

修士論文

2023 年度

Jackiw-Teitelboim 重力とランダム行列

宮内 祐

(学籍番号：82213212)

指導教員 准教授 檜垣 徹太郎

2024 年 3 月

慶應義塾大学大学院理工学研究科
基礎理工学専攻

論文要旨

本修士論文では、Saad-Shenker-Stanford (SSS) 対応と呼ばれる、Jackiw-Teitelboim (JT) 重力とランダム行列の対応を解説する。JT 重力は重力と結合したスカラーを持つ2次元重力理論の1つである。このスカラーは dilaton と呼ばれる。この模型に負の宇宙項があれば、dilaton と重力の結合によって作用の bulk 項は曲率を負の定数に固定する拘束条件を与える。したがって bulk の幾何は双曲幾何となり、Mirzkhani 漸化式のような双曲幾何の研究結果を用いて計量の汎関数積分を実行できる。さらに、作用の境界項は Schwarzian 作用と呼ばれるものになる。これは1次元系であって、Duistermaat-Heckmann 公式によってその分配関数が厳密に計算できる理論である。したがって JT 重力の分配関数が厳密に計算できる。一方、ランダム行列とは確率変数を行列とする確率理論である。この理論において、確率分布を適切に選びその台と行列のサイズを無限大に取れば、分配和と呼ばれる量の n 点相関関数と JT 重力の分配関数が一致する。この等価関係を SSS 対応と呼ぶ。その導出の重要点は、JT 重力の分配関数が従う漸化式と n 点相関関数が従う Eynard 漸化式と呼ばれる漸化式が一致することにある。本修士論文では、JT 重力の分配関数の計算と、SSS 対応の導出を行う。

JT 重力の分配関数の厳密な計算は、量子重力研究に応用することができる。例えば、4次元ブラックホールを JT 重力へ次元削減することでそのエントロピーを計算することができる。また、SSS 対応も量子重力研究に応用できると考えられる。SSS 対応はいくつかの拡張が知られている。例えば、BF ゲージ理論を加えた場合や dilaton のポテンシャルを JT 重力のものから変形させた場合において、ランダム行列との対応が知られている。したがって、将来的に、これらの関係をより深く広範囲において調べることで、ランダム行列の確率分布から量子重力の性質を調べることができるようになると期待される。

Thesis Abstract

In this thesis, we review the duality between Jackiw-Teitelboim (JT) gravity and random matrices, called Saad-Shenker-Stanford (SSS) duality. JT gravity is one of the two-dimensional gravity models which has a scalar coupled to gravity. This scalar is called dilaton. If this model has a negative cosmological constant, bulk action gives a constraint that sets curvature to a negative constant because of coupling dilaton and gravity. Thus, bulk geometry is hyperbolic and we can compute the functional integration of metrics by using the known results of hyperbolic geometry such as Mirzkhani's recursion relation. Furthermore, the boundary action becomes Schwarzian action. This is a one-dimensional system and its partition function can be computed exactly by the Duistermaat-Heckman formula. Thus we can compute the partition function of JT gravity exactly. On the other hand, random matrices are a probability theory whose random variables are matrices. In this theory, n -points correlator of partition sum is equivalent to the partition function of JT gravity if the probability distribution is chosen properly and its support and the size of matrices are taken infinitely large. This equivalence is SSS duality. The key point of its derivation is correspondence between the recursion relation for the partition function of JT gravity and Eynard's recursion relation for n -points correlator of partition sum. We review the computation of the partition function of JT gravity and the derivation of SSS duality in this thesis.

The exact computation of the partition function of JT gravity gives us hints of quantum gravity. For example, four-dimensional black hole entropy can be computed via dimensional reduction to JT gravity. SSS duality will also give us hints of quantum gravity. SSS duality has some extensions. For example, there is also duality with random matrices when adding BF gauge theory or deformed dilaton potentials to JT gravity. Probability distributions corresponding to these situations are known. Study of these correspondences more deeply and extensively enables us to investigate the properties of quantum gravity from probability distributions of random matrices in the future.

目次

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | 導入 | 3 |
| 2 | Jackiw-Teitelboim 重力 | 5 |
| 2.1 | 古典解 | 6 |
| 2.1.1 | 計量の古典解 | 8 |
| 2.1.2 | Dilaton の古典解 | 15 |
| 2.2 | JT 重力の Schwarz 理論への書き換え | 17 |
| 2.2.1 | Disk 形の場合: $(g, n) = (0, 1)$ | 19 |
| 2.2.2 | Wormhole 形の場合: $(g, n) = (0, 2)$ | 22 |
| 2.2.3 | 一般の場合: $(g, n) \neq (0, 1), (0, 2)$ | 24 |
| 2.3 | Moduli 空間上の積分 | 27 |
| 2.3.1 | Wormhole 形の場合: $(g, n) = (0, 2)$ | 27 |
| 2.3.2 | 一般の場合: $(g, n) \neq (0, 1), (0, 2)$ | 29 |
| 2.4 | Schwarz 理論 | 37 |
| 2.4.1 | 古典解 | 37 |
| 2.4.2 | Symplectic 形式と測度 | 38 |
| 2.4.3 | 1 loop 計算 | 40 |
| 2.4.4 | Duistermaat-Heckman 公式と超対称局所化 | 45 |
| 2.5 | 総括 | 48 |
| 2.5.1 | Disk 形および wormhole 形, pants 形の場合: $(g, n) = (0, 1), (0, 2), (0, 3)$ | 49 |
| 2.5.2 | 一般の場合: $(g, n) \neq (0, 1), (0, 2), (0, 3)$ | 50 |
| 3 | ランダム行列 | 54 |
| 3.1 | Feynman 図 | 54 |
| 3.2 | 種数展開 | 59 |
| 3.2.1 | Disk 形の場合: $(g, n) = (0, 1)$ | 63 |
| 3.2.2 | Wormhole 形の場合: $(g, n) = (0, 2)$ | 66 |
| 3.2.3 | 一般の場合: $(g, n) \neq (0, 1), (0, 2)$ | 67 |
| 3.3 | Saad-Shenker-Stanford 対応 | 67 |
| 3.4 | Eynard 漸化式 | 71 |
| 4 | まとめと展望 | 75 |
| 4.1 | まとめ | 75 |
| 4.2 | 次元削減 | 77 |
| 4.3 | 非摂動効果 | 77 |
| 4.4 | JT 重力の拡張 | 77 |
| 4.5 | Witten-Kontsevich 重力 | 78 |
| 4.6 | Ensemble 平均と holography, 沼地予想 | 79 |

| | | |
|----------|--|------------|
| A | 計算の詳細 | 82 |
| A.1 | 共形ゲージ | 82 |
| A.2 | 状態密度関数 (2.238) の導出 | 83 |
| A.3 | Weil-Petersson 体積に関する諸公式 | 84 |
| A.3.1 | Weil-Petersson 体積の多項式表示 (2.276) の証明 | 84 |
| A.3.2 | $\hat{V}_{1,1}$ (2.184) の計算 | 89 |
| A.3.3 | Weil-Petersson 体積の具体的な計算 | 90 |
| A.3.4 | Laplace 変換された Mirzakhani 漸化式 (2.295) の導出 | 94 |
| A.3.5 | Laplace 変換された Mirzakhani 漸化式を用いた具体的な計算 | 102 |
| A.4 | 式 (2.294) の導出 | 104 |
| A.5 | 行列微分の公式集 | 105 |
| A.6 | Van der Monde 行列式 | 106 |
| A.7 | Hilbert の公式 (3.75) の証明 | 108 |
| A.8 | Resolvent(3.77) の計算 | 109 |
| A.9 | Resolvent(3.91) の導出 | 111 |
| A.10 | 分配和 (3.98) の導出 | 112 |
| B | BF formulation | 114 |
| B.1 | Riemann 幾何の復習 | 114 |
| B.2 | JT 重力の 1 階形式 | 116 |
| B.2.1 | Bulk 作用 | 117 |
| B.2.2 | 境界の作用 | 118 |
| B.2.3 | ゲージ変換 | 120 |
| B.3 | Symplectic 形式 | 122 |
| B.3.1 | Weil-Petersson symplectic 形式 | 122 |
| B.3.2 | Kirillov-Kostant-Souriau symplectic 形式 | 122 |
| C | Witten-Kontsevich 重力 | 125 |
| C.1 | 交叉理論 | 125 |
| C.2 | WK 重力の特殊例としての JT 重力 | 127 |

1 導入

素粒子論研究の最大目標は万物を記述する理論の構築である。今世紀初頭までの研究によって、古典的な重力現象は一般相対論が、重力を含まない量子現象は標準模型が、観測および実験結果を最もよく再現する理論であることがわかった。したがって、これらを統一し重力現象と量子現象を同時に記述する量子重力理論を構築することが素粒子論研究の今後の目標である。現在、量子重力を含む万物の理論の最有力候補は超弦理論である。これは、高次元の時空の中を運動する弦や膜を記述する理論である。この理論の要点は次の2つである。1つ目は点粒子を考えるかわりに、弦や膜のように広がったもの考える点である。これにより、量子重力の計算に現れる無限大の発散を回避することができる。2つ目は我々が認識している通常の時空間1次元空間3次元に加えて、空間方向に余分な次元(余剰次元)があると考える点である。この余剰次元の自由度と弦の自由度から電磁場などのさまざまな場が現れ、標準模型のような豊かな構造を再現できると予想されている。しかし、超弦理論は摂動論しか得られておらず、完全な定式化(非摂動論的定義)には至っていない。そのため、量子重力がどのような性質を持つか不明である。また、超弦理論の真空がどのようなものか不明なので、諸物理量に対する予言能力もない。特に、超弦理論から万人の満足する標準模型を完全に再現することには成功していない。

そこで、本修士論文では2次元重力に注目する。その理由は以下の2つである。1つ目は、2次元では量子重力の計算に現れる無限大の発散を回避することができることが知られているからである。一般に $1+d$ 次元時空では重力の結合定数である G_N の質量次元が $-d+1$ となる。したがって、 $d > 1$ では質量次元が負になってしまうのだが、 $1+1$ 次元では質量次元が0となる。これにより、2次元では重力の繰り込みが可能となることが知られている。2つ目は、次元が低いことにより種々の計算が具体的に実行可能になるからである。こちらの点が本稿の議論で重要な役割を果たす。例えば、2次元に特有の性質には以下のようなものが知られている。1. スカラー曲率 R およびRicciテンソル $R_{\mu\nu}$ の間に以下の恒等式 $Rg_{\mu\nu}/2 = R_{\mu\nu}$ が成り立つ。ここで $g_{\mu\nu}$ は時空の計量である。したがって、真空中のEinstein方程式が自明に満たされる。2. Einstein-Hilbert作用 I_{EH} が位相不変量になる。したがって、計量に関する汎関数積分は位相の足しあげになる：

$$\int \mathcal{D}g e^{-I_0} = \sum_{\chi} e^{-S_0 \chi}. \quad (1.1)$$

ここで S_0 は定数、 χ はEinstein-Hilbert作用 I_0 から決まるEuler標数と呼ばれる位相不変量で、離散的な値を取る。これらの性質により、物質場もゲージ場もない2次元重力は力学的自由度のない理論になる。そこで本修士論文では2次元重力に重力に結合するスカラー場 Φ を加えた理論を考える。このスカラー場 Φ をdilatonsと呼ぶ。2次元に限らず、dilatonsを含む重力を一般にdilatons重力と呼ぶ。本修士論文では、2次元dilatons重力の中でもJackiw-Teitelboim重力[1,2]またはAlmheiri-Polchinski模型[3]とも呼ばれる理論に注目する。本修士論文では両者を略してJT重力と呼ぶ。Dilaton Φ を加えたことで、この理論は力学的自由度を持ち、非自明な物理が現れる。さらに、Euclid時空であって負の宇宙項がある場合ではdilatons Φ の存在によって、bulkの計量は双曲計量と呼ばれる、幾何学

の分野ではよく知られているものに限りに見ていくことができる。したがって、計量すなわち重力の力学的自由度は境界にのみ現れ、bulk 部分に関しては位相の足しあげになる。さらに、境界上には Schwarz 理論が現れる [4] が、これは 1 次元上の分配関数が厳密に計算できる理論であることが知られている [5]。これにより、Euclid 化された JT 重力は分配関数を厳密に計算することができる [6]。すなわち、量子重力であるのにも関わらず種々の物理量を厳密に計算ができるので、その結果を高次元の物理に応用できることが期待されている。また、JT 重力は AdS/CFT 対応の文脈で注目を集めている。AdS/CFT 対応とは、「宇宙項が負であるような空間の重力理論とその時空の境界上の共形場理論が対応している」という主張である。上述の負の宇宙項を持つ JT 重力は Sachdev-Ye-Kitaev (SYK) 模型 [7-10] と呼ばれる理論と対応していることが知られている。すなわち、JT 重力は AdS/CFT 対応の具体例を与える。ここで SYK 模型とは、 N 個の Fermion を持つ 1 次元上の場の理論で、その相互作用の結合定数がランダムに与えられるような模型である。この模型は N を無限大に取り、低エネルギー極限を取ることで Schwarz 理論となることが知られている [10, 11] ため、JT 重力と対応していることがわかる。

本修士論文で JT 重力に注目する理由はこれだけではない。実は、JT 重力はランダム行列と呼ばれる理論の特殊な例と対応している [6]。これを Saad-Shenker-Stanford (SSS) 対応と呼ぶ。ここで、ランダム行列は行列を確率変数とするような確率理論である。この確率理論における分配和 (partition sum) と呼ばれる量の相関関数を具体的に計算すれば、JT 重力の分配関数を全ての種数に関して足しあげたものと一致するというのが SSS 対応の主張である。したがって、この SSS 対応を用いれば、量子重力の計算をランダム行列の計算に帰着させたり、JT 重力の非摂動的効果を調べられたりすることが期待される。

本修士論文の目的は、JT 重力の分配関数を厳密に計算し、JT 重力とランダム行列の対応である SSS 対応を導くことである。本修士論文の流れは以下の通り。2 節では JT 重力の分配関数を厳密に計算する。3 節ではランダム行列の分配和と呼ばれる量の相関関数が JT 重力の分配関数と一致することを導く。4 節では前節までに得られた JT 重力の分配関数とランダム行列の対応についての考察として、これまで知られている応用研究を簡単に紹介し、将来的な展望を述べる。付録 A 節では、本論で省略した計算過程を記した。付録 B, C 節では、2 次元 BF ゲージ理論および Witten-Kontsevich 重力について詳しく解説した。これらの理論は JT 重力と深い関わりがあるため本論中でも簡単な解説を行ったが、付録ではより詳しい導入と計算過程等を付け加えた。

2 Jackiw-Teitelboim 重力

本節では Jackiw-Teitelboim (JT) 重力の分配関数を計算し、状態密度関数および分配関数を漸次計算する方法を導出する。JT 重力とは、重力と結合するスカラー Φ を持つ 2 次元重力で、Jackiw と Teitelboim らによって研究が始まった [1, 2]。このスカラー Φ を dilaton と呼ぶ。負の宇宙項を持つ JT 重力の Euclid 化作用は以下のように与えられる：

$$I_{\text{JT}} = -\frac{S_0}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^2x \sqrt{\det g} R + \int_{\partial\Sigma} dx \sqrt{\det h} K \right] - \left[\frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^2x \sqrt{\det g} \Phi (R + 2) + \int_{\partial\Sigma} dx \sqrt{\det h} \Phi (K - 1) \right]. \quad (2.1)$$

ここで、 (Σ, g) は Σ を背景の多様体とし g を計量とする Euclid 化時空すなわち局所平坦な Riemann 多様体、 R は Σ のスカラー曲率、 K は Σ の境界 $\partial\Sigma$ の外部曲率¹、 h は $\partial\Sigma$ 上の計量である。また、宇宙項を -1 に取り²、定数 $1/(8\pi G_N)$ は $S_0/(2\pi)$ および Φ に含めた。以下、 d^2x, dx 等は省略する。作用の各項の意味を説明しておこう。第 1 項 $\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \sqrt{\det g} R$ は宇宙項が 0 の Einstein 方程式を与える Einstein-Hilbert 作用である。第 2 項 $\int_{\partial\Sigma} \sqrt{\det h} K$ は時空が境界を持つ場合に Einstein 方程式を導く際の変分を well-defined にするための境界項で、Gibbons-Hawking-York 項と呼ばれる。2 次元の場合には、Gauss-Bonnet の定理によって第 1, 2 項は多様体 Σ の Euler 標数 $\chi(\Sigma)$ で書けることが知られている：

$$-\frac{S_0}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \sqrt{\det g} R + \int_{\partial\Sigma} \sqrt{\det h} K \right] = -S_0 \chi(\Sigma). \quad (2.2)$$

ここで、多様体 Σ の Euler 標数 $\chi(\Sigma)$ とは、 Σ の種数³ g および境界の連結部分の数 n を用いて、

$$\chi(\Sigma) = 2 - 2g - n \quad (2.3)$$

と書ける位相不変量⁴である。したがって第 1, 2 項は力学的な自由度を与えない。第 3, 4 項が dilaton Φ と重力の相互作用項である。Bulk 項は宇宙項 -1 の Einstein-Hilbert 作用に dilaton Φ を掛けた形をしている。そのため、dilaton Φ が Lagrange 未定乗数として振る舞い、計量は $R = -2$ に固定される。負の定曲率を持つ 2 次元 Riemann 多様体を双曲曲面と呼び、Mirzakhani や Kontsevich らによって研究が進んでいる [12–14]。そのため、高次元や一般の計量の場合では計算できない分配関数を厳密に与えることができる [6]。また、負の定曲率を持つ Lorentz 多様体は反 de-Sitter 空間 (AdS) と呼ばれ、4 次元球対称ブラックホールにおける事象の地平面付近の幾何として現れることが知られている⁵。そのため、JT 重力の計算結果を現実的な模型の計算に応用することができる。なお、境界項に

¹外部曲率 K は境界の単位法線ベクトル n を用いて $K := \nabla^{\mu} n_{\mu}$ と定義される。これは境界の曲率を表した量である。

²したがって、全ての物理量が無次元であることに注意されたい。

³直感的には穴の数である。以下混乱がない限り、計量と種数は同じ記号 g を用いる。

⁴多様体 Σ の連続変形で不変な量のことを指す。すなわち、多様体 Σ の大域的な形にのみ依存し、局所的な構造によらない量である。

⁵球対称な荷電ブラックホール (Reissner-Nordström ブラックホール) を考えよう。この場合の Lorentz 計量は以下で与えられる：

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2.4)$$

ここで M, Q はブラックホールの持つ質量および電荷で、簡単のために $G_N = 1$ としてある。この計量は $r = r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$ の horizon において発散する。Horizon のごく近く $r \rightarrow r_+$ (Near horizon limit) かつ、質量と電荷が釣り合う極限 $M \rightarrow Q$ (Near external limit) で、この計量は $AdS_2 \times S^2$ の計量として書ける：

$$ds^2 \sim - \left(\tilde{r}^2 - \frac{2\Delta M}{Q} \right) dt^2 + \frac{d\tilde{r}}{\tilde{r}^2 - \frac{2\Delta M}{Q}} + Q^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (\tilde{r} := Q - r, \Delta M := M - Q). \quad (2.5)$$

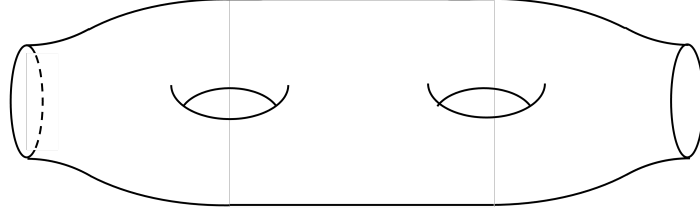


図 1: 穴の数 g が 2, 境界の数 n が 2 の例. Euler 標数は -4 .

おける $\int_{\partial\Sigma} \sqrt{\det h} dx \Phi$ は分配関数を計算する際に現れる発散に対する相殺項である. 本節では上記の作用に対して分配関数を計算し, 密度関数および分配関数の満たすべき漸化式である topological 漸化式を導出する.

