:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{ab}(\mathbf{L}, t) &= \int d^3\mathbf{x} \langle \nu_b(\mathbf{x} - \mathbf{L}) | \nu_a(\mathbf{x}, t) \rangle \\
&= \int d^3\mathbf{x} \left( \sum_I \Psi_I^{D*}(\mathbf{x} - \mathbf{L}) U_{bI} \langle \nu_I | \right) \left( \sum_J U_{aJ}^* \Psi_J(\mathbf{x}, t) | \nu_J \rangle \right) \\
&= \sum_I U_{aI}^* U_{bI} \int d^3\mathbf{x} \Psi_I^{D*}(\mathbf{x} - \mathbf{L}) \Psi_I(\mathbf{x}, t) \\
&= \sum_I U_{aI}^* U_{bI} G_I(\mathbf{L} - \mathbf{v}_I t) e^{-iE_I(p_I)t + i\mathbf{p}_I \mathbf{L}},
\end{aligned} \tag{4.17}$$

ここで、 $\langle \nu_I | \nu_J \rangle = \delta_{IJ}$  であり、

$$G_I(\mathbf{L} - \mathbf{v}_I t) := \int d^3\mathbf{x} g_I^S(\mathbf{x} - \mathbf{v}_I t) g_I^{D*}(\mathbf{x} - \mathbf{L}), \tag{4.19}$$

とした。このとき、 $G_I(\mathbf{L} - \mathbf{v}_I t)$  の座標空間の波束の大きさ  $\sigma_x$  は、生成波束幅  $\sigma_{xS}$  と検出波束幅  $\sigma_{xD}$  に依存する有効形状因子である。ここで、 $g_I^S, g_I^D$  は、引数が波束幅  $\sigma_{xS}, \sigma_{xD}$  を超えると、急速に減少していくので、 $G_I(\mathbf{L} - \mathbf{v}_I t)$  は、 $|\mathbf{L} - \mathbf{v}_I t| > \max\{\sigma_{xS}, \sigma_{xD}\}$  で減少する。実際、 $\sigma_x$  は生成状態と検出状態を記述する波束の重なりを特徴づけるものなので、 $\sigma_{xS}$  や  $\sigma_{xD}$  より大きい。特に、ガウス波束の場合は、 $\sigma_x = \sqrt{\sigma_{xS}^2 + \sigma_{xD}^2}$  となり、(1次元の) ローレンツ波束の場合は、 $\sigma_x = \sigma_{xS} + \sigma_{xD}$  となる。もし生成波束と検出波束が座標空間において対称である場合、すなわち  $g_I^S, g_I^D$  がそれらの引数の偶関数であるなら、 $G_I$  も同様に偶関数であり、 $\mathbf{L} = \mathbf{v}_I t$  で  $G_I(\mathbf{L} - \mathbf{v}_I t)$  が最大になる。

時刻  $t$  でニュートリノ状態  $\nu_b$  が検出される振動確率  $P_{ab}(\mathbf{L}, t)$  は式 (4.17) で定義された  $\mathcal{A}_{ab}$  の2階微分を用いて求められる。ほとんどの実験ではニュートリノの生成・検出時刻は測定されないので、ニュートリノ振動に対する波束は、 $P_{ab}(\mathbf{L}, t)$  を  $t$  で積分することで分かる。以下では、次の規格化を用いる:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt |G_I(\mathbf{L} - \mathbf{v}_I t)|^2 = 1. \tag{4.20}$$

ここでは簡単のために、ニュートリノ発生源と検出器の中心を結ぶ線に直交する成分を無視する。検出器からの距離が  $L$  の位置にある発生源からニュートリノ状態  $\nu_a$  が生成されたとすると、検出器側で  $\nu_b$  が検出される確率は

$$\begin{aligned}
P_{ab}(L) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt |\mathcal{A}_{ab}(L, t)|^2 \\
&= \sum_{I, K} U_{aI}^* U_{bI} U_{aK} U_{bK}^* I_{IK}(L),
\end{aligned} \tag{4.21}$$

となる。ここに

$$I_{IK}(L) := \int_{-\infty}^{\infty} dt G_I(L - v_I t) G_K^*(L - v_K t) e^{-i\Delta\phi_{IK}(L, t)}, \tag{4.22}$$

ただし

$$\Delta\phi_{IK} := (E_I - E_K)t - (p_I - p_K)L, \tag{4.23}$$

とした。\$E\_I\$ は

$$E_I := E_I(p_I) = \sqrt{p_I^2 + m_I^2}, \quad (4.24)$$

である。以下では

$$\Delta E_{IJ} := E_I - E_J, \quad \Delta p_{IJ} := p_I - p_J, \quad (4.25)$$

も用いる。

#### 4.3.1 \$I\_{IK}\$ について

ここで、式 (4.22) の \$I\_{IK}\$ について詳しく考える。波束の形状因子である \$g\_I^{S,D}\$ を対応する運動量分布関数で表し、その結果を式 (4.19) に代入すると、\$G\_I(L - v\_I t)\$ は次のように表せる：

$$G_I(L - v_I t) = \int_{-\infty}^{\infty} dp f_I^S(p) f_I^{D*}(p) e^{ip(L - v_I t)}. \quad (4.26)$$

このとき、次の積分を考える：

$$\check{I}_{IK} := \int_{-\infty}^{\infty} dt G_I(L - v_I t) G_K^*(L - v_K t) \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dp_1 \int_{-\infty}^{\infty} dp_2 f_I^S(p_1) f_I^{D*}(p_1) f_K^{S*}(p_2) f_K^D(p_2) e^{ip_1(L - v_I t) - ip_2(L - v_K t)} \\ &= \frac{2\pi}{v_K} \int_{-\infty}^{\infty} dp f_I^S(p) f_I^{D*}(p) f_K^{S*}(rp) f_K^D(rp) e^{ip(1-r)L}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

ここで、

$$r := \frac{v_I}{v_K} \simeq 1, \quad (4.29)$$

とした。

異なる質量固有状態に対応する波束の群速度が互いに等しい極限 (\$r = 1\$) では、\$\check{I}\_{IK}\$ は距離 \$L\$ に依存しない。また、式 (4.28) の積分に対する寄与は、積分区間の \$|p| \lesssim \sigma\_P := \min\{\sigma\_{pS}, \sigma\_{pD}\}\$ なので、

$$|1 - r| L \sigma_P \ll 1, \quad \text{あるいは} \quad L \ll \frac{v}{\Delta v} \sigma_X =: l_{\text{coh}}, \quad (4.30)$$

ここで \$\sigma\_X := \max\{\sigma\_{xS}, \sigma\_{xD}\}\$。この式を見ると、\$\Delta v = |v\_I - v\_K|\$、\$\sigma\_X = 1/\sigma\_p\$ のとき、\$\check{I}\_{IK}\$ は距離 \$L\$ に依存しない。波束が分離しないための条件は、式 (4.30) であることが分かった。

#### 4.4 「同一エネルギー」や「同一運動量」の仮定を取る理由

簡単のために \$\Delta E := \Delta E\_{IK}\$、\$\Delta m^2 := \Delta m\_{IK}^2\$、\$\Delta p := \Delta p\_{IK}\$ 等と書く。以下では、相対論的または準縮退ニュートリノに対応する \$\Delta E \ll E\$ の場合を考える。



#### 4.4.1 「同一運動量」について

2つの質量固有状態のエネルギーの差を、それらの質量と運動量の差で展開できる:

$$\begin{aligned}
 \Delta E_{IK} &= \sqrt{m_I^2 + p_I^2} - \sqrt{m_K^2 + p_K^2} \\
 &= \frac{\partial E}{\partial p} \Delta p_{IK} + \frac{\partial E}{\partial m^2} \Delta m_{IK}^2 \\
 &= \frac{2p}{2\sqrt{m^2 + p^2}} \Delta p_{IK} + \frac{1}{2\sqrt{m^2 + p^2}} \Delta m_{IK}^2 \\
 &= \frac{p}{E} \Delta p_{IK} + \frac{1}{2E} \Delta m_{IK}^2 \\
 &= v \Delta p + \frac{1}{2E} \Delta m^2,
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

ここで、微小量の2次以上を無視した。式(4.31)を(4.23)に代入すると、

$$\begin{aligned}
 \Delta \phi &= \left( v \Delta p + \frac{1}{2E} \Delta m^2 \right) t - \Delta p L \\
 &= \frac{\Delta m^2}{2E} t - (L - vt) \Delta p,
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

ここで、 $v$ は平均群速度、 $E$ は平均エネルギーである。

式(4.32)の位相差 $\Delta\phi$ において、波束の平均運動量に「同一運動量」を仮定すると $\Delta p = 0$ となり、右辺の第2項は消え、時間発展における標準的な振動位相になる。さらに、 $t \simeq L$ を仮定すると、ニュートリノ振動の標準的な式が得られる。

#### 4.4.2 「同一エネルギー」について

2つの質量固有状態のエネルギーの差を求める代わりに、運動量の差をそれらのエネルギーと質量の差で展開することもできる:

$$\begin{aligned}
 \Delta p &= \frac{\partial p}{\partial E} \Delta E + \frac{\partial p}{\partial m^2} \Delta m^2 \\
 &= \frac{2E}{2\sqrt{E^2 - m^2}} \Delta E + \frac{-1}{2\sqrt{E^2 - m^2}} \Delta m^2 \\
 &= \frac{E}{p} \Delta E - \frac{1}{2p} \Delta m^2 \\
 &= \frac{1}{v} \Delta E - \frac{1}{2p} \Delta m^2.
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

式(4.33)を(4.23)に代入すると、

$$\begin{aligned}
 \Delta \phi &= \Delta E t - \left( \frac{1}{v} \Delta E - \frac{1}{2p} \Delta m^2 \right) L \\
 &= \frac{\Delta m^2}{2p} L - \frac{1}{v} (L - vt) \Delta E.
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

なお、この式 (4.34) は式 (4.32) に (4.31) と (4.33) を代入しても求められる:

$$\begin{aligned}
\Delta\phi &= \frac{\Delta m^2}{2E}t - (L - vt) \left( \frac{\Delta E}{v} - \frac{\Delta m^2}{2Ev} \right) \\
&= \frac{\Delta m^2}{2Ev}L - (L - vt) \frac{\Delta E}{v} \\
&= \frac{\Delta m^2}{2p}L - (L - vt) \frac{\Delta E}{v} \\
&= (4.34), \tag{4.35}
\end{aligned}$$

ここで、 $v = \Delta E/\Delta p = p/E$  から、 $p = Ev$  を用いた。式 (4.34) の位相差  $\Delta\phi$  において、波束の平均エネルギーに「同一エネルギー」を仮定すると、 $\Delta E = 0$  となり、右辺の第 2 項は消え、ニュートリノ振動の標準的な式が得られる。

#### 4.4.3 「同一エネルギー」や「同一運動量」を仮定しない場合

次に示すように、式 (4.32)、(4.34) は、実際に同一エネルギーや同一運動量の仮定がなくても、標準的な振動位相につながる。このため、式 (4.32)、(4.34) を一般形で書き表す:

$$\Delta\phi = \Delta\phi_{ST} + \Delta\phi', \tag{4.36}$$

ここで、 $\Delta\phi_{ST}$  は「時間」または「空間」発展のアプローチにおける標準振動位相、 $\Delta\phi'$  は付加項 (式 (4.32)、(4.34) の第 2 項)。つまり、 $\Delta\phi_{ST}$  はニュートリノ生成・検出の波動関数の中心間の距離  $L$  にわたって得られる振動位相であり、 $\Delta\phi'$  は波束に沿った付加的な位相変動である。波束的アプローチでは、ニュートリノ波束の有効空間長はニュートリノの生成領域と検出領域の大きさによって決まるため、位相  $\Delta\phi'$  はニュートリノ発生源と検出器の局在化条件に関係する。また、式 (4.36) は波束中心 ( $L = vt$ ) の時と、 $\Delta p = 0$  (式 (4.32))、 $\Delta E = 0$  (式 (4.34)) の時に  $\Delta\phi' = 0$  となる。 $\Delta\phi$  は波束中心から離れる ( $L \neq vt$ ) と  $g_I^{S,D}$  等がニュートリノの波動関数を強く抑制してしまうため、実質的に波束の大きさ  $\sigma_x := \min\{\sigma_{xS}, \sigma_{xD}\}$  を超えることはない。したがって、 $|L - vt| \lesssim \sigma_x$  である。

$\Delta E$  と  $\Delta p$  はそれぞれ異なるニュートリノ質量固有状態の平均エネルギーと平均運動量の差なので、相対論的ニュートリノに対してはどちらも  $\Delta m^2/2E$  かそれより小さいオーダーとなる。ニュートリノ振動長  $l_{osc}$  は式 (3.46) で定義され、波束の空間的な広がり  $\sigma_x \ll l_{osc}$  の時、 $\Delta\phi'$  は無視できる。

一般的なニュートリノ振動の波束表現を考える。式 (4.34) を (4.22) に代入して、

$$\begin{aligned}
I_{IK}(L) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt G_I(L - Vt) G_K^*(L - v_K t) \exp \left[ -i \frac{\Delta m^2}{2p} L - (L - vt) \frac{\Delta E}{v} \right] \\
&= \exp \left( -i \frac{\Delta m_{IK}^2}{2p} L \right) \int_{-\infty}^{\infty} dt G_I(L - v_I t) G_K^*(L - v_K t) \exp \left( i \frac{\Delta E_{IK}}{v} (L - vt) \right), \tag{4.37}
\end{aligned}$$

これは、 $v_I = v_K = v$ 、 $G_K = G_I$  のときには、 $L$  に依存しない。このように、異なる質量固有状態の群速度の差が無視できる場合、標準的な振動位相が得られる。このとき、式 (4.37) の積分は、形状因子の二乗係数のフーリエ変換に帰着する:

$$\frac{1}{v} \int_{-\infty}^{\infty} dx' |G_I(x')|^2 \exp \left( i \frac{\Delta E_{IK}}{v} x' \right). \tag{4.38}$$

これは本質的には局在因子であるため、もし後述する局在化条件 (4.42) を満たすなら、積分の振動位相因子を単一に置き換えられる (詳しくは 4.4.4 節を参照)。このとき、式 (4.38) は、規格化因子となるので、これを 1 とすると便利である (式 (4.20) を参照)。また、局在化条件 (4.42) を満たさないなら、式 (4.38) は指数部により振動が抑制される。局在化条件の境界上 ( $\Delta E_{IK}\sigma_X/v \sim 1$ ) で、局在化しないことによる部分的なデコヒーレンスが起こる。

ここで、 $v_I \neq v_K$  とすると、以下の場合、式 (4.37) の積分の距離  $L$  への依存は無視できる:

$$\frac{L}{v} \ll \frac{\sigma_x}{\Delta v} \iff L \ll \frac{v}{\Delta v} \sigma_x =: l_{\text{coh}}. \quad (4.39)$$

上の諸量の物理的な意味と定義は以下のとおり:

- $L/v$ : 距離  $L$  進むのにかかる時間
- $\sigma_x/\Delta v$ : 波束の中心のずれが波束の大きさになるまでにかかる時間
- $\Delta v := |v_I - v_K|$
- $\sigma_x := \min\{\sigma_{xS}, \sigma_{xD}\}$

このコヒーレンス条件 (4.39) が満たされるなら、 $L$  進んでも波束はずれない。つまり、ニュートリノの移動距離が、異なる質量固有状態に対応する波束がその群速度の差によって分離し、検出器内で干渉しなくなる距離よりも小さければ量子デコヒーレンスは起こらない。また、式 (4.37) が  $L$  によらないとき (波束分離による量子デコヒーレンスが起きないとき) には、ニュートリノ振動の位相が標準値を取ることが分かる。

ゆえに、「同一エネルギー」や「同一運動量」といった仮定を取らなくても、ニュートリノ振動を波束で考えれば標準的な振動位相が得られる。

#### 4.4.4 近似的な $I_{IK}$ について

振動確率  $P_{ab}(L, t)$  の式 (4.21) に関して、近似式 (4.37) で与えられる  $I_{IK}$  を考える。式 (4.27) の  $\check{I}_{IK}$  と同様に計算すると、

$$\begin{aligned} I_{IK}(L) &= \exp\left(-i\frac{\Delta m_{IK}^2 L}{2p}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dt G_I(L - v_I t) G_K^*(L - v_K t) \exp\left(i\frac{\Delta E_{IK}}{v}(L - vt)\right) \\ &= \exp\left(-i\frac{\Delta m_{IK}^2 L}{2p}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dp_1 \int_{-\infty}^{\infty} dp_2 f_I^S(p_1) f_I^{D*}(p_1) f_K^{S*}(p_2) f_K^D(p_2) \\ &\quad \times e^{ip_1(L - v_I t) - ip_2(L - v_K t)} \exp\left(i\frac{\Delta E_{IK}}{v}(L - vt)\right) \\ &= \frac{2\pi}{v_K} e^{-i\Delta E_{IK}\left(\frac{v_I - v_K}{2v_I v_K}\right)L} \exp\left(-i\frac{\Delta m_{IK}^2 L}{2p}\right) \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dp f_I^S(p) f_I^{D*}(p) f_K^{S*}\left(rp + \frac{\Delta E_{IK}}{v_K}\right) f_K^D\left(rp + \frac{\Delta E_{IK}}{v_K}\right) e^{ip(1-r)L}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

となる。最初の指数因子の指数は微小量の 2 次なので、いまの近似の範囲では  $e^{-i\Delta E_{IK}(v_I - v_K/2v_I v_K)L} = 1$  となる。よって

$$I_{IK}(L) = \exp\left(-i\frac{\Delta m_{IK}^2 L}{2p}\right) \frac{2\pi}{v_K} \int_{-\infty}^{\infty} dp f_I^S(p) f_I^{D*}(p) f_K^{S*}\left(rp + \frac{\Delta E_{IK}}{v_K}\right) f_K^D\left(rp + \frac{\Delta E_{IK}}{v_K}\right) e^{ip(1-r)L}, \quad (4.41)$$

と書き換えられる。これは、 $\check{I}_{IK}$  の時と同様に、波束が分離しないための条件 (4.30) が満たされるときは、 $L$  に依存せず、抑制される。また、 $I_{IK}$  が抑制されないための必要条件は

$$\Delta E_{IK} \frac{\sigma_X}{v} \ll 1, \quad (4.42)$$

であり、これを以下の理由により局在化条件とも言う：上の条件に入っている比は

$$\frac{\Delta E_{IK}}{v} \simeq \frac{\Delta m_{IK}^2}{2p} \simeq l_{\text{osc}}^{-1}, \quad (4.43)$$

であり、一方、 $\sigma_X$  は  $\max\{\sigma_{xS}, \sigma_{xD}\}$  なので、局在化条件 (4.42) は、ニュートリノの発生源と検出器が振動長  $l_{\text{osc}}$  に比べて小さな空間領域に局在しているという明らかな条件と等価である。もしこの条件を満たさなければ、ニュートリノ振動は平均化されて消えてしまう。

以上から、振動確率の式  $P_{ab}(L, t)$  における因子  $I_{IK}$  は、標準的な振動位相因子  $\exp(-i\frac{\Delta m_{IK}^2 L}{2p})$  に「波束分離や、ニュートリノ発生源と検出器の非局在性による、デコヒーレンス、に対応する抑制を生み出す振動積分」を掛けたものになる。両方のデコヒーレンスからの抑制は指数関数的である。これらの抑制係数の正確な形は波束の形状に依存し、特にガウス波束では

$$e^{-\left(\frac{L}{l_{\text{coh}}}\right)^2} e^{-\left(\frac{\sigma_X}{l_{\text{osc}}}\right)^2}, \quad (4.44)$$

であり、ローレンツ波束では

$$e^{-\left(\frac{L}{l_{\text{coh}}}\right)} e^{-\left(\frac{\sigma_X}{l_{\text{osc}}}\right)}, \quad (4.45)$$

である。

## 4.5 量子力学的不確定性関係とニュートリノ振動

ニュートリノ振動は、量子力学的な干渉現象なので、存在そのものが量子力学的な不確定性関係に依存する。生成されるニュートリノが異なる質量固有状態のコヒーレントな重ね合わせになることや、ニュートリノ検出がコヒーレントであるためには、エネルギーと運動量の不確かさが重要である。また、この不確定性関係はニュートリノの波束の大きさも決める。さらに、これらの関係は、生成・検出されたニュートリノ状態がどのように随伴粒子から切り離されるかを理解するためにも深く関わってくる。

### 4.5.1 ニュートリノ状態の不確定性関係ともつれ

素粒子過程の解析の大部分では、関与するすべての粒子のエネルギーと運動量が明確に定義された値を持ち、厳密な保存則に従うと仮定されている。この記述が確かであるためには、考察される過程（および関与する粒子）が空間的にも時間的にも完全に非局在化されていなければならない。しかし、現実にはこれらの過程は有限かつ比較的小さな空間体積と有限の時間間隔の中で起こっている。そのため、すべての粒子のエネルギーと運動量には量子力学的な不確かさがあり、粒子は平面波ではなく、波束で記述されるべきである。

多くの場合、エネルギー・運動量保存の不確かさや、粒子のエネルギー・運動量の量子力学的な不確かさは、粒子のエネルギー・運動量そのものに比べればごくわずかであり、ほとんどの過程で安全に無視することができる。

ただし、ニュートリノ振動を考える場合は、ニュートリノのエネルギー・運動量の不確かさは、振動現象にとって非常に重要なので、無視できない。そのため、ニュートリノ振動の解析に厳密なエネルギー・運動量保存則を用いることは適当ではない。

ニュートリノ振動が起こるためには、生成されたニュートリノが1つのフレーバー固有状態として（質量固有状態で見ると、量子もつれ状態として）空間的に局在していることが必要である。平面波の計算において、これを荷電レプトンと媒質の相互作用によるものとするアプローチは間違っている、と論文 [15] の著者らは主張し、以下のような議論を与えている：例えば、 $\pi^\pm$  中間子の崩壊

$$\begin{aligned}\pi^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu_\mu & \pi^- &\rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \\ \mu^+ &\rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu, & \mu^- &\rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu,\end{aligned}$$

で生成されるニュートリノは、荷電レプトンを測定しなくても、フレーバー固有状態として確定し、ニュートリノ振動を起こす。なぜなら、荷電レプトンは質量差が大きく、波束がすぐに離れ、 $e^\pm$  と  $\mu^\pm$  が区別できるからである。この典型的な空間的な広がり、振動長より十分短い。

#### 4.5.2 生成・検出されたニュートリノ状態のコヒーレンス

荷電カレント弱相互作用過程で生成されるニュートリノ状態が異なるニュートリノ質量固有状態のコヒーレントな重ね合わせであるためには、どの質量固有状態が生成されたかを特定することは不可能でなければならない。つまり、 $\sigma(m^2) \gtrsim \Delta m^2$  の必要がある。もし、 $\sigma(m^2) \ll \Delta m^2$  なら、どの質量固有状態が生成されたかを特定することができ、異なる質量固有状態のコヒーレンスが破壊されることになる。

エネルギー・運動量関係から  $m^2 = E^2 - p^2$  なので、ニュートリノの質量二乗の不確かさを

$$\begin{aligned}\sigma(m^2) &= \left| \frac{\partial m^2}{\partial E} \sigma(E) \right| \text{ と } \left| \frac{\partial m^2}{\partial p} \sigma(p) \right| \text{ の合成} \\ &= \begin{cases} 2E\sigma(E) + 2p\sigma(p) & (\text{ローレンツ波束}), \\ \sqrt{(2E\sigma(E))^2 + (2p\sigma(p))^2} & (\text{ガウス波束}), \end{cases} \quad (4.46)\end{aligned}$$

と考えることができる。ゆえに、ニュートリノ状態が「異なるニュートリノ質量固有状態のコヒーレントな重ね合わせ」として生成されるという条件はガウス波束の場合

$$\sigma(m^2) = \sqrt{(2E\sigma(E))^2 + (2p\sigma(p))^2} \gg \Delta m^2, \quad (4.47)$$