2.1 節では, 議論の準備として JT 重力の古典解とその対称性を導出する. 2.2 節では, JT 重力が Schwarz 理論と呼ばれる 1 次元境界上の理論に書き換えられることを示す. 2.4 節では, Schwarz 理論の分配関数を計算する. 2.3 節では, 計量の汎関数積分の具体的な計算方法を解説する. 2.5 節では, Schwarz 理論の分配関数を用いて JT 重力の分配関数の最終的な計算結果を導く. また, その計算結果を用いて分配関数の満たすべき漸化式である topological 漸化式を導出する.

2.1 古典解

本節では議論の準備として JT 重力の古典解とその対称性を導出する. まずは JT 重力の作用

$$I_{\text{JT}} = -\frac{S_0}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \sqrt{\det g} R + \int_{\partial\Sigma} \sqrt{\det h} K \right] - \left[\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \sqrt{\det g} \Phi (R+2) + \int_{\partial\Sigma} \sqrt{\det h} \Phi K \right] \quad (2.6)$$

を変分して運動方程式を導こう. 本論文では境界上の計量 g および dilaton Φ を固定する Dirichlet 境界条件を課す:

$$\delta\Phi|_{\partial\Sigma} = 0, \quad \delta g|_{\partial\Sigma} = 0. \quad (2.7)$$

まず, dilaton Φ に関する変分が簡単に実行できて,

$$I_{\text{JT}}[g, \Phi + \delta\Phi] - I_{\text{JT}}[g, \Phi] = -\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \sqrt{\det g} \delta\Phi (R+2) \quad (2.8)$$

となる. したがって, 計量に関する運動方程式

$$R + 2 = 0 \quad (2.9)$$

を得る.

次に, 計量 g に関する変分を実行しよう. Einstein-Hilbert 項と Gibbons-Hawking-York 項の部分

$$I_0[g] := -\frac{S_0}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \sqrt{\det g} R + \int_{\partial\Sigma} \sqrt{\det h} K \right] \quad (2.10)$$

は位相不変量 Euler 標数 $\chi(\Sigma)$ を用いて $-S_0\chi(\Sigma)$ と書けることから, 運動方程式に寄与しない. 実際, Einstein-Hilbert 項と Gibbons-Hawking-York 項の変分より

$$I_0[g + \delta g] - I_0[g] = -\frac{S_0}{2\pi} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \sqrt{\det g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \quad (2.11)$$

となるが、2次元では恒等的に

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = 0 \quad (2.12)$$

となるので、結局 Einstein-Hilbert 項と Gibbons-Hawking-York 項の変分は 0 となる。なお、恒等式 (2.12) は次のようにして簡単に示せる。Riemann 曲率テンソル $R_{\rho\mu\sigma\nu}$ は任意の次元において $\rho\mu$ の添字の入れ替えについて反対称であり、 $\sigma\nu$ の添字の入れ替えについて反対称である。したがって、2次元の場合には独立な成分は 1 つである。これを \tilde{R} と書けば 2次元 Riemann 曲率テンソルは以下のように表される：

$$R_{\rho\mu\sigma\nu} = \tilde{R}\epsilon_{\sigma\nu}\epsilon_{\rho\mu}. \quad (2.13)$$

ここで $\epsilon_{\sigma\nu}$ は $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1, \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$ と定義される Levi-Civita 記号である。上式を用いて Ricc テンソルおよびスカラー曲率を求めると、

$$R_{\mu\nu} := g^{\rho\sigma}R_{\rho\mu\sigma\nu} = \tilde{R}g^{\rho\sigma}\epsilon_{\sigma\nu}\epsilon_{\rho\mu} = \begin{cases} \tilde{R}g^{22} & (\mu, \nu) = (1, 1) \\ -\tilde{R}g^{12} & (\mu, \nu) = (1, 2) \\ -\tilde{R}g^{21} & (\mu, \nu) = (2, 1) \\ \tilde{R}g^{11} & (\mu, \nu) = (2, 2) \end{cases}, \quad (2.14)$$

$$R := g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = \tilde{R}(g^{11}g^{22} + g^{22}g^{11} - 2g^{12}g^{21}) = 2\tilde{R}\det g \quad (2.15)$$

となる。以上の式から

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} = \frac{R}{2} \frac{1}{\det g} \begin{pmatrix} g^{22} & -g^{12} \\ -g^{21} & g^{11} \end{pmatrix} = \frac{R}{2} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

となるから、 $R_{\mu\nu} = Rg_{\mu\nu}/2$ である。したがって、恒等式 (2.12) が成り立つ。

次に、dilaton Φ と重力の相互作用項

$$I_{\text{int}}[g, \Phi] := - \left[\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \sqrt{\det g} \Phi (R + 2) + \int_{\partial\Sigma} \sqrt{\det h} \Phi K \right] \quad (2.17)$$

を変分する。計量に関する変分の公式⁶

$$\delta\sqrt{\det g} = \frac{1}{2}\sqrt{\det g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}, \quad (2.19)$$

$$\delta R = -R_{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\delta g_{\mu\nu} - \nabla^2(g^{\mu\nu}\delta g_{\mu}), \quad (2.20)$$

$$\delta K = \frac{1}{2}n^{\mu}(\nabla^{\nu}\delta g_{\mu\nu} - \nabla_{\mu}(g^{\rho\sigma}\delta g_{\rho\sigma})) \quad (2.21)$$

および Stokes の定理

$$\int_{\Sigma} dx^2 \sqrt{\det g} \nabla^{\mu} A_{\mu} = \int_{\partial\Sigma} dx \sqrt{\det h} n^{\mu} A_{\mu} \quad (2.22)$$

⁶外部曲率 K に関する変分は以下の式を用いれば示せる：

$$K := \nabla_{\mu}n^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{\det g}}\partial_{\mu}(\sqrt{\det g}n^{\mu}). \quad (2.18)$$

より,

$$\begin{aligned}
& I_{\text{int}}[g + \delta g, \Phi] - I_{\text{int}}[g, \Phi] \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \sqrt{\det g} \left[\left(\frac{R+2}{2} g^{\mu\nu} - R^{\mu\nu} + \nabla^{\mu} \nabla^{\nu} - g^{\mu\nu} \nabla^2 \right) \Phi \right] \delta g_{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \sqrt{\det g} \left[(\nabla^{\mu} \nabla^{\nu} - g^{\mu\nu} \nabla^2 + g^{\mu\nu}) \Phi \right] \delta g_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

となる. 最後の式変形は恒等式 (2.12) を用いた. したがって以下の運動方程式を得る:

$$(\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} - g_{\mu\nu} \nabla^2 + g_{\mu\nu}) \Phi = 0. \tag{2.24}$$

以上の結果をまとめると, JT 重力の運動方程式として

$$R + 2 = 0, \tag{2.25}$$

$$(\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} - g_{\mu\nu} \nabla^2 + g_{\mu\nu}) \Phi = 0 \tag{2.26}$$

を得る. 以下で運動方程式の解をみる.

2.1.1 計量の古典解

計量に関する運動方程式 (2.25) の解を求めよう. 任意の 2 次元 Riemann 多様体は局所平坦であることが知られている⁷ ので, 以下のような計量の形 (共形ゲージ, conformal gauge) を考えれば良い:

$$ds^2 = e^{2\omega(z)} dz d\bar{z}. \tag{2.27}$$

ここで $\omega : M \rightarrow \mathbb{R}$ は適当な関数で, $z = x + iy$ は M 上の複素座標である. この計量のもとでスカラー曲率を計算すると

$$R = 8e^{-2\omega} \partial_z \partial_{\bar{z}} \omega \tag{2.28}$$

となる (詳細な計算は付録 A.1 節を参照). これを運動方程式 $R = -2$ に代入すれば, 2 変数関数 ω に関する 2 階偏微分方程式

$$4\partial_z \partial_{\bar{z}} \omega - e^{2\omega} = 0, \tag{2.29}$$

を得る. この方程式は楕円型 Liouville 方程式と呼ばれ, その一般解は以下のように与えられることが知られている [15]:

$$\omega = -\log [c_1 Y_1(z) \bar{Y}_1(\bar{z}) + c_4 Y_2(z) \bar{Y}_2(\bar{z}) + c_2 Y_1(z) \bar{Y}_2(\bar{z}) + c_2 \bar{Y}_1(\bar{z}) Y_2(z)] + \frac{1}{2} \log [W(z) \bar{W}(\bar{z})]. \tag{2.30}$$

ここで c_1, c_2, c_4 は $1/2 = -2(c_1 c_4 - |c_2|^2)$ を満たす複素定数で, Y_1, Y_2 は正則な任意関数, W は任意関数 Y_1, Y_2 の Wronski 行列式:

$$W(z) := \det \begin{pmatrix} Y_1(z) & Y_2(z) \\ Y_1'(z) & Y_2'(z) \end{pmatrix} = Y_1(z) Y_2'(z) - Y_1'(z) Y_2(z) \tag{2.31}$$

⁷ 厳密な議論ではないが, 以下のようにして直感的に理解できる: 任意の 2 次元計量を $ds^2 = g_{xx} dx^2 + 2g_{xy} dx dy + g_{yy} dy^2$ とする. これは $ds^2 = (\sqrt{g_{xx}} dx + (g_{xy} + i\sqrt{\det g}) dy / \sqrt{g_{xx}}) (\sqrt{g_{xx}} dx + (g_{xy} - i\sqrt{\det g}) dy / \sqrt{g_{xx}})$ と因数分解できるので $\sqrt{g_{xx}} dx + (g_{xy} + i\sqrt{\det g}) dy / \sqrt{g_{xx}} =: e^{\omega} dz$ とすれば共形平坦計量 $ds^2 = e^{2\omega} dz d\bar{z}$ を得る. ここで ω は適当な関数である. このような ω, z が必ず存在するかどうかは非自明で証明を要するがここではこれ以上触れない.

である．一般解 (2.30) をより簡便な形へ変形しておこう．まず， $c_2 = 1/2$ と取る．このようにしても， Y_1 を適当に定数倍すれば c_1 を回復させられるので一般性を失わない．このとき， c_1, c_2, c_4 の満たすべき関係式 $1/2 = -2(c_1c_4 - |c_2|^2)$ より， $c_1 = c_4 = 0$ となるので，一般解 (2.30) は

$$\begin{aligned}\omega &= -\log \left[\frac{Y_1(z)\bar{Y}_2(\bar{z}) + \bar{Y}_1(\bar{z})Y_2(z)}{2} \right] + \frac{1}{2} \log[W(z)\bar{W}(\bar{z})] \\ &= \frac{1}{2} \log \left[-\frac{4 \left(Y_1(z)\bar{Y}_2'(\bar{z}) - Y_1'(z)\bar{Y}_2(\bar{z}) \right) \left(\bar{Y}_1(\bar{z})Y_2'(z) - \bar{Y}_1'(\bar{z})Y_2(z) \right)}{\left(Y_1(z)\bar{Y}_2(\bar{z}) + \bar{Y}_1(\bar{z})Y_2(z) \right)^2} \right]\end{aligned}\quad (2.32)$$

となる．ここで， $Z(z) = Y_1(z)\bar{Y}_2(\bar{z})$ とすれば，

$$\omega = \frac{1}{2} \log \left[\frac{Z'(z)\bar{Z}'(\bar{z})}{(\text{Im } Z(z))^2} \right]\quad (2.33)$$

となる．この表式を用いれば，運動方程式 (2.25) の解は以下のように与えられる：

$$ds^2 = \frac{Z'(z)\bar{Z}'(\bar{z})}{(\text{Im } Z(z))^2} dzd\bar{z} = \frac{dZd\bar{Z}}{(\text{Im } Z)^2}.\quad (2.34)$$

この計量は局所的な表示であることに注意されたい．すなわち，多様体全体を覆える座標 Z がいつでも存在するとは限らないことに注意されたい．

次に計量 (2.34) の持つ対称性を見ていこう．まず，任意正則関数 Z の選び方，すなわち Σ 上の座標の取り方に対応する $\text{Diff}(\Sigma)$ 対称性がある．ここで $\text{Diff}(\Sigma)$ とは Σ 上の微分同相写像⁸ の全体である．任意正則関数 Z が， Σ 上の微分同相写像であることは，次のようにして理解できる．まず，正則関数は等角写像であったから，正則関数 Z による複素座標の変換 $z \mapsto Z(z)$ は共形変換である．すなわち，共形平坦を保つ微分同相写像である．ところが，2次元の場合は共形平坦であることと局所平坦であることは同値であることが知られている．したがって，変換 $z \mapsto Z(z)$ は単に Σ 上の微分同相写像である．

さらに，計量 (2.34) に関する等長変換の対称性がある．ここで，等長変換とは計量を保つ変換のことである．等長変換群は多様体 Σ の形によって変わる．

1. **Disk 形の場合**：まず，種数 0 で境界が 1 つの場合を考える．図 2 のようになるので，この場合を disk 形と呼ぼう．Disk 形のときには，多様体全体を覆う座標 (ρ, θ) があって以下のような計量が考えられる：

$$ds_{H^2}^2 = d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\theta^2 \quad (\rho \in [0, \infty), \theta \in [0, 2\pi), \theta \sim \theta + 2\pi).\quad (2.35)$$

ここで， θ を 2π 周期としているのは $\rho = 0$ が円錐特異点にならないようにするためである⁹．計量 (2.35) は以下のようにして導出できる．1 + 2次元 Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{(1,2)}$ ¹⁰ 上の曲面 H^2 (図 2) を考えよう．：

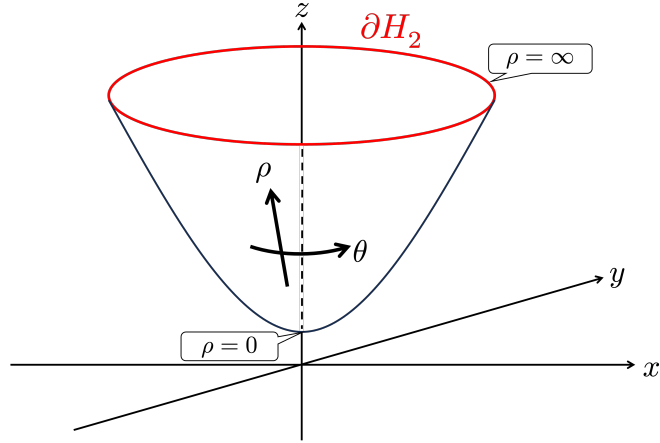
$$H^2 := \left\{ (t, x, y) \in \mathbb{R}^{(1,2)}; -t^2 + x^2 + y^2 = -1 \right\}\quad (2.36)$$

これは 3次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^3 上に図示すれば，2葉双曲面となる．この曲面 H^2 は 2次元双曲

⁸直感的には微分可能な座標変換だと思えば良い．数学的には， Σ から Σ への可微分な全単射であって，逆写像も可微分なものである．

⁹ $\rho = 0$ 近傍で計量 (2.35) は $ds^2 \sim d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$ と書けるが，これは 2次元極座標での計量である．もし仮に θ が α 周期 ($\alpha < 2\pi$) であれば曲面は $\rho = 0$ を頂点とする円錐になってしまう．したがって， $\rho = 0$ が円錐特異点になってしまう． θ が 2π 周期であれば曲面は平面になるので， $\rho = 0$ は特異点にならない．

¹⁰適当な座標のもとで計量が $\text{diag}(-1, +1, +1)$ と与えられる 3次元 Riemann 多様体のこと．

図 2: 双曲空間 H^2

空間と呼ばれる．双曲空間 H^2 上の計量は 1 + 2 次元 Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{(1,2)}$ 上の Minkowski 計量 $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2$ を制限したものと与えられる．例えば， (t, x, y) に対して，

$$t = \cosh \rho, \quad x = \cos \theta \sinh \rho, \quad y = \sin \theta \sinh \rho \quad (\rho \in [0, \infty), \theta \in [0, 2\pi), \theta \sim \theta + 2\pi) \quad (2.37)$$

と媒介変数表示すれば，双曲空間 H^2 上の誘導計量は (2.35) となる．

計量 (2.35) は適当な変数変換によって計量 (2.34) になる．例えば，任意関数 Z を

$$Z(z) = \tan \frac{z}{2} \quad (2.38)$$

と取れば，

$$\begin{aligned} ds_{H^2}^2 &= \frac{Z'(z)\bar{Z}'(\bar{z})}{(\operatorname{Im} Z(z))^2} dz d\bar{z} \Big|_{Z(z)=\tan \frac{z}{2}} = -\frac{1}{\cos^2 z \cos^2 \bar{z} \left(\tan \frac{z}{2} - \tan \frac{\bar{z}}{2}\right)^2} dz d\bar{z} \\ &= -\frac{1}{\sin^2 \frac{z-\bar{z}}{2}} dz d\bar{z} \\ &= \frac{1}{\sinh^2(\operatorname{Im} z)} dz d\bar{z} \end{aligned} \quad (2.39)$$

となる．ここで，さらに

$$\operatorname{Re} z = \theta, \quad \operatorname{Im} z = \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\sinh \rho} \right) = \log \left(\frac{1 + \cosh \rho}{\sinh \rho} \right) \quad (2.40)$$

と変換すれば式 (2.35) となる．以上の変換において，計量が発散する $\rho = \infty$ と $\operatorname{Im} Z = 0$ が対応していることに注意されたい．以下では，これら $\rho \rightarrow \infty, \operatorname{Im} Z = 0$ を holographic 境界と呼び， ∂H^2 と書く．

定義から双曲空間 H^2 は Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{(1,2)}$ 上の距離一定面であることがわかるので，Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{(1,2)}$ 上の等長変換 $\operatorname{SO}(1, 2)$ は双曲空間 H^2 の等長変換群である．実際に，計量 (2.35) に対する Killing 方程式 $\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0$ を解いてみよう．計量 (2.35) から Christoffel 記号の非零成分は

$$\Gamma_{\theta\theta}^\rho = -\sinh \rho \cosh \rho, \quad \Gamma_{\theta\rho}^\theta = \Gamma_{\rho\theta}^\theta = \coth \rho \quad (2.41)$$

のみであるから, Killing 方程式は以下のように変形できる:

$$\begin{cases} \partial_\rho \xi_\rho = 0 \\ \partial_\theta \xi_\theta + \xi_\rho \sinh \rho \cosh \rho = 0 \\ \partial_\theta \xi_\rho + \partial_\rho \xi_\theta - 2\xi_\theta \coth \rho = 0 \end{cases} \quad (2.42)$$

この偏微分方程式の一般解を求めよう. まず第3式の両辺を θ で偏微分すれば,

$$\partial_\theta^2 \xi_\rho + \partial_\rho \partial_\theta \xi_\theta - 2(\partial_\theta \xi_\theta) \coth \rho = 0 \quad (2.43)$$

を得る. ここで第2式より $\partial_\theta \xi_\theta = -\xi_\rho \sinh \rho \cosh \rho$ であるから, これを (2.43) に代入する:

$$\begin{aligned} \partial_\theta^2 \xi_\rho - \partial_\rho (\xi_\rho \sinh \rho \cosh \rho) + 2\xi_\rho \cosh^2 \rho &= 0 \\ \partial_\theta^2 \xi_\rho - (\partial_\rho \xi_\rho) \sinh \rho \cosh \rho + \xi_\rho &= 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

ここに第1式 $\partial_\rho \xi_\rho = 0$ を代入すれば,

$$\partial_\theta^2 \xi_\rho + \xi_\rho = 0 \quad (2.45)$$

となる. これより $\xi_\rho = A_1 \cos \theta - A_2 \sin \theta$ となる (A_1, A_2 は任意定数). これを第2式に代入すれば,

$$\partial_\theta \xi_\theta + (A_1 \cos \theta - A_2 \sin \theta) \sinh \rho \cosh \rho = 0 \quad (2.46)$$

となるので, 両辺を θ で積分して,

$$\xi_\theta = (A_1 \sin \theta + A_2 \cos \theta) \sinh \rho \cosh \rho + C(\rho) \quad (2.47)$$