となる。このとき、 $E\sigma(E)$  と  $p\sigma(p)$  は同じオーダーなので、 $E\sigma(E) \sim p\sigma(p)$ 。ゆえに、式 (4.47) は、次のようにも書ける：

$$\sigma(m^2) \sim 2p\sigma(p) \gg \Delta m^2, \quad \iff \quad \sigma(p) \gg \frac{\Delta m^2}{2p} = \frac{2\pi}{l_{\text{osc}}}, \quad (4.48)$$

ここで、 $\sigma(p) \sim \sigma_{xS}^{-1}$  なので

$$\sigma_{xS} \ll l_{\text{osc}}, \quad (4.49)$$

となる。 $2\pi$ は無視した。

これは、ニュートリノ生成がニュートリノ振動長に比べて小さい空間領域に局在していることを明らかに示し、もしこれが満たされないなら、ニュートリノ振動は平均化され消えてしまう。そのため、式 (4.47) は局在化条件とも言う。同じ議論を、検出過程にも適用すると、 $\sigma_{xD}$  は

$$\sigma_{xD} \ll l_{\text{osc}}, \quad (4.50)$$

を満たす必要がある。

ニュートリノ振動が観測可能であるためには式 (4.49) と (4.50) の両方を満たす必要があるので、局在化条件は振動長  $l_{\text{osc}}$  が  $\sigma_X := \max\{\sigma_{xS}, \sigma_{xD}\}$  に比べて大きいこと、つまり

$$\sigma_X \ll l_{\text{osc}}, \quad (4.51)$$

であり、この条件を満たさない場合、ニュートリノ振動は起こらない。

しかし実際の実験では、大量のニュートリノが生成されており、ニュートリノ発生源と検出器を巨視的体積にわたって積分する必要がある。そのため、ニュートリノ振動の観測可能性に対する必要条件は、式 (4.49) や (4.50) よりも厳しく制限される。 $\sigma_{xS}, \sigma_{xD}$  の代わりに、ニュートリノのビーム方向における発生源と検出器の巨視的長さ  $L_S, L_D$  を用いて

$$L_{S,D} \ll l_{\text{osc}}, \quad (4.52)$$

を満たす必要がある。この条件を満たさない場合、ニュートリノ振動は平均化され消えてしまう。

#### 4.5.3 波束分離と検出時のコヒーレンスの回復

ここで、弱い相互作用過程でニュートリノのフレーバー固有状態がコヒーレントに生成されたと仮定し、その伝播について考える。

波束の空間幅  $\sigma_x$  とすると、波束が分離する時間は  $t_{\text{coh}} \simeq \sigma_x / \Delta v$  となり、この間にニュートリノ状態が進む距離は  $l_{\text{coh}} \simeq v(\sigma_x / \Delta v)$  と表せる。もし、コヒーレンス条件 (4.39) を満たすなら、ニュートリノ状態のコヒーレンスは保存され、ニュートリノ振動を観測することができる。逆に、 $L \sim l_{\text{coh}}$  もしくは  $L \gg l_{\text{coh}}$  なら、部分的または完全なデコヒーレンスが起る。

#### 4.5.4 波束の大きさは何で決まるのか？

量子力学の不確定性関係において  $\sigma(E)$  と  $\sigma(p)$  は独立している。しかし、明確な質量を持つ自由な質量殻上の粒子に対しては、分散関係  $E^2 = p^2 + m^2$  から

$$E\sigma(E) = p\sigma(p), \quad (4.53)$$

が導かれる。この矛盾したパラドックスは、ニュートリノが生成される時点では質量殻上にいないという事実から、標準的な分散関係を満たさないということで解決される。したがって、エネルギーと運動量の不確かさは式 (4.53) を満たす必要はない。

これに関して論文 [15] の著者は以下のように主張している：ニュートリノがその生成点から離れて  $px \gg 1$  となる距離  $x$  を伝播すると、質量殻上へ乗り、式 (4.53) に従う。これは、エネルギーと運動量の不確かさのうち大きい方が小さい方に向かって縮んでいき、式 (4.53) が成立するためである。ちなみに、MeV 領域の

ニュートリノのエネルギーは、ニュートリノがその生成位置から距離  $x \gtrsim 10^{-12}$  m 伝播すると、すぐに質量殻上に乗る。ニュートリノのコヒーレンス長  $l_{\text{coh}}$  を定義するニュートリノ波束の空間幅  $\sigma_x$  は、 $\sigma_{ES}$  と  $\sigma_{pS}$  のうち小さい方により決定される。一般的には、エネルギーの不確かさ  $\sigma_{ES}$  の方が小さく、 $l_{\text{coh}}$  進んだニュートリノは質量殻上にある。

局在化条件 (4.51) は常にニュートリノ発生源と検出器の空間局在性に依存し、生成時と検出時の運動量不確かさに関係する。例えば、崩壊してニュートリノを生成する不安定な粒子を、大きさ  $L_S$  の箱の中に閉じ込めた場合を考える。まず、不安定粒子が崩壊する前に他の粒子と衝突すると仮定する：

$$T_S < \tau = \Gamma^{-1}, \quad (4.54)$$

ここで  $T_S$  は不安定な粒子が周囲の粒子と衝突するまでの時間間隔であり、 $\tau$  は不安定な粒子の崩壊寿命である。崩壊で生成されるニュートリノのエネルギー幅（不確かさ） $\sigma_{ES}$  は、衝突広がり度で与えられ、実際には  $\sigma_{ES} \simeq T_S^{-1}$  となる。一方で、ニュートリノの運動量幅は  $\sigma_{pS} \simeq L_S^{-1}$  である。

論文 [15] の著者は以下のように主張している： $T_S$  は親粒子の速度  $v$  を介して、 $T_S \simeq L_S/v$  のように、 $L_S$  と関係するので

$$\sigma_{ES} < \sigma_{pS}, \quad (4.55)$$

が得られる。フレーバーニュートリノ状態を記述する波束の空間幅  $\sigma_{xS}$  は、 $\sigma_{ES}$  と  $\sigma_{pS}$  の小さい方、すなわち  $\sigma_{xS} \sim v/\sigma_{ES}$  で決まる。これは、 $\sigma_{ES} = 0$  の時にニュートリノのコヒーレンス長  $l_{\text{coh}}$  が無限大になるという既知の事実と一致する。

一方、この主張は、不安定粒子が箱の壁と衝突するより前に崩壊する場合には成立しないことが、論文 [15] で与えられている以下のような議論から分かる：生成されるニュートリノのエネルギー不確かさは、親粒子の崩壊幅によって与えられ、 $\sigma_{ES} \simeq \Gamma$  となる。ニュートリノの運動量不確かさは、 $\sigma_{pS} \gtrsim \frac{1}{\sigma_{xS}}$  であり、これは、崩壊過程でニュートリノが移動した距離に相当する：

$$\sigma_{xS} \simeq \frac{p}{E} \tau = \frac{p}{E} \Gamma^{-1} \simeq \frac{p}{E} \sigma_{ES}^{-1} \gtrsim \frac{1}{\sigma_{pS}}, \quad \iff \quad p\sigma_{pS} \gtrsim E\sigma_{ES}. \quad (4.56)$$

不確かさが最小に近い波束については、式 (4.53) をほぼ満たす。そうでない場合には、不等号が式 (4.55) とは逆になることが分かる（ニュートリノ実験において典型的なエネルギー・運動量は、 $p \simeq E$  であることに注意）。

ニュートリノ生成と検出のための局在化条件は、対応する運動量の不確かさによって決まる。ゆえに、4.4 節のコヒーレンス条件 (4.39) に入るパラメータ  $\sigma_x$  と、4.5.2 節の局在化条件 (4.51) に入るパラメータ  $\sigma_X$  は一般には異なっている。

特に、ニュートリノ振動を波束で取り扱う場合は、フレーバーニュートリノ状態の質量固有状態成分が常に質量殻上にあることを仮定しているため、それらのエネルギー・運動量の不確かさは常に式 (4.53) で関係づけられる。

最後に、 $\sigma_{pS} \sim \sigma_{ES}$  で、コヒーレンス条件と局在化条件が同じパラメータ  $\sigma_x \sim \sigma_p^{-1}$  に依存する場合について考える。局在化条件では、生成・検出されるニュートリノ状態が質量固有状態のコヒーレントな重ね合わせになるために、比較的大きな  $\sigma_p$  ( $\sigma_p \gg \Delta m^2/2p$ ) が必要である。一方で、波束分離による量子デコヒーレンスが起らない条件では、比較的小きな  $\sigma_p$  が必要である。この条件を組み合わせると

$$\Delta m^2/2p \ll \sigma_p \ll (v/\Delta v)L^{-1}, \quad \iff \quad \frac{\Delta m^2}{2p} \ll \frac{v}{\Delta v}L^{-1}, \quad (4.57)$$

となる。これは、距離  $L$  に関する次の条件として書き直すことができる:

$$2\pi \frac{L}{l_{\text{osc}}} \ll \frac{v}{\Delta v}. \quad (4.58)$$

ニュートリノ振動実験においては、左辺は  $\mathcal{O}(1)$  であり、右辺は  $v/\Delta v \gg 1$  なので、すべてのニュートリノ振動実験でこの条件は満たされる。もしこの条件が満たされなかった場合、ニュートリノ振動は平均化され消えてしまう。

#### 4.6 ニュートリノ振動が生成・検出過程から独立な確率で記述できる場合

多くのニュートリノ振動の解析では、振動は生成過程や検出過程から独立な確率で記述できると仮定されている。つまり、最初に生成されるニュートリノ状態のフレーバー、そのエネルギーおよびニュートリノ発生源と検出器の間の距離を指定することによって、(ニュートリノの質量二乗差とレプトンの混合行列が既知の場合) 検出器ですべてのフレーバーのニュートリノが見つかる確率が完全に決まると仮定されている。しかし、この仮定はすべての場合に適当なわけではない。

これを解決するための適当な枠組みは、場の量子論で与えられる。このアプローチは、ニュートリノの生成・伝播・検出を、中間状態のニュートリノを含む1つの過程として考える。その結果として得られる、相対論的または準縮退的ニュートリノの生成・伝播・検出過程の全体確率は、非常に良い精度で、ニュートリノの生成・伝播(振動を含む)・検出のそれぞれの確率の積として表すことができる場合もある。しかし、生成・伝播・検出過程全体の確率の因数分解可能性と振動確率の普遍性(または欠如)は、独立した問題である。多くの場合には、振動確率は次のように表せる:

$$P(\nu_a \rightarrow \nu_b; L) = \sum_{I,K} U_{aI}^* U_{bI} U_{aK} U_{bK}^* \exp\left(\frac{-i\Delta m_{IK}^2 L}{2p}\right) S_{\text{coh}}\left(\frac{L}{l_{IK}^{\text{coh}}}\right) S_{\text{loc}}\left(\frac{\sigma_x^{\text{loc}}}{l_{IK}^{\text{osc}}}\right). \quad (4.59)$$

コヒーレンス因子  $S_{\text{coh}}\left(\frac{L}{l_{IK}^{\text{coh}}}\right)$  や局在化因子  $S_{\text{loc}}\left(\frac{\sigma_x^{\text{loc}}}{l_{IK}^{\text{osc}}}\right)$  は、部分的なコヒーレンス長  $l_{IK}^{\text{coh}}$  や振動長  $l_{IK}^{\text{osc}}$  と同様、外部粒子や生成・検出過程の性質から導かれる。これらの因子は、引数が0のときは1に等しく、引数が大きくなると急激に(典型的には指数関数的に)減少する。

いまは、場の量子論の枠組みで考えているので、部分的な( $I, K$ による)コヒーレンス長  $l_{IK}^{\text{coh}}$  と振動長  $l_{IK}^{\text{osc}}$  は、一般には異なる長さパラメタ  $\sigma_x^{\text{coh}}$  と  $\sigma_x^{\text{loc}}$  に依存する。これは、生成時と検出時のエネルギーと運動量の不確かさが式(4.53)を満たす必要がない、という上記の事実に関係している。

振動確率が生成過程や検出過程に依存しないためには、次の条件を満たす必要がある:

- 波束分離や局在化条件の破れによる量子デコヒーレンス効果が無視できるほど小さい。
- 生成・検出過程で生成されるエネルギーは、ニュートリノの質量(あるいは質量差)に比べて大きい。

前者を満たすなら、式(4.59)のコヒーレンス因子と局在化因子はともに1に等しくなり、標準的なニュートリノ振動の式が回復される。もし、前者が破れると、振動は生成・検出に依存した量子デコヒーレンス効果を受ける。後者を満たす場合は、生成または検出されるフレーバーニュートリノ状態のすべての質量固有状態成分に対して、生成および検出確率が本質的に同じであることが保証される。もし、後者が破れると、生成・検



出過程で利用できる相空間は、関与するニュートリノの質量固有状態の質量に依存し、フレーバー固有状態を質量固有状態で書いた式は単純な式 (4.1) ではなくなる。

#### 4.7 この章のまとめ

以下、本章の最初で挙げた問いに対する、論文 [15] の著者の回答を簡単にまとめる：

1. 波束分離による量子デコヒーレンス効果が無視でき、ニュートリノ生成・検出過程が十分に局在している場合、ニュートリノ振動確率の標準公式が得られる。このとき、ニュートリノの生成・検出領域で得られる付加振動位相  $\Delta\phi'$  は無視できるほど小さく、「同一エネルギー」や「同一運動量」の仮定は、この付加位相を取り除くに過ぎず、必要ない。
2. ニュートリノ振動の量子力学的な不確定性関係は、最も大事である。これらの不確かさは、波束の大きさも決定するため、波束分離による量子デコヒーレンスにおいても極めて重要。
3. ニュートリノ波束の空間的な大きさは常にそのエネルギーの不確かさ  $\sigma_E$  によって決定される。
4. コヒーレンス条件は、 $\sigma_E$  によって決まり、これは、ニュートリノ生成時と検出時の両方のエネルギー不確かさに依存する。局在化条件は、運動量不確かさ  $\sigma_p$  によって決まり、これは生成時と検出時の運動量不確かさに依存する。
5. 波束的アプローチは、振動確率の式を矛盾なく導出するために必要である。
6. 次の条件を満たせば、振動確率は生成過程や検出過程に依存しない。
  - (a) 波束分離や、局在化条件の破れ、による量子デコヒーレンス効果が無視できる。
  - (b) ニュートリノの質量（あるいは質量差）に比べ、生成・検出過程でのエネルギーが大きい。
 もし (a) と反対の条件を満たす場合は、フレーバー遷移確率も普遍的な形になり、単に平均化された振動に対応する。
7. 定常信号源近似は、ニュートリノの生成・検出過程の時間依存性がない、または、本質的に定常なニュートリノの流束を扱う時に有効である。

8、9については、論文 [15] を参照。

## 5 デコヒーレンスをめぐる論争

この章では、近年活発に議論されている量子デコヒーレンスの問題について、論文 [4, 5, 6] による論争をそれぞれの著者らの主張に沿って概説する。流れとしては、論文 [4] に対する批判論文 [5] を Jones が書いた。それに対して、論文 [4] の著者らが、反論の論文 [6] を書いた (その後、論文 [4] の著者の一人がこの議論を論文 [7] でも取り上げている)。

### 5.1 ニュートリノ振動の減衰、デコヒーレンス、ニュートリノ波束の長さ

この節では、2022 年 8 月に arXiv に出された論文 [4] を紹介する。論文では、ニュートリノ検出器の有限なエネルギー分解能や、生成されるニュートリノ線の有限な幅 (放射性ニュートリノ源を用いた実験の場合) によって起こる減衰効果について、原子炉実験と (放射性) 線源実験を例に考察している。また、波束分離による量子デコヒーレンスは、常に検出器のエネルギー分解能関数の修正に組み込まれるため、減衰効果と密接に関係することも示している。

#### 5.1.1 ニュートリノ波束分離はどのように起こるか

異なる質量  $m_I$  のニュートリノは、異なる群速度  $v_I = \partial E_I / \partial p_I$  で伝播し、超相対論的または質量がほぼ縮退したニュートリノに対して

$$\frac{\Delta v}{v} \simeq \frac{\Delta m^2}{2E^2}, \quad (5.1)$$

を満たす。この速度差とニュートリノ波束長により、生成されるニュートリノのフレーバー状態を構成する、異なるニュートリノ質量固有状態の波束の重なりは、時間とともに減少する。もしニュートリノが十分長い距離を伝播すると、波束は完全に分離することになる。

異なるニュートリノ質量固有状態の波束が分離すると、振動確率における干渉が抑制され、振動が減衰する。波束の空間的分離がその波束長よりも小さくなければ振動は起こらない、と単純には期待される。つまり、ニュートリノの移動距離を  $L$  とするとき

$$L \lesssim L_{\text{coh}} := \frac{v}{\Delta v} \sigma_x, \quad (5.2)$$

ならば振動が起こる、と期待される。ここで、 $\sigma_x \simeq v / \sigma_E$  はニュートリノ波束の長さ、 $\sigma_E$  はニュートリノの生成・検出過程の局在に関連したニュートリノエネルギーの不確かさである。式 (5.1)、(5.2) から、次が分かる:

$$\frac{\sigma_E}{E} < \frac{l_{\text{osc}}}{2\pi L}, \quad (5.3)$$

ここで、ニュートリノ振動長は式 (3.46) で定義されたものである。

ニュートリノ振動の減衰には様々な要因が考えられる。その 1 つが、波束分離による量子デコヒーレンスである。他にも、検出器のエネルギー分解能 ( $\delta_E$ ) に関連したエネルギーの平均化などが挙げられる。ニュートリノ振動が観測可能であるためには、ニュートリノの生成・検出が十分に局在化していること、振動位相  $\phi(E) = \Delta m^2 L / 2E$  がエネルギー区間  $\delta_E$  にわたってほとんど変化しないこと等が必要である。そのため、 $|\phi(E) - \phi(E + \delta_E)| < 1$  を満たす  $\delta_E$  を考えると

$$\frac{\delta_E}{E} < \frac{l_{\text{osc}}}{2\pi L}, \quad (5.4)$$

であり、これは、式 (5.3) の  $\sigma_E$  を  $\delta_E$  に置き換えた条件と一致する。

### 5.1.2 波束分離: 波束的アプローチと減衰係数

波束的アプローチでは、真空中の  $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$  振動の確率は

$$P_{\alpha\beta}(\bar{E}, L) = \sum_{I,K} U_{\alpha I}^* U_{\beta I} U_{\alpha K} U_{\beta K}^* I_{IK}(\bar{E}, L), \quad (5.5)$$

と書ける。このとき、 $L$  はベースライン、 $U$  はレプトンの混合行列であり、 $I_{IK}$  は

$$I_{IK}(\bar{E}, L) = \int dE |f(E, \bar{E})|^2 e^{-i\frac{\Delta m_{IK}^2}{2E} L}. \quad (5.6)$$

ここに

$$f(E, \bar{E}) := f_S(E) f_D^*(E), \quad (5.7)$$

$f_S(E)$  は生成ニュートリノの波束、 $f_D(E)$  は検出ニュートリノの波束、 $\bar{E}$  はニュートリノ波束の平均エネルギーである (定義は下を参照)。 $f(E, \bar{E})$  を次のように規格化すると、 $I_{II}(\bar{E}, L) = 1$  とできる:

$$\int dE |f(E, \bar{E})|^2 = 1. \quad (5.8)$$

また、平均エネルギーは  $\bar{E} := \int dE E |f(E, \bar{E})|^2$  で定義した。 $f(E, \bar{E})$  は、エネルギー空間における有効ニュートリノ波束であり、ニュートリノの生成と検出の両方の量子性を考慮している。エネルギー分布の振幅  $f_S(E), f_D(E)$  はそれぞれ幅  $\sigma_E^S, \sigma_E^D$  のピークを持つ。 $f(E, \bar{E})$  は  $f_S(E)$  と  $f_D(E)$  の積なので、幅  $\sigma_E \simeq \min\{\sigma_E^S, \sigma_E^D\}$  のピークを持ち、 $\bar{E}$  付近で最大値を持つ。 $I_{IK}(\bar{E}, L)$  は振動位相と、運動量および座標空間における異なるニュートリノ質量固有状態の波束の重なる程度、に依存しており、ゆえに、起こりうる波束関連の量子デコヒーレンス効果を含んでいる。

論文 [4] では、ニュートリノ生成と検出に対する微視的な局在化条件が満たされている、つまり、 $L$  に対する平均化が無視できる、と仮定して計算を行なっている。このとき、局在化条件は

$$\frac{\Delta m_{IK}^2}{2E} \ll \sigma_E. \quad (5.9)$$

式 (5.6)、(5.7) においても、この条件が満たされていると仮定している。

$I_{IK}(\bar{E}, L)$  について、式 (5.6) の積分を、 $E = \bar{E}$  での位相因子だけを取り出して評価する:

$$I_{IK}(\bar{E}, L) \simeq \exp\left(-i\frac{\Delta m_{IK}^2}{2\bar{E}} L\right) D_{IK}(\bar{E}, L), \quad (5.10)$$

ここに

$$D_{IK}(\bar{E}, L) := \int dE |f(E, \bar{E})|^2 e^{-i\frac{\Delta m_{IK}^2}{2E^2}(E-\bar{E})L}. \quad (5.11)$$

$|f(E, \bar{E})|^2$  が  $\bar{E}$  付近で幅  $\sigma_E$  のピークを持つことより、 $D_{IK}(\bar{E}, L)$  を定義する積分は、 $|E - \bar{E}| \lesssim \sigma_E$  から寄与することが分かる。ゆえに、波束分離しない場合

$$L \ll L_{\text{coh}IK} := \frac{2\bar{E}^2}{\Delta m_{IK}^2} \sigma_E^{-1} \simeq \frac{2\bar{E}^2}{\Delta m_{IK}^2} \sigma_x, \quad (5.12)$$

となり、 $D_{IK}(\bar{E}, L) = 1$  が分かる。式 (5.5) と (5.10) から、真空中のニュートリノ振動の標準的な式は、 $P_{\alpha\beta}(\bar{E}, L) = P_{\alpha\beta}^0(\bar{E}, L)$  となる。ここで

$$P_{\alpha\beta}^0(E, L) := \sum_{I, K} U_{\alpha I}^* U_{\beta I} U_{\alpha K} U_{\beta K}^* e^{-i \frac{\Delta m_{IK}^2}{2E} L}. \quad (5.13)$$

逆に  $L \gg L_{\text{coh}IK}$  (波束分離による完全デコヒーレンス) の場合、式 (5.10) の積分は高速振動する位相因子を含み、 $I \neq K$  で  $D_{IK}(\bar{E}, L)$  を抑制する。ゆえに、 $D_{IK}(\bar{E}, L) = \delta_{IK}$  となり、式 (5.5) から

$$P_{\alpha\beta}(\bar{E}, L) = \sum_I |U_{\alpha I}|^2 |U_{\beta I}|^2, \quad (5.14)$$

が導かれる。つまり、振動は完全に平均化されていると考えられる。このとき、 $I \neq K$  の  $D_{IK}(\bar{E}, L)$  は減衰係数である。すべての振動項が平均化され、標準的な振動確率 (5.13) から完全にデコヒーレントな結果 (5.14) が得られる。

説明のために、ガウシアンエネルギー空間のニュートリノ波束を考える:

$$|f(E, \bar{E})|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_E} e^{-\frac{(\bar{E}-E)^2}{2\sigma_E^2}}. \quad (5.15)$$

これを式 (5.11) に代入すると、式 (5.5) と (5.10) から

$$P_{\alpha\beta}(\bar{E}, L) = U_{\alpha I}^* U_{\beta I} U_{\alpha K} U_{\beta K}^* \exp\left(-i \frac{\Delta m_{IK}^2}{2E} L\right) D_{IK}^{\text{Gaussian}}(\bar{E}, L), \quad (5.16)$$

ここに

$$D_{IK}^{\text{Gaussian}}(\bar{E}, L) := e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{L}{L_{\text{coh}IK}}\right)^2}, \quad (5.17)$$