となる. ここで $C(\rho)$ は任意関数である. これと ξ_ρ を第3式に代入すれば,

$$\frac{dC(\rho)}{d\rho} = 2C(\rho) \coth \rho \quad (2.48)$$

となる. これを解けば, $C(\rho) = A_3 \sinh^2 \rho$ と求められる (A_3 は任意定数). したがって一般解は以下で与えられる:

$$\xi_\rho = A_1 \cos \theta - A_2 \sin \theta, \quad (2.49)$$

$$\xi_\theta = -\sinh \rho \cosh \rho (A_1 \sin \theta + A_2 \cos \theta) + A_3 \sinh^2 \rho. \quad (2.50)$$

ここで A_1, A_2, A_3 は実定数である. したがって, Killing ベクトル $\xi = g^{\mu\nu} \xi_\mu \partial_\nu$ は以下の ξ_1, ξ_2, ξ_3 の線型結合 $\xi = A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 + A_3 \xi_3$ で与えられる:

$$\xi_1 = \cos \theta \partial_\rho - \coth \rho \sin \theta \partial_\theta, \quad (2.51)$$

$$\xi_2 = -\sin \theta \partial_\rho - \coth \rho \cos \theta \partial_\theta, \quad (2.52)$$

$$\xi_3 = \partial_\theta. \quad (2.53)$$

これら3つは $SO(1,2)$ の Lie 代数である $\mathfrak{so}(1,2)$ の交換関係

$$[\xi_1, \xi_2] = \xi_3, [\xi_2, \xi_3] = \xi_1, [\xi_3, \xi_1] = \xi_2 \quad (2.54)$$

を満たす¹¹ . したがって上の Killing ベクトルは $SO(1, 2)$ の生成子である. よって等長変換群は $SO(1, 2)$ となる. 等長変換 $SO(1, 2)$ の具体的な作用をみるためには, 計量 (2.34) に現れる座標 Z の方が取り扱いやすい. 座標 Z に対して以下のような分数変換 $\Sigma \rightarrow \Sigma$ を考えよう:

$$Z \mapsto \frac{aZ + b}{cZ + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}, ab - cd = 1). \quad (2.55)$$

この変換の全体のなす群は $PSL(2, \mathbb{R}) \simeq SO(1, 2)$ ¹² であって, 計量 (2.34) を保つ. ここで $PSL(2, \mathbb{R})$ は

$$PSL(2, \mathbb{R}) := SL(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2 \quad (2.56)$$

と定義される群で, $SL(2, \mathbb{R})$ は行列式が 1 である実行列の全体がなす群と同型な群である. すなわち, $PSL(2, \mathbb{R})$ は行列式が 1 である実行列の全体において ± 1 の定数倍を同一視した群である. 以上のことから, 多様体 Σ が双曲空間 H^2 と一致すれば, 等長変換群は $PSL(2, \mathbb{R}) \simeq SO(1, 2)$ と同型である. ここで, bulk の等長変換を $\rho \rightarrow \infty$ の holographic 境界 ∂H^2 に制限した変換を見ておこう. Killing ベクトル ξ_1, ξ_2, ξ_3 は $\rho = \infty$ の境界 ∂H^2 上で

$$\xi_1|_{\partial H^2} = -\sin \theta \partial_\theta, \quad (2.57)$$

$$\xi_2|_{\partial H^2} = -\cos \theta \partial_\theta, \quad (2.58)$$

$$\xi_3|_{\partial H^2} = \partial_\theta. \quad (2.59)$$

と書ける. これらは $\mathfrak{so}(1, 2)$ の交換関係を満たす. したがって, $\rho \rightarrow \infty$ の境界 ∂H^2 にも bulk と同じく $PSL(2, \mathbb{R}) \simeq SO(1, 2)$ 等長変換の対称性が現れる. 実際, 複素座標 Z に関する分数変換 (2.55) において, 実部の変換性を見ると

$$\text{Re } Z \mapsto \text{Re} \left[\frac{aZ + b}{cZ + d} \right] = \frac{(a \text{Re } Z + b)(c \text{Re } Z + d) + ac(\text{Im } z)^2}{(c \text{Re } z + d)^2 + c^2(\text{Im } z)^2} \quad (2.60)$$

であるから, $\text{Im } Z = 0$ の holographic 境界上では,

$$\text{Re } Z \mapsto \frac{a \text{Re } Z + b}{c \text{Re } Z + d} \quad (2.61)$$

と $PSL(2, \mathbb{R}) \simeq SO(1, 2)$ 対称性があることがわかる.

2. **Wormhole 形の場合**: 次に, 種数 0 で境界が 2 つの場合を考える. 図 3 のようになるので, この場合を wormhole 形と呼ぼう. Wormhole 形のときには, 多様体全体を覆う座標 (ρ, θ) があって以下のような計量が考えられる:

$$ds_{T^2}^2 = d\rho^2 + \cosh^2 \rho d\theta^2 \quad (\rho \in (-\infty, \infty), \theta \in [0, b), \theta \sim \theta + b). \quad (2.62)$$

¹¹例えば, Σ 上の任意の C^∞ 級関数 f に対して,

$$[\xi_3, \xi_1](f) = \partial_\theta(\cos \theta \partial_\rho f - \coth \rho \sin \theta \partial_\theta f) - (\cos \theta \partial_\rho - \coth \rho \sin \theta \partial_\theta) \partial_\theta f = \sin \theta \partial_\rho f + \coth \rho \cos \theta \partial_\theta f = \xi_2(f).$$

¹²同型 $PSL(2, \mathbb{R}) \simeq SO(1, 2)$ は以下のようにして示せる. まず V を対角和が 0 である 2×2 行列の全体 V を考える. これは Pauli 行列 $e_1 = \sigma_1/\sqrt{2}, e_2 = \sigma_3/\sqrt{2}, e_3 = i\sigma_2/\sqrt{2}$ を基底とする線型空間である. さらに V 上には計量が $g(x, y) = \text{Tr}[xy]$ と定義できるが, $g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = 1, g(e_3, e_3) = -1$ であるから V は計量空間として $\mathbb{R}^{(1,2)}$ と同型である. この V 上に $SL(2, \mathbb{R})$ を $\hat{P}[x] = PxP^{-1}$ ($P \in SL(2, \mathbb{R})$) と作用させると, これは $g(P[x], P[y]) = \text{Tr}[PxP^{-1}PyP^{-1}] = \text{Tr}[xy] = g(x, y)$ と計量を保つ. したがって, $SL(2, \mathbb{R})$ から $SO(1, 2)$ への準同型写像 $\varphi: P \mapsto \hat{P}$ が存在する. ここで $\mathfrak{so}(1, 2) \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ であったことから, $d\varphi: \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \simeq \mathfrak{so}(1, 2)$ は Lie 代数の同型写像となる. これより, 準同型写像 $\varphi: P \mapsto \hat{P}$ が全射であることが示せる. さらに, $\ker[\varphi] = \{\pm 1\}$ ($1: 2 \times 2$ 単位行列) であるから, 群の準同型定理より $SO(1, 2) \simeq SL(2, \mathbb{R})/\ker[\varphi] =: PSL(2, \mathbb{R})$.

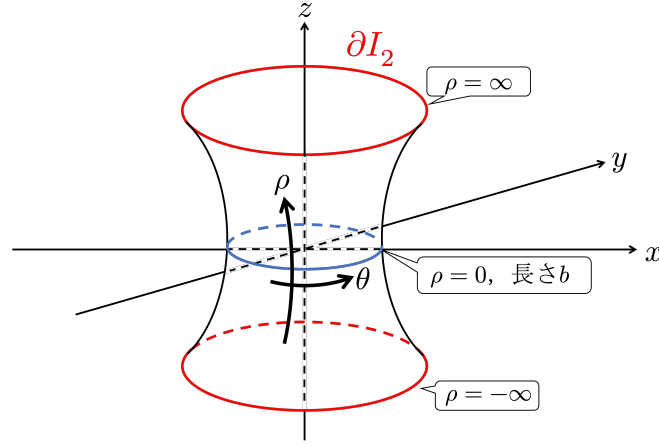


図 3: 1 葉双曲面 I^2

この計量は次のようにして導入できる. $2+1$ 次元 Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{(2+1)}$ 上の 1 葉双曲面 I^2 (図 3) を以下で定義する:

$$I^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; -t_1^2 - t_2^2 + x^2 = -1\} \quad (2.63)$$

1 葉双曲面 I^2 上の計量は $2+1$ 次元 Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{(2,1)}$ 上の Euclid 計量 $ds^2 = -dt_1^2 - dt_2^2 + dx^2$ を制限したものとして与えられる. 例えば, $x = (t, x, y)$ に対して,

$$t_1 = \sinh \rho \cos \theta, t_2 = \sinh \rho \sin \theta, x = \cosh \rho \quad (\rho \in (-\infty, \infty), \theta \in [0, 2\pi)) \quad (2.64)$$

と媒介変数表示すれば, 誘導計量は

$$ds_{I^2}^2 = d\rho^2 - \cosh^2 \rho d\theta^2 \quad (2.65)$$

となる. θ を Wick 回転すれば計量 (2.62) が得られる. ここでは 1 葉双曲面を用いて θ が 2π 周期の場合を導出したが, 一般に種数 0 で境界が 2 つの場合には θ は 2π 周期でなくてもよい. 種数 0 で境界が 1 つの場合の計量 (2.35) では 2π 周期でないと $\rho = 0$ で円錐特異点が発生してしまうが, 計量 (2.62) の場合は発生しないからである¹³.

この計量 (2.62) は適当な変数変換によって計量 (2.34) と一致する. 例えば, 任意関数 Z を

$$Z(z) = z \quad (2.66)$$

とした後に, 以下のように変数変換すれば良い:

$$\operatorname{Re} z = -\frac{\cosh \rho \sinh \theta}{\cosh \rho \cosh \theta + \sinh \rho}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{\cosh \rho \cosh \theta + \sinh \rho}. \quad (2.67)$$

以上の変換において, 計量が発散する $\rho = \pm\infty$ と $\operatorname{Im} Z = 0$ が対応していることに注意されたい. 以下では, これら $\rho \rightarrow \pm\infty, \operatorname{Im} z = 0$ を holographic 境界と呼び, ∂I^2 と書く. しかし, disk 形の場合と異なり, θ の b 周期性によって等長変換群は $U(1)$ となる. 実際に, 計量 (2.62)

¹³ $\rho = 0$ 近傍で計量 (2.62) は $ds^2 \sim d\rho^2 + d\theta^2$ と書けるが, これは 2 次元直交座標での計量である. したがって, θ がどんな周期性であろうと $\rho = 0$ は円錐特異点とならない.

に対する Killing 方程式 $\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0$ を解いてみよう. 計量 (2.35) から Christoffel 記号の非零成分は

$$\Gamma_{\theta\theta}^\rho = -\sinh \rho \cosh \rho, \Gamma_{\theta\rho}^\theta = \Gamma_{\rho\theta}^\theta = \tanh \rho \quad (2.68)$$

のみであるから, Killing 方程式は以下のように変形できる:

$$\begin{cases} \partial_\rho \xi_\rho = 0 \\ \partial_\theta \xi_\theta + \xi_\rho \sinh \rho \cosh \rho = 0 \\ \partial_\theta \xi_\rho + \partial_\rho \xi_\theta - 2\xi_\theta \tanh \rho = 0 \end{cases} \quad (2.69)$$

この偏微分方程式の一般解を求めよう. まず第 3 式の両辺を θ で偏微分すれば,

$$\partial_\theta^2 \xi_\rho + \partial_\rho \partial_\theta \xi_\theta - 2(\partial_\theta \xi_\theta) \tanh \rho = 0 \quad (2.70)$$

を得る. ここで第 2 式より $\partial_\theta \xi_\theta = -\xi_\rho \sinh \rho \cosh \rho$ であるから, これを (2.70) に代入する:

$$\begin{aligned} \partial_\theta^2 \xi_\rho - \partial_\rho (\xi_\rho \sinh \rho \cosh \rho) + 2\xi_\rho \sinh^2 \rho &= 0 \\ \partial_\theta^2 \xi_\rho - (\partial_\rho \xi_\rho) \sinh \rho \cosh \rho - \xi_\rho &= 0 \end{aligned} \quad (2.71)$$

ここに第 1 式 $\partial_\rho \xi_\rho = 0$ を代入すれば,

$$\partial_\theta^2 \xi_\rho - \xi_\rho = 0 \quad (2.72)$$

となる. これより $\xi_\rho = A_1 \cosh \theta + A_2 \sinh \theta$ となる (A_1, A_2 は任意定数). これを第 2 式に代入すれば,

$$\partial_\theta \xi_\theta + (A_1 \cosh \theta + A_2 \sinh \theta) \sinh \rho \cosh \rho = 0 \quad (2.73)$$

となるので, 両辺を θ で積分して,

$$\xi_\theta = -(A_1 \sinh \theta + A_2 \cosh \theta) \sinh \rho \cosh \rho + C(\rho) \quad (2.74)$$

となる. ここで $C(\rho)$ は任意関数である. これと ξ_ρ を第 3 式に代入すれば,

$$\frac{dC(\rho)}{d\rho} = 2C(\rho) \tanh \rho \quad (2.75)$$

となる. これを解けば, $C(\rho) = A_3 \cosh^2 \rho$ と求められる (A_3 は任意定数). したがって一般解は以下で与えられる:

$$\xi_\rho = A_1 \cosh \theta + A_2 \sinh \theta, \quad (2.76)$$

$$\xi_\theta = -\sinh \rho \cosh \rho (A_1 \sinh \theta + A_2 \cosh \theta) + A_3 \cosh^2 \rho. \quad (2.77)$$

ここで, $\theta \sim \theta + b$ の周期性より $A_1 = A_2 = 0$ であるから,

$$\xi_\rho = 0, \xi_\theta = A_3 \cosh^2 \rho \quad (2.78)$$

となる. よって Killing ベクトル $\xi = g^{\mu\nu} \xi_\mu \partial_\nu$ は θ 方向の並進に対応する ∂_θ に限られる. したがって, 等長変換群は $U(1)$ である. $\xi|_{\rho \rightarrow \pm\infty} = \partial_\theta$ より, 計量が発散する holographic 境界 $\rho \rightarrow \pm\infty$ 上にも $U(1)$ 対称性が現れることに注意されたい.

2.1.2 Dilaton の古典解

Dilaton に関する運動方程式 (2.26) を解こう。まず上式を共形ゲージ

$$ds^2 = e^{2\omega(Z)} dZ d\bar{Z} \quad (2.79)$$

の下で書き下す。まず, Christoffel 記号 $\Gamma_{\mu\nu}^\rho := (1/2)g^{\rho\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$ の非零成分は以下の通り:

$$\Gamma_{ZZ}^Z = g^{Z\bar{Z}} \partial_Z g_{Z\bar{Z}} = -2\partial_Z \omega, \quad (2.80)$$

$$\Gamma_{\bar{Z}\bar{Z}}^{\bar{Z}} = g^{Z\bar{Z}} \partial_{\bar{Z}} g_{Z\bar{Z}} = -2\partial_{\bar{Z}} \omega. \quad (2.81)$$

これより, 任意のベクトル A_μ の共変微分の各成分が

$$\begin{pmatrix} \nabla_Z A_Z & \nabla_Z A_{\bar{Z}} \\ \nabla_{\bar{Z}} A_Z & \nabla_{\bar{Z}} A_{\bar{Z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2\omega} \partial_Z (e^{2\omega} A_Z) & \partial_Z A_{\bar{Z}} \\ \partial_{\bar{Z}} A_Z & e^{-2\omega} \partial_{\bar{Z}} (e^{2\omega} A_{\bar{Z}}) \end{pmatrix} \quad (2.82)$$

となるので, 運動方程式の $(Z, Z), (\bar{Z}, \bar{Z}), (Z, \bar{Z})$ 成分はそれぞれ

$$\begin{cases} e^{2\omega} \partial_Z (e^{-2\omega} \partial_Z \Phi) = 0 \\ e^{2\omega} \partial_{\bar{Z}} (e^{-2\omega} \partial_{\bar{Z}} \Phi) = 0 \\ (2\partial_Z \partial_{\bar{Z}} - e^{2\omega}) \Phi = 0 \end{cases} \quad (2.83)$$

となる。これに, $e^{2\omega} = 1/(\text{Im } Z)^2$ を代入して

$$\begin{cases} \frac{1}{(\text{Im } Z)^2} \frac{\partial}{\partial Z} \left[(\text{Im } Z)^2 \frac{\partial}{\partial Z} \Phi \right] = 0 \\ \frac{1}{(\text{Im } Z)^2} \frac{\partial}{\partial \bar{Z}} \left[(\text{Im } Z)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{Z}} \Phi \right] = 0 \\ \left[2 \frac{\partial}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial \bar{Z}} + \frac{1}{(\text{Im } Z)^2} \right] \Phi = 0 \end{cases} \quad (2.84)$$

ここで, $\tilde{\Phi} := \Phi \text{Im } Z$ という変換を考えれば, 方程式 (2.84) の各式の左辺は

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\text{Im } Z)^2} \frac{\partial}{\partial Z} \left[(\text{Im } Z)^2 \frac{\partial}{\partial Z} \Phi \right] &= \frac{1}{(\text{Im } Z)^2} \frac{\partial}{\partial Z} \left[(\text{Im } Z)^2 \frac{\partial}{\partial Z} \frac{\tilde{\Phi}}{\text{Im } Z} \right] \\ &= \frac{1}{(\text{Im } Z)^2} \frac{\partial}{\partial Z} \left[\text{Im } Z \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial Z} - \frac{\tilde{\Phi}}{2i} \right] \\ &= \frac{1}{\text{Im } Z} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial Z^2}, \end{aligned} \quad (2.85)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\text{Im } Z)^2} \frac{\partial}{\partial \bar{Z}} \left[(\text{Im } Z)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{Z}} \Phi \right] &= \frac{1}{(\text{Im } Z)^2} \frac{\partial}{\partial \bar{Z}} \left[(\text{Im } Z)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{Z}} \frac{\tilde{\Phi}}{\text{Im } Z} \right] \\ &= \frac{1}{(\text{Im } Z)^2} \frac{\partial}{\partial \bar{Z}} \left[\text{Im } Z \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \bar{Z}} + \frac{\tilde{\Phi}}{2i} \right] \\ &= \frac{1}{\text{Im } Z} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial \bar{Z}^2}, \end{aligned} \quad (2.86)$$

$$\left[2 \frac{\partial}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial \bar{Z}} + \frac{1}{(\text{Im } Z)^2} \right] \Phi = \left[2 \frac{\partial}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial \bar{Z}} + \frac{1}{(\text{Im } Z)^2} \right] \frac{\tilde{\Phi}}{\text{Im } Z}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\text{Im } Z} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial Z \partial \bar{Z}} + \frac{1}{i} \frac{1}{\text{Im } Z^2} \left(\frac{\partial}{\partial Z} - \frac{\partial}{\partial \bar{Z}} \right) \tilde{\Phi} \\
&= \frac{2}{\text{Im } Z} \left[\frac{\partial}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial \bar{Z}} + \frac{1}{Z - \bar{Z}} \left(\frac{\partial}{\partial Z} - \frac{\partial}{\partial \bar{Z}} \right) \right] \tilde{\Phi} \quad (2.87)
\end{aligned}$$

となる．途中以下を用いた：

$$\frac{\partial}{\partial Z} \text{Im } Z = \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{Z - \bar{Z}}{2i} \right) = \frac{1}{2i}, \quad (2.88)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{Z}} \text{Im } Z = \frac{\partial}{\partial \bar{Z}} \left(\frac{Z - \bar{Z}}{2i} \right) = -\frac{1}{2i}. \quad (2.89)$$

したがって， $\tilde{\Phi}$ に関する以下の微分方程式を得る：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \tilde{\Phi} = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial \bar{Z}^2} \tilde{\Phi} = 0 \\ \left[\frac{\partial}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial \bar{Z}} + \frac{1}{Z - \bar{Z}} \left(\frac{\partial}{\partial Z} - \frac{\partial}{\partial \bar{Z}} \right) \right] \tilde{\Phi} = 0 \end{cases} \quad (2.90)$$

第1, 2式より， $\tilde{\Phi}$ は Z, \bar{Z} のそれぞれについて高々1次式である：

$$\tilde{\Phi}(Z, \bar{Z}) = a + bZ + c\bar{Z} + dZ\bar{Z}. \quad (2.91)$$

これを第3式に代入すれば，

$$d + \frac{b - c + d(\bar{Z} - Z)}{Z - \bar{Z}} = \frac{b - c}{Z - \bar{Z}} = 0 \quad (2.92)$$

となるので $b - c = 0$ を得る．よって，一般解は

$$\Phi(Z, \bar{Z}) = \frac{C_1 + C_2 \text{Re } Z - \mu Z \bar{Z}}{\text{Im } Z}. \quad (2.93)$$

ここで， $C_1 = a, C_2 = 2b = 2c, \mu = d$ と置き直した．上式は， $C_1 = C_2 = \mu = 0$ の場合を除いて，式 (2.55) の $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ 変換で不変ではないことに注意されたい．すなわち，dilaton の存在によって $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ 対称性が破れている．また，計量が発散する holographic 境界 $\text{Im } Z = 0$ において，dilaton も発散することに注意されたい．

ところで，dilaton Φ を用いて

$$\xi^\mu := \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi. \quad (2.94)$$

と定義されるベクトル ξ は Killing ベクトルとなる [16]．ここで， $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1, \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$ で，添字の上げ下げは計量 $g_{\mu\nu}$ で行った．このことをみるために，方程式 (2.26) の両辺に $g_{\rho\sigma} \epsilon^{\rho\nu}$ を掛けて変形していけば

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu (g_{\rho\sigma} \epsilon^{\rho\nu} \nabla_\nu \Phi) - g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} \epsilon^{\rho\nu} (\nabla^2 - 1) \Phi &= 0 \\
\nabla_\mu (g_{\rho\sigma} \xi^\rho) - \epsilon^{\mu\sigma} (\nabla^2 - 1) \Phi &= 0 \\
\nabla_\mu \xi_\sigma &= \epsilon_{\mu\sigma} (\nabla^2 - 1) \Phi \quad (2.95)
\end{aligned}$$

となる．右辺が添字 $\mu\sigma$ について反対称であるから，左辺も添字 $\mu\sigma$ について反対称である．よって， $\xi^\mu := \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi$ は Killing 方程式 $\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0$ を満たす．以上のことから，JT 重力の古典論で

は、時空 M に穴 (すなわちハンドル) は存在しえないことがわかる。なぜなら、穴を持つ双曲面に Killing ベクトルが存在しないことが知られているからである。量子論を考えると、時空 M に穴が存在する場合を考えることができるようになる。

2.2 JT 重力の Schwarz 理論への書き換え

本節では JT 重力の分配関数を計算する。この際、JT 重力が Schwarz 理論と呼ばれる 1 次元境界上の理論に書き換えられることを示す [4]。

まず、多様体 Σ の境界の数を n に固定し、連結成分のそれぞれを $\partial\Sigma_1, \dots, \partial\Sigma_n$ とする (図 4)。各 $\partial\Sigma_m$ ($m = 1, \dots, n$) 上の座標を $\tau_m \in [0, \beta_m), \tau_m \sim \tau_m + \beta_m$ とする。次に、境界上では holographic 境界 $\text{Im } Z = 0$ 上での古典解 (2.34), (2.93) に一致するという Dirichlet 境界条件を課す：

$$ds^2|_{\partial\Sigma_m} = \frac{d\tau_m^2}{\epsilon^2}, \Phi|_{\partial\Sigma_m} = \frac{\gamma}{\epsilon}. \quad (2.96)$$

ここで β_m は境界の長さ、 γ は境界上の dilaton の値に相当する定数で、 ϵ は微小量で後で 0 の極限を取る。これは、holographic 境界上 $\text{Im } Z \rightarrow 0$ で計量および dilaton の値がそれぞれ $1/\text{Im } Z^2, 1/\text{Im } Z$ のオーダーで発散することを反映させるためである。また、境界上で dilaton の値を γ/ϵ と定数でとったのは、このようにしても一般性を失わないからである。例えば、境界条件を

$$ds^2|_{\partial\Sigma_m} = \frac{d\tau_m^2}{\epsilon^2}, \Phi|_{\partial\Sigma_m} = \frac{\gamma_m(\tau_m)}{\epsilon} \quad (2.97)$$

としても、これを作用の境界項に代入すれば

$$\int_{\partial\Sigma} dx \sqrt{\det h} \Phi K = \sum_{m=1}^n \int_0^{\beta_m} d\tau_m \gamma_m(\tau_m) \frac{K}{\epsilon^2} \quad (2.98)$$

となるので、境界の座標 τ_m を定数 γ_m を用いて

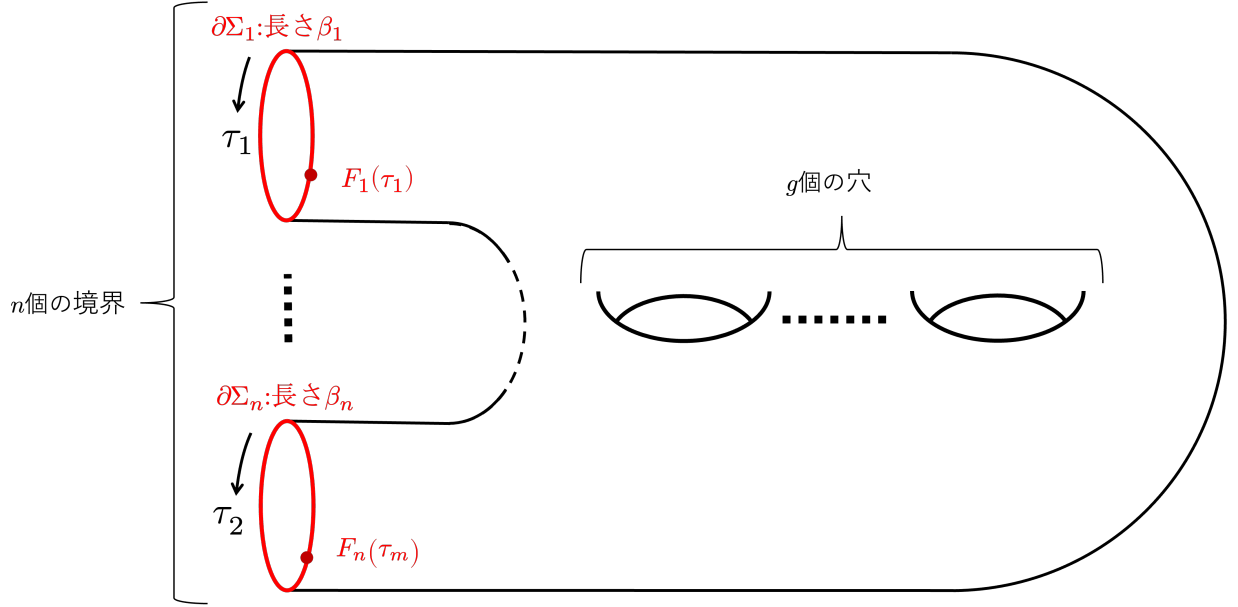
$$\gamma_m(\tau_m) d\tau_m \rightarrow \gamma d\tau_m \quad (2.99)$$

ととり直せば境界条件 (2.96) を課したときと同様の表式が得られる。なお、ここで γ を任意の値においても一般性を失わないことがわかるが、他の文献 [6, 17, 18] と記法を合わせるためにしばらく γ を残した表式で計算を進める。

さらに、外的曲率 K を計算するためには各境界 $\partial\Sigma_m$ の法線ベクトルが必要である。すなわち、境界 $\partial\Sigma_m$ が多様体 Σ にどう埋め込まれているか、その形の情報が必要である。そこで、各境界 $\partial\Sigma_m$ の多様体 Σ への埋め込みを $F_m : [0, \beta_m) \rightarrow \Sigma$ と書いておく (図 4)。ここで、 $[0, \beta_m) \simeq S^1$ および埋め込みの定義¹⁴ から $F_m \in \text{Diff}(S^1)$ であることに注意されたい。この埋め込み F_m は境界上の計量を parametrize する自由度を表したものである。実際、bulk の計量 $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ と Dirichlet 境界条件で定めた境界上の計量 $ds^2|_{\partial\Sigma} = d\tau^2/\epsilon^2$ を以下のように関係づけている：

$$g_{\mu\nu} = \frac{dF_m^\mu}{d\tau} \frac{dF_m^\nu}{d\tau} \frac{1}{\epsilon^2}. \quad (2.100)$$

¹⁴多様体 M, N に対して $f : M \rightarrow N$ がその埋め込みであるとは、 f が M から N の微分同相写像であって $f(M)$ が N の部分多様体であることをいう。直感的には、微分同相の条件は M を N に滑らかに位相を変えずに写すことを意味している。今の場合はあとで外部曲率を計算するために必要不可欠な条件である。

図 4: 多様体 Σ

ここで F_m^μ は $F_m(\tau)$ の μ 成分である。したがって、計量の汎関数積分は、

$$\int \mathcal{D}g = \sum_{g=0}^{\infty} \int_{\text{genus}=g} \mathcal{D}g_{\text{bulk}} \prod_{m=1}^n \int_{\text{Diff}(S^1)} \mathcal{D}F_m \quad (2.101)$$

と書き換えられる。ここで g は多様体 Σ の種数で、 $\int_{\text{genus}=g} \mathcal{D}g_{\text{bulk}}$ は種数 g のときの bulk 部分の計量に関する汎関数積分である。

以上の設定の下、分配関数を計算する：

$$\begin{aligned} & Z(\beta_1, \dots, \beta_n) \\ &= \int \mathcal{D}g \int \mathcal{D}\Phi e^{-I_{\text{JT}}[g, \Phi]} \\ &= \sum_{g=0}^{\infty} (e^{-S_0})^{2-2g-n} \int_{\text{genus}=g} \mathcal{D}g_{\text{bulk}} \int \mathcal{D}\Phi e^{\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \sqrt{\det g} \Phi (R+2)} \prod_{m=1}^n \int_{\text{Diff}(S^1)} \mathcal{D}F_m e^{\int_0^{\beta_m} \frac{d\tau_m}{\epsilon} \frac{\gamma}{\epsilon} K[g_{\text{bulk}}, F_m]} \\ &\equiv \sum_{g=0}^{\infty} \frac{Z_{g,n}(\beta_1, \dots, \beta_n)}{(e^{-S_0})^{2g+n-2}}. \end{aligned} \quad (2.102)$$

ここで外部曲率 K は bulk の計量 g_{bulk} および埋め込み F_m に依存するため、その依存性を $K[g_{\text{bulk}}, F_m]$ のようにあらわに書いた¹⁵。最後の式に現れる多様体 Σ の topology (g, n) を固定したとき、すなわち Σ が種数 g 境界数 n の曲面 $\Sigma_{g,n}$ であるときの分配関数：

$$Z_{g,n}(\beta_1, \dots, \beta_n) := \int_{\text{genus}=g} \mathcal{D}g_{\text{bulk}} \int \mathcal{D}\Phi e^{\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \sqrt{\det g} \Phi (R+2)} \prod_{m=1}^n \int_{\text{Diff}(S^1)} \mathcal{D}F_m e^{\int_0^{\beta_m} \frac{d\tau_m}{\epsilon} \frac{\gamma}{\epsilon} K[g_{\text{bulk}}, F_m]} \quad (2.103)$$

を計算していこう。まず、dilaton 積分が簡単に実行できて、

$$\int \mathcal{D}\Phi e^{\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \sqrt{\det g} \Phi (R+2)} = \delta(R+2) \quad (2.104)$$

¹⁵ $K = g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} n_{\nu}$ であるから、 $g^{\mu\nu} \nabla_{\mu}$ を計算するために bulk の計量の情報が必要で、単位法線ベクトル n_{μ} を計算するために埋め込み F_m の情報が必要である。

となる。したがって、双曲計量のみを考えれば良い。双曲計量は微分同相の対称性があったため、積分範囲は双曲計量の全体を微分同相写像群 $\text{Diff}(\Sigma)$ で同一視したものになる。これを moduli 空間と呼び、種数 g , 境界数 n のときには $\text{Mod}(\Sigma_{g,n})$ と書く (moduli 空間については 2.3 節で詳しく解説する)。すなわち以下のようになる：

$$\int_{\text{genus}=g} \mathcal{D}g_{\text{bulk}} \delta(R+2) = \int_{\text{Mod}(\Sigma_{g,n})} \mathcal{D}g_{\text{bulk}}. \quad (2.105)$$

よって,

$$Z_{g,n}(\beta_1, \dots, \beta_n) := \int_{\text{Mod}(\Sigma_{g,n})} \mathcal{D}g_{\text{bulk}} \prod_{m=1}^n \int_{\text{Diff}(S^1)} \mathcal{D}F_m e^{\frac{\gamma}{\epsilon^2} \int_0^{\beta_m} d\tau_m K[g_{\text{bulk}}, F_m]} \quad (2.106)$$

と書ける。結局、JT 重力の分配関数の計算は境界項 $\frac{\gamma}{\epsilon^2} \int_0^{\beta_m} d\tau_m K[g_{\text{bulk}}, F_m]$ の汎関数積分に帰着された。

ここで境界条件についてコメントをしておく。 $\partial\Sigma_m$ 上の座標を $\tau_m \in [0, \beta_m)$ とし計量を $ds^2|_{\partial\Sigma_m} = d\tau_m/\epsilon^2$ と置いたが、これは境界の長さを β_m/ϵ と固定したとみなせる。境界の長さを固定することを境界条件だと思えば、関数 $F_m \in \text{Diff}(S^1)$ の取り方の自由度は、境界の形を円から「ぐにゃぐにゃ」変形させる自由度だと見なすことができる¹⁶。したがって、積分 $\int_{\text{Diff}(S^1)} \mathcal{D}F_m$ は境界 ∂M_m の形に関する数え上げとみなせる。ここで、双曲計量における微分同相の対称性は座標を parametrize する自由度であったから、moduli 空間は 2 次元双曲面の形の全体がなす空間とみなせる。すなわち積分 $\int_{\text{Mod}(\Sigma_{g,n})} \mathcal{D}g_{\text{bulk}}$ は bulk の形に関する数え上げだとみなせる。よって、JT 重力の分配関数の計算における汎関数積分は境界付き 2 次元双曲面の数え上げに対応することがわかる。

以下で、汎関数積分 (2.106) を計算していく。 $(g, n) = (0, 1), (0, 2)$ の特殊例を計算した後に、それらを除く一般の場合について計算を行う。

2.2.1 Disk 形の場合: $(g, n) = (0, 1)$

$(g, n) = (0, 1)$ のときを考える:

$$Z_{0,1}(\beta) := \int_{\text{Mod}(\Sigma_{0,1})} \mathcal{D}g_{\text{bulk}} \int_{\text{Diff}(S^1)} \mathcal{D}F e^{\frac{\gamma}{\epsilon^2} \int_0^\beta d\tau K[g_{\text{bulk}}, F]}. \quad (2.107)$$

この場合の多様体 $M = \Sigma_{0,1}$ は図 5 のようになるので disk 形と呼ぼう。

Moduli 空間 $\text{Mod}(\Sigma_{0,1})$ の元は式 (2.35) のように書ける (2.1.1 節参照)。今考えている境界は計量が発散する $\rho \rightarrow \infty$ であるから、bulk の等長変換の対称性である $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ 対称性が境界上にも現れる。したがって、境界 ∂M の多様体 M への埋め込み $F \in \text{Diff}(S^1)$ の内、 $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ 変換によって移り合うものは物理的に等価である。以上のことをまとめると、積分 (2.107) は以下のようになる：

$$Z_{0,1}(\beta) = \int_{\text{Diff}(S^1)/\text{PSL}(2, \mathbb{R})} \mathcal{D}F e^{\frac{\gamma}{\epsilon^2} \int_0^\beta d\tau K[ds_{H^2}^2, F]}. \quad (2.108)$$

次に、 $\frac{\gamma}{\epsilon^2} \int_0^\beta d\tau K[ds_{H^2}^2, F]$ の具体的な表式を計算しよう。以下、境界 $\partial\Sigma$ の多様体 M への埋め込み $F(\tau)$ の ρ 成分を $\rho(\tau)$, θ 成分を $\theta(\tau)$ と書く：

$$F(\tau) = (\rho(\tau), \theta(\tau)). \quad (2.109)$$

¹⁶ この自由度のことを boundary wiggles と呼ぶことがある。

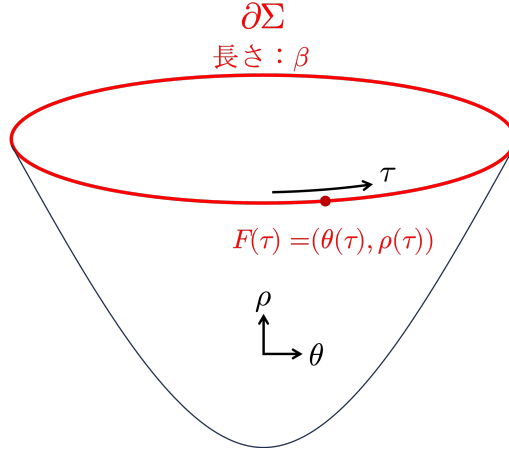


図 5: Disk 形: $(g, n) = (0, 1)$

ここで τ は境界上の座標でその周期を β とする. 座標 θ の 2π 周期性と座標 τ の β 周期性から, 関数 $\rho(\tau), \theta(\tau)$ に関して

$$\rho(\tau + \beta) = \rho(\tau), \quad \theta(\tau + \beta) = \theta(\tau) + 2\pi \quad (2.110)$$

であることに注意されたい. 境界が $\rho = \rho(\tau), \theta = \theta(\tau)$ と書かれることから, 境界上の誘導計量は

$$ds_{H^2}^2|_{\partial\Sigma} = \left(\rho'^2 + \theta'^2 \sinh^2 \rho \right) d\tau^2 \quad (2.111)$$

となる. ここで可微分関数 f に対して $f' := \frac{df}{d\tau}$ と略記した. 今, 境界条件 $ds^2|_{\partial\Sigma} = d\tau^2/\epsilon^2$ を課しているから, 2つの関数 $\rho(\tau), \theta(\tau)$ は

$$\rho'^2 + \theta'^2 \sinh^2 \rho = \frac{1}{\epsilon^2} \quad (2.112)$$

を満たさなければならない. この条件式をもう少し簡単にするために, $s(\tau) := 1/\sinh \rho(\tau)$ とおこう. このとき, $\rho'(\tau) = s'(\tau)/(s(\tau)\sqrt{1+s^2(\tau)})$ と書ける. これらを上式に代入して整理すれば,

$$s^2(\tau) - (\epsilon\theta'(\tau))^2 \left(1 - \epsilon^2 \frac{s'^2(\tau)}{s^2(\tau)(1+s^2(\tau))} \right)^{-1} = 0 \quad (2.113)$$

となる. この微分方程式の一般解 $s(\tau)$ は微小量 ϵ をパラメータとして持つ. そこで, この関数 $s(\tau)$ を ϵ について $s(\tau) = s_0(\tau) + \epsilon s_1(\tau) + \epsilon^2 s_2(\tau) + \dots$ と展開しよう. この展開を上式に代入して各 ϵ の冪の係数を比較すれば, $s_0(\tau) = 0, s_1(\tau) = \theta'(\tau), s_2(\tau) = 0$ が従う. よって, 関数 ρ, θ の関係式

$$\frac{1}{\sinh \rho} = \epsilon\theta'(\tau) + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (2.114)$$

$$\rho'(\tau) = -\frac{\theta''(\tau)}{\theta'(\tau)} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (2.115)$$

を得る. 上式より, $\theta \in \text{Diff}(S^1)$ が指定されれば関数 ρ が定まる. したがって, 埋め込み $F \in \text{Diff}(S^1)$ を指定するには, $\theta \in \text{Diff}(S^1)$ が指定されれば良い. すなわち, F 積分は θ 積分と等しい:

$$\int_{\text{Diff}(S^1)/\text{PSL}(2, \mathbb{R})} \mathcal{D}F = \int_{\text{Diff}(S^1)/\text{PSL}(2, \mathbb{R})} \mathcal{D}\theta. \quad (2.116)$$