はガウシアン減衰係数である。

### 5.1.3 原子炉実験における有限なエネルギー分解能とエネルギー平均化

ニュートリノ実験における単位時間当たりのニュートリノ事象数は

$$N(E_r) = \mathcal{N} \int d\bar{E} \phi_\alpha(\bar{E}) P_{\alpha\beta}(\bar{E}, L) \sigma_\beta(\bar{E}) R(E_r, \bar{E}), \quad (5.18)$$

のように書ける。ここで、 $N$  は検出器内の標的粒子の数、 $\bar{E}$  はニュートリノ波束の平均エネルギー、 $E_r$  は再構成されたニュートリノのエネルギー、 $\phi_\alpha(\bar{E})$  は最初に  $\nu_\alpha$  として生成された後に検出器に入射するニュートリノの流束、 $\sigma_\beta(\bar{E})$  は  $\nu_\beta$  の検出断面積、 $R(E_r, \bar{E})$  は検出器のエネルギー分解能関数を表している。振動確率  $P_{\alpha\beta}(\bar{E}, L)$  には、波束による量子デコヒーレンスの効果を考慮した減衰係数が含まれている。原子炉実験の場合は、 $\alpha = \beta = e$  であるが、ここでは、より一般的に考えることにする。

式 (5.6) の  $I_{IK}(\bar{E}, L)$  による振動確率 (5.5) は

$$P_{\alpha\beta}(\bar{E}, L) = \int dE |f(E, \bar{E})|^2 P_{\alpha\beta}^0(E, L), \quad (5.19)$$

と書き表せる。  $P_{\alpha\beta}^0(E, L)$  は、式 (5.13) で定義されたものである。式 (5.19) を (5.18) に代入し、積分の順序を変えると

$$N(E_r) = \mathcal{N} \int dE P_{\alpha\beta}^0(E, L) \int d\bar{E} |f(E, \bar{E})|^2 \phi_\alpha(\bar{E}) \sigma_\beta(\bar{E}) R(E_r, \bar{E}), \quad (5.20)$$

となる。  $|f(E, \bar{E})|^2$  は  $\bar{E} = E$  付近で小さな幅  $\sigma_E$  のピークを持っているが、流束  $\phi_\alpha(\bar{E})$  と断面積  $\sigma_\beta(\bar{E})$  は、 $\bar{E}$  を  $\Delta\bar{E} \sim \sigma_E$  で動かしたときに非常に小さくしか変わらない、滑らかな関数である。ゆえに、 $\bar{E} = E$  で書き換えると

$$N(E_r) = \mathcal{N} \int dE \phi_\alpha(E) P_{\alpha\beta}^0(E, L) \sigma_\beta(E) \tilde{R}(E_r, E), \quad (5.21)$$

ここに

$$\tilde{R}(E_r, E) := \int d\bar{E} R(E_r, \bar{E}) |f(E, \bar{E})|^2. \quad (5.22)$$

上式を式 (5.18) と比較すると、2点異なっている事柄がある。1点目は、式 (5.21) の積分は式 (5.5) の完全確率  $P_{\alpha\beta}(E, L)$  ではなく、いかなるデコヒーレンス効果からも自由な、標準振動確率  $P_{\alpha\beta}^0(E, L)$  を含むこと、2点目は、式 (5.21) は有効エネルギー分解能関数  $\tilde{R}(E_r, E)$  を含むことである。このことは、波束分離による量子デコヒーレンスの効果が、検出器のエネルギー分解能関数の修正に取り込まれることで、減衰効果と密接に関係することを示す。

このとき、どの程度修正されるかを考えるために、エネルギー空間のニュートリノ波束と、分解能関数  $R(E_r, E)$  の両方がガウシアンである場合、つまり、  $|f(E, \bar{E})|^2$  が式 (5.15) と (5.23) で与えられる場合を考えてみる：

$$R(E_r, \bar{E}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_E} e^{-\frac{(E_r - \bar{E})^2}{2\delta_E^2}}. \quad (5.23)$$

式 (5.15)、(5.23) を式 (5.22) に代入して、エネルギー積分を区間  $(-\infty, \infty)$  に拡張すると

$$\tilde{R}(E_r, E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\delta_E^2 + \sigma_E^2)}} e^{-\frac{(E_r - E)^2}{2(\delta_E^2 + \sigma_E^2)}}. \quad (5.24)$$

$\delta_E \gg \sigma_E$  では、有効エネルギー分解能関数  $\tilde{R}(E_r, E)$  は真のものと一致する。つまり、波束分離による量子デコヒーレンスの効果は完全に無視でき、振動が減衰するかどうかは条件 (5.4) で決まる。波束分離は、 $\sigma_E \gtrsim \delta_E$  の場合のみ、実験によって探ることができる。

#### 5.1.4 放射性線源実験

この実験では、ニュートリノは検出器の内部または近くに置かれた  $\beta$  放射性線源によって生成される。今まで行われてきた放射性線源実験<sup>\*6</sup>では、すべての場合で、 $^{71}\text{Ga}$  が標的として使われ、ガリウムによるニュートリノ捕獲の結果として生成された  $^{71}\text{Ge}$  原子がカウントされた。

<sup>\*6</sup> GALLEX 実験 [35, 36] や Soviet-American Gallium Experiment (SAGE) 実験 [37, 38]、Baksan Experiment on Sterile Transitions (BEST) 実験 [39, 40, 41] 等。

電子捕獲放射性原子核を発生源とし、娘核をニュートリノ検出手段としてカウントするニュートリノ実験を以下のように考える: この実験では、 $\nu_e$  の消滅を探すため、観測される信号は  $P_{ee}(E, L)$  に依存する。線源が検出器の大きさやニュートリノ振動長に比べて小さいとすると、線源は点状と考えられる。座標原点を線源に置き、標的体積  $V_I$  から検出器が構成されるとする。このとき、 $I$  番目の体積における単位時間当たりの事象数は、 $n_0$  を標的原子核の数密度とすると

$$N_I(t) = n_0 \int_{V_I} d^3r \int d\bar{E} \phi_e(\bar{E}, r; t) \sigma_e(\bar{E}) P_{ee}(\bar{E}, r), \quad (5.25)$$

と書ける。ただし、 $\phi_e(\bar{E}, r; t)$  は時刻  $t$  における線源からの距離  $r$  での  $\nu_e$  の流束であり、次のように書ける:

$$\phi_e(\bar{E}, r; t) = \frac{\Phi_e(\bar{E}, t)}{4\pi r^2}, \quad (5.26)$$

ここに

$$\Phi_e(\bar{E}, t) := \Gamma_0 N(t) S(\bar{E}). \quad (5.27)$$

$\Gamma_0$  は線源原子の電子捕獲率、 $N(t)$  は時刻  $t$  における線源原子の数、 $S(\bar{E})$  は生成ニュートリノの規格化されたスペクトルであり、その幅  $\delta_{El}$  は、普通は自然な線幅を大きく超え、ドップラー広がりなどの多くの不均一な広がり効果によって決定される (詳しくは 5.1.6 節を参照)。

以下、基本的に 5.1.3 節と同様に計算していく。式 (5.25) に式 (5.26)、(5.27) を代入すると

$$N_I(t) = n_0 \Gamma_0 N(t) \int_{V_I} \frac{d^3r}{4\pi r^2} \mathcal{F}(r), \quad (5.28)$$

ここに

$$\mathcal{F}(r) := \int d\bar{E} S(\bar{E}) \sigma_e(\bar{E}) P_{ee}(\bar{E}, r). \quad (5.29)$$

この量  $\mathcal{F}(r)$  について考える。式 (5.29) に (5.19) から  $P_{ee}(\bar{E}, r)$  の式を代入し、積分の順序を変えると

$$\mathcal{F}(r) = \int dE P_{ee}^0(E, r) \int d\bar{E} S(\bar{E}) \sigma_e(\bar{E}) |f(E, \bar{E})|^2, \quad (5.30)$$

となる。断面積  $\sigma_e(\bar{E})$  はエネルギー間隔  $\Delta\bar{E} \sim \sigma_E$  でほとんど変化しないので、 $\bar{E} = E$  と置き換え、式 (5.30) の内側の積分の外に出すことができる:

$$\mathcal{F}(r) = \int dE P_{ee}^0(E, r) \sigma_e(E) \tilde{S}(E), \quad (5.31)$$

ここに

$$\tilde{S}(E) := \int d\bar{E} S(\bar{E}) |f(E, \bar{E})|^2. \quad (5.32)$$

波束分離による量子デコヒーレンスの効果は、すべてニュートリノスペクトル  $S(E)$  の修正に取り込まれ、有効スペクトル  $\tilde{S}(E)$  に置き換わった。

もし、ニュートリノ波束のエネルギー幅が  $\sigma_E \ll \delta_{El}$  を満たすなら、式 (5.32) の  $S(\bar{E})$  を  $S(E)$  で置き換え、それを積分から引き離せば、 $\tilde{S}(\bar{E}) = S(E)$  と求まる。式 (5.28)、(5.31) は波束がない場合の事象率の通常の表現となる。このとき、減衰はニュートリノスペクトルの幅  $\delta_{El}$  にのみ依存する。

逆にもし  $\sigma_E \gg \delta_{El}$  を満たすなら、 $\bar{E} = E_0$  における因子  $|f(E, \bar{E})|^2$  を積分から取り出せる。 $E_0$  はニュートリノスペクトルの中心エネルギーである。すると、式 (5.32) は  $\tilde{S}(E) = |f(E, E_0)|^2$  となり

$$\mathcal{F}(r) = \int dE P_{ee}^0(E, r) \sigma_e(E) |f(E, E_0)|^2 \simeq \sigma_e(E_0) P_{ee}(E_0, r), \quad (5.33)$$

が求まる (式 (5.19) を用いた)。ここでの振動確率  $P_{ee}(E_0, r)$  は、考えられるすべての量子デコヒーレンスの効果を完全に考慮したものである。

ニュートリノ波束がガウシアン (5.15) である場合には、放射性線源から生成されるニュートリノのスペクトルもガウシアンであると仮定できる:

$$S(\bar{E}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_{El}} e^{-\frac{(\bar{E}-E_0)^2}{2\delta_{El}^2}}. \quad (5.34)$$

式 (5.32) は、式 (5.24) の右辺で  $\delta_E \rightarrow \delta_{El}$  および  $E_r \rightarrow E_0$  と置き換えたものと一致する。

### 5.1.5 ニュートリノ波束の長さ

この章でも、S を生成過程、D を検出過程とする。原子炉実験と線源実験について、ニュートリノ波束の長さ  $\sigma_x$  と、対応するニュートリノエネルギーの不確かさ  $\sigma_E$  を推定する。

崩壊または衝突過程で生成されるニュートリノ波束の長さは、論文 [42] で与えられ、

$$\sigma_x \simeq \frac{v - v_P}{\sigma_E}. \quad (5.35)$$

$v$  は生成されるニュートリノの速度、 $v_P$  はニュートリノ源の速度である。ただし、今回扱う実験では、ニュートリノ発生源は相対論的でない原子核であり、その速度  $v_P$  は式 (5.35) の  $v \simeq 1$  と比べて無視できる。ニュートリノエネルギーの不確かさ  $\sigma_E$  は、生成過程の時間  $\sigma_t$  を用いて、 $\sigma_E \simeq \sigma_E^S = \sigma_t^{-1}$  と表せる。

論文では、2つの場合を考えている:

1. ニュートリノ生成に伴う粒子 — 随伴粒子 — は検出されず、周囲の媒質と相互作用しない。
2. ニュートリノ生成に伴う粒子 — 随伴粒子 — が直接検出されるか、媒質の粒子と相互作用する。

原子炉での核分裂反応で生成された核分裂片の  $\beta$  崩壊における第 1 ニュートリノ生成は

$$N \rightarrow N' + e^- + \bar{\nu}_e, \quad (5.36)$$

ここで、 $N$  は親核、 $N'$  は娘核である。

#### 随伴粒子が非局在化する場合のニュートリノ波束

まずは、随伴粒子が非局在化する場合のニュートリノ波束を考える。ニュートリノと一緒に生成されたすべての粒子が自由に逃げる場合、随伴粒子はニュートリノの生成時間に影響を与えず、ニュートリノは単に親となる不安定原子核のエネルギーの不確かさを受け継ぐだけとなる。もし、この原子核が自由粒子または準自由粒子である、つまり媒質との相互作用を無視できるのであれば、ニュートリノの生成は進み続け、生成過程の

時間は  $\sigma_t \simeq \tau_N$  を満たす。ゆえに、 $\sigma_E \simeq 1/\tau_N = \Gamma_N$  となる。 $\tau_N$  は  $N$  の平均寿命、 $\Gamma_N$  は親核の崩壊幅である。

しかし、もし  $N$  が媒質の粒子と衝突し、2つの連続した衝突の平均時間間隔が寿命  $\tau_N$  よりも短ければ、この相互作用はコヒーレントなニュートリノ生成を中断させるため、エネルギーの不確かさ  $\sigma_E$  が増加する。このことを、衝突広がりとも言う。

親核  $N$  と周囲の媒質粒子との衝突の過程は、寿命  $\tau_N$  に比べて非常に短いことは既知である。この衝突により、生成されるニュートリノ状態の波動関数に制御できないランダムな位相が導入される、と仮定する。この方法 (原子物理学では Lorentz-Van Vleck-Weisskopf アプローチとして知られている。詳しくは [43] を参照) では、生成されるニュートリノエネルギーの不確かさは

$$\sigma_E \simeq \sqrt{\Gamma_N^2 + 1/t_N^2}, \quad (5.37)$$

$t_N$  を連続する2つの衝突の間の平均時間間隔 (平均自由時間) とした。

ここで、 $t_N$  を推定する。質量  $m_N$  の核分裂片の平均速度は

$$v_N = \sqrt{\frac{3T}{m_N}}. \quad (5.38)$$

$T \simeq 0.1$  eV (1160 K)、 $m_N \simeq 100$  GeV と見積もると

$$v_N \simeq 1.7 \times 10^{-6} c \simeq 5.2 \times 10^2 \text{ m/s}. \quad (5.39)$$

核分裂片の速度は原子内電子の速度に比べて小さいため、核分裂片の親原子の電子を引きずりながら、中性原子または弱電離原子として現れる。そのため、媒質との相互作用は原子散乱断面積  $\sigma_{AA}$  で記述される。

簡単のため、核燃料として  $^{235}\text{U}$  のみを考え、この核分裂片の散乱を考える。このとき、 $n_U = 4.9 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$  はウラン原子の個数密度であり、連続する2つの衝突の間の平均時間は

$$t_N \simeq \frac{1}{\sigma_{AA} n_U v_N}, \quad (5.40)$$

$N$  の平均自由行程は

$$X_N = v_N t_N = \frac{1}{\sigma_{AA} n_U}. \quad (5.41)$$

これが媒質中の局在性を決定する。

ここで、ウラン原子の半径はファンデルワールス半径  $r_{\text{vdW}} = 1.86 \times 10^{-10} \text{ m}$  と仮定する。また、 $\sigma_{AA}$  を幾何学的断面積で近似した:  $\sigma_{AA} \simeq \pi (2r_{\text{vdW}})^2$ 。式 (5.39) と (5.40) から

$$t_N \simeq 9 \times 10^{-14} \text{ s}, \quad (5.42)$$

が得られ、 $X_N \simeq 5 \times 10^{-11} \text{ m}$  となる。 $t_N$  は崩壊する原子核の寿命よりずっと短いので、式 (5.37) から

$$\sigma_E \simeq t_N^{-1} \simeq 7.2 \times 10^{-3} \text{ eV}, \quad (5.43)$$

が得られる。また、式 (5.35) から、随伴粒子が完全に非局在化した極限では



$$\sigma_x \simeq \frac{v}{\sigma_E} \simeq 2.8 \times 10^{-5} \text{ m}, \quad (5.44)$$

となることが分かる。なお、式 (5.41)、(5.43)、(5.44) から、 $\sigma_x$  は

$$\sigma_x \simeq X_N \frac{v}{v_N}. \quad (5.45)$$

つまり、この場合のニュートリノ波束の長さは、親核の平均自由行程を非常に大きな係数  $v/v_N \simeq 6 \times 10^5$  で拡大したもので与えられる。

### 随伴粒子の局在化の効果

次に、随伴粒子の局在化の効果について考える。娘核  $N'$  の相互作用を考えると、 $N'$  と媒質の原子の衝突により、 $N$  は大きさ  $X_{N'}$  の空間領域内に局在化する。これは  $N$  の局在化と同様に、同じ原子-原子散乱断面積  $\sigma_{AA}$  を用いて見積もれる (式 (5.41) を参照)。ゆえに、親核と娘核の平均自由行程は同じオーダーである:

$$X'_{N'} \simeq X_N \simeq 5 \times 10^{-11} \text{ m}. \quad (5.46)$$

$N'$  は周囲の原子との衝突により、コヒーレントな生成を中断する。 $N'$  はニュートリノが生成されるのと同じ  $\beta$  崩壊の過程で生成されるため、これは、ニュートリノ生成過程のコヒーレント時間  $\sigma_t$  にも影響を与える。

娘核  $N'$  が生成される速度  $v_{N'}$  を推定する。 $\beta$  崩壊 (5.36) の最終状態にあるすべての粒子の運動量はほぼ同じオーダーであるから、 $p_e \sim p_\nu \sim p_{N'}$ 。典型的な原子炉ニュートリノエネルギーは、 $E \simeq 3 \text{ MeV}$  で、 $m_{N'} \sim 100 \text{ GeV}$  なので、 $v_{N'}$  は

$$v_{N'} = p_{N'}/m_{N'} \sim 3 \times 10^{-5} c \simeq 10^{-8} \text{ m/s}. \quad (5.47)$$

$N'$  の連続する 2 つの衝突の間の平均時間は

$$t_{N'} = \frac{X_{N'}}{v_{N'}} \simeq 5 \times 10^{-15} \text{ s}. \quad (5.48)$$

式 (5.42) と比較すると、 $t_{N'}$  は  $t_N$  より 20 分の 1 程度小さいことが分かる。

ここで、 $\beta$  崩壊 (5.36) で生成された電子と、媒質との相互作用の効果について考える。 $\beta$  電子の原子への散乱の主な効果は、原子の電離である。電子の運動エネルギー  $E_e \sim 3 \text{ MeV}$  では、ウランの電子衝突電離による断面積は  $\sigma_{eU} \simeq 1 \times 10^{-22} \text{ m}^2$  となる。ゆえに、電子の平均自由行程は  $X_e = 1/(\sigma_{eU} n_U) \simeq 2 \times 10^{-7} \text{ m}$  となり、 $X_N$  や  $X'_{N'}$  と比べて、 $4 \times 10^3$  倍大きい。一方、典型的な電子の運動量  $p_e \sim 3 \text{ MeV}$  では、速度は 1 に近く、 $\beta$  崩壊電子の連続する 2 つの衝突の間の平均時間は

$$t_e = X_e/v_e \simeq 7 \times 10^{-16} \text{ s}. \quad (5.49)$$

親核  $N$  および  $\beta$  崩壊 (5.36) の崩壊生成物が周囲の媒質原子と衝突すると、それらのコヒーレントな生成が中断されるので、ニュートリノのコヒーレントな生成時間は、先ほど考えたコヒーレンス時間  $t_N, t_{N'}, t_e$  のうち最も短いもので決まり、今回の場合は、 $t_e$  ということが分かった。ゆえに、ニュートリノ生成過程の時間的持続時間は  $\sigma_t \simeq t_e \sim 7 \times 10^{-16} \text{ s}$  となり、これに対応して生成されるニュートリノのエネルギー不確かさとその波束の長さは

$$\sigma_E \simeq t_e^{-1} \simeq 1 \text{ eV}, \quad \sigma_x \simeq 2 \times 10^{-7} \text{ m}. \quad (5.50)$$

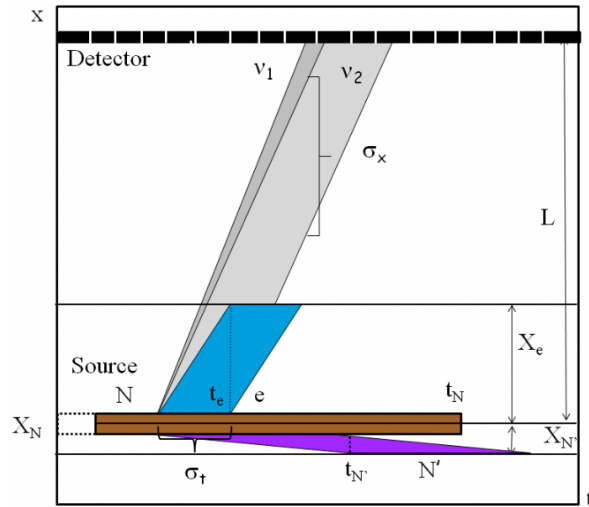


図2 原子炉実験におけるニュートリノの生成・伝播・検出の模式図(時空間局在図)。崩壊する原子核  $N$ 、娘核  $N'$ 、電子、生成されるニュートリノの質量固有状態の波束をそれぞれ茶、紫、青、灰色で表している。傾きは粒子の群速度によって決定される。 $x = L$  における黒い長方形はニュートリノ検出過程の局在を示す。簡単のために、2つのニュートリノ質量固有状態の波束を示している。この図は論文 [4] の図1を引用。

このとき、 $\sigma_t$  は、ニュートリノ生成に関わるすべての粒子の波束の重なり時間によって与えられる。著者らのアプローチは、関わる粒子の平均自由時間を考察することであり、これは、単に粒子の平均自由行程によって与えられる波束の長さを扱うことと同義である。また、これは粒子の空間的局在をも決定することにつながる。

これらのことは、ニュートリノの生成・伝播・検出過程と、波束的アプローチにおける随伴粒子の伝播と相互作用を示す時空間図によって説明できる。図2では、粒子の波束の伝播は  $(t, x)$  平面上で模式的に表される。縦方向は粒子の波束の長さ、傾きは粒子の群速度によって決まる。茶色の長方形は親核の群速度 ( $v_N \simeq 0$ )。ニュートリノ質量固有状態 ( $\nu_1, \nu_2$ ) の波束は、群速度が異なるため、時間や移動距離とともに、その重なりは小さくなる。生成された  $N'$  と電子に対応する横方向は、それぞれ平均自由時間  $t_{N'}$  と  $t_e$  で与えられる。親核  $N$  を表すバンドとの交わりは、生成過程の時空間局在を与え、特にその持続時間  $\sigma_t$  を決定する。ゆえに、 $\sigma_t$  はニュートリノ生成に参加するすべての粒子の波束の重なり時間によって与えられ、最も短い平均自由時間を持つ粒子の波束によって支配される。

### 5.1.6 放射性線源実験における波束の長さとのニュートリノスペクトル

放射性物質  $^{51}\text{Cr}$  を用いた実験を例として、放射性線源実験におけるニュートリノの波束の長さ  $\sigma_x$  とスペクトル  $S(\bar{E})$  を推定する。

5.1.4 節で述べたように、実験的に観測されるニュートリノ線の形と幅は2種類の広がり効果——均一な広がりとは不均一な広がり——によって形成される。均一な広がりとは、与えられた平均エネルギー  $\bar{E}$  の個々の生成ニュートリノの線を形成する。これは、親原子の寿命に関する自然線幅や、親原子と随伴粒子の両方が周囲の媒質と相互作用することによる衝突広がりなどの効果を含む。これらの効果は、 $f(E, \bar{E})$  におけるニュートリ

ノ波束の不確かさ  $\sigma_E$  と座標空間のニュートリノ波束の長さ  $\sigma_x \simeq v/\sigma_E$  を決定する。ニュートリノ線源実験において波束分離による量子デコヒーレンスにつながる可能性があるのは、この均一な線幅の広がりである。

不均一な広がり、個々のニュートリノ生成体が異なる条件にあることに関連する。これはわずかに異なる平均エネルギー  $\bar{E}$  を持つニュートリノの生成につながり、すなわち 5.1.4 節で議論したスペクトル  $S(\bar{E})$  を形成する。不均一な広がりによる  $\bar{E}$  の広がり、波束による量子デコヒーレンスとは関係がない。しかし、 $\bar{E}$  について平均化することはニュートリノ振動の観測可能な減衰につながり、それは量子波束のデコヒーレンス効果と似た結果を与える。

$^{51}\text{Cr}$  は電子捕獲過程



を通じて崩壊し、0.75 MeV(90%) と 0.43 MeV(10%) の対になった 4 つの準単色ニュートリノ線を生成する(半減期は 27.7 日)。明確にするために、0.75 MeV のエネルギーを持つニュートリノの生成を考える。電子捕獲過程 (5.51) では、ニュートリノ生成過程の時間幅  $\sigma_t$  は、親原子  $^{51}\text{Cr}$  と生成原子  $^{51}\text{V}$  の平均自由時間の小さい方によって与えられる。

まず、均一な広がり効果について考える。クロムは、体心立方結晶構造を持つ遷移金属で、格子定数は  $2.91 \times 10^{-10}$  m。クロム原子の局在長  $X_{\text{Cr}}$  として、熱振動による結晶中の平衡位置からの二乗平均平方根 (root mean square, rms) のずれを取れる。クロム源の温度  $T \sim 600$  K とすると、 $X_{\text{Cr}} \simeq 8.2 \times 10^{-9}$  m が得られる [44]。結晶格子内のクロム原子の熱振動の rms 速度については、 $v_{\text{Cr}} \simeq 1.7 \times 10^{-6}c$  が得られる。このことから、クロム原子の平均自由時間  $t_{\text{Cr}} = X_{\text{Cr}}/v_{\text{Cr}} \simeq 1.6 \times 10^{-13}$  s が得られる。

ここでバナジウム原子の平均自由時間について考えてみる。崩壊の運動学から、バナジウム原子核と崩壊過程で生成されるニュートリノは等しい運動量  $p_V = p_\nu = 0.75$  MeV を持つ。したがって、バナジウム原子核の反跳エネルギーと速度はそれぞれ  $E_V \simeq 5.9$  eV と  $v_V \simeq 1.6 \times 10^{-5}c$  となる。バナジウムの反跳速度は原子の電子速度に比べて小さいため、バナジウムは崩壊過程から中性原子または弱電離原子の形で飛び出す。したがって、クロム中のバナジウム原子の平均自由行程は、 $X_V = (\sigma_{AA}n_{\text{Cr}})^{-1}$  で求められる。ここで、クロム原子の数密度を  $n_{\text{Cr}} = 8.6 \times 10^{28}$  m $^{-3}$ 、V-Cr 原子散乱の断面積を  $\sigma_{AA}$  とした。 $\sigma_{AA}$  は幾何学的断面積  $\pi (r_{\text{vdW,Cr}} + r_{\text{vdW,V}})^2 \simeq 5.15 \times 10^{-19}$  m $^2$  として見積もられる。ここで、クロムのファンデルワールス半径  $r_{\text{vdW,Cr}} = 2.00 \times 10^{-10}$  m、バナジウムのファンデルワールス半径  $r_{\text{vdW,V}} = 2.05 \times 10^{-10}$  m を用いた。また、バナジウム原子の平均自由行程と平均自由時間については、 $X_V = 2.26 \times 10^{-11}$  m、 $t_V = X_V/v_V \simeq 4.7 \times 10^{-15}$  s とした。

バナジウム原子の平均自由時間はクロム原子の平均自由時間よりも短いので、ニュートリノ生成過程の時間的持続時間はバナジウム原子によって決まる:

$$\sigma_t \simeq t_V \simeq 4.7 \times 10^{-15} \text{ s}. \quad (5.52)$$

エネルギー不確かさとニュートリノ波束の長さは

$$\sigma_E \simeq t_V^{-1} \simeq 0.14 \text{ eV}, \quad \sigma_x \simeq X_V \frac{v}{v_V} \simeq 1.4 \times 10^{-6} \text{ m}. \quad (5.53)$$

したがって、ニュートリノ波束の長さはバナジウム原子の平均自由行程を  $v/v_V \simeq 6.3 \times 10^4$  で拡大した値で与えられる。

ここでニュートリノ波束の平均エネルギー分布  $S(\bar{E})$  を考える。結晶欠陥や不純物などいくつかのデコヒーレントな広がり効果があるが、最も大きな寄与は、原子が静止状態ではなく、実効速度  $v_{\text{Cr}}$  の熱振動を起こす

ことに関連したドップラー広がりである。ドップラー広がり、式 (5.34) で与えられるように、線スペクトルをガウシアンに広げる。ここで、線の中心エネルギーを  $E_0 = 0.75 \text{ MeV}$  とすると、対応する不確かさは

$$\delta_{El} = \frac{v_{Cr}}{c} E_0 \simeq 1.3 \text{ eV}, \quad (5.54)$$

となる。したがって、 $^{51}\text{Cr}$  線のエネルギースペクトルの不確かさ  $\delta_{El}$  は、ニュートリノ波束のエネルギーの不確かさ  $\sigma_E$  を 1 桁上回る。

随伴粒子 (電子捕獲の場合には  $N'$ 、 $\beta$  崩壊の場合には  $e$  と  $N'$ ) の局在がニュートリノの波束の長さを与える影響は、次の方法で見積もれる: 随伴粒子の平均自由行程の代わりに、随伴粒子の速度  $v_i$  と、媒質粒子との平均相互作用時間  $\sigma_t^i$  ( $i = e, N'$ ) を考える。 $v_i$  と  $\sigma_t^i$  があることにより、対応する波束バンドを構成することが可能となる。ニュートリノ波束は、構成された波束と元の原子核  $N$  の波束の交わりによって決定される。 $\sigma_t^i \ll t_N$  のとき、ニュートリノ波束の大きさは、随伴粒子の相互作用を無視した場合と比較して非常に小さくなる。また、 $\sigma_t^i$  は媒質原子の波束と二次的な粒子相互作用からの生成物の波束によって決定される。

電子捕獲の場合、生成されたバナジウムの波束の大きさは、次の過程の時間的持続時間  $\sigma_{Cr}$  によって決まる:



この  $\sigma_{Cr}$  を求めるには、 $^{51}\text{Cr}$  の局在とは別に、 $^{51}\text{V}'$  と  $^{51}\text{Cr}'$  などの波束も知る必要がある。二次的な相互作用の連鎖によって  $\sigma_{Cr}$  は  $t_{Cr}$  に比べて  $10^{-2}$ – $10^{-1}$  程度小さくなると見積もれる。ゆえに、ニュートリノ波束の大きさ  $\sigma_x$  は式 (5.53) と同じオーダーになる。このアプローチでは、粒子の局在化のために、親粒子  $N$  と随伴粒子の両方について平均自由時間を用いている。

検出過程については、原子炉や放射性線源実験では  $\sigma_E^D \gg \sigma_E^S$  となるので、非常に良い精度で  $\sigma_E = \sigma_E^S$  となる。この条件  $\sigma_E^D \gg \sigma_E^S$  のおかげで、式 (5.7) の  $f_D(E)$  は定数で置き換えられる。それゆえ、論文 [4] では、この部分を詳細には検討していない。

### 5.1.7 考察

論文 [4] では、波束分離による量子デコヒーレンスの効果は常に、検出器の分解能関数を修正、あるいは線源実験の場合にはニュートリノ線の形や幅を修正することで、取り込めることを示している。ゆえに、ニュートリノ振動の減衰の原因として挙げていた 2 つは、観測的観点から等価であると言える。

論文 [4] の著者らは、検出器の有効エネルギー分解能関数 (またはニュートリノ線の有効幅) が常にニュートリノエネルギーの不確かさ  $\sigma_E$  と検出器分解能  $\delta_E$  (または線幅  $\delta_{El}$ ) の大きい方によることを発見した。ガウス波束と分解能関数から、有効分解能は

$$\delta_{E\text{eff}} = \sqrt{\delta_E^2 + \sigma_E^2}, \quad (5.56)$$

で特徴づけられ、有効ニュートリノ線幅  $\delta_{El}$  も同様に特徴づけられる。

また、彼らは原子炉ニュートリノでは  $\sigma_E > \delta_E$  (線源実験では  $\sigma_E > \delta_{El}$ ) でなければ波束分離の効果を実験的に調べることができないことを導いた。

原子炉実験では、ニュートリノ波束の長さとそれに対応するニュートリノエネルギーの不確かさは、式 (5.50) で与えられる。 $\sigma_E$  を原子炉実験における検出器のエネルギー分解能と比較すると、実験で得られる分解能は  $\delta_E \sim 100 \text{ keV}$  なので、式 (5.50) から、 $\sigma_E/\delta_E \sim 10^{-5}$  となり、原子炉ニュートリノ実験では波束分離による振動の減衰効果が見られないことが分かる。

クロム放射性線源実験では、ニュートリノの波束の長さとそれに対応するニュートリノエネルギーの不確かさは、式 (5.53) で与えられる。 $\sigma_E$  を検出されたニュートリノ線のエネルギー不確かさ (5.54) と比較すると、 $\sigma_E/\delta_E \sim 10^{-1}$  となり、原子炉ニュートリノ実験よりは差が小さいことが分かる。

現在、波束の性質に基づいて、原子炉実験や放射性線源実験と BEST 実験の結果を整合させる取り組みが行われているが、\*7 波束分離効果では未だに結果を一致させることはできていない。放射性線源実験では、 $\sigma_E$  と  $\delta_{El}$  の値はあまり変わらないため、波束分離によって量子デコヒーレンスを探ることも適当ではない。つまり、 $\sigma_E \gtrsim \delta_E$  (あるいは  $\sigma_E \gtrsim \delta_{El}$ ) は波束分離効果の観測可能性の必要条件ではあるが、十分条件ではない。 $\sigma_E$  が  $\delta_E$  (または  $\delta_{El}$ ) より小さいか大きいかに関係なく波束分離効果が起こるためには、ニュートリノはコヒーレンス長と同等かそれ以上の十分な距離を移動する必要がある。

原子炉ニュートリノ実験 ( $E = 3 \text{ MeV}$ ) では、式 (5.50) と (5.12) のコヒーレンス長の定義から、次が得られる:

$$L_{\text{coh}21} \simeq 4.8 \times 10^{10} \text{ m}, \quad L_{\text{coh}31} \simeq 4.1 \times 10^9 \text{ m}, \quad L_{\text{coh}41} \simeq 3.6 \times 10^6 \text{ m}. \quad (5.57)$$

ここで、 $L_{\text{coh}21}$  は  $\Delta m_{12}^2 \simeq 7.5 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$ 、 $L_{\text{coh}31}$  は  $\Delta m_{31}^2 \simeq 2.5 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$ 、 $L_{\text{coh}41}$  はステライル・ニュートリノ振動  $\Delta m_{41}^2 \simeq 1 \text{ eV}^2$  に対応する。\*8

一方、クロム放射性線源実験 ( $E = 0.75 \text{ MeV}$ ) では、式 (5.50) から、次が得られる:

$$L_{\text{coh}21} \simeq 2.1 \times 10^{10} \text{ m}, \quad L_{\text{coh}31} \simeq 6.3 \times 10^8 \text{ m}, \quad L_{\text{coh}41} \simeq 1.6 \times 10^6 \text{ m}. \quad (5.58)$$

しかし、このようなベースラインを持つ原子炉実験やニュートリノ源実験は明らかに不可能である。例えば、原子炉実験の場合、コヒーレンス長と振動長の比は

$$\frac{L_{\text{coh}IK}}{l_{\text{osc}IK}} = \frac{\sigma_x E}{2\pi}, \quad (5.59)$$

から、 $L_{\text{coh}}/l_{\text{osc}} \sim 5 \times 10^5$  となり、波束が 50 万回伝播した後初めて波束によるデコヒーレンスが見えるようになる。このとき、式 (5.59) は、 $\Delta m_{IK}^2$  に依存せず、ローレンツ不変。ただしこれは、地上でのニュートリノ実験におけるの基準値よりもはるかに大きな値である。つまり、このような巨大なベースライン  $L$  を持つ実験が可能だったとしても、検出器の有限なエネルギー分解能による平均化の効果の方が先に現れてしまう。

式 (5.59) から、波束効果は  $E$  が小さくなるほど顕著になるはずだが、MeV 領域よりもずっと低いエネルギーのニュートリノを検出することは簡単ではない。論文 [4] の著者らは、原子炉および放射性ニュートリノ源実験においては、地上でのニュートリノ実験で、波束分離による量子デコヒーレンスの効果を観測することは不可能であると結論づけた。

## 5.2 「ニュートリノ振動の減衰、デコヒーレンス、ニュートリノ波束の長さ」に対するコメント

次に、2022 年 9 月に arXiv に出された論文 [5] を紹介する。この論文は、5.1 節で紹介した論文 [4] に関して、3 つの「矛盾」を指摘している:

\*7 論文 [45] を参照。[45] では、ニュートリノ波束の長さ  $\sigma_x$  は、 $2.1 \times 10^{-13} \text{ m}$  と与えられているが、この値は、[4] で与えた原子炉ニュートリノやクロム放射性線源実験の値よりも小さい。

\*8 ステライル・ニュートリノは標準模型の範囲では存在しない (詳しくは 3.4 節を参照)。

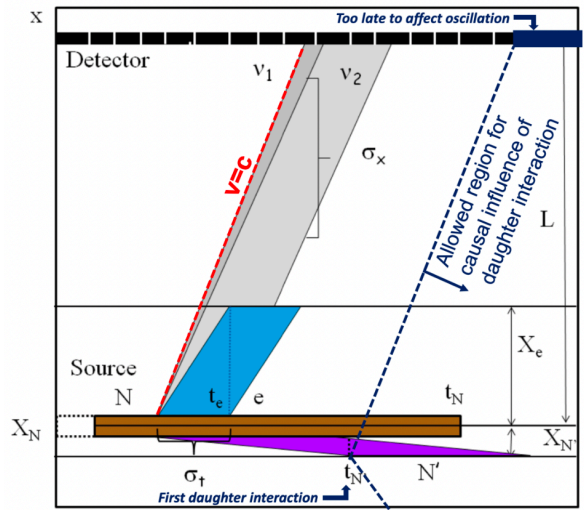


図3 図2の時空間図に重ね合わせた核反跳の相互作用の光円錐。もし時間  $t'_N$  における反跳粒子の相互作用が、 $L$  におけるニュートリノ振動に影響を与えるなら、因果関係は破れている。この図は論文 [5] の図1を引用。

1. 振動確率はその後の反跳粒子の相互作用に依存することは、因果関係の破れを意味し、ある状況では超光速の信号伝達を意味する。
2. もつれた反跳を非直交基底上で積分することは非物理的効果をもたらす。
3. どのような相互作用が初期状態の粒子の位置を測定するのに役立つかという問題が曖昧なままである。

したがって、「波束分離の効果は原子炉や放射性源を用いたニュートリノ実験では厳密に観測できない」という論文 [4] の主張が間違っている、と論文 [4] の著者 Jones は主張している。

### 5.2.1 因果関係の破れについて

論文 [4] では、ニュートリノに付随する崩壊生成物が検出されずに逃げるか、または、それらが媒質と相互作用して測定されるかの2つの場合を区別して、原子核崩壊によるニュートリノ振動の波束長のコヒーレンス特性を考察している。ニュートリノ生成のコヒーレンスが中断される時間スケールとみなされるのは、崩壊生成物（この場合は、電子または原子核反跳）が媒質と相互作用する頻度で決定される。これが、ニュートリノ波束に影響を与える時間スケール（距離スケール）であり、ある場合には振動コヒーレンスを決定する臨界時間スケールである。

Jones は「論文 [4] で用いられた図2は因果関係の破れを示唆しており、ニュートリノ-反跳粒子間の超光速の信号伝達を可能にしている」と主張している。具体的には以下のような議論である：時刻  $t_R$  で核または電子反跳に起こる事象は、対応する未来光円錐（検出器での観測物に因果的に影響を与えることができる時空領域のこと）を持ち、この光円錐は時刻  $t_D = t_R + (L/c)$  以降に検出器のベースライン  $L$  に到達する。反跳粒子がニュートリノに対してゆっくり動くことを考えると、その相互作用点から発せられる光円錐は、ニュートリノの検出過程が完了した後で、検出器のベースライン  $L$  に到達する。図3は、核反跳を例に取り、図2の時空間図に重ねたものである。「もし、本当にニュートリノ振動確率が反跳粒子の検出の有無や相互作用の

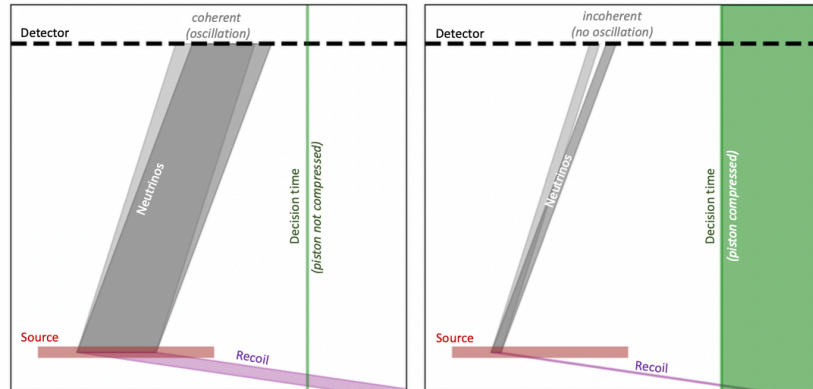


図4 Jones が、「論文 [4] が正しければ、ニュートリノ振動確率を介して時間的に逆行する信号を伝達できてしまう」ということを主張する思考実験の図。左の図はピストンを圧縮しない場合の効果、右の図は圧縮した場合の効果を示している。省略されたラベルはすべて図3のものと同じ。この図は論文 [5] の図2を引用。

有無に影響されるなら、因果関係が破れていることになる。これと等価なものとして、もつれ合った相手粒子はニュートリノとの共通の頂点から現れ、光速  $c$  以下の速度で移動するので、ニュートリノから空間的に離れており、その後の振る舞いが振動現象に影響を与えることはありえない、ということが言える」というのが Jones の主張である。

この議論をより具体的にするために、Jones は以下のような思考実験を考えたと：電子捕獲でニュートリノを生成し、高流束のニュートリノが連続的に生成されるのに十分な数の原子を含むガス状の発生源を考える。このとき、以下の手順で実験を行う。

1. 最終状態の原子核の相互作用で量子デコヒーレンス効果が観測されない程度に十分に低い密度のガスで実験を開始する (図4の左)。
2.  $t_0$  でピストンを圧縮し、ガスの密度を上げるか、低密度のままにしておくかを決める。ピストンを圧縮すると、密度  $\rho(t > t_0)$  は距離  $L$  のニュートリノ振動確率に大きな波束分離効果を引き起こすほど高くなる (図4の右)。
3. 圧縮するかしないか選択することによって、ニュートリノ振動確率を通して信号伝達が起こる。

Jones は、最後の信号伝達の箇所について矛盾点を主張している。時間  $t'$  で検出されたニュートリノは、 $t' - \frac{L}{c} + \mathcal{O}\left(\frac{m}{E}\right)$  で生成されたものである。Jones は、平均自由時間が  $t'_N \gg \frac{L}{c}$  となるように十分に低い密度のガスで実験を始めることにしているので、ニュートリノが検出された後も反跳粒子が飛び続けている。

時刻  $t_0$  でピストンを圧縮すると、デコヒーレントな状態に遷移する。もし、もつれ合った反跳粒子の相互作用が、本当に振動確率に影響を与えるなら、デコヒーレントになるニュートリノは時間  $t_0 - t'_N$  で生成され、 $t_D = t_0 - t'_N + \frac{L}{c} + \mathcal{O}\left(\frac{m}{E}\right)$  で検出されたものである。 $t'_N \gg \frac{L}{c}$  なので、検出時間は  $t_D < t_0$  となる。これらのニュートリノ振動確率を測定して、それが最終状態の原子核反跳の相互作用に影響されていることが分かるなら、時間的に逆行する信号を送ることに成功したことになる。しかし、このことは因果関係に反しているため、やはり論文 [4] の考え方はおかしいと Jones は主張している。

### EPR 実験との類似性

このシステムは、Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) 相関 [46] の思考実験によく似ているため、まずはその EPR 実験について説明する。離れたところに、量子ビット  $A, B$  をもつれた状態で用意する:

$$|\psi\rangle = \frac{|\uparrow_Z\rangle_A \otimes |\downarrow_Z\rangle_B + |\downarrow_Z\rangle_A \otimes |\uparrow_Z\rangle_B}{\sqrt{2}}. \quad (5.60)$$

後の Jones の議論では、 $A$  が随伴粒子、 $B$  がニュートリノに対応する。

もし、 $A$  が  $z$  方向のスピンを測定して、 $\downarrow_Z$  を得たら、

$$|\psi\rangle_B \rightarrow |\uparrow_Z\rangle_B. \quad (5.61)$$

この確認については付録 B.1 節を参照。また、もし  $A$  が  $x$  方向のスピンを測定して、 $\downarrow_X$  を得たら、<sup>\*9</sup>

$$|\psi\rangle_B \rightarrow |\downarrow_X\rangle_B = \frac{|\uparrow_Z\rangle_B - |\downarrow_Z\rangle_B}{\sqrt{2}}, \quad (5.62)$$

となる。

いずれにせよ、これらの結果から、 $A$  がどの量を測定するかを選択が、巨視的に大きく離れた位置で測定される  $B$  のスピンの情報に符号化されることが分かる。これが、EPR 実験である。このとき、 $A$  と  $B$  の測定結果の相関をみると、量子もつれの非自明な結果が得られる。

式 (5.60) のような初期状態が与えられると、 $B$  は自分の量子ビットだけを測定し、 $1/2$  の確率で上向きスピンを得る。このことはいまの例の場合に、簡単に確認できる (付録 B.3 節を参照)。

縮約密度行列  $\hat{\rho}_B$  は  $A$  上でどのような測定  $\hat{M}_A$  が行われたかに依存しない。測定  $\hat{M}_A$  と、別の測定  $\hat{M}'_A$  の固有状態を

$$\hat{M}_A |\lambda_I\rangle = \lambda_I |\lambda_I\rangle, \quad (5.63)$$

$$\hat{M}'_A |\lambda'_a\rangle = \lambda'_a |\lambda'_a\rangle, \quad (5.64)$$

とする。このとき、

$$|\lambda'_a\rangle = \sum_I |\lambda_I\rangle \langle \lambda_I | \lambda'_a\rangle, \quad (5.65)$$

$$|\lambda_I\rangle = \sum_a |\lambda'_a\rangle \langle \lambda'_a | \lambda_I\rangle, \quad (5.66)$$

である。新しい縮約密度行列  $\hat{\rho}'_B$  は次のように表せる:

$$\hat{\rho}'_B = \sum_a \langle \lambda'_a | (|\psi\rangle \langle \psi|) | \lambda'_a\rangle. \quad (5.67)$$

このとき、完全系を間に挟んで

---

<sup>\*9</sup> 論文 [5] では

$$|\psi\rangle_B \rightarrow |\uparrow_X\rangle_B = \frac{|\uparrow_Z\rangle_B + |\downarrow_Z\rangle_B}{\sqrt{2}},$$

と書いているが、これは誤植と思われる (付録 B.2 節を参照)。



$$\begin{aligned}
\hat{\rho}'_B &= \sum_{a,I,J} \langle \lambda'_a | \lambda_I \rangle \langle \lambda_I | \psi \rangle \langle \psi | \lambda_J \rangle \langle \lambda_J | \lambda'_a \rangle \\
&= \sum_{I,J} \left( \underbrace{\sum_a \langle \lambda_J | \lambda'_a \rangle \langle \lambda'_a | \lambda_I \rangle}_{=\delta_{IJ}} \right) \langle \lambda_I | \psi \rangle \langle \psi | \lambda_J \rangle \\
&= \sum_I \langle \lambda_I | \psi \rangle \langle \psi | \lambda_I \rangle \\
&= \hat{\rho}_B.
\end{aligned} \tag{5.68}$$