さらに境界 ∂M の接線ベクトル t は

$$t = \rho' \partial_\rho + \theta' \partial_\theta \quad (2.117)$$

と書ける. 単位法線ベクトル $n = n_\mu dx^\mu$, $g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = 1$ は接線ベクトルと $n^\mu t_\mu = 0$ という関係を満たすので, 関数 $\theta(\tau), \rho(\tau)$ を用いて

$$n = \frac{1}{\sqrt{\theta'^2 + (\rho'/\sinh \rho)^2}} (\theta' d\rho - \rho' d\theta) \quad (2.118)$$

と書ける. これを外部曲率の定義式 $K := g^{\mu\nu} \nabla_\mu n_\nu = [\partial_\mu(\sqrt{\det gn^\mu})]/\sqrt{\det g}$ に代入すれば,

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{\sinh \rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\theta'(\tau) \sinh \rho}{\sqrt{\theta'(\tau)^2 + (\rho'(\tau)/\sinh \rho)^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{-\rho'(\tau)}{\sinh \rho \sqrt{\theta'(\tau)^2 + (\rho'(\tau)/\sinh \rho)^2}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sinh \rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\theta'(\tau) \sinh \rho}{\sqrt{\theta'(\tau)^2 + (\rho'(\tau)/\sinh \rho)^2}} \right) + \frac{1}{\theta'(\tau)} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{-\rho'(\tau)}{\sinh \rho \sqrt{\theta'(\tau)^2 + (\rho'(\tau)/\sinh \rho)^2}} \right) \right] \\ &= 1 + \epsilon^2 \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\theta''(\tau)}{\theta'(\tau)} \right)^2 - \frac{1}{2} \theta'^2 - \frac{\theta'''}{\theta'(\tau)} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (2.119)$$

となる. 1 段目から 2 段目の式変形は $\partial/\partial\theta = (1/\theta')\partial/\partial\tau$ として θ 依存性を τ 依存性に読み替えた. したがって, JT 重力の境界項は

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\epsilon^2} \int_0^\beta d\tau K &= \frac{\gamma}{\epsilon^2} \int_0^\beta d\tau \left[1 + \epsilon^2 \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\theta''}{\theta'} \right)^2 - \frac{1}{2} \theta'^2 - \frac{\theta'''}{\theta'} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right] \\ &= \frac{\gamma \beta}{\epsilon \epsilon} + \gamma \int_0^\beta d\tau \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\theta''}{\theta'} \right)^2 - \frac{1}{2} \theta'^2 - \frac{\theta'''}{\theta'} \right] + \mathcal{O}(\epsilon) \end{aligned} \quad (2.120)$$

となる. $\epsilon \rightarrow 0$ の極限で第 1 項は発散してしまうが, $\int_{\partial M} \sqrt{h} \Phi$ の相殺項で処理できる. この相殺項は Dirichlet 境界条件 (2.7) の元で運動方程式 (2.25), (2.26) を不変に保つことに注意されたい. ここで 3 回微分可能関数 F に対してその Schwarz 微分 $\text{Sch}\{F, \tau\}$ を

$$\text{Sch}\{F, \tau\} := \frac{F'''(\tau)}{F'(\tau)} - \frac{3}{2} \left(\frac{F''(\tau)}{F'(\tau)} \right)^2. \quad (2.121)$$

と定義すれば,

$$\text{Sch}\left\{ \tan \frac{\theta}{2}, \tau \right\} = \frac{\frac{d^3 \tan \frac{\theta(\tau)}{2}}{d\tau^3}}{\frac{d \tan \frac{\theta(\tau)}{2}}{d\tau}} - \frac{3}{2} \left(\frac{\frac{d^2 \tan \frac{\theta(\tau)}{2}}{d\tau^2}}{\frac{d \tan \frac{\theta(\tau)}{2}}{d\tau}} \right)^2 = - \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\theta''}{\theta'} \right)^2 - \frac{1}{2} \theta'^2 - \frac{\theta'''}{\theta'} \right] \quad (2.122)$$

となるので第 2 項は

$$\gamma \int_0^\beta d\tau \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\theta''}{\theta'} \right)^2 - \frac{1}{2} \theta'^2 - \frac{\theta'''}{\theta'} \right] = -\gamma \int_0^\beta d\tau \text{Sch}\left\{ \tan \frac{\theta}{2}, \tau \right\} =: I_{\text{Sch}} \left[\tan \frac{\theta}{2} \right] \quad (2.123)$$

と変形できる. 第 2 項 (2.123) のように Schwarz 微分で書ける作用のことを一般に Schwarz 作用と呼ぶ. Schwarz 微分に対して, 以下のような分数変換の不変性

$$\text{Sch}\{F, \tau\} = \text{Sch}\left\{ \frac{aF + b}{cF + d}, \tau \right\} \quad (ab - cd = 1) \quad (2.124)$$

があることが知られているので, JT 重力の境界項すなわち Schwarz 作用は $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ 不変であることがわかる. また, Schwarz 作用 (2.123) は θ の 3 回微分を含んでいるが, $(\theta''/\theta')' = \theta'''/\theta' - (\theta''/\theta')^2$

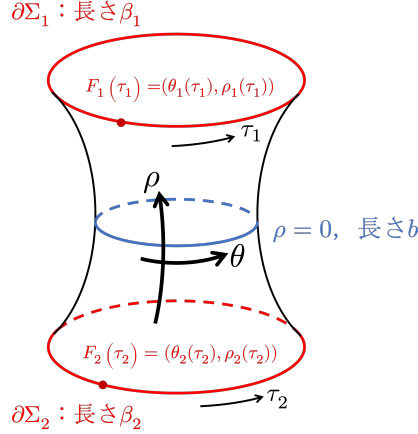


図 6: Wormhole 形: $(g, n) = (0, 2)$

を用いれば以下のように θ の 2 回微分までで書くことができる：

$$\begin{aligned} I_{\text{Sch}} \left[\tan \frac{\theta}{2} \right] &= \gamma \int_0^\beta d\tau \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\theta''}{\theta'} \right)^2 - \frac{1}{2} \theta'^2 - \frac{\theta''}{\theta'} \right] \\ &= -\frac{\gamma}{2} \int_0^\beta d\tau \left[\left(\frac{\theta''}{\theta'} \right)^2 - \theta'^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.125)$$

計算上は上式を用いるほうが便利である。

結局、 $(g, n) = (0, 1)$ のときの分配関数は Schwarz 作用の分配関数に帰着できる：

$$Z_{0,1}(\beta) = \int_{\text{Diff}(S^1)/\text{PSL}(2, \mathbb{R})} \mathcal{D}\theta e^{-I_{\text{Sch}}[\tan \frac{\theta}{2}]} =: Z_{\text{Sch}}^{\text{Disk}}(\beta). \quad (2.126)$$

Schwarz 作用の分配関数の計算は後の 2.4 節で行う。

最後に、以上の議論における対称性の破れについてコメントしておく。本節の最初に述べたように、境界のもつ対称性は埋め込み F の選び方に対応する $\text{Diff}(S^2)$ であった。しかし、dilaton 積分によって bulk の計量が双曲計量に固定されたことで境界の対称性は $\text{Diff}(S^2)$ から $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ へ自発的に破れた。ここで $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ 対称性は bulk の等長変換対称性から現れたものであるため、局所的対称性であることに注意されたい。しかし、この局所 $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ 対称性は大域的対称性まで露わに破れる。これは、 $F \in \text{Diff}(S^1)/\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ の従う Schwarz 作用 (2.126) は大域的 $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ 変換である分数変換 (2.124) でのみ不変だからである。この自発的かつ露わな対称性の破れに伴う擬南部-Goldstone mode が $\theta \in \text{Diff}(S^1)/\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ である。これは境界重力子 (boundary graviton) とも呼ばれる [4]。

2.2.2 Wormhole 形の場合: $(g, n) = (0, 2)$

$(g, n) = (0, 2)$ のときを考える：

$$Z_{0,2}(\beta_1, \beta_2) := \int_{\text{Mod}(\Sigma_{0,2})} \mathcal{D}g_{\text{bulk}} \prod_{m=1}^2 \int_{\text{Diff}(S^1)} \mathcal{D}F_m e^{\frac{\gamma}{2} \int_0^{\beta_m} d\tau K[g_{\text{bulk}}, F]}. \quad (2.127)$$

この場合の多様体 $\Sigma = \Sigma_{0,2}$ は図 6 のようになるので wormhole 形と呼ぼう。

すでに述べたように、 $(g, n) = (0, 2)$ のときの計量はパラメーター $b \in (0, \infty)$ を用いて式 (2.62) のように与えられる。Bulk の計量積分 $\int_{\text{Mod}(\Sigma_{0,2})} \mathcal{D}g_{\text{bulk}}$ はパラメーター $b \in (0, \infty)$ に関する積分となる。 b 依存性をわかりやすくするために、bulk の計量 g_{bulk} を

$$g(b) = d\rho^2 + \cosh^2 \rho d\theta^2 \quad (\rho \in [0, \infty), \theta \sim \theta + b) \quad (2.128)$$

と書き、汎関数積分を以下のように書こう：

$$\int_{\text{Mod}(\Sigma_{0,2})} \mathcal{D}g_{\text{bulk}} = \int_{b \in (0, \infty)} dg(b). \quad (2.129)$$

ところで、計量 (2.62) に関する等長変換群は b 周期性によって $U(1)$ となるのであった (2.1.1 節参照)。今考えている境界は計量が発散する $\rho \rightarrow \pm\infty$ であったから、bulk の $U(1)$ 対称性が各境界 $\partial\Sigma_1, \partial\Sigma_2$ にも現れる。したがって、各境界 $\partial\Sigma_1, \partial\Sigma_2$ の埋め込み $F_1, F_2 \in \text{Diff}(S^1)$ のうち $U(1)$ 変換によって移り合うものは物理的に等価である。以上のことをまとめると、積分 (2.127) は以下のようになる：

$$Z_{0,2}(\beta_1, \beta_2) = \int_{b \in (0, \infty)} dg(b) \prod_{m=1}^2 \int_{\text{Diff}(S^1)/U(1)} \mathcal{D}F_m e^{\frac{\gamma}{\epsilon^2} \int_0^{\beta_m} d\tau_m K[g(b), F_m]}. \quad (2.130)$$

次に、 $\frac{\gamma}{\epsilon^2} \int_0^{\beta_m} d\tau_m K[ds_{T^2}^2, F]$ の具体的な表式を計算しよう。まず、外部曲率 K を計算する。以下、境界 $\partial\Sigma_m$ の多様体 M への埋め込み $F_m(\tau_m)$ の ρ 成分を $\rho_m(\tau_m)$ 、 θ 成分を $\theta_m(\tau_m)$ と書く：

$$F_m(\tau_m) = (\rho_m(\tau_m), \theta_m(\tau_m)). \quad (2.131)$$

ここで座標 θ の b 周期性と座標 τ_m の β_m 周期性から、関数 $\rho_m(\tau_m), \theta_m(\tau_m)$ に関して

$$\rho_m(\tau_m + \beta_m) = \rho_m(\tau_m), \quad \theta_m(\tau_m + \beta_m) = \theta_m(\tau_m) + b \quad (2.132)$$

であることに注意されたい。Disk 形のと看と同様にして境界 $\partial\Sigma_m$ の外部曲率 K を埋め込み $\rho_m(\tau_m), \theta_m(\tau_m)$ を用いて表すと以下のようになる：

$$K = 1 + \epsilon^2 \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\theta''_m}{\theta'_m} \right)^2 + \frac{1}{2} \theta'^2_m - \frac{\theta'''_m}{\theta'_m} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (2.133)$$

したがって、JT 重力の境界項は

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\epsilon^2} \int_0^{\beta_m} d\tau_m K &= \frac{\gamma}{\epsilon^2} \int_0^{\beta_m} d\tau_m \left[1 + \epsilon^2 \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\theta''_m}{\theta'_m} \right)^2 + \frac{1}{2} \theta'^2_m - \frac{\theta'''_m}{\theta'_m} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right] \\ &= \frac{\gamma}{\epsilon} \frac{\beta_m}{\epsilon} + \gamma \int_0^{\beta_m} d\tau_m \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\theta''_m}{\theta'_m} \right)^2 + \frac{1}{2} \theta'^2_m - \frac{\theta'''_m}{\theta'_m} \right] + \mathcal{O}(\epsilon) \end{aligned} \quad (2.134)$$

となる。Disk 形のと看と同様に $\epsilon \rightarrow 0$ の極限で第 1 項は発散してしまうが、 $\int_{\partial\Sigma_m} \sqrt{\hbar} \Phi$ の相殺項で処理できる。また、

$$\text{Sch} \left\{ \tanh \frac{\theta}{2}, \tau \right\} = \frac{d^3 \tanh \frac{\theta(\tau)}{2}}{d\tau^3} - \frac{3}{2} \left(\frac{d^2 \tanh \frac{\theta(\tau)}{2}}{d\tau^2} \right)^2 = - \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\theta''}{\theta'} \right)^2 + \frac{1}{2} \theta'^2 - \frac{\theta'''}{\theta'} \right] \quad (2.135)$$

となるので, 第2項は

$$\gamma \int_0^{\beta_m} d\tau_m \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\theta_m''}{\theta_m'} \right)^2 + \frac{1}{2} \theta_m'^2 - \frac{\theta_m'''}{\theta_m'} \right] = -\gamma \int_0^{\beta_m} d\tau_m \text{Sch} \left\{ \tanh \frac{\theta_m}{2}, \tau_m \right\} =: I_{\text{Sch}} \left[\tanh \frac{\theta_m}{2} \right] \quad (2.136)$$

と Schwarz 作用に変形できる. 上式は θ の3回微分を含んでいるが, $(\theta''/\theta')' = \theta'''/\theta' - (\theta''/\theta')^2$ を用いれば以下のように θ の2回微分までで書くことができる:

$$\begin{aligned} I_{\text{Sch}} \left[\tanh \frac{\theta}{2} \right] &= \gamma \int_0^\beta d\tau \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\theta''}{\theta'} \right)^2 + \frac{1}{2} \theta'^2 - \frac{\theta'''}{\theta'} \right] \\ &= -\frac{\gamma}{2} \int_0^\beta d\tau \left[\left(\frac{\theta''}{\theta'} \right)^2 + \theta'^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.137)$$

計算上は上式を用いるほうが便利である.

結局, $(g, n) = (0, 2)$ のときの分配関数は Schwarz 作用の分配関数の計算および計量のパラメータ b の積分に帰着できる:

$$Z_{0,2}(\beta_1, \beta_2) = \int_{b \in (0, \infty)} dg(b) Z_{\text{Sch}}^{\text{Trp}}(\beta_1, b) Z_{\text{Sch}}^{\text{Trp}}(\beta_2, b). \quad (2.138)$$

ここで $Z_{\text{Sch}}^{\text{Trp}}$ を以下のように定義した:

$$Z_{\text{Sch}}^{\text{Trp}}(\beta_m, b) := \int_{\text{Diff}(S^1)/U(1)} \mathcal{D}\theta e^{-I_{\text{Sch}}[\tanh \frac{\theta_m}{2}]}. \quad (2.139)$$

Schwarz 作用の分配関数の計算は後の 2.4 節で行い, 計量のパラメータ b の積分は 2.3 節で行う.

最後に, 対称性の破れについてコメントしておく. 前節と同様に, $\theta \in \text{Diff}(S^1)/U(1)$ が自発的かつ露わな対称性の破れ $\text{Diff}(S^1) \rightarrow U(1)$ に対応する擬南部-Goldstone mode である.

2.2.3 一般の場合: $(g, n) \neq (0, 1), (0, 2)$

$(g, n) \neq (0, 1), (0, 2)$ のときを考える:

$$Z_{g,n}(\beta_1, \dots, \beta_n) := \int_{\text{Mod}(\Sigma_{g,n})} \mathcal{D}g_{\text{bulk}} \prod_{m=1}^n \int_{\text{Diff}(S^1)} \mathcal{D}F_m e^{\frac{\gamma}{\varepsilon^2} \int_0^{\beta_m} d\tau_m K[g_{\text{bulk}}, F_m]}. \quad (2.140)$$

$(g, n) = (0, 1), (0, 2)$ のときと異なり, bulk 部分の計量の積分は簡単には実行できない. そこで, 以下のように多様体 $\Sigma = \Sigma_{g,n}$ を分割をしよう (図 7).

1. 各境界 $\partial\Sigma_m$ の十分近傍の測地線 L_m を選び, その長さを b_m とする.
2. 測地線 L_m によって多様体 M を分割し, $\partial\Sigma_m$ を含む領域を $\Sigma_m(b_m)$, 境界を含まないものを $\hat{\Sigma}_{g,n}(b_1, \dots, b_n)$ とする.

すると, 各 $\Sigma_m(b_m)$ はパラメータ b_m によって特徴付けられ, 1 葉双曲面 I^2 と同相になる. そこで, 各 $\Sigma_m(b_m)$ 上の計量 $g_m(b_m)$ をパラメータ $b_m \in (0, \infty)$ を用いて

$$g_m(b_m) = d\rho_m^2 + \cosh^2 \rho_m d\theta_m^2, \quad (\rho_m \in [0, \infty), \theta_m \in [0, \beta), \theta_m \sim \theta_m + b_m). \quad (2.141)$$

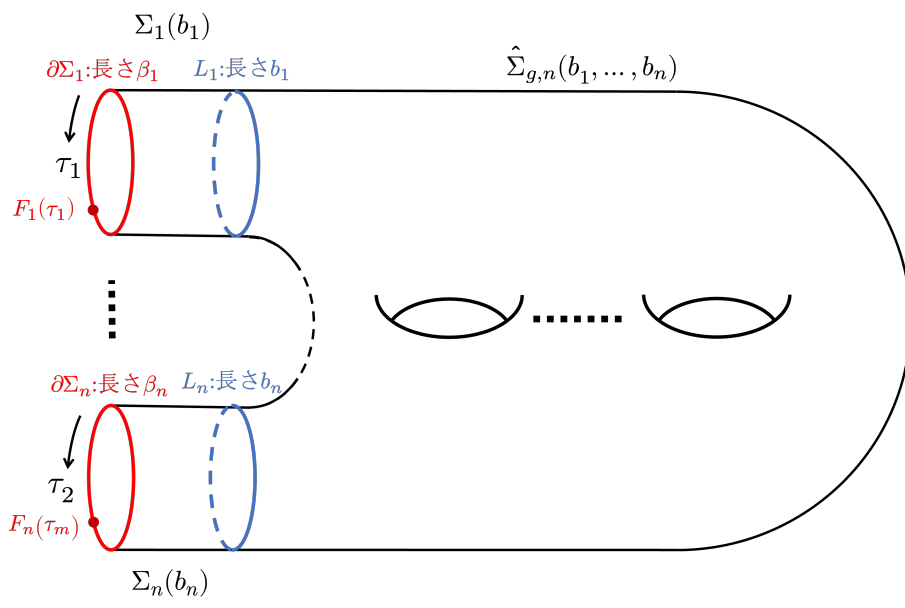


図 7: 一般の場合: $(g, n) \neq (0, 1), (0, 2)$

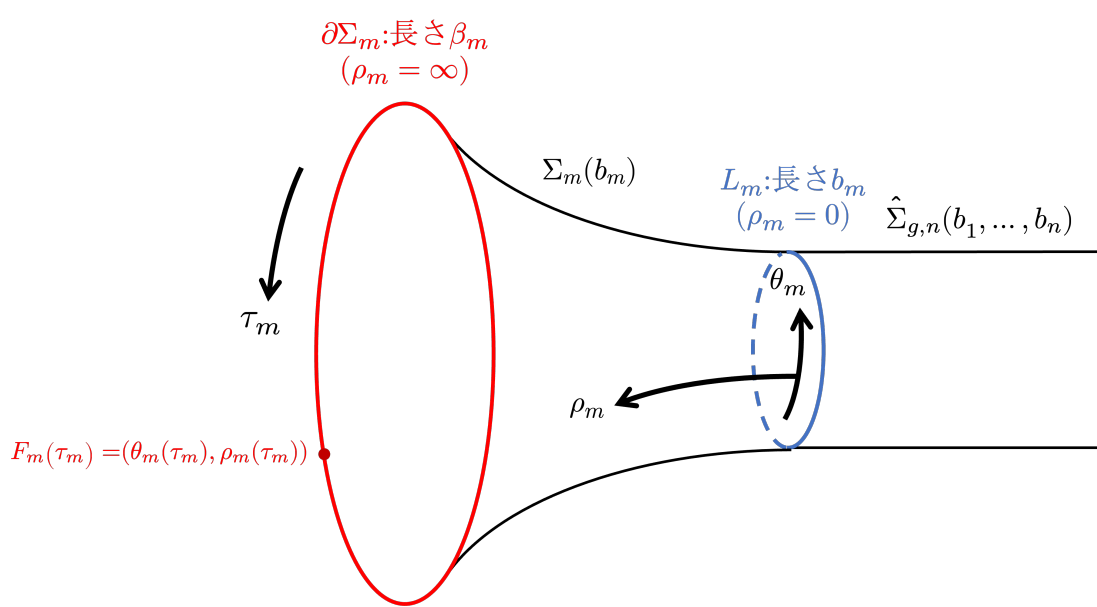


図 8: $\Sigma_m(b_m)$

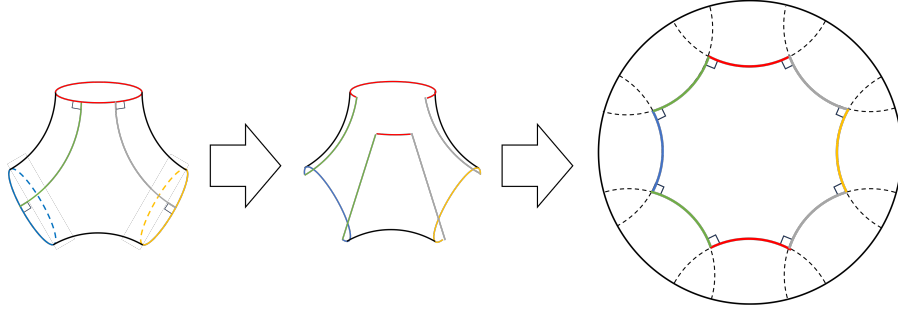


図 9: パンツ型曲面は図中緑色および灰色の測地線で切り開くことによって, Disk 形曲面すなわち双曲空間上の 8 角形と見なすことができるようになる. 双曲空間上には計量が一意に定まるので, パンツ型曲面にも計量が一意に定まる.