$A$  がどんな測定をしようが、 $B$  が自らのもつれた量子ビットを測定したときの確率は同じになる。つまり、超光速の信号伝達は生じない。波動関数の崩壊が瞬時に起こることと、因果律が矛盾なく両立している。

### ニュートリノ・反跳粒子システムと EPR システムの (非) 類似性

ここで、ニュートリノ・反跳粒子システムは EPR システムとどのように似ているのか、あるいは異なっているのか、について考える。まず、 $A$  を反跳粒子、 $B$  をニュートリノに置き換え、2次元のヒルベルト空間から連続的な空間に移行する。<sup>\*10</sup> 例えば、ベースライン  $L$  におけるフレーバー  $\beta$  の測定は、ある連続的な  $\lambda$  の基底  $|\lambda\rangle$  を用いて

$$P(\beta; L) = \int d\lambda (\langle \lambda | \otimes \langle \beta, L |) |\psi\rangle \langle \psi| (|\lambda\rangle \otimes |\beta, L\rangle) = \langle \beta, L | \hat{\rho}_\nu | \beta, L \rangle, \tag{5.69}$$

と表せる。ここで、ニュートリノの縮約密度行列  $\hat{\rho}_\nu$  は

$$\hat{\rho}_\nu = \text{Tr}_\lambda (\hat{\rho}) = \int d\lambda \langle \lambda | \hat{\rho} | \lambda \rangle. \tag{5.70}$$

上と同様に、2通りの反跳粒子の測定  $\hat{M}$  と  $\hat{M}'$  を考える。 $\hat{\rho}'_\nu$  は、反跳基底状態  $\hat{U}|\lambda\rangle$  の  $\hat{U}$  に依存しないので、 $\hat{\rho}_\nu$  も、反跳測定で選ぶものに依存しない。また、反跳時間発展演算子はそれ自体が別のユニタリー演算であるため、後の反跳時間発展とは無関係である:

$$|\lambda(t)\rangle = \hat{U}_R(t-t_0)|\lambda\rangle. \tag{5.71}$$

$\hat{\rho}_\beta = \hat{\rho}'_\beta$  から、 $\hat{\rho}_\nu$  は反跳の影響を受けず、ニュートリノ振動確率も変化しないことが分かる。

これは、縮約密度行列  $\hat{\rho}_\nu$  を

$$\hat{\rho}_\nu = \text{Tr}_A (\hat{\rho}) = \sum_I \langle \lambda_I | \hat{\rho} | \lambda_I \rangle_A, \tag{5.72}$$

とすると、反跳粒子の測定方法が異なる (ニュートリノの) 縮約密度行列  $\hat{\rho}'_\nu$  が

<sup>\*10</sup> 元論文 [5] で  $A$  と  $B$  が入れ替わっているのは誤植と思われる。

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}'_\nu &= \sum_I A \langle \lambda_a | \hat{\rho} | \lambda_a \rangle_A \\
&= \sum_{a,I,J} A \langle \lambda_a | \lambda_I \rangle \langle \lambda_I | \hat{\rho} | \lambda_J \rangle \langle \lambda_J | \lambda_a \rangle_A \\
&= \sum_{I,J} \left( \sum_a A \langle \lambda_J | \lambda_a \rangle_A A \langle \lambda_a | \lambda_I \rangle_A \right) \langle \lambda_I | \hat{\rho} | \lambda_J \rangle \\
&= \sum_{I,J} A \langle \lambda_J | \lambda_I \rangle_A \langle \lambda_I | \hat{\rho} | \lambda_J \rangle \\
&= \sum_{I,J} \delta_{JI} \langle \lambda_I | \hat{\rho} | \lambda_J \rangle \\
&= \sum_I A \langle \lambda_I | \hat{\rho} | \lambda_I \rangle_A \\
&= \hat{\rho}_\nu,
\end{aligned} \tag{5.73}$$

となることから分かる。「EPR と同じように、相関測定をしない限り、時間発展も反跳測定もニュートリノの全体的な振動確率に影響を及ぼさない」論文 [4] の主張は、全体の振動確率がその後の反跳粒子の相互作用に影響されることと同義である」と Jones は主張している。これを詳しく述べると以下のとおりである: ある距離  $L_{\text{coh}}$  を超えると、空の空間に反跳粒子が生成されニュートリノ振動だけが観測されるが、もし、十分に高密度な物質に反跳粒子が生成されたら、振動は観測されないことになってしまう。すなわち、 $\hat{\rho}_\nu$  は  $\hat{U}_R(t-t_0)$  に依存し、 $\hat{\rho}'_\nu$  は  $\hat{U}'_R(t-t_0)$  に依存してしまう。

### 5.2.2 非直交基底

Jones の解釈は以下のとおりである: 上の「問題」は、反跳粒子をガウス波束に射影することで生じている。このような関数は反跳粒子の最終状態の正規直交基底ではない。ここで問題なのは「非直交な最終状態の集合の和をとることは、反跳粒子の起こりうる状況の確率を合計する有効な方法ではないこと」であり、これが、振動確率の予測に非物理的な効果を導入してしまっているのである。

なお、ガウス波束では完全性が成り立たないというのは誤解である。実際には非直交なガウス波束でも、式 (2.13) のような完全性が成り立っている。

### 5.2.3 環境との相互作用による局在化

Jones の主張は以下の 3 段落のとおりである:

ニュートリノ振動確率は、崩壊後の反跳核の相互作用や、他のもつれた娘粒子と周囲の物質との相互作用に依存しない。また、もつれた最終状態粒子が存在し、崩壊からニュートリノに関する情報を持ち去ることは、ニュートリノのコヒーレントな特性に影響する。重要なのは、反跳粒子が生成後にどうなるかは、因果関係を破らない限りニュートリノ振動に影響を与えないということである。つまり、どのような直交基底でも反跳粒子の最終状態を辿るとニュートリノに対して同じ振動確率を生成する。

娘粒子の環境相互作用はコヒーレンスに影響を与えないが、親粒子の環境相互作用はコヒーレンスに影響を与えることができる。親粒子と環境の衝突により生成されたもつれが、崩壊前の親の位置の「測定」の役割を果たす。その精度は、衝突の相互作用の運動量移行で決まっている。これらの相互作用は、どの観測者にとってもニュートリノの過去光円錐内にあるので、その影響による因果関係の問題はない。論文 [4] で用いられた Weisskopf-Van-Vleck の定式化は、実際には、スペクトルに対する親粒子と環境の相互作用の効果を表してお

り、崩壊後の最終状態の反跳粒子の効果までは記述されていないため不完全である。

どの相互作用が親の位置を測定するのに役立つかという問いは、論文 [4] で記されているほど明確ではない。なぜなら論文 [4] では、原子衝突による局在化が関連性のあるものとして考えられているが、ニュートリノ生成は原子核の内部に結合した中性子に対し、 $n \rightarrow p + e + \nu_e$  で進むので、原子核内部の相互作用によって決めることもできるからである。ゆえに、もう一つの妥当な局在化のスケールは、原子核自体の内部で核子間の相互作用によって表される。崩壊後、 $N - 1$  個のもつれた核子が残され、その位置が元の生成体の位置を決め、核子自身の大きさのオーダーに局在化する。このことは、親粒子や娘粒子の原子衝突によるささやかな局在化スケールよりも、はるかに小さな波束の不確かさと量子デコヒーレンス効果を意味するように思われる。

### 5.3 「『ニュートリノ振動の減衰、デコヒーレンス、ニュートリノ波束の長さ』に対するコメント」への返信

最後に、2022 年 10 月に arXiv に出された論文 [6] を紹介する。これは、5.1 節で紹介した論文の「矛盾」を指摘した 5.2 節の Jones 論文 [5] に対する返答の論文である。

Jones は、論文 [4] のニュートリノ振動の減衰に関する扱いが、以下の 3 点において、矛盾していると主張していた:

1. 因果関係が破れている。
2. 非直交基底上での積分を含んでいる。
3. ニュートリノ生成過程に関わる粒子の局在性を十分に考慮していない。

Jones は、これらの矛盾点が、「波束分離による量子デコヒーレンスの効果は、原子炉実験や放射性源実験では観測できない」という論文 [4] の結論を弱めていると主張している。

論文 [6] は、Jones の 3 つの主張に、それぞれ以下の形で反論している:

1. 参照した時空間図の誤った解釈による。
2. 行っていない計算の批判である。
3. ニュートリノ生成過程の局在性を誤って解釈したことによる。

以下の 5.3.1-5.3.3 節で、論文 [6] の著者の主張を、その流れに沿って記す。

#### 5.3.1 因果関係について

Jones は、ニュートリノ振動の減衰の解析が超光速信号の存在可能性を暗に示しており、因果関係の破れを導くと主張している。これを説明するために Jones は、図 4 を用いた 2 段階の思考実験を考えた。

しかし、この議論は、図 3、4 を誤った解釈で考えていることによる。論文 [4] では、ニュートリノ生成過程に関与する粒子の平均自由時間に基づいて考察を行った。そのため、すべての粒子の平均自由時間  $t_a$  のうち、最も短い時間で生成時間が決定されることが示されている。これらは電子 (図 3) または親核  $N$  (図 4 の両パネル) の平均自由時間であり、 $N'$  の平均自由時間ではない。したがって、論文 [5] のすべてのダイアグラムにおいて、娘核の平均自由時間  $t_{N'}$  はニュートリノ生成過程が既に終わった時間に対応する。ゆえに、このような状況では、 $N'$  の反応は無関係であり、ニュートリノ検出実験の結果に影響を与えることはできないし、与えない。

ここで、 $t_{N'} < t_N$  を考える (図 5 参照)。このとき、ニュートリノ波束の長さ  $\sigma_x$  は  $N'$  の散乱から、



ることが示された。いまの場合には、 $N'$  の散乱は「ニュートリノ生成の後」に起こる。

なお、5.1.5 節で示したように、 $N'$  が局在化していないときには、局在化しているときに比べて、波束の長さが非常に長くなる。これは量子デコヒーレンスの効果を抑制し、観測をより困難にする。

### 5.3.3 原子核内の核子相互作用による局在化について

論文 [4] では、ニュートリノ発生源の原子が周囲の原子に散乱することによって局在化することを仮定した(原子-原子散乱による局在化)。ここで、Jones はこの代替案として、崩壊する核子が同じ親原子核の他の核子に対して局在化することを考えている(核子間相互作用による局在化)。これはニュートリノ波束をより短くすることにつながる。また、「不安定核を含む原子が別の原子に散乱して局在化しても、そのような原子対の空間的な絶対位置は決まらない」ということについては以下のとおり: ある座標にある原子を考える。原子とその原子核(および原子核を構成する核子)の座標の不確かさは、原子の大きさや原子核の半径ではなく、その原子が入っている箱の大きさ  $l$  によって与えられる。箱の中がガスで満たされている場合、親核の座標の不確かさは、その原子の平均自由行程で与えられる。これは、ガスの原子に散乱することによって、測定可能な反跳粒子と局所的なガスの密度変化が生じるからである。崩壊する親核子と、同じ原子核に入っている他の核子との相互作用では、崩壊後の娘核は、他の核子と一緒に原子核全体として反跳するので、測定可能な余分な反跳粒子は生じない。したがって、このような核子間の相互作用は、放射性線源における親粒子の局在化とは関係がない。

以上から、論文 [4] の結果に対する批判は無効である。特に、「波束分離による量子デコヒーレンスの効果は、原子炉実験や放射性線源実験では観測できない」という結論は変わらない。

## 6 ガウス波束によるデコヒーレンスの具体計算

$(d+1)$  時空次元を考え、座標系を

$$x = (x^0, \mathbf{x}) = (x^0, x^1, \dots, x^d), \quad (6.1)$$

とする。計量の符号は  $(-, +, \dots, +)$  ととる。質量殻上のエネルギーは

$$E_I(\mathbf{p}) := \sqrt{m_I^2 + \mathbf{p}^2}. \quad (6.2)$$

以下は、後で使うので計算しておく：

$$\frac{\partial E_I(\mathbf{p})}{\partial p^i} = \frac{p^i}{E_I(\mathbf{p})} =: v_I^i(\mathbf{p}), \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial^2 E_I(\mathbf{p})}{\partial p^i \partial p^j} = \frac{\partial v_I^i(\mathbf{p})}{\partial p^j} = \frac{\delta^{ij} - v_I^i(\mathbf{p}) v_I^j(\mathbf{p})}{E_I(\mathbf{p})}. \quad (6.4)$$

$\mathbf{P}$  を  $\Delta\mathbf{p}$  だけズラしてテイラー展開する：

$$\begin{aligned} E_I(\mathbf{P} + \Delta\mathbf{p}) &= E_I(\mathbf{P}) + \frac{\partial E_I(\mathbf{P})}{\partial p^i} \Delta p^i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E_I(\mathbf{P})}{\partial p^i \partial p^j} \Delta p^i \Delta p^j + \dots \\ &= E_I(\mathbf{P}) + v_I^i(\mathbf{P}) \Delta p^i + \frac{\delta^{ij} - v_I^i(\mathbf{P}) v_I^j(\mathbf{P})}{2E_I(\mathbf{P})} \Delta p^i \Delta p^j + \dots \\ &= E_I(\mathbf{P}) + \mathbf{v}_I(\mathbf{P}) \cdot \Delta\mathbf{p} + \frac{(\Delta\mathbf{p})^2 - (\mathbf{v}_I(\mathbf{P}) \cdot \Delta\mathbf{p})^2}{2E_I(\mathbf{P})} + \dots \end{aligned} \quad (6.5)$$

### 6.1 スピノールの平面波

この章の座標空間の取り扱いとは論文 [47] に準ずる。

$I$  番目の質量固有状態に対する自由な一粒子部分空間での運動量固有状態は

$$|I, s; \mathbf{p}\rangle := \hat{a}_I^\dagger(s; \mathbf{p}) |0\rangle, \quad (6.6)$$

$$|I, s; \mathbf{p}\rangle\rangle := \hat{\alpha}_I^\dagger(s; \mathbf{p}) |0\rangle = \sqrt{2E_I(\mathbf{p})} |I, s; \mathbf{p}\rangle. \quad (6.7)$$

これを規格化して

$$\langle I, s; \mathbf{p} | J, s'; \mathbf{p}' \rangle = \delta_{IJ} \delta_{ss'} \delta^d(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad (6.8)$$

$$\langle\langle I, s; \mathbf{p} | J, s'; \mathbf{p}' \rangle\rangle = \delta_{IJ} \delta_{ss'} 2E_I(\mathbf{p}) \delta^d(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (6.9)$$

座標固有状態は

$$\langle I, s; \mathbf{x} | J, s'; \mathbf{p} \rangle := \delta_{IJ} \delta_{ss'} \frac{e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}, \quad (6.10)$$

$$\langle\langle I, s; \mathbf{x} | J, s'; \mathbf{p} \rangle\rangle := \delta_{IJ} \delta_{ss'} \frac{e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}. \quad (6.11)$$

ゆえに

$$|I, s; \mathbf{x}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_I(\hat{\mathbf{p}})}} |I, s; \mathbf{x}\rangle, \quad (6.12)$$

であり

$$\langle I, s; \mathbf{x} | \hat{\mathbf{p}} = -i\nabla \langle I, s; \mathbf{x} |, \quad \langle I, s; \mathbf{x} | E_I(\hat{\mathbf{p}}) = \sqrt{m_I^2 - \nabla^2} \langle I, s; \mathbf{x} |. \quad (6.13)$$

これをクライン・ゴールドン方程式の解として、ミンコフスキー空間全体に拡張すると、

$$\langle I, s; \mathbf{x} | := \langle I, s; \mathbf{x} | e^{-iE_I(\hat{\mathbf{p}})x^0} \quad (6.14)$$

となり

$$\langle I, s; \mathbf{x} | J, s'; \mathbf{p}\rangle = \delta_{IJ} \delta_{ss'} \frac{e^{-iE_I(\mathbf{p})x^0 + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}, \quad \langle J, s'; \mathbf{p} | I, s; \mathbf{x}\rangle = \delta_{IJ} \delta_{ss'} \frac{e^{iE_I(\mathbf{p})x^0 - i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}, \quad (6.15)$$

$$\langle\langle I, s; \mathbf{x} | J, s'; \mathbf{p}\rangle\rangle = \delta_{IJ} \delta_{ss'} \frac{e^{-iE_I(\mathbf{p})x^0 + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}, \quad \langle\langle J, s'; \mathbf{p} | I, s; \mathbf{x}\rangle\rangle = \delta_{IJ} \delta_{ss'} \frac{e^{iE_I(\mathbf{p})x^0 - i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}. \quad (6.16)$$

である。これを用いて、式 (3.17) を書き換えると

$$\hat{\nu}_I(x) = \sum_s \int \frac{d^d \mathbf{p}}{2E_I(\mathbf{p})} \left( \hat{\alpha}_I(s; \mathbf{p}) \mathcal{U}_I(s; \mathbf{p}) \langle\langle I, s; \mathbf{x} | I, s; \mathbf{p}\rangle\rangle + \hat{\alpha}_I^\dagger(s; \mathbf{p}) \mathcal{V}_I(s; \mathbf{p}) \langle\langle I, s; \mathbf{p} | I, s; \mathbf{x}\rangle\rangle \right). \quad (6.17)$$

となる。いま、自由な一粒子部分空間を考えているので、式 (6.17) に左右から真空を掛けて

$$\hat{\nu}_I(x) |0\rangle = \sum_s \int \frac{d^d \mathbf{p}}{2E_I(\mathbf{p})} \mathcal{V}_I(s; \mathbf{p}) |I, s; \mathbf{p}\rangle \langle\langle I, s; \mathbf{p} | I, s; \mathbf{x}\rangle\rangle, \quad (6.18)$$

$$\overline{\hat{\nu}_I(x)} |0\rangle = \sum_s \int \frac{d^d \mathbf{p}}{2E_I(\mathbf{p})} \overline{\mathcal{U}_I(s; \mathbf{p})} |I, s; \mathbf{p}\rangle \langle\langle I, s; \mathbf{p} | I, s; \mathbf{x}\rangle\rangle, \quad (6.19)$$

$$\langle 0 | \hat{\nu}_I(x) = \sum_s \int \frac{d^d \mathbf{p}}{2E_I(\mathbf{p})} \mathcal{U}_I(s; \mathbf{p}) \langle\langle I, s; \mathbf{x} | I, s; \mathbf{p}\rangle\rangle \langle\langle I, s; \mathbf{p} |, \quad (6.20)$$

$$\langle 0 | \overline{\hat{\nu}_I(x)} = \sum_s \int \frac{d^d \mathbf{p}}{2E_I(\mathbf{p})} \overline{\mathcal{V}_I(s; \mathbf{p})} \langle\langle I, s; \mathbf{x} | I, s; \mathbf{p}\rangle\rangle \langle\langle I, s; \mathbf{p} |. \quad (6.21)$$

よって、

$$\langle\langle I, s; \mathbf{p} | \hat{\nu}_J(x) |0\rangle\rangle = \delta_{IJ} \mathcal{V}_I(s; \mathbf{p}) \frac{e^{iE_I(\mathbf{p})x^0 - i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}, \quad (6.22)$$

$$\langle\langle I, s; \mathbf{p} | \overline{\hat{\nu}_J(x)} |0\rangle\rangle = \delta_{IJ} \overline{\mathcal{U}_I(s; \mathbf{p})} \frac{e^{iE_I(\mathbf{p})x^0 - i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}, \quad (6.23)$$

$$\langle 0 | \hat{\nu}_I(x) |J, s; \mathbf{p}\rangle\rangle = \delta_{IJ} \mathcal{U}_I(s; \mathbf{p}) \frac{e^{-iE_I(\mathbf{p})x^0 + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}, \quad (6.24)$$

$$\langle 0 | \overline{\hat{\nu}_I(x)} |J, s; \mathbf{p}\rangle\rangle = \delta_{IJ} \overline{\mathcal{V}_I(s; \mathbf{p})} \frac{e^{-iE_I(\mathbf{p})x^0 + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}. \quad (6.25)$$

また、式 (3.26) の展開は

$$\hat{\nu}_\alpha(x) = \sum_I U_{\alpha I} \sum_s \int \frac{d^d \mathbf{p}}{2E_I(\mathbf{p})} \left( \hat{\alpha}_I(s; \mathbf{p}) \mathcal{U}_I(s; \mathbf{p}) \langle\langle I, s; x | I, s; \mathbf{p} \rangle\rangle + \hat{\alpha}_I^\dagger(s; \mathbf{p}) \mathcal{V}_I(s; \mathbf{p}) \langle\langle I, s; \mathbf{p} | I, s; x \rangle\rangle \right). \quad (6.26)$$

自由な一粒子部分空間を考えているので、同様に計算して

$$\hat{\nu}_\alpha(x) |0\rangle = \sum_I U_{\alpha I} \sum_s \int \frac{d^d \mathbf{p}}{2E_I(\mathbf{p})} \mathcal{V}_I(s; \mathbf{p}) |I, s; \mathbf{p}\rangle \langle\langle I, s; \mathbf{p} | I, s; x \rangle\rangle, \quad (6.27)$$

$$\overline{\hat{\nu}_\alpha(x)} |0\rangle = \sum_I U_{\alpha I}^* \sum_s \int \frac{d^d \mathbf{p}}{2E_I(\mathbf{p})} \overline{\mathcal{U}_I(s; \mathbf{p})} |I, s; \mathbf{p}\rangle \langle\langle I, s; \mathbf{p} | I, s; x \rangle\rangle, \quad (6.28)$$

$$\langle 0 | \hat{\nu}_\alpha(x) = \sum_I U_{\alpha I} \sum_s \int \frac{d^d \mathbf{p}}{2E_I(\mathbf{p})} \mathcal{U}_I(s; \mathbf{p}) \langle\langle I, s; x | I, s; \mathbf{p} \rangle\rangle \langle\langle I, s; \mathbf{p} |, \quad (6.29)$$

$$\langle 0 | \overline{\hat{\nu}_\alpha(x)} = \sum_I U_{\alpha I}^* \sum_s \int \frac{d^d \mathbf{p}}{2E_I(\mathbf{p})} \overline{\mathcal{V}_I(s; \mathbf{p})} \langle\langle I, s; x | I, s; \mathbf{p} \rangle\rangle \langle\langle I, s; \mathbf{p} |. \quad (6.30)$$

よって、

$$\langle\langle I, s; \mathbf{p} | \hat{\nu}_\alpha(x) |0\rangle = U_{\alpha I} \mathcal{V}_I(s; \mathbf{p}) \langle\langle I, s; \mathbf{p} | I, s; x \rangle\rangle, \quad (6.31)$$

$$\langle\langle I, s; \mathbf{p} | \overline{\hat{\nu}_\alpha(x)} |0\rangle = U_{\alpha I}^* \overline{\mathcal{U}_I(s; \mathbf{p})} \langle\langle I, s; \mathbf{p} | I, s; x \rangle\rangle, \quad (6.32)$$

$$\langle 0 | \hat{\nu}_\alpha(x) |I, s; \mathbf{p}\rangle = U_{\alpha I} \mathcal{U}_I(s; \mathbf{p}) \langle\langle I, s; x | I, s; \mathbf{p} \rangle\rangle, \quad (6.33)$$

$$\langle 0 | \overline{\hat{\nu}_\alpha(x)} |I, s; \mathbf{p}\rangle = U_{\alpha I}^* \overline{\mathcal{V}_I(s; \mathbf{p})} \langle\langle I, s; x | I, s; \mathbf{p} \rangle\rangle. \quad (6.34)$$

フレーバーの固有状態と質量固有状態が式 (3.15) のように混ざるとき、これと対応するのは、座標固有状態  $|I, s; x\rangle$  の方であり、運動量固有状態  $|I, s; \mathbf{p}\rangle$  の混合は非自明となることが分かる。本修士論文では、簡単のため、過去の先行研究の取り扱いに準じて、この点を無視する。

## 6.2 質量固有状態のガウス波束

$I$  番目の質量固有状態  $|I, \sigma; X, P\rangle$  に対するガウス波束は、(いまはスピン自由度を無視しているので) 次のように書ける [48]:

$$\langle I; \mathbf{p} | J, \sigma; X, \mathbf{P} \rangle = \delta_{IJ} e^{iE_I(\mathbf{p})X^0 - i\mathbf{p} \cdot \mathbf{X}} \left( \frac{\sigma}{\pi} \right)^{\frac{d}{4}} e^{-\frac{\sigma}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{P})^2}. \quad (6.35)$$

ここで、面積の次元を持つ幅

$$\sigma = \frac{1}{2\sigma_p^2} = 2\sigma_x^2, \quad (6.36)$$

を定義した。

これをフーリエ変換すると波動関数が得られる:



$$\begin{aligned}
\langle I; x | J, \sigma; X, \mathbf{P} \rangle &= \delta_{IJ} \int d^d \mathbf{p} \langle I; \mathbf{x} | I; \mathbf{p} \rangle \langle I; \mathbf{p} | I, \sigma; X, \mathbf{P} \rangle \\
&= \delta_{IJ} \int d^d \mathbf{p} \frac{e^{-iE_I(\mathbf{p})x^0 + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{iE_I(\mathbf{p})X^0 - i\mathbf{p} \cdot \mathbf{X}} \left(\frac{\sigma}{\pi}\right)^{\frac{d}{4}} e^{-\frac{\sigma}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{P})^2} \\
&= \delta_{IJ} \left(\frac{\sigma}{\pi}\right)^{\frac{d}{4}} \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-iE_I(\mathbf{p})(x^0 - X^0) + i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{X}) - \frac{\sigma}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{P})^2}. \tag{6.37}
\end{aligned}$$

以下では、これを鞍点法で評価する。

指数部を

$$F(\mathbf{p}) = -iE_I(\mathbf{p})(x^0 - X^0) + i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{X}) - \frac{\sigma}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{P})^2, \tag{6.38}$$

とすると

$$\frac{\partial F(\mathbf{p})}{\partial p^i} = -iv_I^i(\mathbf{p})(x^0 - X^0) + i(x^i - X^i) - \sigma(p^i - P^i), \tag{6.39}$$

$$\frac{\partial^2 F(\mathbf{p})}{\partial p^i \partial p^j} = -i \frac{\delta^{ij} - v_I^i(\mathbf{p})v_I^j(\mathbf{p})}{E_I(\mathbf{p})} (x^0 - X^0) - \sigma \delta^{ij}, \tag{6.40}$$

となる。

ここで、鞍点方程式の解を  $\mathbf{p}_*$  とすると

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial F(\mathbf{p}_*)}{\partial p^i} = -iv_I^i(\mathbf{p}_*)(x^0 - X^0) + i(x^i - X^i) - \sigma(p_*^i - P^i), \tag{6.41}$$

から

$$F(\mathbf{p}_*) = -iE_I(\mathbf{p}_*)(x^0 - X^0) + i\mathbf{p}_* \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{X}) - \frac{\sigma}{2}(\mathbf{p}_* - \mathbf{P})^2, \tag{6.42}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F(\mathbf{p}_*)}{\partial p^i \partial p^j} &= -i \frac{\delta^{ij} - v_I^i(\mathbf{p}_*)v_I^j(\mathbf{p}_*)}{E_I(\mathbf{p}_*)} (x^0 - X^0) - \sigma \delta^{ij} \\
&= - \left( \sigma + i \frac{x^0 - X^0}{E_I(\mathbf{p}_*)} \right) \delta^{ij} + i \frac{x^0 - X^0}{E_I(\mathbf{p}_*)} v_I^i(\mathbf{p}_*)v_I^j(\mathbf{p}_*) =: -M^{ij}, \tag{6.43}
\end{aligned}$$

となる。

複素対称行列  $M^{ij} = a\delta^{ij} + bv^i v^j$  は、 $U^t U = 1$  と  $\det U = 1$  に従う複素特殊直交行列  $U$  によって対角化できる:

$$UMU^t = \begin{bmatrix} a & & & \\ & \ddots & & \\ & & a & \\ & & & a + bv^2 \end{bmatrix}, \tag{6.44}$$

ここで

$$a = \sigma \left( 1 + i \frac{x^0 - X^0}{\sigma E_I(\mathbf{p}_*)} \right), \quad b = \sigma \left( -i \frac{x^0 - X^0}{\sigma E_I(\mathbf{p}_*)} \right), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_I(\mathbf{p}_*). \tag{6.45}$$

以上から、波動関数は

$$\begin{aligned}
\langle I; x | J, \sigma; X, \mathbf{P} \rangle &= \delta_{IJ} \left( \frac{\sigma}{\pi} \right)^{\frac{d}{4}} \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{F(\mathbf{p}_*) + \frac{1}{2}(p-p_*)^i \frac{\partial^2 F(\mathbf{p}_*)}{\partial p^i \partial p^j} (p-p_*)^j + \dots} \\
&= \delta_{IJ} \left( \frac{1}{\pi\sigma} \right)^{\frac{d}{4}} \frac{e^{F(\mathbf{p}_*)}}{\left( 1 + i \frac{x^0 - X^0}{\sigma E_I(\mathbf{p}_*)} \right)^{\frac{d-1}{2}} \sqrt{1 + i \frac{x^0 - X^0}{\sigma E(\mathbf{p}_*)} (1 - \mathbf{v}_I^2(\mathbf{p}_*))}}. \tag{6.46}
\end{aligned}$$

となる。

さらにここから、 $\sigma$  が大きい場合は、次のように展開できる:

$$\mathbf{p}_* = \mathbf{P} + \Delta_1 \mathbf{p} + \Delta_2 \mathbf{p} + \dots, \tag{6.47}$$

ここで、 $\Delta_n \mathbf{p} = \mathcal{O}(\sigma^{-n})$  である。また、 $v_I^i(\mathbf{p}_*)$  は

$$\begin{aligned}
v_I^i(\mathbf{p}_*) &= v_I^i(\mathbf{P}) + \frac{\partial v_I^i(\mathbf{P})}{\partial p^j} (\Delta_1 p^j + \Delta_2 p^j + \dots) \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_I^i(\mathbf{P})}{\partial p^j \partial p^k} (\Delta_1 p^j + \Delta_2 p^j + \dots) (\Delta_1 p^k + \Delta_2 p^k + \dots) + \dots \\
&= v_I^i(\mathbf{P}) + \frac{\delta^{ij} - v_I^i(\mathbf{P}) v_I^j(\mathbf{P})}{E_I(\mathbf{P})} (\Delta_1 p^j + \Delta_2 p^j + \dots) + \dots, \tag{6.48}
\end{aligned}$$

と書けるので、これを、鞍点方程式 (6.41) に代入すると

$$0 \stackrel{\dagger}{=} -i \left( v_I^i(\mathbf{P}) + \frac{\delta^{ij} - v_I^i(\mathbf{P}) v_I^j(\mathbf{P})}{E_I(\mathbf{P})} \Delta_1 p^j + \dots \right) (x^0 - X^0) + i (x^i - X^i) - \sigma (\Delta_1 p^i + \dots), \tag{6.49}$$

つまり

$$\begin{aligned}
\Delta_1 p^i + \dots &= -i \left( v_I^i(\mathbf{P}) + \frac{\delta^{ij} - v_I^i(\mathbf{P}) v_I^j(\mathbf{P})}{E_I(\mathbf{P})} \Delta_1 p^j + \dots \right) \frac{x^0 - X^0}{\sigma} + i \frac{x^i - X^i}{\sigma} \\
&= i \frac{(x^i - X^i) - v_I^i(\mathbf{P}) (x^0 - X^0)}{\sigma} - i \frac{\delta^{ij} - v_I^i(\mathbf{P}) v_I^j(\mathbf{P})}{E_I(\mathbf{P})} \Delta_1 p^j \frac{x^0 - X^0}{\sigma} + \dots, \tag{6.50}
\end{aligned}$$

となる。この式における  $\sigma^{-1}$  のオーダーから、 $\Delta_1 p^i$  は

$$\Delta_1 p^i = i \frac{(x^i - X^i) - v_I^i(\mathbf{P}) (x^0 - X^0)}{\sigma}. \tag{6.51}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_* &= \mathbf{P} + i \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X} - \mathbf{v}_I(\mathbf{P}) (x^0 - X^0)}{\sigma} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) \\
&= \mathbf{P} + i \frac{\delta \mathbf{x}_I}{\sigma} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right), \tag{6.52}
\end{aligned}$$

ここで、 $\delta \mathbf{x}_I$  は

$$\delta \mathbf{x}_I := \mathbf{x} - \mathbf{X} - \mathbf{v}_I(\mathbf{P}) (x^0 - X^0), \tag{6.53}$$

と置いたので、 $\Delta_1 \mathbf{p}$  は

$$\Delta_1 \mathbf{p} = i \frac{\delta \mathbf{x}_I}{\sigma}. \quad (6.54)$$

式 (6.5) から

$$E_I(\mathbf{p}_*) = E_I(\mathbf{P}) + i \frac{\mathbf{v}_I(\mathbf{P}) \cdot \delta \mathbf{x}_I}{\sigma} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right), \quad (6.55)$$

が得られる。

以上を用いて式 (6.42) を展開する:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{p}_*) &= -i \left( E_I(\mathbf{P}) + i \frac{\mathbf{v}_I(\mathbf{P}) \cdot \delta \mathbf{x}_I}{\sigma} + \dots \right) (x^0 - X^0) + i \left( \mathbf{P} + i \frac{\delta \mathbf{x}_I}{\sigma} + \dots \right) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{X}) - \frac{\sigma}{2} \left( i \frac{\delta \mathbf{x}_I}{\sigma} + \dots \right)^2 \\ &= -i E_I(\mathbf{P}) (x^0 - X^0) + \frac{\mathbf{v}_I(\mathbf{P}) \cdot \delta \mathbf{x}_I}{\sigma} (x^0 - X^0) + i \mathbf{P} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{X}) - \frac{\delta \mathbf{x}_I}{\sigma} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{X}) + \frac{(\delta \mathbf{x}_I)^2}{2\sigma} + \dots \\ &= -i E_I(\mathbf{P}) (x^0 - X^0) + \frac{\mathbf{v}_I(\mathbf{P}) \cdot \delta \mathbf{x}_I}{\sigma} (x^0 - X^0) \\ &\quad + i \mathbf{P} \cdot (\delta \mathbf{x}_I + \mathbf{v}_I(\mathbf{P}) (x^0 - X^0)) - \frac{\delta \mathbf{x}_I}{\sigma} \cdot (\delta \mathbf{x}_I + \mathbf{v}_I(\mathbf{P}) (x^0 - X^0)) + \frac{(\delta \mathbf{x}_I)^2}{2\sigma} + \dots \\ &= -i (E_I(\mathbf{P}) - \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}_I(\mathbf{P})) (x^0 - X^0) + i \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{x}_I - \frac{(\delta \mathbf{x}_I)^2}{2\sigma} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) \\ &= -i \omega_I(\mathbf{P}) \delta x^0 + i \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{x}_I - \frac{(\delta \mathbf{x}_I)^2}{2\sigma} + \dots \end{aligned} \quad (6.56)$$

ただし、 $\mathbf{x} - \mathbf{X} = \delta \mathbf{x}_I + \mathbf{v}_I(\mathbf{P}) (x^0 - X^0)$  を用い、

$$\omega_I(\mathbf{P}) := E_I(\mathbf{P}) - \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}_I(\mathbf{P}), \quad (6.57)$$

$$\delta x^0 := x^0 - X^0, \quad (6.58)$$

と定義した。つまり、 $e^{F(\mathbf{p}_*)}$  は

$$e^{F(\mathbf{p}_*)} = e^{-i \omega_I(\mathbf{P}) \delta x^0 + i \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{x}_I - \frac{(\delta \mathbf{x}_I)^2}{2\sigma} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)}. \quad (6.59)$$

以上をまとめると、波動関数は

$$\begin{aligned} \langle I; x | J, \sigma; X, \mathbf{P} \rangle &= \delta_{IJ} \left( \frac{1}{\pi \sigma} \right)^{\frac{d}{4}} e^{-i \omega_I(\mathbf{P}) \delta x^0 + i \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{x}_I - \frac{(\delta \mathbf{x}_I)^2}{2\sigma} + \dots} \\ &\quad \times \left( 1 - i \frac{d-1}{2} \frac{\delta x^0}{\sigma E_I(\mathbf{P})} + \dots \right) \left( 1 - i \frac{1 - \mathbf{v}_I^2(\mathbf{P})}{2} \frac{\delta x^0}{\sigma E_I(\mathbf{P})} + \dots \right) \\ &= \delta_{IJ} \left( \frac{1}{\pi \sigma} \right)^{\frac{d}{4}} e^{-i \omega_I(\mathbf{P}) \delta x^0 + i \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{x}_I - \frac{(\delta \mathbf{x}_I)^2}{2\sigma} + \dots} \left( 1 - i \frac{d - \mathbf{v}_I^2(\mathbf{P})}{2} \frac{\delta x^0}{\sigma E_I(\mathbf{P})} + \dots \right), \end{aligned} \quad (6.60)$$

のように書ける。省略している箇所は、 $\sigma^{-2}$  のオーダーを表す。これが次節で用いるための、最終結果である。

以下では使わないが、式 (6.50) の  $\sigma^{-2}$  のオーダーの項も見ておく:

$$\begin{aligned} \Delta_2 p^i &= -i \frac{\delta^{ij} - v_I^i(\mathbf{P}) v_I^j(\mathbf{P})}{\sigma E_I(\mathbf{P})} \Delta_1 p^j \delta x^0 \\ &= \frac{\delta^{ij} - v_I^i(\mathbf{P}) v_I^j(\mathbf{P})}{\sigma E_I(\mathbf{P})} \frac{\delta x_I^j}{\sigma} \delta x^0, \end{aligned} \quad (6.61)$$

ゆえに

$$\Delta_2 \mathbf{p} = \frac{\delta \mathbf{x}_I - \mathbf{v}_I(\mathbf{P}) (\mathbf{v}_I(\mathbf{P}) \cdot \delta \mathbf{x}_I)}{\sigma^2 E_I(\mathbf{P})} \delta x^0. \quad (6.62)$$

ここで、式 (6.5) から

$$\begin{aligned} E_I(\mathbf{p}_*) &= E_I(\mathbf{P}) + \mathbf{v}_I(\mathbf{P}) \cdot \Delta_1 \mathbf{p} \\ &\quad + \mathbf{v}_I(\mathbf{P}) \cdot \Delta_2 \mathbf{p} + \frac{\delta^{ij} - v_I^i(\mathbf{P}) v_I^j(\mathbf{P})}{2E_I(\mathbf{P})} \Delta_1 p^i \Delta_1 p^j + \dots \\ &= E_I(\mathbf{P}) + i \frac{\mathbf{v}_I(\mathbf{P}) \cdot \delta \mathbf{x}_I}{\sigma} \\ &\quad + \mathbf{v}_I(\mathbf{P}) \cdot \left( \frac{\delta \mathbf{x}_I - \mathbf{v}_I(\mathbf{P}) (\mathbf{v}_I(\mathbf{P}) \cdot \delta \mathbf{x}_I)}{\sigma^2 E_I(\mathbf{P})} \delta x^0 \right) - \frac{\delta^{ij} - v_I^i(\mathbf{P}) v_I^j(\mathbf{P})}{2E_I(\mathbf{P})} \frac{\delta x_I^i \delta x_I^j}{\sigma^2} + \dots \\ &= E_I(\mathbf{P}) + i \frac{\mathbf{v}_I(\mathbf{P}) \cdot \delta \mathbf{x}_I}{\sigma} \\ &\quad + \frac{1}{\sigma^2 E_I(\mathbf{P})} \left[ (1 - \mathbf{v}_I^2(\mathbf{P})) (\mathbf{v}_I(\mathbf{P}) \cdot \delta \mathbf{x}_I) \delta x^0 - \frac{(\delta \mathbf{x}_I)^2 - (\mathbf{v}_I(\mathbf{P}) \cdot \delta \mathbf{x}_I)^2}{2} \right] + \dots, \end{aligned} \quad (6.63)$$

となる。

ちなみに、4.3 節の式 (4.12) の係数を、もし

$$\int d^3 p |f_I^S(\mathbf{p} - \mathbf{p}_I)|^2 = 1, \quad (6.64)$$

に従う規格化で求めるならば

$$N^2 \int d^3 \mathbf{p} e^{-\frac{1}{\sigma_p^2} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_I)^2} = N^2 \pi^{\frac{3}{2}} \sigma_p^3 = 1, \quad (6.65)$$

から、 $N = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{4}} \sigma_p^{\frac{3}{2}}}$  となる。ゆえに、 $g_I^S(\mathbf{x} - \mathbf{v}_I t)$  は

$$\begin{aligned} g_I^S(\mathbf{x} - \mathbf{v}_I t) &= N \int \frac{d^3 \tilde{\mathbf{p}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma_p^2} \tilde{\mathbf{p}}^2 + i\tilde{\mathbf{p}} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{v}_I t)} \\ &= N \int \frac{d^3 \tilde{\mathbf{p}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma_p^2} (\tilde{\mathbf{p}} - i\sigma_p^2 (\mathbf{x} - \mathbf{v}_I t))^2 - \frac{\sigma_p^2}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{v}_I t)^2} \\ &= \frac{N(\sqrt{2\pi\sigma_p^2})^3}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\sigma_p^2}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{v}_I t)^2} \\ &= N \sigma_p^3 e^{-\frac{\sigma_p^2}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{v}_I t)^2} \\ &= \frac{1}{\pi^{\frac{3}{4}}} \sigma_p^{\frac{3}{2}} e^{\frac{\sigma_p^2}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{v}_I t)^2}, \end{aligned} \quad (6.66)$$

と求まる。しかし、4.3 節では式 (6.64) とは異なる規格化 (4.20) を用いている。

### 6.3 ニュートリノ波束

時刻  $x^0 = X^0$  で、 $\mathbf{x} = \mathbf{X}$  中心で生まれた波束は、次のように記述される：

$$|\nu_\alpha, \sigma; X, \mathbf{P}\rangle := \sum_I |I, \sigma; X, \mathbf{P}\rangle \langle \nu_I | \nu_\alpha \rangle. \quad (6.67)$$

つまり

$$\begin{aligned} \langle I, \sigma; X, \mathbf{P} | J, \sigma'; X', \mathbf{P}' \rangle &= \delta_{IJ} \int d^d \mathbf{p} \langle I, \sigma; X, \mathbf{P} | I, \mathbf{p} \rangle \langle I, \mathbf{p} | I, \sigma'; X', \mathbf{P}' \rangle \\ &= \delta_{IJ} \left( \frac{\sigma}{\pi} \right)^{\frac{d}{4}} \left( \frac{\sigma'}{\pi} \right)^{\frac{d}{4}} \int d^d \mathbf{p} e^{-iE_I(\mathbf{p})(X^0 - X'^0) + i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}') - \frac{\sigma}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{P})^2 - \frac{\sigma'}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{P}')^2}, \end{aligned} \quad (6.68)$$

のように、書き表せる。この指数部を

$$G(\mathbf{p}) = -iE_I(\mathbf{p})(X^0 - X'^0) + i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}') - \frac{\sigma}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{P})^2 - \frac{\sigma'}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{P}')^2, \quad (6.69)$$

とすると、同様に

$$\frac{\partial G(\mathbf{p})}{\partial p^i} = -iv_I^i(\mathbf{p})(X^0 - X'^0) + i(X^i - X'^i) - \sigma(p^i - P^i) - \sigma'(p^i - P'^i), \quad (6.70)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G(\mathbf{p})}{\partial p^i \partial p^j} &= -i \frac{\delta^{ij} - v_I^i(\mathbf{p})v_I^j(\mathbf{p})}{E_I(\mathbf{p})} (X^0 - X'^0) - (\sigma + \sigma') \delta^{ij} \\ &= -(\sigma + \sigma') \left( \delta^{ij} + i \frac{\delta^{ij} - v_I^i(\mathbf{p})v_I^j(\mathbf{p})}{(\sigma + \sigma')E_I(\mathbf{p})} (X^0 - X'^0) \right), \end{aligned} \quad (6.71)$$

となる。

ここで、鞍点方程式の解を  $\mathbf{p}_*$  とすると

$$\frac{\partial G(\mathbf{p}_*)}{\partial p^i} = 0, \quad (6.72)$$

から

$$G(\mathbf{p}) = G(\mathbf{p}_*) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G(\mathbf{p}_*)}{\partial p^i \partial p^j} (p^i - p_*^i) (p^j - p_*^j) + \dots, \quad (6.73)$$

が得られる。ゆえに、波束は

$$\begin{aligned} \langle I, \sigma; X, \mathbf{P} | J, \sigma'; X', \mathbf{P}' \rangle &= \delta_{IJ} \left( \frac{\sigma}{\pi} \right)^{\frac{d}{4}} \left( \frac{\sigma'}{\pi} \right)^{\frac{d}{4}} \int d^d \mathbf{p} e^{G(\mathbf{p}_*) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G(\mathbf{p}_*)}{\partial p^i \partial p^j} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_*)^i (\mathbf{p} - \mathbf{p}_*)^j + \dots} \\ &= \delta_{IJ} \left( \frac{\sigma}{\pi} \right)^{\frac{d}{4}} \left( \frac{\sigma'}{\pi} \right)^{\frac{d}{4}} e^{G(\mathbf{p}_*)} \left( \frac{\pi}{\sigma_+} \right)^{\frac{d}{2}} \frac{1}{\left( 1 + i \frac{X^0 - X'^0}{\sigma_+ E_I(\mathbf{p}_*)} \right)^{\frac{d-1}{2}} \sqrt{1 + i(1 - \mathbf{v}_I^2(\mathbf{p}_*)) \frac{X^0 - X'^0}{\sigma_+ E_I(\mathbf{p}_*)}}} \\ &= \delta_{IJ} \left( \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_+} \right)^{\frac{d}{4}} \frac{e^{G(\mathbf{p}_*)}}{\left( 1 + i \frac{X^0 - X'^0}{\sigma_+ E_I(\mathbf{p}_*)} \right)^{\frac{d-1}{2}} \sqrt{1 + i(1 - \mathbf{v}_I^2(\mathbf{p}_*)) \frac{X^0 - X'^0}{\sigma_+ E_I(\mathbf{p}_*)}}}, \end{aligned} \quad (6.74)$$

ここで

$$\bar{\sigma} := \frac{\sigma \sigma'}{\sigma + \sigma'}, \quad (6.75)$$

とした。

再び、 $p_\star^i = \sum_{n=0}^{\infty} p_{(n)}^i$  を、 $p_{(n)}^i = \mathcal{O}\left((\sigma + \sigma')^{-n}\right)$  として、鞍点方程式 (6.72) に代入すると

$$p_\star^i - \frac{\sigma P^i + \sigma' P'^i}{\sigma + \sigma'} = i \frac{(X^i - X'^i) - v_I^i(\mathbf{p}_\star) (X^0 - X'^0)}{\sigma + \sigma'}, \quad (6.76)$$

ここで

$$v_I^i(\mathbf{p}_\star) = v_I^i(\mathbf{p}_{(0)}) + \frac{\partial v_I^i(\mathbf{p}_{(0)})}{\partial p^j} p_{(1)}^j + \left( \frac{\partial v_I^i(\mathbf{p}_{(0)})}{\partial p^j} p_{(2)}^j + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_I^i(\mathbf{p}_{(0)})}{\partial p^j \partial p^k} p_{(1)}^j p_{(1)}^k \right) + \cdots, \quad (6.77)$$