と取れる. ここで (ρ_m, θ_m) は $\Sigma_m(b_m)$ 上の座標で, 曲線 $\rho_m = 0$ が測地線 L_m , $\rho_m \rightarrow \infty$ が境界 $\partial\Sigma_m$ に対応している (図 8). したがって, パラメータ $b_m \in (0, \infty)$ は測地線 L_m の長さに対応している. また, $\hat{\Sigma}_{g,n}(b_1, \dots, b_n)$ 上の計量を \hat{g} と書く. すると, bulk 全体の計量 g_{bulk} は $g_m(b_m)$ ($m = 1, \dots, n$) と \hat{g} の組で表される. 各 $g_m(b_m)$ は独立に選べるので, 計量の積分は以下のように書ける:

$$\int_{\text{Mod}(\Sigma_{g,n})} \mathcal{D}g_{\text{bulk}} = \prod_{m=1}^n \int_{b_m \in (0, \infty)} dg_m(b_m) \int_{\text{Mod}(\hat{\Sigma}_{g,n}(b_1, \dots, b_n))} \mathcal{D}\hat{g}. \quad (2.142)$$

ただし, $(g, n) = (0, 3)$ の場合には Moduli 空間 $\text{Mod}(\hat{\Sigma}_{0,3}(b_1, b_2, b_3))$ の元は 1 つしか存在しないことが知られている (図 9) ので計量の積分は

$$\int_{\text{Mod}(\Sigma_{0,3})} \mathcal{D}g_{\text{bulk}} = \prod_{m=1}^3 \int_{b_m \in (0, \infty)} dg_m(b_m) \quad (2.143)$$

となる.

ところで, 座標 θ_m の b_m 周期性より, 各境界 $\partial\Sigma_m$ の近傍の計量 (2.141) の持つ等長変換群は $U(1)$ であった. $\rho_m \rightarrow \infty$ が境界 $\partial\Sigma_m$ に対応していることから, 境界上にも $U(1)$ 対称性が現れる. したがって, 各境界 $\partial\Sigma_m$ の埋め込み $F_m \in \text{Diff}(S^1)$ のうち $U(1)$ 変換で移り合うものは物理的に等価である. また, 各境界 $\partial\Sigma_m$ の外部曲率 K はその境界の近傍の計量 $g_m(b_m)$ にのみ依存し, \hat{M} 上の計量 \hat{g} に依存しない. 以上のことをまとめると, 積分 (2.140) は以下ようになる:

$$Z_{g,n}(\beta_1, \dots, \beta_n) = \prod_{m=1}^n \left[\int_{b_m \in (0, \infty)} dg(b_m) \int_{\text{Diff}(S^1)/U(1)} \mathcal{D}F_m e^{\frac{\gamma}{\epsilon^2} \int_0^{\beta_m} d\tau_m K[g_m(b_m), F_m]} \right] V_{g,n}(b_1, \dots, b_n). \quad (2.144)$$

ここで $V_{g,n}(b_1, \dots, b_n)$ は

$$V_{g,n}(b_1, \dots, b_n) := \begin{cases} \frac{\delta(b_1 - b_2)}{b_1} & ((g, n) = (0, 2)) \\ 1 & ((g, n) = (0, 3)) \\ \int_{\text{Mod}(\hat{\Sigma}_{g,n}(b_1, \dots, b_n))} \mathcal{D}\hat{g} & ((g, n) \neq (0, 2), (0, 3)) \end{cases} \quad (2.145)$$

と定義される量で, Weil-Petersson 体積と呼ばれる. $(g, n) = (0, 2)$ のときを上式のように定義することで, 式 (2.138) は式 (2.144) の特殊例とみなせる. $(g, n) \neq (0, 2), (0, 3)$ の場合の具体的な計算方法は 2.3 節で述べる.

次に、 $\frac{\gamma}{\epsilon^2} \int_0^{\beta_m} d\tau_m K[g_m(b_m), F_m]$ の具体的な表式を計算しよう。以下、境界 $\partial\Sigma_m$ の多様体 $\Sigma_{g,n}$ への埋め込み $F_m(\tau_m)$ の ρ 成分を $\rho_m(\tau_m)$ 、 θ 成分を $\theta_m(\tau_m)$ と書く：

$$F_m(\tau_m) = (\rho_m(\tau_m), \theta_m(\tau_m)) \quad (2.146)$$

ここで座標 θ の b_m 周期性と座標 τ_m の β_m 周期性から、関数 $\rho_m(\tau_m), \theta_m(\tau_m)$ に関して

$$\rho_m(\tau_m + \beta_m) = \rho_m(\tau_m), \quad \theta_m(\tau_m + \beta_m) = \theta_m(\tau_m) + b_m \quad (2.147)$$

であることに注意されたい。このとき、wormhole 形のととき同様の計算によって境界項は

$$\frac{\gamma}{\epsilon^2} \int_0^{\beta_m} d\tau_m K = \frac{\gamma}{\epsilon} \frac{\beta_m}{\epsilon} + \frac{\gamma}{2} \int_0^{\beta_m} d\tau_m \left[\left(\frac{\theta_m''}{\theta_m'} \right)^2 + \theta_m'^2 \right] + O(\epsilon) \quad (2.148)$$

となる。したがって、これまでと同様に相殺項 $\int_{\partial\Sigma_m} \sqrt{h} \Phi$ を入れれば、境界項は Schwarz 作用

$$\begin{aligned} I_{\text{Sch}} \left[\tanh \frac{\theta_m}{2} \right] &:= -\gamma \int_0^{\beta_m} d\tau_m \text{Sch} \left\{ \tanh \frac{\theta_m}{2}, \tau_m \right\} \\ &= \frac{\gamma}{2} \int_0^{\beta_m} d\tau_m \left[\left(\frac{\theta_m''}{\theta_m'} \right)^2 + \theta_m'^2 \right] \end{aligned} \quad (2.149)$$

に帰着される。結局、 $(g, n) \neq (0, 1), (0, 2)$ のときの分配関数は Schwarz 作用の分配関数の計算および Weil-Petersson 体積の計算に帰着できる：

$$Z_{g,n}(\beta_1, \dots, \beta_n) = \int \prod_{m=1}^n \left[dg(b_m) Z_{\text{Sch}}^{\text{TRP}}(\beta_m, b_m) \right] V_{g,n}(b_1, \dots, b_n). \quad (2.150)$$

積分 $\int dg(b_m)$ と Weil-Petersson 体積の計算は 2.3 節で、Schwarz 作用の分配関数の計算は後の 2.4 節で行う。

2.3 Moduli 空間上の積分

本節では計量に関する汎関数積分、すなわち moduli 空間上の積分について解説する。以下、種数 g で境界数 n の曲面を $\Sigma_{g,n}$ と書き、曲面 Σ の moduli 空間を $\text{Mod}(\Sigma)$ と書く。

2.3.1 Wormhole 形の場合: $(g, n) = (0, 2)$

Wormhole 形 $(g, n) = (0, 2)$ の moduli 空間 $\text{Mod}(\Sigma_{0,2})$ 上に汎関数積分 2.129 を定義する。2.2.2 節では、 $(g, n) = (0, 2)$ のときの計量 $g(b)$ はパラメーター $b \in (0, \infty)$ を用いて式 (2.62) で与えられると説明したが、実はもう一つパラメーターが存在する。まずは以下でそのことを説明しよう。

今、wormhole 形 $(g, n) = (0, 2)$ の多様体 $\Sigma_{0,2}$ 上の任意の測地線 L を考え、この多様体の長さを b とする。この測地線によって多様体 $\Sigma_{0,2}$ を Σ_1, Σ_2 に分割する (図 10)。このとき、 Σ_1, Σ_2 のそれぞれに座標 $(\rho_1, \theta_1), (\rho_2, \theta_2)$ を導入する：

$$ds^2|_{M_i} = d\rho_i^2 + \cosh \rho_i^2 d\theta_i^2 \quad (\rho_i \in [0, \infty), \theta_i \sim \theta_i + b_i, i = 1, 2). \quad (2.151)$$

ただし、 $\rho_1 = \rho_2 = 0$ が測地線 L に対応するよう取る。

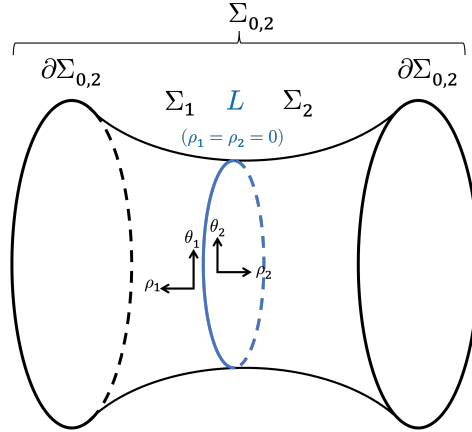


図 10: $\Sigma_{0,2}$ の分割

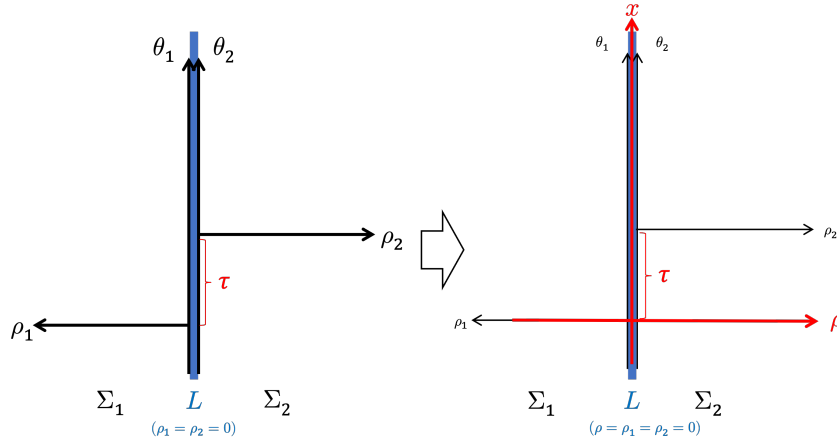


図 11: 座標変換 $(\rho_1, \tau_1), (\rho_2, \tau_2) \mapsto (\rho, x)$

ここで、各座標で計算した測地線 L の長さが b に一致しなければならないので、上式に現れるパラメータ b_1, b_2 は b に等しくなければならない。また多様体の定義から、各座標系から測地線 $L = M_1 \cap M_2$ 近傍の座標への変換が存在しなければならない。実際、測地線 $L = M_1 \cap M_2$ 近傍の座標を ρ, σ とし以下のような座標変換が存在する (図 11) :

$$\rho = \begin{cases} -\rho_1 & (\rho < 0) \\ \rho_2 & (\rho > 0) \end{cases}, x = \begin{cases} \frac{\theta_1}{b} & (\rho < 0) \\ \frac{\theta_2 + \tau}{b} & (\rho > 0) \end{cases} \quad (2.152)$$

ここで τ は 2 つの座標の間の振れをパラメータである。 θ_1, θ_2 の b 周期性から $\tau \sim \tau + b$ であるので、 $\tau \in [0, b)$ および $x \sim x + 1$ であることに注意されたい。この座標のもとで計量は以下のように書ける¹⁷ :

$$ds^2 = d\rho^2 + \cosh^2 \rho [bdx + \tau\delta(\rho)d\rho]^2 \quad (\rho \in (-\infty, \infty), x \sim x + 1). \quad (2.153)$$

これが wormhole 形 $(g, n) = (0, 2)$ のときの双曲計量の一般形である。¹⁸ したがって、wormhole 形

¹⁷座標変換の表式を $ds^2|_{M_i}$ に代入すれば良い。

¹⁸上式においてさらに $d\theta := bdx + \tau\delta(\rho)d\rho$ と座標変換すれば、これは式 (2.62) に一致するが、これは滑らかな変換ではないことに注意されたい。すなわち、計量 (2.62) は $\tau = 0$ の特殊な場合である。また、 τ が異なる値を取る場合は滑らかな座標変換、すなわち微分同相写像が存在しないので、Moduli 空間 $\text{Mod}(\Sigma_{0,2})$ 上の異なる元に対応する。

$(g, n) = (0, 2)$ のときの双曲計量は $b \in [0, \infty), \tau \in [0, b)$ と二つの実パラメータによって特徴付けられる。このパラメータは moduli 空間 $\text{Mod}(\Sigma_{0,2})$ 上の座標を与えることが知られている。この座標 (b, τ) を Fenchel–Nielsen 座標と呼ぶ。したがって、moduli 空間 $\text{Mod}(\Sigma_{0,2})$ は 2 次元空間である。そこで、moduli 空間 $\text{Mod}(\Sigma_{0,2})$ 上に以下のような symplectic 形式を考えることができる：

$$\Omega = db \wedge d\tau. \quad (2.154)$$

これを Weil-Petersson symplectic 形式と呼ぶ。この symplectic 形式から以下のような積分測度を定義できる：

$$\int_{\text{Mod}(\Sigma_{0,2})} \mathcal{D}g := \int_0^\infty db \int_0^b d\tau. \quad (2.155)$$

これを Weil-Petersson symplectic 測度と呼ぶ。被積分関数が振れ τ に依存しない場合は、Weil-Petersson symplectic 測度は以下のように書ける：

$$\int_{\text{Mod}(\Sigma_{0,2})} \mathcal{D}g = \int_0^\infty b db. \quad (2.156)$$

2.3.2 一般の場合: $(g, n) \neq (0, 1), (0, 2)$

ここでは $(g, n) \neq (0, 1), (0, 2)$ の多様体 $\Sigma_{g,n}$ を考えよう。2.2.3 節では以下のような多様体の分解を考えた：

1. $\Sigma_{g,n}$ の各境界 $\partial\Sigma_m$ の十分近傍の測地線 L_m を選び、その長さを b_m とする。
2. 測地線 L_m によって多様体 M を分割し、 $\partial\Sigma_m$ を含む領域を $\Sigma_m(b_m)$ 、境界を含まないものを $\hat{\Sigma}_{g,n}(b_1, \dots, b_n)$ とする。
3. $\Sigma_m(b_m)$ の計量を g_m 、 $\hat{\Sigma}_{g,n}(b_1, \dots, b_n)$ 上の計量を \hat{g} とする。

2.2.3 節では、 $\Sigma_m(b_m)$ の計量 g_m の持つパラメータを b_m であると説明したが、正確には b_m だけでなく計量 g_m と計量 \hat{g} の間の振れを表すパラメータ $\tau_m \in [0, b_m)$ が存在する。前節同様にこのパラメータ b_m, τ_m を用いて Weil-Petersson 測度が定義される：

$$\int dg_m = \int_0^\infty db_m \int_0^{b_m} d\tau_m. \quad (2.157)$$

特に、被積分関数が振れ τ_m に依存しないのであれば、以下のように書ける：

$$\int dg_m = \int_0^\infty b_m db_m. \quad (2.158)$$

Bulk 上の計量 \hat{g} についても、曲面を分割しその際に現れる分割した閉曲面の長さおよび振れに対応するパラメータによって積分測度すなわち Weil-Petersson 体積 (2.145) を定義できる。そのためには、双曲幾何についての深い知識が必要となるので、以下ではごく簡単な基本事項を直感的に解説するに留める。以下、長さが b_1, \dots, b_n の n 個の測地線を境界とする種数 g の曲面を $\hat{\Sigma}_{g,n}(b_1, \dots, b_n)$ とする。

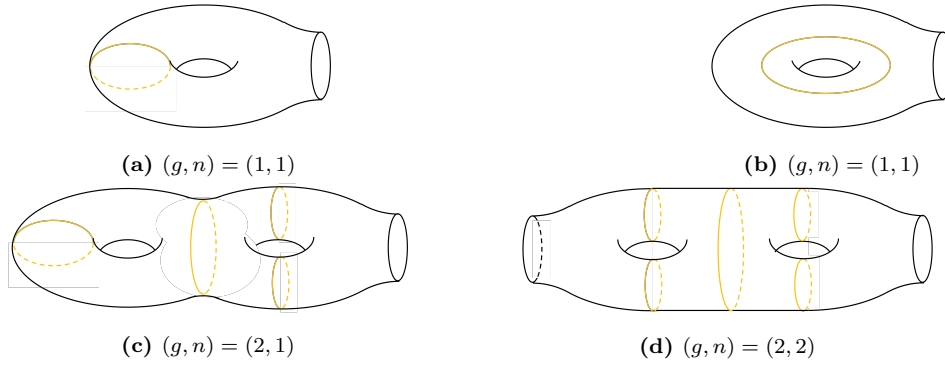


図 12: パンツ分解の具体例. 分解するための測地線が黄色線. $(g, n) = (1, 1)$ の 2 つの例のように, 分解の仕方は一意ではない.

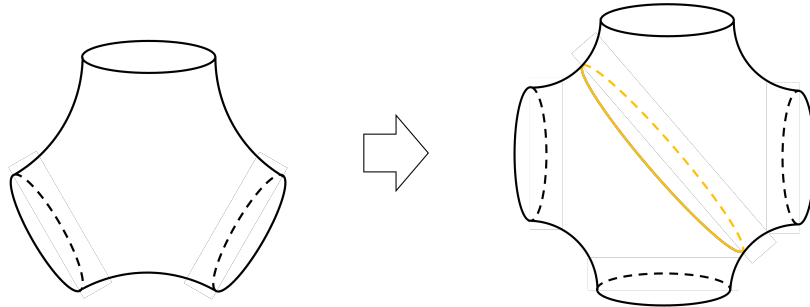


図 13: 境界を 1 つ加えた場合のパンツ分解. 分解するための測地線が黄色線.

パンツ分解 汎関数積分を定義する準備として, これまで同様, 計量 \hat{g} が定義される曲面 $\hat{\Sigma}_{g,n}(b_1, \dots, b_n)$ を分割することを考えよう. 実は, 任意の曲面 $\hat{\Sigma}_{g,n}(b_1, \dots, b_n)$ ($(g, n) \neq (0, 1), (0, 2)$) 上に $3g + n - 3$ 個の測地線を適当に引くことで曲面 $\hat{\Sigma}_{g,n}(b_1, \dots, b_n)$ を種数 0 で境界を 3 つ持つ $2g + n - 2$ 個のパンツ形の曲面に分解できる (図 12). これをパンツ分解 (pants decomposition) と呼ぶ. $(g, n) \neq (0, 1), (0, 2), (1, 0)$ の場合に必ず $2g + n - 2$ 個へのパンツ分解が可能であること, およびそのための測地線が $3g + n - 3$ 個であることを帰納法で示そう. $(g, n) = (h, m)$ の場合パンツ分解が可能であると仮定する. まず, 曲面 $\hat{\Sigma}_{h,m}$ に境界を 1 つ加えて曲面 $\hat{\Sigma}_{h,m+1}$ を作ることを考えよう. この際, 曲面 $\hat{\Sigma}_{h,m}$ をパンツ分解して得られるパンツ型の曲面の内, どれか 1 つに境界を加えることになる. もし, 付け加えた境界が複数のパンツ形曲面にまたがる場合は, 適当な微分同相写像によって境界の位置を適当にずらせば良い¹⁹. 境界が加えられたパンツ型曲面は, 図 13 のようにして 2 つのパンツ形曲面に分解することができる. したがって, 曲面 $\hat{\Sigma}_{h,m+1}$ はパンツ分解可能である. また, そのために必要な測地線の本数は $3h + (m + 1) - 3$ となる. また, パンツ形曲面の数は $2h + (m + 1) - 2$ 個となる. 次に, 曲面 $\hat{\Sigma}_{h,m}$ にハンドル, すなわち穴を 1 つ加えて曲面 $\hat{\Sigma}_{h+1,m}$ を作ることを考えよう. この際, 曲面 $\hat{\Sigma}_{h,m}$ をパンツ分解して得られるパンツ型の曲面の内, どれか 1 つにハンドルを加えることになる. もし, 付け加えた境界が複数のパンツ形曲面にまたがる場合は, 適当な微分同相写像によってハンドルの位置を適当にずらせば良い²⁰. 境界が加えられたパンツ型曲面は, 図 14 のようにして 3 つのパンツ形曲面に分解することができる. したがって, 曲面 $\hat{\Sigma}_{h+1,m}$ はパンツ分解可能である. また, そのために必要な測地線の本数は $3(h + 1) + m - 3$ となる. また, パンツ形曲面の

¹⁹このような微分同相写像が存在するかは非自明であるが, ここでは存在を認めて議論を進める.

²⁰このような微分同相写像が存在するかは非自明であるが, ここでは存在を認めて議論を進める.

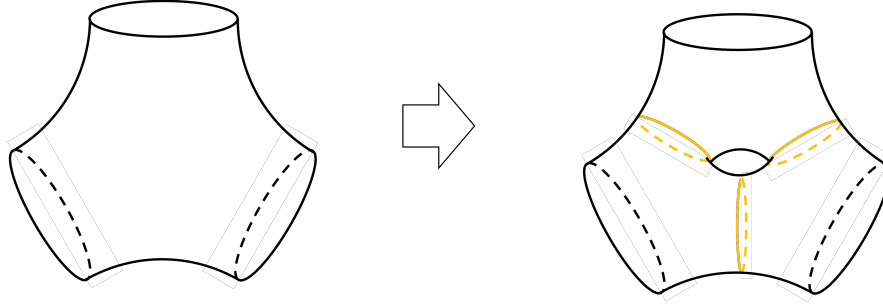


図 14: ハンドルを 1 つ加えた場合のパンツ分解. 分解するための測地線が黄色線.

数は $2(h+1) + m - 2$ 個となる.

以上のパンツ分解から, 曲面 $\hat{\Sigma}_{g,n}$ 上の計量 \hat{g} は $2g+n-2$ 個のパンツ型曲面上の計量に分解できる. また, 各パンツ形曲面を接続する際の自由度として, 接続部分の測地線の長さ b'_1, b'_2, \dots および両端の座標の振れ τ_1, τ_2, \dots の 2 つが存在する. パンツ分割に必要な測地線は $3g+n-3$ であったから, 接続の自由度は $2(3g+n-3)$ である. したがって, 曲面 $\hat{\Sigma}_{g,n}$ 上の計量 \hat{g} は $2(3g+n-3)$ 個のパラメータ $(\vec{b}', \vec{\tau}) := (b'_1, \dots, b'_k, \tau_1, \dots, \tau_k)$ ($k = 3g+n-3$) および各パンツ形曲面上の計量によって特徴付けられる. このことを用いて次節で moduli 空間上に座標を定義する.

ここでパラメータ $(\vec{b}', \vec{\tau}) := (b'_1, \dots, b'_k, \tau_1, \dots, \tau_k)$ ($k = 3g+n-3$) の取りうる範囲についてコメントしておく. まず, パラメーター b'_1, \dots, b'_k は, 測地線の長さに対応する量であることから, 正の実数である. すなわち, $\vec{b}' \in \mathbb{R}_+^{3g+n-3}$ である. ここで \mathbb{R}_+ は正の実数の全体である. また, パラメーター τ_1, \dots, τ_k は, 振れに対応する量であるが, 実数であればなんでも良い. すなわち, $\vec{\tau} \in \mathbb{R}^{3g+n-3}$ である.

Teichmüller 空間と写像類群 Moduli 空間を考える前に, 準備として Teichmüller 空間を考えよう. 曲面 $\hat{\Sigma}_{g,n}$ 上の双曲計量の全体を $\mathcal{G}(\hat{\Sigma}_{g,n})$ とすると, moduli 空間 $\text{Mod}(\hat{\Sigma}_{g,n})$ は以下のようにして定義されるのであった:

$$\text{Mod}(\hat{\Sigma}_{g,n}) := \mathcal{G}(\hat{\Sigma}_{g,n}) / \text{Diff}(\hat{\Sigma}_{g,n}). \quad (2.159)$$

ただし, ここで $\text{Diff}(\hat{\Sigma}_{g,n})$ は $\hat{\Sigma}_{g,n}$ 上の微分同相写像であって境界上で恒等写像となるものの全体である. 曲面上に計量を定めると, 曲面上の 2 点に距離が定義されるので, 曲面の形・大きさが定まる. したがって, 計量の全体 $\mathcal{G}(\hat{\Sigma}_{g,n})$ は, 曲面 $\hat{\Sigma}_{g,n}$ と同相な (すなわち種数 g で境界が n 個の曲面であって, 大きさ・形が異なるような) 曲面の集合とみなせる. ここで, 2次元面上の微分同相写像は等角写像であったから, 微分同相写像で移り合う曲面同士は大きさは異なるが形は同じものである. 直感的には, これは初等幾何でいう相似関係であるこの相似関係は同値関係を定め, その商集合 $\mathcal{G}(\hat{\Sigma}_{g,n}) / \text{Diff}(\hat{\Sigma}_{g,n})$ は, 種数 g で境界が n 個の曲面のうち形だけが異なるものの集合となる. したがって, moduli 空間 $\text{Mod}(\hat{\Sigma}_{g,n})$ は種数 g で境界が n 個の曲面の形の全体がなす集合とみなせる.

これに対して, Teichmüller 空間 $\text{Teich}(\hat{\Sigma}_{g,n})$ は以下のようにして定義される:

$$\text{Teich}(\hat{\Sigma}_{g,n}) := \mathcal{G}(\hat{\Sigma}_{g,n}) / \text{Diff}_0(\hat{\Sigma}_{g,n}). \quad (2.160)$$

ここで $\text{Diff}_0(\hat{\Sigma}_{g,n})$ は恒等写像と isotopoic ²¹ な微分同相写像の全体がなす集合である. それゆえ,

²¹ $f, g \in \text{Diff}(\hat{\Sigma}_{g,n})$ が isotopoic であるとは, ある連続写像 $F: \hat{\Sigma}_{g,n} \times [0, 1] \rightarrow \hat{\Sigma}_{g,n}$ があって, 任意の $x \in \hat{\Sigma}_{g,n}$ に対

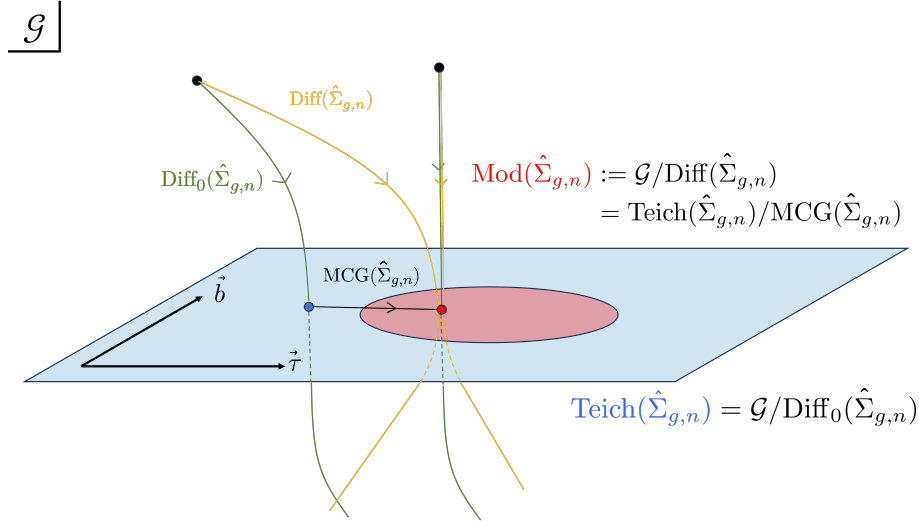


図 15: 計量全体 \mathcal{G} , moduli 空間 $\text{Mod}(\hat{\Sigma}_{g,n})$, Teichmüller 空間 $\text{Teich}(\hat{\Sigma}_{g,n})$ の概念図. 計量全体が $\text{Diff}_0(\hat{\Sigma}_{g,n})$ 変換 (緑色の曲線) によって同一視されることで Teichmüller 空間 (青色の領域) が作られる. 一方, 計量全体が $\text{Diff}(\hat{\Sigma}_{g,n})$ 変換 (黄色の曲線) によって同一視されることで moduli 空間 (赤色の領域) が作られる. また, Teichmüller 空間を MCG 変換 (黒色の曲線) によって同一視することでも moduli 空間が作られる. Moduli 空間は Teichmüller 空間の一部であるとみなせるが, これは $\text{Diff}(\hat{\Sigma}_{g,n})$ 変換によって移りあう場合でも, $\text{Diff}_0(\hat{\Sigma}_{g,n})$ 変換で移り合うとは限らないことに起因する.

moduli 空間を定義するのに用いた相似関係よりも強い同値関係で商集合を定めている. 直感的には, 2つの曲面が恒等写像と isotopic な微分同相写像で移り変わることは, それらが相似であって微小変換を繰り返すことで移り変わることを指す.

Teichmüller 空間 $\text{Teich}(\hat{\Sigma}_{g,n})$ は moduli 空間 $\text{Mod}(\hat{\Sigma}_{g,n})$ よりも大きな空間であるから, 以下ののように moduli 空間 $\text{Mod}(\hat{\Sigma}_{g,n})$ を Teichmüller 空間 $\text{Teich}(\hat{\Sigma}_{g,n})$ の商集合として書くことができる (図 15):

$$\text{Mod}(\hat{\Sigma}_{g,n}) = \text{Teich}(\hat{\Sigma}_{g,n})/\text{MCG}(\hat{\Sigma}_{g,n}), \quad (2.161)$$

$$\text{MCG}(\hat{\Sigma}_{g,n}) := \text{Diff}(\hat{\Sigma}_{g,n})/\text{Diff}_0(\hat{\Sigma}_{g,n}) \quad (2.162)$$

ここで定義された変換群 $\text{MCG}(\hat{\Sigma}_{g,n})$ を modular 群あるいは写像類群 (mapping class group) と呼ぶ. 種数および境界数が小さい場合には写像類群の具体系が知られている:

$$\text{MCG}(\hat{\Sigma}_{0,1}) = \{\text{id}\}, \quad (2.163)$$

$$\text{MCG}(\hat{\Sigma}_{0,2}) \simeq \mathbb{Z}, \quad (2.164)$$

$$\text{MCG}(\hat{\Sigma}_{1,0}) \simeq \text{SL}(2, \mathbb{Z}). \quad (2.165)$$

ここで id は恒等写像である. 写像類群の元の代表例としては Dehn twist というものが知られている. これは, 曲面上の適当な閉曲線にそって曲面を切り, 360度捻ってから再び曲面を1つに繋ぎ合わせるような変換である (図 16).

して $F(x,0) = f$, $F(x,1) = g$ を満たし, 任意の $t \in [0,1]$ に対して $F(x,t)$ が x について連続な関数になることをいう. 直感的には, 2つの関数 f, g が連続変形で移り変わるようなことを指す.

$\text{Diff}(\hat{\Sigma}_{g,n})$ の元であって, $\text{Diff}_0(\hat{\Sigma}_{g,n})$ の元でないものは, 微小変換の繰り返しで得られないような微分同相写像である. これは, ゲージ理論における large gauge transformation に対応する.

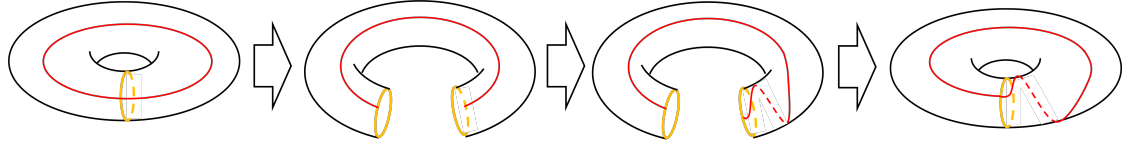


図 16: トーラス上の Dehn twist の例. 黄色線の閉曲線にそって捻りを加えている. 赤色の閉曲線は振れを可視化するために付け加えた. 捻りの前後で形が変わらないが, 連続的な変形でこの捻りを行うことはできない. したがってこの変換は $\text{Diff}(\hat{\Sigma}_{g,n})$ の元であって, $\text{Diff}_0(\hat{\Sigma}_{g,n})$ の元ではない.

Fenchel-Nielsen 座標と Weil-Petersson 測度 準備が出揃ったので, moduli 空間上に座標を定義しよう. 前段では, 曲面 $\hat{\Sigma}_{g,n}$ 上の計量 \hat{g} は $2(3g+n-3)$ 個のパラメータ $(\vec{b}', \vec{\tau})$ および各パンツ形曲面上の計量によって特徴付けられることが分かった. すでに 2.2.3 節で触れているように, 実は, 各境界の測地線の長さが与えられれば, パンツ型の計量は Diff_0 の違いを除いて一意に定まることが知られている (図 9). 逆に, 正の数が 3 つ与えられれば, それを境界の測地線の長さとするようなパンツ型曲面が存在する. したがって, 曲面 $\hat{\Sigma}_{g,n}$ 上の計量 \hat{g} (を $\text{Diff}_0(\hat{\Sigma}_{g,n})$ によって同値類をとったもの) は $2(3g+n-3)$ 個のパラメータ $(\vec{b}', \vec{\tau}) \in \mathbb{R}_+^{3g+n-3} \times \mathbb{R}^{3g+n-3}$ によって特徴付けられる. これは moduli 空間および Teichmüller 空間上の座標を定めることが知られており, この座標を Fenchel-Nielsen 座標と呼ぶ. Fenchel-Nielsen 座標を用いると, moduli 空間および Teichmüller 空間上に標準的な symplectic 形式 Ω が以下のようにして定義できる:

$$\Omega = d\vec{b}' \wedge d\vec{\tau} = \sum_{i=1}^{3g+n-3} db'_i \wedge d\tau_i. \quad (2.166)$$

これを Weil-Petersson symplectic 形式とよぶ. この Weil-Petersson symplectic 形式から体積形式が定義できるので, moduli 空間および Teichmüller 空間上に測度 $\mathcal{D}\hat{g}$ を定めることができる. このようにして定まる測度を Weil-Petersson 測度と呼ぶ. ところで, Teichmüller 空間 $\text{Teich}(\hat{\Sigma}_{g,n})$ はパラメータ $(\vec{b}', \vec{\tau})$ の全体がなす $\mathbb{R}_+^{3g+n-3} \times \mathbb{R}^{3g+n-3}$ と微分同相であることが知られている. したがって, Weil-Petersson 測度による Teichmüller 空間の体積は以下のようにして計算できる:

$$\int_{\text{Teich}(\hat{\Sigma}_{g,n})} \mathcal{D}\hat{g} := \int_{\text{Teich}(\hat{\Sigma}_{g,n})} \frac{\Omega^{3g+n-3}}{(3g+n-3)!} = \int_{\mathbb{R}_+^{3g+n-3}} d\vec{b}' \int_{\mathbb{R}^{3g+n-3}} d\vec{\tau}. \quad (2.167)$$

それでは, 同様にして Weil-Petersson 体積と呼ばれる Weil-Petersson 測度による moduli 空間の体積を計算することができるだろうか. Moduli 空間と Teichmüller 空間の関係式 (2.161) より, それを行うには写像類群 $\text{MCG}(\hat{\Sigma}_{g,n})$ を明らかにし, 積分範囲を $\mathbb{R}_+^{3g+n-3} \times \mathbb{R}^{3g+n-3} / \text{MCG}(\hat{\Sigma}_{g,n})$ に制限しなければならない. 例えば, $\tau = 0$ の場合と $\tau = b$ の場合は Dehn twist で移り合う関係にあるので Teichmüller 空間上では区別されるが, moduli 空間上では同一視される. したがって, moduli 空間上の振れパラメータ τ は $[0, b)$ に制限される. このように写像類群による同一視を考えると moduli 空間上ではパラメータ $(\vec{b}', \vec{\tau})$ が $\mathbb{R}_+^{3g+n-3} \times \mathbb{R}^{3g+n-3}$ よりも狭い領域に制限される. ところが, 写像類群の研究は未だ発展途上であり, $\mathbb{R}_+^{3g+n-3} \times \mathbb{R}^{3g+n-3} / \text{MCG}(\hat{\Sigma}_{g,n})$ を具体的に求めることは非常に困難である. そこで, Weil-Petersson 体積を直接計算するのではなく, 漸化式によって漸次計算することを可能にしたのが Mirzakhani 漸化式 [13] である. これを次で説明する.