である。ゆえに

$$\mathbf{p}_{(0)} - \frac{\sigma \mathbf{P} + \sigma' \mathbf{P}'}{\sigma + \sigma'} = 0, \quad (6.78)$$

$$\mathbf{p}_{(1)} = i \frac{\mathbf{X} - \mathbf{X}' - \mathbf{v}_I(\mathbf{p}_{(0)}) (X^0 - X'^0)}{\sigma + \sigma'}, \quad (6.79)$$

$$p_{(2)}^i = i \frac{-\frac{\partial v_I^i(\mathbf{p}_{(0)})}{\partial p^j} p_{(1)}^j (X^0 - X'^0)}{\sigma + \sigma'}, \quad (6.80)$$

⋮

が得られる。これを

$$\mathbf{p}_{(0)} = \frac{\sigma \mathbf{P} + \sigma' \mathbf{P}'}{\sigma + \sigma'} =: \bar{\mathbf{P}}, \quad (6.81)$$

$$\mathbf{p}_{(1)} = i \frac{\mathbf{X} - \mathbf{X}' - \mathbf{v}_I(\bar{\mathbf{P}}) (X^0 - X'^0)}{\sigma + \sigma'} =: i \frac{\delta \mathbf{X}_I}{\sigma + \sigma'}, \quad (6.82)$$

$$\begin{aligned} p_{(2)}^i &= -i \frac{\delta^{ij} - v_I^i(\bar{\mathbf{P}}) v_I^j(\bar{\mathbf{P}})}{E_I(\bar{\mathbf{P}})} \left( i \frac{\delta X_I^j}{\sigma + \sigma'} \right) \frac{X^0 - X'^0}{\sigma + \sigma'} \\ &= \frac{\delta X_I^i - v_I^i(\bar{\mathbf{P}}) (\mathbf{v}_I(\bar{\mathbf{P}}) \cdot \delta \mathbf{X}_I)}{(\sigma + \sigma')^2 E_I(\bar{\mathbf{P}})} (X^0 - X'^0), \end{aligned} \quad (6.83)$$

⋮

とし、 $\sigma_+ := \sigma + \sigma'$  とおくと、 $G(\mathbf{p}_\star)$  は

$$\begin{aligned} G(\mathbf{p}_\star) &= G(\mathbf{p}_{(0)}) + \frac{\partial G(\mathbf{p}_{(0)})}{\partial p^i} p_{(1)}^i + \frac{\partial G(\mathbf{p}_{(0)})}{\partial p^i} p_{(2)}^i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G(\mathbf{p}_{(0)})}{\partial p^i \partial p^j} (p_{(1)}^i + p_{(2)}^i) (p_{(1)}^j + p_{(2)}^j) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma_+^3}\right) \\ &= -i E_I(\bar{\mathbf{P}}) (X^0 - X'^0) + i \bar{\mathbf{P}} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}') - \frac{1}{2} \frac{\sigma \sigma'}{\sigma + \sigma'} (\mathbf{P} - \mathbf{P}')^2 \\ &\quad + (-i v_I^i(\bar{\mathbf{P}}) (X^0 - X'^0) + i (X^i - X'^i)) \left( i \frac{\delta X_I^i}{\sigma + \sigma'} \right) - \frac{\sigma + \sigma'}{2} (\delta^{ij}) \left( i \frac{\delta X_I^i}{\sigma + \sigma'} \right) \left( i \frac{\delta X_I^j}{\sigma + \sigma'} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma_+^2}\right) \\ &= -i \omega_I(\bar{\mathbf{P}}) (X^0 - X'^0) + i \bar{\mathbf{P}} \cdot \delta \mathbf{X}_I - \frac{1}{2} \frac{\sigma \sigma'}{\sigma + \sigma'} (\mathbf{P} - \mathbf{P}')^2 \\ &\quad + i \delta X_I^i \left( i \frac{\delta X_I^i}{\sigma + \sigma'} \right) - \frac{\sigma + \sigma'}{2} (\delta^{ij}) \left( i \frac{\delta X_I^i}{\sigma + \sigma'} \right) \left( i \frac{\delta X_I^j}{\sigma + \sigma'} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma_+^2}\right) \\ &= -i \omega_I(\bar{\mathbf{P}}) (X^0 - X'^0) + i \bar{\mathbf{P}} \cdot \delta \mathbf{X}_I - \frac{1}{2} \frac{\sigma \sigma'}{\sigma + \sigma'} (\mathbf{P} - \mathbf{P}')^2 - \frac{(\delta \mathbf{X}_I)^2}{2(\sigma + \sigma')} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma_+^2}\right), \end{aligned} \quad (6.84)$$

ここで、 $\mathbf{X} - \mathbf{X}' = \delta\mathbf{X}_I + \mathbf{v}_I(\bar{\mathbf{P}})(X^0 - X'^0)$  と置いた。また、 $G(\mathbf{p}_*) = \mathcal{O}(\sigma_+^0)$ 、 $\frac{\partial G(\mathbf{p}_*)}{\partial p^i} = \mathcal{O}(\sigma_+^0)$ 、 $\frac{\partial^2 G(\mathbf{p}_*)}{\partial p^i \partial p^j} = \mathcal{O}(\sigma_+^1)$  である。

したがって、波束のプロパゲーターは

$$\begin{aligned} \langle I, \sigma; X, \mathbf{P} | J, \sigma'; X', \mathbf{P}' \rangle &= \delta_{IJ} \left( \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_+} \right)^{\frac{d}{4}} e^{-i\omega_I(\bar{\mathbf{P}})(X^0 - X'^0) + i\bar{\mathbf{P}} \cdot \delta\mathbf{X}_I - \frac{1}{2} \frac{\sigma\sigma'}{\sigma_+\sigma'} (\mathbf{P} - \mathbf{P}')^2 - \frac{(\delta\mathbf{X}_I)^2}{2(\sigma_+\sigma')} + \dots} \\ &\quad \times \left( 1 - i \frac{d - \mathbf{v}_I^2(\bar{\mathbf{P}})}{2} \frac{X^0 - X'^0}{\sigma_+ E_I(\bar{\mathbf{P}})} + \dots \right), \end{aligned} \quad (6.85)$$

と書ける。 $\sigma^{-2}$  のオーダーについては、省略。

これを用いると、フレーバー状態間の遷移振幅は次のようになる：

$$\begin{aligned} \langle \nu_\alpha, \sigma; X, \mathbf{P} | \nu_\beta, \sigma'; X', \mathbf{P}' \rangle &= \sum_{I, J} U_{\alpha I} U_{\beta J}^* \langle I, \sigma; X, \mathbf{P} | J, \sigma'; X', \mathbf{P}' \rangle \\ &= \sum_I U_{\alpha I} U_{\beta I}^* \left( \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_+} \right)^{\frac{d}{4}} e^{-i\omega_I(\bar{\mathbf{P}})(X^0 - X'^0) + i\bar{\mathbf{P}} \cdot \delta\mathbf{X}_I - \frac{1}{2} \frac{\sigma\sigma'}{\sigma_+\sigma'} (\mathbf{P} - \mathbf{P}')^2 - \frac{(\delta\mathbf{X}_I)^2}{2(\sigma_+\sigma')} + \dots} \\ &\quad \times \left( 1 - i \frac{d - \mathbf{v}_I^2(\bar{\mathbf{P}})}{2} \frac{X^0 - X'^0}{\sigma_+ E_I(\bar{\mathbf{P}})} + \dots \right). \end{aligned} \quad (6.86)$$

#### 6.4 ニュートリノ振動確率におけるデコヒーレンス

この修士論文に基づき、ニュートリノ振動確率におけるデコヒーレンスを調べた論文 [49] を出したので、その結果を追記し概説する。この節では以下の読み替えを行う：

$$\begin{aligned} X'^0 - X^0 &\rightarrow T, \\ \mathbf{X}' - \mathbf{X} &\rightarrow \mathbf{L}, \\ \mathbf{P} &\rightarrow \mathbf{P}_S, \\ \mathbf{P}' &\rightarrow \mathbf{P}_D, \\ \sigma &\rightarrow \sigma_S, \\ \sigma' &\rightarrow \sigma_D, \\ \sigma_+ &\rightarrow \sigma_{\text{sum}}, \\ \bar{\sigma} &\rightarrow \sigma_{\text{red}}, \\ \delta\mathbf{X}_I &\rightarrow -(\mathbf{L} - \bar{\mathbf{v}}_I T), \\ \omega_I(\bar{\mathbf{P}}) &\rightarrow \bar{E}_I, \end{aligned}$$

ただし  $\bar{\mathbf{v}}_I := \mathbf{v}_I(\bar{\mathbf{P}})$ 。

遷移振幅 (6.86) の絶対値の二乗から、以下のように振動確率を得ることができる：

$$\begin{aligned} P(\alpha \rightarrow \beta) &= |\langle \nu_\alpha, \sigma_S; X_S, \mathbf{P}_S | \nu_\beta, \sigma_D; X_D, \mathbf{P}_D \rangle|^2 \\ &= \sum_{I, J} U_{\alpha I} U_{\beta I}^* U_{\alpha J} U_{\beta J} e^{-i(\bar{E}_I - \bar{E}_J)T} \\ &\quad \times \left( \frac{\sigma_{\text{red}}}{\sigma_{\text{sum}}} \right)^{\frac{d}{2}} \exp \left[ -\sigma_{\text{red}} (\mathbf{P}_D - \mathbf{P}_S)^2 - \frac{(\mathbf{L} - \bar{\mathbf{v}}_I T)^2}{2\sigma_{\text{sum}}} - \frac{(\mathbf{L} - \bar{\mathbf{v}}_J T)^2}{2\sigma_{\text{sum}}} \right]. \end{aligned} \quad (6.87)$$

これを適宜平方完成することにより

$$P(\alpha \rightarrow \beta) = \left( \frac{\sigma_{\text{red}}}{\sigma_{\text{sum}}} \right)^{\frac{d}{2}} e^{-\sigma_{\text{red}}(\mathbf{P}_D - \mathbf{P}_S)^2} \sum_{I,J} U_{\alpha I} U_{\beta I}^* U_{\alpha J}^* U_{\beta J} e^{-i(\bar{E}_I - \bar{E}_J)T} \\ \times \exp \left[ -\frac{\mathbf{L}_{\perp}^2}{\sigma_{\text{sum}}} - \frac{(L_{\parallel} - \frac{\bar{v}_I + \bar{v}_J}{2} T)^2}{\sigma_{\text{sum}}} - \frac{(\bar{v}_I - \bar{v}_J)^2}{4\sigma_{\text{sum}}} T^2 \right], \quad (6.88)$$

ただし  $\bar{v}_I := |\bar{\mathbf{v}}_I|$  および

$$\mathbf{L}_{\parallel} := (\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_{\bar{\mathbf{P}}}) \mathbf{e}_{\bar{\mathbf{P}}}, \quad L_{\parallel} := |\mathbf{L}_{\parallel}|, \quad \mathbf{L}_{\perp} := \mathbf{L} - \mathbf{L}_{\parallel}. \quad (6.89)$$

以上により、コヒーレンス時間

$$T_{\text{coh } IJ} := 2 \frac{\sqrt{\sigma_{\text{sum}}}}{|\bar{v}_I - \bar{v}_J|} \quad (6.90)$$

を得た。これは、超相対論近似では

$$T_{\text{coh } IJ} \approx \frac{4\bar{P}^2 \sqrt{\sigma_{\text{sum}}}}{|m_I^2 - m_J^2|} \quad (6.91)$$

となる。

先に  $T$  について平方完成した場合には以下を得る：

$$P(\alpha \rightarrow \beta) = \left( \frac{\sigma_{\text{red}}}{\sigma_{\text{sum}}} \right)^{\frac{d}{2}} e^{-\sigma_{\text{red}}(\mathbf{P}_D - \mathbf{P}_S)^2} \sum_{I,J} U_{\alpha I} U_{\beta I}^* U_{\alpha J}^* U_{\beta J} e^{-i(\bar{E}_I - \bar{E}_J)T} \\ \times \exp \left[ -\frac{\mathbf{L}_{\perp}^2}{\sigma_{\text{sum}}} - \frac{(\bar{v}_I^2 + \bar{v}_J^2) \left( T - \frac{\bar{v}_I + \bar{v}_J}{\bar{v}_I^2 + \bar{v}_J^2} L_{\parallel} \right)^2}{2\sigma_{\text{sum}}} - \frac{(\bar{v}_I - \bar{v}_J)^2 L_{\parallel}^2}{2\sigma_{\text{sum}}} \right]. \quad (6.92)$$

コヒーレンス長

$$L_{\text{coh } IJ} := \sqrt{2(\bar{v}_I^2 + \bar{v}_J^2)} \frac{\sqrt{\sigma_{\text{sum}}}}{|\bar{v}_I - \bar{v}_J|} \quad (6.93)$$

を得た。超相対論近似では両者は一致する：

$$L_{\text{coh } IJ} \approx T_{\text{coh } IJ} \approx \frac{4\bar{P}^2 \sqrt{\sigma_{\text{sum}}}}{|m_I^2 - m_J^2|}. \quad (6.94)$$



## 7 まとめ

具体的にガウス波束を用いて計算することにより、3次元ガウス波束同士の振幅における、デコヒーレンスの新しい表式を得た。

5章で紹介したことを簡単に以下でまとめる: 論文 [4] では、ニュートリノ振動の減衰について

- ニュートリノ検出器の有限なエネルギー分解能、
- 生成されるニュートリノ線の有限な幅 (放射性ニュートリノ源を用いた実験の場合)、

の2つを検討し、「波束分離による量子デコヒーレンスの効果は、原子炉実験や放射性源実験では観測できないこと」を示している。しかし、このことについて、論文 [5] では、以下の矛盾点がある、と主張された:

1. 因果関係が破れている。
2. 非直交基底上での積分を含んでいる。
3. ニュートリノ生成過程に関わる粒子の局在性を十分に考慮していない。

この反論 [5] に対して、論文 [4] の著者らは論文 [6] で改めて以下のようにそれぞれ回答した:

1. 参照した時空間図の誤った解釈による。
2. 行っていない計算の批判である。
3. ニュートリノ生成過程の局在性を誤って解釈したことによる。

最新の論文 [7] で、論文 [4, 6] の著者の1人が、「デコヒーレンス (減衰) 効果は、現在の原子炉実験や放射性源実験では観測できず、もし何らかの付加的な減衰が見つかるならば、それは新しい物理によるものであろう」と述べている。

以上の論争 [4, 5, 6] については、私は論文 [4, 6] の著者らの考えに同意する。検出器の有効エネルギー分解能関数が常に、ニュートリノエネルギーの不確かさ  $\sigma_E$  と検出器分解能  $\delta_E$  のどちらか大きい方で決まるといえるのは、確かである。また、原子炉ニュートリノ実験では  $\sigma_E > \delta_E$ 、ニュートリノ線源実験では  $\sigma_E > \delta_{El}$  のとき、波束分離の効果が実験的に観測される (が、十分条件ではない) ことについても、同意する。波束分離効果が起こるためには、ニュートリノはコヒーレンス長と同等か、それ以上の十分な距離を移動する必要があるが、実際の地上での実験では、そのような距離を取ることは不可能である。また、もしこのような距離を取れたとしても、検出器の有限なエネルギー分解能による平均化の効果の方が先に現れてしまう。ゆえに、「地上でのニュートリノ実験で波束分離による量子デコヒーレンス効果を観測することは不可能である」という論文 [4, 6] の主張は正しい、と私は考える。

上で引用した論文 [7] の示唆のように、量子デコヒーレンスの物理を深く理解することにより、新物理の効果を抽出できる可能性もある。新物理に関しては未だ不明瞭な点が多く、ニュートリノの物理から解明が進んでいく可能性があり、将来が非常に楽しみである。ニュートリノ実験の精度も年々向上しているもので、これからの数十年でも多くの実験結果が得られ、理論の計算結果と比較・検討することができるものと期待する。

## 付録 A ニュートリノ実験の基礎

著者の卒業論文（2021年3月）の一部に、多少の加筆・修正を施したものを再録する。

### A.1 様々なニュートリノ源

#### A.1.1 大気ニュートリノ

宇宙から降り注ぐ宇宙線が大気中の原子核と衝突すると、ハドロンが生成し、そのハドロンが崩壊することで生じるニュートリノを大気ニュートリノと呼ぶ。このように連鎖的に新たな粒子が生まれる現象を「大気シャワー」といい、 $\pi$ 中間子、 $K$ 中間子が崩壊し、ミューオンが生成される（図6参照）。このミューオンが崩壊することで、電子ニュートリノとミューニュートリノが生成する：

$$\begin{aligned}
 \pi^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu_\mu, & \pi^- &\rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu, \\
 K^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu_\mu, & K^- &\rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu, \\
 \mu^+ &\rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu, & \mu^- &\rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu.
 \end{aligned}
 \tag{A.1}$$

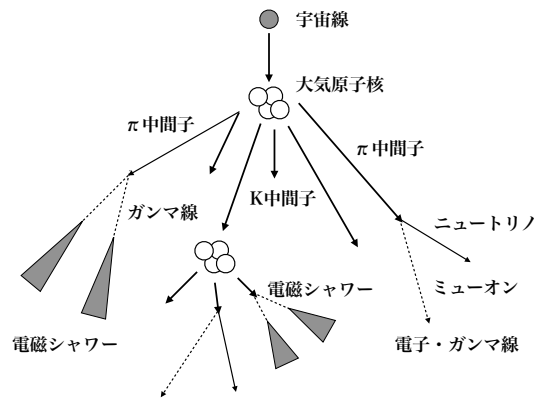


図6 大気シャワーの概略図

#### A.1.2 太陽ニュートリノ

太陽ニュートリノとは、太陽の核融合反応で生じる電子ニュートリノのことである。4つの水素原子核（陽子  $p$ ）が融合して1つのヘリウム4原子核  $\text{He}$  が生成される。このとき、核融合エネルギーが放出されると同時に、陽電子と電子ニュートリノが生成する：

$$4p \rightarrow \text{He} + 2e^+ + 2\nu_e. \tag{A.2}$$

#### A.1.3 原子炉ニュートリノ

原子炉ニュートリノとは、原子炉内で原子核が  $\beta$  崩壊 (5.36) を繰り返すことで生じる反電子ニュートリノのことである。原子炉ニュートリノは典型的には太陽ニュートリノや大気ニュートリノよりエネルギーが低

く、主として次の逆崩壊反応により検出される:

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n. \quad (\text{A.3})$$

#### A.1.4 加速器ニュートリノ

加速器によって生成されるニュートリノは、次項で述べるニュートリノ振動を正確に測定するのに有用である。大気ニュートリノや太陽ニュートリノは自然に生成されたニュートリノであるため、生成時の情報が不明瞭である。そのため、生成時のフレーバーから地上で観測したフレーバーへの振動を精密に決定することができない。この問題を解消するため人工的に作り出すのが加速器ニュートリノである。人工的に生成したニュートリノであれば生成時の情報が明瞭であり、生成するニュートリノのエネルギーを操作することも可能である。このニュートリノの観測を行う実験としては T2K 実験 [50, 51] などが有名である。

## A.2 ニュートリノの質量について

電子ニュートリノはトリウムの  $\beta$  崩壊 (A.4) による電子エネルギースペクトルの測定、ミューニュートリノは  $\pi$  中間子の崩壊 (A.5) 前後の運動量の測定、タウニュートリノは  $\tau$  粒子の崩壊 (A.6) 前後のエネルギーと不変質量の測定等によってそれぞれ探索される:

$${}^{234}\text{Th} \rightarrow {}^{234}\text{Pa} + e^- + \bar{\nu}_e, \quad (\text{A.4})$$

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu, \quad (\text{A.5})$$

$$\tau^- \rightarrow (\text{ニュートリノ以外の粒子}) + \nu_\tau. \quad (\text{A.6})$$

しかし、未だにニュートリノの質量の絶対値や大小関係は確定していない。ただし、太陽における物質との相互作用による  $\Delta m_{21}^2$  の観測により  $m_1 < m_2$  は明らかになっている。このとき、 $m_1 < m_2 \ll m_3$  を質量順階層、 $m_3 \ll m_1 < m_2$  を質量逆階層と呼ぶ (図 7 参照)。また、ニュートリノ振動は質量の二乗差に関係しているため、振動を観測・解析することで質量そのものを明らかにすることには向いていない。

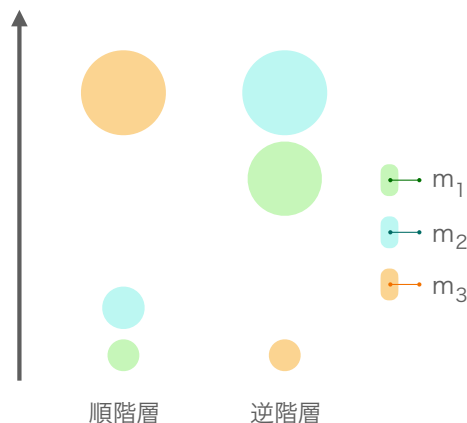


図 7 順階層 (左) と逆階層 (右) の模式図。

## A.3 スーパーカミオカンデ検出器

### A.3.1 検出器概要

スーパーカミオカンデ (SK) とは、円筒形のタンクに 50kton もの超純水を含んだ超大型チェレンコフ検出器である (図 8 参照)。ニュートリノの性質の解明や陽子崩壊の探索を目的に研究に用いられている。

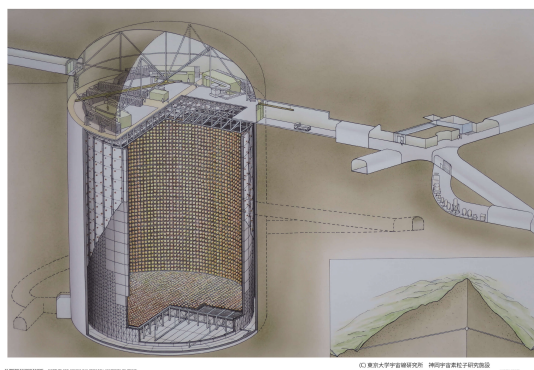


図 8 スーパーカミオカンデ検出器全体図

図はウェブサイト [52] から引用。

SK にニュートリノが入射すると、タンク内の水の電子や原子核と相互作用し、荷電粒子が発生する。このとき、十分なエネルギーを持つ荷電粒子が水中を移動するとチェレンコフ光と呼ばれる光が生じる。この光をタンク内の壁面に設置された大型の光電子増倍管 (photomultiplier tube, PMT) で捉えることでニュートリノの観測を行っている。

また、検出器の改良やメンテナンスも年々行われており、SK 実験が始まった 1996 年からの測定期間を SK-I と呼ぶ。表 5 に、期間ごとの SK の主な性能をまとめたものを示す。

表 5 スーパーカミオカンデの期間ごとの主な性能

呼称	期間	衝撃波防止ケース	内水槽の PMT	外水槽の PMT
SK-I	1996-2001	無	11146 本	1885 本
SK-II	2002-2005	無	5182 本	1885 本
SK-III	2006-2008	有	11129 本	1885 本
SK-IV	2008-2018	有	11129 本	1885 本
SK-V	2019-	有	11129 本	1885 本

SK のタンクは内水槽と外水槽の 2 つで構成されている (図 9 参照)。内水槽は直径 33.8m、高さ 36.2m の円筒形であり、32kton の水を含む。壁面には、直径 20 インチの PMT が内向きに設置されている。外水槽は天井部・底部 2.6m、側面 2.75m の厚さで内水槽を覆っており、壁面には直径 8 インチの PMT が外向きに設置されている。

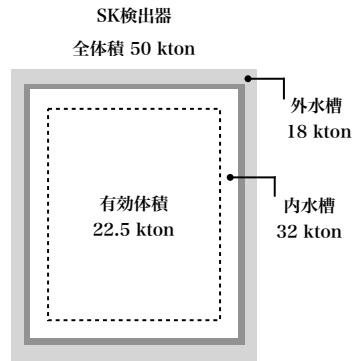


図9 内水槽・外水槽

また、内水槽の PMT は 70cm 間隔で設置されており、壁面の約 40% をカバーしている。PMT 以外の壁面は内水槽での光の反射や、外水槽への光の侵入を防ぐため黒いシートで覆われている。これに対し、外水槽は集光効率を高めるため PMT 以外の壁面は白い反射シートで覆われている。外水槽は約 2m の厚さの水の壁により周囲からのノイズを減衰させる役割も持つ (図 10、11 参照)。

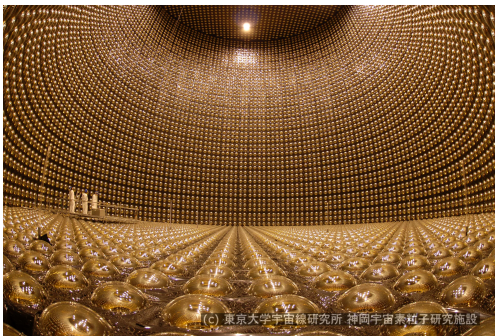


図10 内水槽の様子

天井部・底部・側面すべてに内向きに PMT が設置されている

図はウェブサイト [52] から引用

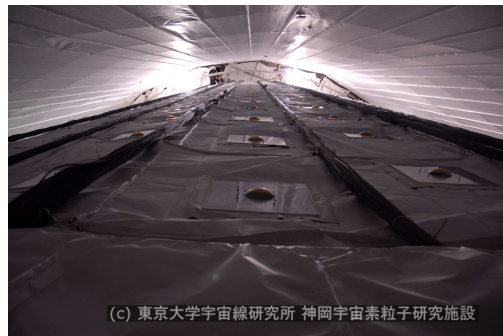


図11 外水槽の底部から見上げた様子

内水槽側の壁に PMT が設置されており周囲は白い反射シートで覆われている

図はウェブサイト [52] から引用

この PMT の配置により、宇宙線ミュオンがタンク内に入射したか、発生した荷電粒子がタンクから突き抜けていないかなどを判別することができる。例えば、ニュートリノが入射し内水槽で反応が起こった場合、生成された荷電粒子が内水槽の中で運動エネルギーを失うとチェレンコフ光は内水槽のみで発生し、外水槽では観測されない。一方で、宇宙線ミュオンが入射した場合は、外水槽でも反応する。ゆえに外水槽での反応を見ることで宇宙線ミュオンとニュートリノとを識別することができる (図 12 参照)。

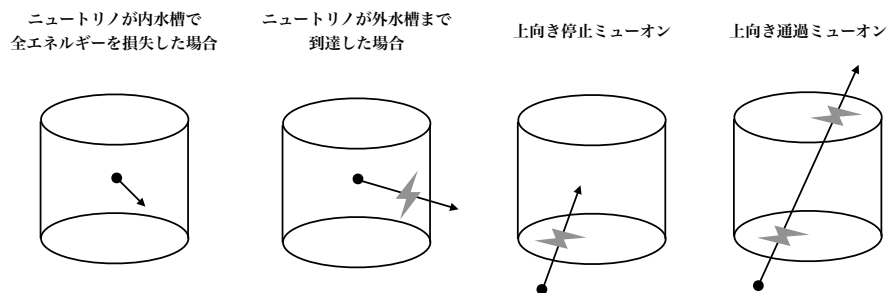


図 12 観測されるニュートリノやミュオンの分類

## A.4 チェレンコフ光の検出

この節では、チェレンコフ光の検出について説明する。

### A.4.1 チェレンコフ光とは

チェレンコフ光とは、荷電粒子が物質中を通過するとき、その速さが物質中での光の速よりも速い速度で通過することで生じる光のことである。この現象は 1934 年に P. A. Cherenkov によって発見され、チェレンコフ放射と呼ばれる。真空中の光速は  $c = 2.99792458 \times 10^8$  m/s であり、屈折率  $n$  の物質中の光速は  $c' = c/n$  となる。高エネルギーの粒子はこの速度を越えることができ、このとき粒子の通過に伴って誘電体が偏極し、それが元に戻る際の双極子放射によって光が放出される。この光は荷電粒子の軌跡に沿って円錐状に広がっていく (図 13 参照)。

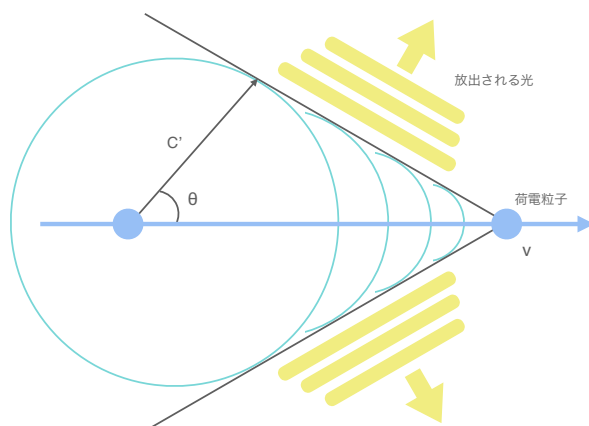


図 13 チェレンコフ光の概略図

荷電粒子と円錐のなす角  $\theta$  はチェレンコフ角と呼ばれ、荷電粒子の速度  $v$ 、物質の屈折率  $n$ 、 $\beta = v/c$  を用いて、

$$\cos \theta = \frac{1}{n\beta}, \quad (\text{A.7})$$

と表される。チェレンコフ角  $\theta$  は、荷電粒子の速度  $v$  に依存し、 $v$  が大きいほど  $\theta$  も大きくなる。また、純水の屈折率は約 1.34 であるため、水中を光速に近い速さで通過する粒子は約  $42^\circ$  方向にチェレンコフ光を放射する。

チェレンコフ光の発生条件は

$$v > \frac{c}{n}, \quad (\text{A.8})$$

であり、この条件を満たす最低のエネルギーを臨界エネルギー  $E$  と呼び、次のように表される:

$$E = \frac{nmc^2}{\sqrt{n^2 - 1}}. \quad (\text{A.9})$$

このとき、荷電粒子の質量を  $m$  とした。具体的には、純水に対して、電子とミュオンとの臨界エネルギーは

$$E(\text{電子}) = 0.77 \text{ MeV}, \quad E(\text{ミュオン}) = 0.16 \text{ GeV}. \quad (\text{A.10})$$

荷電粒子が飛行距離  $dx$  あたりに放出する光子数  $N$  のうち、波長が  $\lambda$  から  $\lambda + \Delta\lambda$  の範囲に入っているものの個数は次のように求められる:

$$\frac{d^2 N}{dx d\lambda} = \frac{2\pi\alpha Z^2}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{n^2\beta^2}\right) = \frac{2\pi\alpha Z^2}{\lambda} \sin^2 \theta, \quad (\text{A.11})$$

ここで、微細構造定数を  $\alpha$ 、粒子の電荷量を  $Z$  とした。

#### A.4.2 20 インチ光電子増倍管

SK では、内水槽の壁面に設置された PMT を用いてチェレンコフ光を検出する。この PMT は光電面の直径が 20 インチ (50cm) もある大型の増倍管であり、浜松ホトニクスと共同で開発された。その特性を表 6 に示す。

表 6 20 インチ PMT の特性

光電面の直径	20 インチ
光電面の素材	バイアルカリ (Sb-K-Cs)
収集効率	70%
電子効率	22% (390 nm)
ダイノード	11 段ベネチアンブラインド型
増幅率	$10^7$
暗電流	200 nA
ダークレート	3 kHz
電子走行時間	100 nsec
走行時間幅	2.2 nsec ( $1\sigma$ )
重量	13 kg
耐圧性	6 kg/cm <sup>2</sup>

### A.4.3 チェレンコフ光の検出方法

SK に入射し超純水中で反応が起こり発生したチェレンコフ光は、内水槽に内向きに設置された PMT によって観測される (図 14 参照)。チェレンコフ光は円錐状に広がるため、光はリングを描く。このチェレンコフリングについて詳しく測定することで、荷電粒子の進行方向やエネルギー、反応が起こった地点や時間などを知ることができる。

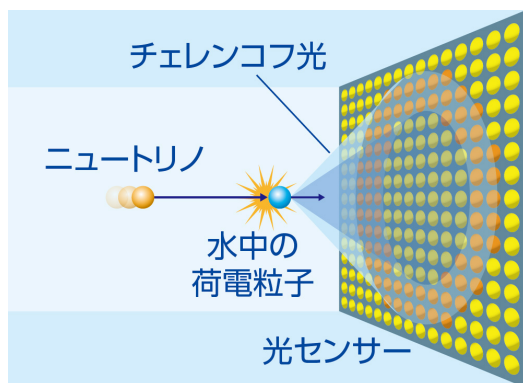


図 14 チェレンコフ光の検出模式図  
図はウェブサイト [52] から引用

このとき、電子や陽電子はガンマ線を発生させるため、そのガンマ線がコンプトン散乱などを起こし、チェレンコフリングが不明瞭になる。一方で、ミューオンや荷電パイオンは明瞭なチェレンコフリングを描く。

## 付録 B 具体的な表現での EPR 実験の計算

5.2 節で与えられる EPR 実験の議論について、具体的に基底を決めて計算した。

### B.1 具体的な表現での量子もつれの計算

スピン 1/2 の表現として、具体的にパウリ行列

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

を用いる。これにより、スピン  $z$  成分の規格化された固有状態は

$$|\uparrow_z\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |\downarrow_z\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

スピン  $x$  成分の規格化された固有状態は

$$|\uparrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad |\downarrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

となる。このとき、式 (5.60) の  $|\psi\rangle$  は



$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_A \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_B + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_A \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_B \right). \quad (\text{B.4})$$

と書ける。また、式 (5.61) の前段階の、 $A$  の  $|\downarrow_{Z_A}\rangle$  への射影演算子は

$$\begin{aligned} \hat{P}_{\downarrow_{Z_A}} &= (|\downarrow_Z\rangle_{AA} \langle\downarrow_Z|) \otimes \hat{1}_B \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_A \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}_A \otimes \hat{1}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_A \otimes \hat{1}_B. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

これを、 $|\psi\rangle$  に掛けて

$$\begin{aligned} \hat{P}_{\downarrow_{Z_A}} |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_A \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_B + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_A \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_B \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_A \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_B + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_A \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_B \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_A \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_B \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\downarrow_Z\rangle_A \otimes |\uparrow_Z\rangle_B). \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

ゆえに、 $A$  が  $\downarrow_{Z_A}$  を得たときには、 $B$  は  $\uparrow_{Z_B}$  を得る。すなわち式 (5.61) が確認できた。

## B.2 射影の誤植の確認

式 (5.62) の前段階の、 $A$  の  $|\downarrow_{X_A}\rangle$  への射影演算子は

$$\begin{aligned} \hat{P}_{\downarrow_{X_A}} &= (|\downarrow_X\rangle_{AA} \langle\downarrow_X|) \otimes \hat{1}_B \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}_A \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}_A \otimes \hat{1}_B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_A \otimes \hat{1}_B. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

これを、 $|\psi\rangle$  に掛けて

$$\begin{aligned} \hat{P}_{\downarrow_{X_A}} |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_A \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_B + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_A \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_B \right\} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}_A \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_B + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}_A \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_B \right\} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}_A \otimes \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_B - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_B \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}_A \otimes \left( -\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}_B \right) \right\} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} (|\downarrow_X\rangle_A \otimes |\downarrow_X\rangle_B), \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

である。つまり、式 (5.62) が得られた。やはり  $A$  が  $\downarrow_{X_A}$  を得る場合は、 $B$  は  $\uparrow_{X_B}$  ではなく、 $\downarrow_{X_B}$  を得る。

## B.3 $B$ が得る測定結果の確率

$A$  の測定に対応するエルミート演算子  $\hat{M}_A$  とその固有状態  $|\lambda_I\rangle_A$  ( $I = 1, 2$ ) が

$$\hat{M}_A |\lambda_I\rangle_A = \lambda_I |\lambda_I\rangle_A \quad (\text{B.9})$$

のように定義されているとする。具体的に  $\hat{M}_A = \sigma_3$ 、 $\lambda_1 = 1$ 、 $\lambda_2 = -1$  の場合を考えると上の例と同じになる:  $|\lambda_1\rangle_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_A$ 、 $|\lambda_2\rangle_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_A$ 。

状態 (B.4) のもとで、 $B$  が  $\uparrow_Z$  を得る確率は、 $A$  についての部分トレースを取って

$$P(\uparrow_{Z_B}) = \sum_I ({}_A\langle\lambda_I| \otimes \langle\uparrow_{Z_B}|) (|\psi\rangle\langle\psi|) (|\lambda_I\rangle_A \otimes |\uparrow_{Z_B}\rangle), \quad (\text{B.10})$$

である。ここで、状態 (B.4) から、 $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$  は

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= |\psi\rangle\langle\psi| \\ &= \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_A [1 \ 0]_A \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_A [0 \ 1]_B + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_A [0 \ 1]_A \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_A [1 \ 0]_B \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_A \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_B + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_A \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_B \right), \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

と書き表せる。

このとき、( $A$  について部分トレースを取った) 密度行列  $\hat{\rho}_B$  は

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_B &:= \text{Tr}_A [\hat{\rho}] \\ &= \sum_I {}_A\langle\lambda_I| \psi\rangle\langle\psi| \lambda_I\rangle_A \\ &= [1 \ 0]_A \left\{ \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_A \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_B + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_A \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_B \right) \right\} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_A \\ &\quad + [0 \ 1]_A \left\{ \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_A \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_B + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_A \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_B \right) \right\} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_A \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_B + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_B \right\} \\ &= \frac{1}{2} \hat{1}_B, \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

となる。つまり、 $B$  が  $\uparrow_Z$  を得る確率 (B.10) は

$$\begin{aligned} P(\uparrow_{Z_B}) &= \langle\uparrow_{Z_B}| \hat{\rho}_B |\uparrow_{Z_B}\rangle \\ &= [1 \ 0]_B \left( \frac{1}{2} \hat{1}_B \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_B \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

のように書き表せる。また、 $B$  が  $\downarrow_Z$  を得る確率も同様に

$$\begin{aligned} P(\downarrow_{Z_B}) &= \langle\downarrow_{Z_B}| \hat{\rho}_B |\downarrow_{Z_B}\rangle \\ &= [0 \ 1]_B \left( \frac{1}{2} \hat{1}_B \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_B \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

となる。 $\hat{\rho}_B$  を用いることで、 $B$  が自身の量子ビットだけを測定したとき、 $1/2$  の確率で上向きスピンを得ることが確認できた。

## 参考文献

- [1] K. Kiers, S. Nussinov and N. Weiss, *Coherence effects in neutrino oscillations*, *Phys. Rev. D* **53** (1996) 537 [[hep-ph/9506271](#)].
- [2] Y.-L. Chan, M. C. Chu, K. M. Tsui, C. F. Wong and J. Xu, *Wave-packet treatment of reactor neutrino oscillation experiments and its implications on determining the neutrino mass hierarchy*, *Eur. Phys. J. C* **76** (2016) 310 [[1507.06421](#)].
- [3] T. Cheng, M. Lindner and W. Rodejohann, *Microscopic and macroscopic effects in the decoherence of neutrino oscillations*, *JHEP* **08** (2022) 111 [[2204.10696](#)].
- [4] E. Akhmedov and A. Y. Smirnov, *Damping of neutrino oscillations, decoherence and the lengths of neutrino wave packets*, *JHEP* **11** (2022) 082 [[2208.03736](#)].
- [5] B. J. P. Jones, *Comment on “Damping of neutrino oscillations, decoherence and the lengths of neutrino wave packets”*, [2209.00561](#).
- [6] E. Akhmedov and A. Y. Smirnov, *Reply to “Comment on “Damping of neutrino oscillations, decoherence and the lengths of neutrino wave packets””*, [2210.01547](#).
- [7] A. Y. Smirnov, *Neutrino oscillations unlocked*, 12, 2022, [2212.10242](#).
- [8] C. Y. Cardall, *Coherence of neutrino flavor mixing in quantum field theory*, *Phys. Rev. D* **61** (2000) 073006 [[hep-ph/9909332](#)].
- [9] E. K. Akhmedov and J. Kopp, *Neutrino Oscillations: Quantum Mechanics vs. Quantum Field Theory*, *JHEP* **04** (2010) 008 [[1001.4815](#)].
- [10] J. Wu, J. A. Hutasoit, D. Boyanovsky and R. Holman, *Neutrino Oscillations, Entanglement and Coherence: A Quantum Field theory Study in Real Time*, *Int. J. Mod. Phys. A* **26** (2011) 5261 [[1002.2649](#)].
- [11] E. K. Akhmedov and A. Y. Smirnov, *Neutrino oscillations: Entanglement, energy-momentum conservation and QFT*, *Found. Phys.* **41** (2011) 1279 [[1008.2077](#)].
- [12] E. Akhmedov, D. Hernandez and A. Smirnov, *Neutrino production coherence and oscillation experiments*, *JHEP* **04** (2012) 052 [[1201.4128](#)].
- [13] DAYA BAY collaboration, F. P. An et al., *Study of the wave packet treatment of neutrino oscillation at Daya Bay*, *Eur. Phys. J. C* **77** (2017) 606 [[1608.01661](#)].
- [14] M. Blasone, S. De Siena and C. Matrella, *Wave packet approach to quantum correlations in neutrino oscillations*, *Eur. Phys. J. C* **81** (2021) 660 [[2104.03166](#)].
- [15] E. K. Akhmedov and A. Y. Smirnov, *Paradoxes of neutrino oscillations*, *Phys. Atom. Nucl.* **72** (2009) 1363 [[0905.1903](#)].
- [16] H. Bethe and R. Peierls, *The ‘neutrino’*, *Nature* **133** (1934) 532.
- [17] G. Danby, J. M. Gaillard, K. A. Goulianos, L. M. Lederman, N. B. Mistry, M. Schwartz et al., *Observation of High-Energy Neutrino Reactions and the Existence of Two Kinds of Neutrinos*, *Phys. Rev. Lett.* **9** (1962) 36.
- [18] DONUT collaboration, K. Kodama et al., *Observation of tau neutrino interactions*, *Phys. Lett. B* **504** (2001) 218 [[hep-ex/0012035](#)].

- [19] S. Weinberg, *Baryon and Lepton Nonconserving Processes*, *Phys. Rev. Lett.* **43** (1979) 1566.
- [20] S. Weinberg, *The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations*. Cambridge University Press, 6, 2005, 10.1017/CBO9781139644167.
- [21] B. Pontecorvo, *Inverse beta processes and nonconservation of lepton charge*, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **34** (1957) 247.
- [22] Y. Katayama, K. Matumoto, S. Tanaka and E. Yamada, *Possible unified models of elementary particles with two neutrinos*, *Prog. Theor. Phys.* **28** (1962) 675.
- [23] Z. Maki, M. Nakagawa and S. Sakata, *Remarks on the unified model of elementary particles*, *Prog. Theor. Phys.* **28** (1962) 870.
- [24] PARTICLE DATA GROUP collaboration, R. L. Workman et al., *Review of Particle Physics*, *PTEP* **2022** (2022) 083C01.
- [25] M. C. Gonzalez-Garcia, M. Maltoni and T. Schwetz, *NuFIT: Three-Flavour Global Analyses of Neutrino Oscillation Experiments*, *Universe* **7** (2021) 459 [2111.03086].
- [26] SUPER-KAMIOKANDE collaboration, Y. Fukuda et al., *Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos*, *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 1562 [hep-ex/9807003].
- [27] H. J. Lipkin, *Theories of nonexperiments in coherent decays of neutral mesons*, *Phys. Lett. B* **348** (1995) 604 [hep-ph/9501269].
- [28] Y. Grossman and H. J. Lipkin, *Flavor oscillations from a spatially localized source: A Simple general treatment*, *Phys. Rev. D* **55** (1997) 2760 [hep-ph/9607201].
- [29] L. Stodolsky, *The Unnecessary wave packet*, *Phys. Rev. D* **58** (1998) 036006 [hep-ph/9802387].
- [30] H. J. Lipkin, *Neutrino oscillations as two-slit experiments in momentum space*, *Phys. Lett. B* **477** (2000) 195.
- [31] S. Eliezer and A. R. Swift, *Experimental Consequences of electron Neutrino-Muon-neutrino Mixing in Neutrino Beams*, *Nucl. Phys. B* **105** (1976) 45.
- [32] H. Fritzsch and P. Minkowski, *Vector-Like Weak Currents, Massive Neutrinos, and Neutrino Beam Oscillations*, *Phys. Lett. B* **62** (1976) 72.
- [33] S. M. Bilenky and B. Pontecorvo, *Again on Neutrino Oscillations*, *Lett. Nuovo Cim.* **17** (1976) 569.
- [34] S. M. Bilenky and B. Pontecorvo, *Lepton Mixing and Neutrino Oscillations*, *Phys. Rept.* **41** (1978) 225.
- [35] GALLEX collaboration, W. Hampel et al., *Final results of the Cr-51 neutrino source experiments in GALLEX*, *Phys. Lett. B* **420** (1998) 114.
- [36] F. Kaether, W. Hampel, G. Heusser, J. Kiko and T. Kirsten, *Reanalysis of the GALLEX solar neutrino flux and source experiments*, *Phys. Lett. B* **685** (2010) 47 [1001.2731].
- [37] SAGE collaboration, J. N. Abdurashitov et al., *Measurement of the response of the Russian-American gallium experiment to neutrinos from a Cr-51 source*, *Phys. Rev. C* **59** (1999) 2246 [hep-ph/9803418].
- [38] J. N. Abdurashitov et al., *Measurement of the response of a Ga solar neutrino experiment to neutrinos from an Ar-37 source*, *Phys. Rev. C* **73** (2006) 045805 [nucl-ex/0512041].
- [39] V. V. Barinov et al., *Results from the Baksan Experiment on Sterile Transitions (BEST)*, *Phys. Rev. Lett.* **128** (2022) 232501 [2109.11482].

- [40] V. Barinov and D. Gorbunov, *BEST impact on sterile neutrino hypothesis*, *Phys. Rev. D* **105** (2022) L051703 [2109.14654].
- [41] V. V. Barinov et al., *Search for electron-neutrino transitions to sterile states in the BEST experiment*, *Phys. Rev. C* **105** (2022) 065502 [2201.07364].
- [42] C. Giunti, *Neutrino wave packets in quantum field theory*, *JHEP* **11** (2002) 017 [hep-ph/0205014].
- [43] R. W. Parsons, V. I. Metchnik and R. J. Dyne, *The collision broadening of spectral lines*, *Aust. J. Phys.* **21** (1968) 13.
- [44] J. Trampenau, W. Petry and C. Herzig, *Temperature dependence of the lattice dynamics of chromium*, *Phys. Rev. B* **47** (1993) 3132.
- [45] C. A. Argüelles, T. Bertólez-Martínez and J. Salvado, *Impact of Wave Packet Separation in Low-Energy Sterile Neutrino Searches*, 2201.05108.
- [46] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, *Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete?*, *Phys. Rev.* **47** (1935) 777.
- [47] K.-y. Oda and J. Wada, *A complete set of Lorentz-invariant wave packets and modified uncertainty relation*, *Eur. Phys. J. C* **81** (2021) 751 [2104.01798].
- [48] K. Ishikawa and K.-y. Oda, *Particle decay in Gaussian wave-packet formalism revisited*, *PTEP* **2018** (2018) 123B01 [1809.04285].
- [49] H. Mitani and K.-y. Oda, *Decoherence in Neutrino Oscillation between 3D Gaussian Wave Packets*, 2307.12230.
- [50] T2K collaboration, K. Abe et al., *Indication of Electron Neutrino Appearance from an Accelerator-produced Off-axis Muon Neutrino Beam*, *Phys. Rev. Lett.* **107** (2011) 041801 [1106.2822].
- [51] T2K collaboration, K. Abe et al., *Improved constraints on neutrino mixing from the T2K experiment with  $3.13 \times 10^{21}$  protons on target*, *Phys. Rev. D* **103** (2021) 112008 [2101.03779].
- [52] SUPER-KAMIOKANDE collaboration,  
<https://www-sk.icrr.u-tokyo.ac.jp/sk/experience/gallery/>, 写真提供 東京大学宇宙線研究所 神岡宇宙素粒子研究施設 .