Mirzakhani 漸化式 Weil-Petersson 体積は bulk の計量の汎関数積分による寄与であったが, 写像類群の複雑性からその積分は簡単には実行できない. (g, n) が小さい値のときは厳密な表式が計算さ

れているが、一般の (g, n) に対しての具体的な表式は知られていない。しかし、以下のような漸化式によって漸次計算できることが知られている [13] :

$$V_{g,n}(b_1, B) = \frac{1}{2} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty db'_2 db'_2 \frac{D(b_1, b'_1, b'_2)}{b_1} \times \left[V_{g-1, n+1}(b'_1, b'_2, B) + \sum_{\substack{h_1+h_2=g, \\ B_1 \cup B_2=B, \\ \text{stable}}} V_{h_1, 1+|B_1|}(b'_1, B_1) V_{h_2, 1+|B_2|}(b'_2, B_2) \right] + \sum_{k=2}^n \int_0^\infty b'_1 db'_1 \left[1 - \frac{T(b_1, b'_1, b_k)}{b_1} \right] V_{g, n-1}(b'_1, B \setminus \{b_k\}). \quad (2.168)$$

ここで $B := \{b_2, \dots, b_n\}$ と表記し,

$$T(b_1, b_2, b_3) := \log \left[\frac{\cosh\left(\frac{b_3}{2}\right) + \cosh\left(\frac{b_1+b_2}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{b_3}{2}\right) + \cosh\left(\frac{b_1-b_2}{2}\right)} \right], \quad (2.169)$$

$$D(b_1, b_2, b_3) := b_1 - T(b_1, b_2, b_3) - T(b_1, b_3, b_2) \quad (2.170)$$

とおいた。また、stable とは種数 g と境界数 n が $2g + n - 2 > 0$ を満たす曲面のことを指す。上式を Mirzakhani 漸化式と呼ぶ。これを式 (2.145) で定義した $V_{0,3}(b_1, b_2, b_3) = 1$ および、Mirzakhani 漸化式の発見以前からすでに計算されていた [19]

$$V_{1,1}(b) = \frac{4\pi^2 + b^2}{24} \quad (2.171)$$

を初項として漸次計算していけば $V_{g,n}$ が得られる。例えば、以下のようなになる [13] :

$$V_{0,4}(b_1, b_2, b_3, b_4) = \frac{4\pi^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2}{2}, \quad (2.172)$$

$$V_{1,2}(b_1, b_2) = \frac{(4\pi^2 + b_1^2 + b_2^2)(12\pi^2 + b_1^2 + b_2^2)}{192}, \quad (2.173)$$

$$V_{0,5}(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) = \frac{1}{8} \left(80\pi^2 + \sum_{i=1}^5 b_i^4 + 4 \sum_{1 \leq i < j \leq 5} b_i^2 b_j^2 + 24\pi^2 \sum_{i=1}^5 b_i^2 \right), \quad (2.174)$$

$$V_{2,1}(b_1) = \frac{(4\pi^2 + b_1^2)(12\pi^2 + b_1^2)(6960\pi^4 + 384\pi^2 b_1^2 + 5b_1^4)}{2211840}. \quad (2.175)$$

導出は付録 A.3.3 節に記した。なお、 $T(b_1, b_2, b_3)$ を以下のように変形しておくとも積分計算が楽になる。

$$\begin{aligned} b_1 - T(b_1, b_2, b_3) &= \log \left[e^{b_1} \frac{\cosh\left(\frac{b_1-b_2+b_3}{4}\right) \cosh\left(\frac{b_1-b_2-b_3}{4}\right)}{\cosh\left(\frac{b_1+b_2+b_3}{4}\right) \cosh\left(\frac{b_1+b_2-b_3}{4}\right)} \right] \\ &= \log \left[\frac{\left(1 + e^{\frac{b_1-b_2+b_3}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{b_1-b_2-b_3}{2}}\right)}{\left(1 + e^{\frac{-b_1-b_2+b_3}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{-b_1-b_2-b_3}{2}}\right)} \right]. \end{aligned} \quad (2.176)$$

最初の変形は和積の公式および \log の基本性質 $b_1 = \log e^{b_1}$, $-\log A/B = \log B/A$ を用いた。また、 $D(b_1, b_2, b_3)$ は以下のように変形しておくともよい :

$$\begin{aligned} D(b_1, b_2, b_3) &= b_1 - \log \left[\frac{\cosh\left(\frac{b_1+b_2+b_3}{4}\right) \cosh\left(\frac{b_1+b_2-b_3}{4}\right)}{\cosh\left(\frac{b_1-b_2+b_3}{4}\right) \cosh\left(\frac{b_1-b_2-b_3}{4}\right)} \right] - \log \left[\frac{\cosh\left(\frac{b_1+b_2+b_3}{4}\right) \cosh\left(\frac{b_1-b_2+b_3}{4}\right)}{\cosh\left(\frac{b_1+b_2-b_3}{4}\right) \cosh\left(\frac{b_1-b_2-b_3}{4}\right)} \right] \\ &= \log \left[e^{b_1} \frac{\cosh^2\left(\frac{b_1+b_2+b_3}{4}\right)}{\cosh^2\left(\frac{b_1-b_2-b_3}{4}\right)} \right] \end{aligned}$$

$$= 2 \log \left[\frac{e^{\frac{b_1}{2}} + e^{\frac{b_2+b_3}{2}}}{e^{-\frac{b_1}{2}} + e^{\frac{b_2+b_3}{2}}} \right]. \quad (2.177)$$

Mirzakhani 漸化式の証明は複雑であるため、ここで詳細を述べることはできないが、図形的な理解を簡単に解説しておく。まず、考える曲面 $\hat{\Sigma}_{g,n}(b_1, \dots, b_n)$ を図 17 のように低い種数のものとパンツ型曲面に分解する。すると moduli 空間 $\text{Mod}(\hat{\Sigma}_{g,n}(b_1, \dots, b_n))$ 上の積分は以下のように書ける：

$$\begin{aligned} & \int_{\text{Mod}(\hat{\Sigma}_{g,n}(b_1, \dots, b_n))} \mathcal{D}\hat{g} \\ &= \frac{1}{2} \int db'_1 d\tau_1 \int db'_2 d\tau_2 \left[\int_{\text{Mod}(\hat{\Sigma}_{g-1, n+1}(b'_1, b'_2, b_2, \dots, b_n))} \mathcal{D}\hat{g} + \sum_{\substack{h_1+h_2=g \\ B_1 \cup B_2=B}} \int_{\text{Mod}(\hat{\Sigma}_{h_1|B_1|}(B_1))} \mathcal{D}\hat{g} \int_{\text{Mod}(\hat{\Sigma}_{h_2|B_2|}(B_2))} \mathcal{D}\hat{g} \right] \\ & \quad + \sum_{k=2}^n \int db'_1 d\tau_1 \int_{\text{Mod}(\hat{\Sigma}_{g, n-1}(b'_1, B \setminus \{b_k\}))} \mathcal{D}\hat{g} \\ &= \frac{1}{2} \int db'_1 d\tau_1 \int db'_2 d\tau_2 \left[V_{g-1, n+1}(b'_1, b'_2, B) + \sum_{\substack{h_1+h_2=g \\ B_1 \cup B_2=B}} V_{h_1, 1+|B_1|}(b'_1, B_1) V_{h_2, 1+|B_2|}(b'_2, B_2) \right] \\ & \quad + \sum_{k=2}^n \int db'_1 d\tau_1 V_{g, n-1}(b'_1, B \setminus \{b_k\}). \end{aligned} \quad (2.178)$$

ここで (b'_1, τ_1) および (b'_2, τ_2) はパンツ型曲面とそれ以外の部分を繋げる際のパラメータ（測地線の長さと同変）である。低い種数の Weil-Petersson 体積は、その曲面の境界の長さだけに依存するはずなので、同変パラメータ τ_1, τ_2 の積分は低い種数の Weil-Petersson 体積の表式によらず実行できるはずである。この際、接続部分の Dehn twist から導かれる同変パラメータの周期性を考えると、 τ_1, τ_2 の範囲はそれぞれ $[0, b'_1), [0, b'_2)$ に制限される。したがって

$$\int db'_1 d\tau_1 \rightarrow \int_0^\infty b'_1 db'_1, \quad \int db'_2 d\tau_2 \rightarrow \int_0^\infty b'_2 db'_2 \quad (2.179)$$

のように書き換えられると予想される。しかし、実際には接続部分の Dehn twist 以外の写像類群の元の寄与が存在して

$$\int db'_1 d\tau_1 \int db'_2 d\tau_2 = \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty b'_2 db'_2 \frac{D(b_1, b'_1, b'_2)}{b_1}, \quad (2.180)$$

$$\int db'_1 d\tau_1 = \int_0^\infty b'_1 db'_1 \left[1 - \frac{T(b_1, b'_1, b_k)}{b_1} \right] \quad (2.181)$$

と書き換えられる。これを式 (2.178) に代入することで Mirzakhani 漸化式 (2.168) が導かれる。 $D(b_1, b'_1, b'_2), T(b_1, b'_1, b_k)$ を含む部分が写像類群の寄与を表した項で、この表式を導いたことが Mirzakhani の重要な功績である²²。ここで上式の導出を解説することはしないが、物理学者向けの解説は [20] の section 3 や [21] の Appendix D を参照されたい。

本節の最後に $V_{1,1}(b)$ についてコメントをしておく。曲面 $\hat{\Sigma}_{1,1}(b)$ には \mathbb{Z}_2 対称性があり、Mirzakhani 漸化式の左辺に曲面 $\hat{\Sigma}_{1,1}(b)$ が含まれる場合は、同変パラメータ τ の範囲は $[0, b)$ ではなく $[0, b/2)$ となることが知られている。すなわち、積分 $\int_0^\infty b db$ は $\int_0^\infty b db/2$ と変更される。あるいは、Weil-Petersson

²²彼女は Mirzakhani 漸化式の発見によって、女性初・イラン人初の Fields 賞を 2014 年に授与されている。

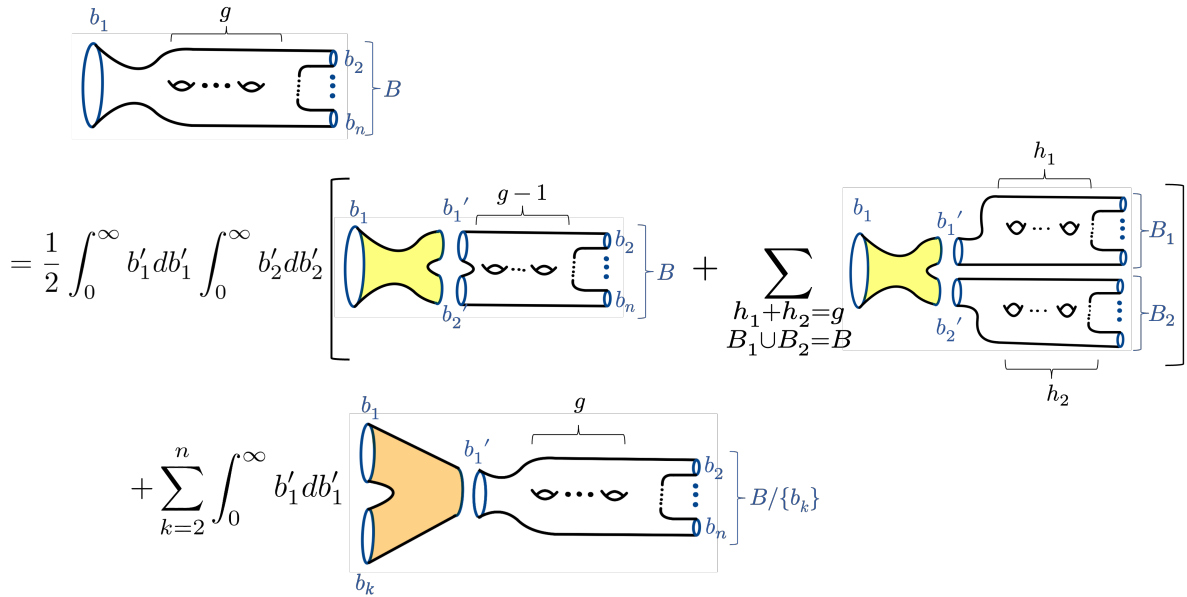


図 17: Mirzakhani 漸化式の図形的な理解. 図中の黄色の部分が $D(b_1, b'_1, b'_2)/b_1$ および橙色の部分が $1 - T(b_1, b'_1, b_k)/b_1$ に対応している.

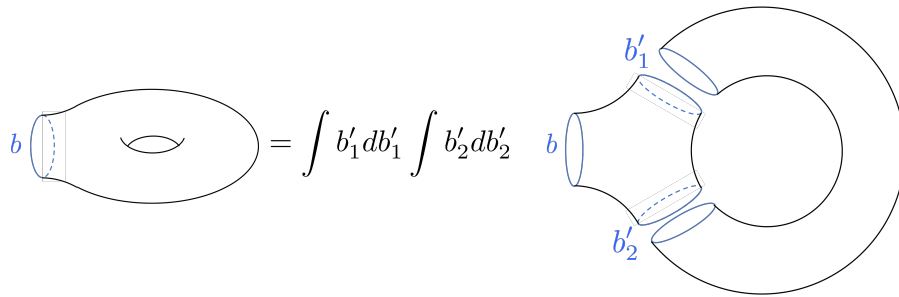


図 18: (2.183) 式の図形的な理解.

体積 $V_{1,1}(b)$ を Mirzakhani 漸化式の左辺に代入するときは式 (2.171) の代わりに, それを 1/2 倍したものの

$$\tilde{V}_{1,1}(b) = \frac{4\pi^2 + b^2}{48} \tag{2.182}$$

を代入しなければならない. なお, この $\tilde{V}_{1,1}(b)$ は Mirzakhani 漸化式を用いて $V_{0,2}, V_{0,3}$ から計算することが可能である. 本来, 漸化式の左辺には stable な曲面の Weil-Petersson 体積しか現れないが, $V_{0,2}$ についても和をとって良いと仮定すれば, 以下が成り立つ (図 18 参照):

$$\tilde{V}_{1,1}(b) = \frac{1}{2} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty b'_2 db'_2 \frac{D(b, b'_1, b'_2)}{b} V_{0,2}(b'_1, b'_2) \tag{2.183}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty b'_2 db'_2 \frac{D(b, b'_1, b'_2)}{b} \frac{\delta(b'_1 - b'_2)}{b'_1}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty b' db' \frac{D(b, b', b')}{b}. \tag{2.184}$$

上式の積分は難しいが実行すると式 (2.182) の左辺が導かれる (導出は付録 A.3.2 節参照).

2.4 Schwarz 理論

本節では JT 重力の分配関数の計算に必要な Schwarz 作用について解説する．前節の結果から，JT 重力の分配関数には以下の Schwarz 作用の分配関数が含まれることがわかった：

$$Z_{\text{Sch}}^{\text{Disk}}(\beta) := \int_{\text{Diff}(S^1)/\text{PSL}(2, \mathbb{R})} \mathcal{D}\theta e^{-I_{\text{Sch}}[\tan \frac{\theta}{2}]}, \quad (2.185)$$

$$Z_{\text{Sch}}^{\text{Trp}}(\beta, b) := \int_{\text{Diff}(S^1)/\text{U}(1)} \mathcal{D}\theta e^{-I_{\text{Sch}}[\tanh \frac{\theta}{2}]}, \quad (2.186)$$

$$I_{\text{Sch}}[F] := -\gamma \int_0^\beta d\tau \text{Sch}\{F, \tau\}. \quad (2.187)$$

ここで， θ は以下を満たす：

$$\theta(\tau + \beta) = \begin{cases} \theta(\tau) + 2\pi & (\theta \in \text{Diff}(S^1)/\text{PSL}(2, \mathbb{R})) \\ \theta(\tau) + b & (\theta \in \text{Diff}(S^1)/\text{U}(1)) \end{cases}. \quad (2.188)$$

ここではまず Schwarz 作用の古典解を求める．その後，symplectic 形式から積分測度を定義する．最後に古典解周りの摂動によって分配関数を計算する．このとき，symplectic 形式をうまく定義することで分配関数の摂動計算と厳密な（非摂動な）積分が一致する [5].

2.4.1 古典解

摂動計算の準備として Schwarz 作用

$$I_{\text{Sch}}[F] := -\gamma \int_0^\beta d\tau \text{Sch}\{F, \tau\}. \quad (2.189)$$

の古典解を求めよう． F についての変分

$$\text{Sch}\{F + \delta F, \tau\} - \text{Sch}\{F, \tau\} = \frac{d}{dF} \text{Sch}\{F, \tau\} \delta F = \frac{1}{F'} \frac{d}{d\tau} [\text{Sch}\{F, \tau\}] \delta F \quad (2.190)$$

から以下の運動方程式を得る：

$$\frac{d}{d\tau} \text{Sch}\{F, \tau\} = 0. \quad (2.191)$$

したがって，ある定数 E があって

$$\text{Sch}\{F, \tau\} = E \quad (2.192)$$

となる．この微分方程式の一般解は以下で与えられる²³：

$$F(\tau) = \begin{cases} A \tan\left(\sqrt{\frac{E}{2}}\tau + B\right) + C & (E \geq 0) \\ A \tanh\left(\sqrt{\frac{-E}{2}}\tau + B\right) + C & (E < 0) \end{cases}. \quad (2.193)$$

ここで A, B, C は定数である．以上の一般解から，Disk 形るとき $I_{\text{Sch}}[\tan \frac{\theta}{2}]$, $\theta \in \text{Diff}(S^1)/\text{SL}(2, \mathbb{R})$ と trumpet 形るとき $I_{\text{Sch}}[\tanh \frac{\theta}{2}]$, $\theta \in \text{Diff}(S^1)/\text{U}(1)$ のそれぞれについて古典解を求めよう．

²³微分方程式 (2.192) を直接解くのは難しいが，式 (2.193) が解であることは容易に確かめられる．微分方程式 (2.192) は 3 階常微分方程式であるから，その一般解には最大 3 つの任意定数が含まれる．したがって式 (2.193) が一般解であると推測できる．

1. **Disk 形の場合** : Disk 形のときを考えよう. 作用は以下のように与えられるのであった :

$$I_{\text{Sch}} \left[\tan \frac{\theta}{2} \right] = -\gamma \int_0^\beta d\tau \text{Sch} \left\{ \tan \frac{\theta}{2}, \tau \right\} = \frac{\gamma}{2} \int_0^\beta d\tau \left[\left(\frac{\theta''(\tau)}{\theta'(\tau)} \right)^2 - \theta'(\tau)^2 \right]. \quad (2.194)$$

ここで, Schwarz 微分の分数変換に対する不変性 (2.124) より

$$\text{Sch} \left\{ \tan \frac{\theta}{2}, \tau \right\} = \text{Sch} \left\{ A \tan \frac{\theta}{2} + C, \tau \right\} \quad (2.195)$$

であることから, 一般解 (2.193) より

$$\theta(\tau) = \sqrt{2E}\tau + 2B \quad (2.196)$$

を得る. さらに θ の周期性 $\theta(\tau + \beta) = \theta(\tau) + 2\pi$ より, $\sqrt{2E} = 2\pi/\beta$ となる. また, 座標 τ の並進対称性によって $B = 0$ とできる. したがって, disk 形のときの古典解は

$$\theta(\tau) = \frac{2\pi}{\beta}\tau \quad (2.197)$$

である.

2. **Trumpet 形の場合** : Trumpet 形のときを考えよう. 作用は以下のように与えられるのであった :

$$I_{\text{Sch}} \left[\tanh \frac{\theta}{2} \right] = -\gamma \int_0^\beta d\tau \text{Sch} \left\{ \tanh \frac{\theta}{2}, \tau \right\} = \frac{\gamma}{2} \int_0^\beta d\tau \left[\left(\frac{\theta''(\tau)}{\theta'(\tau)} \right)^2 + \theta'(\tau)^2 \right] \quad (2.198)$$

ここで,

$$\text{Sch} \left\{ \tanh \frac{\theta}{2}, \tau \right\} = \text{Sch} \left\{ A \tanh \frac{\theta}{2} + C, \tau \right\} \quad (2.199)$$

であることから, 一般解 (2.193) より

$$\theta(\tau) = \sqrt{-2E}\tau + 2B \quad (2.200)$$

を得る. さらに θ の周期性 $\theta(\tau + \beta) = \theta(\tau) + b$ より, $\sqrt{-2E} = b/\beta$ となる. また, 座標 τ の並進対称性によって $B = 0$ とできる. したがって, trumpet 形のときの古典解は

$$\theta(\tau) = \frac{b}{\beta}\tau \quad (2.201)$$

である.

2.4.2 Symplectic 形式と測度

本節では $\text{Diff}(S^1)/\text{PSL}(2, \mathbb{R}), \text{Diff}(S^1)/\text{U}(1)$ 上に定義された symplectic 形式 Ω を用いて積分測度を定義する. 多様体 \mathcal{M} 上の symplectic 形式は非退化な閉 2-形式として定義される. すなわち, あるベクトル場 g が任意のベクトル場 f に対して $\Omega(f, g) = 0$ ならば $g = 0$ であることを満たし, かつ $d\Omega = 0$ となるような 2-形式である. \mathcal{M} 上に symplectic 形式 Ω が定義されれば, \mathcal{M} 上の体積形式 η は

$$\eta := \frac{1}{(\dim \mathcal{M}/2)!} \Omega^{\dim \mathcal{M}/2} \quad (2.202)$$

と定義できる²⁴. $\mathcal{M} = \text{Diff}(S^1)/\text{PSL}(2, \mathbb{R}), \text{Diff}(S^1)/\text{U}(1)$ 上には symplectic 形式 Ω が以下のようにして与えられる [22, 23]²⁵ :

$$\Omega = \int_0^\beta d\tau \left[\left(\frac{d\theta(\tau)}{\theta'(\tau)} \right)' \wedge \left(\frac{d\theta(\tau)}{\theta'(\tau)} \right)'' - 2\text{Sch}(\theta) \left(\frac{d\theta(\tau)}{\theta'(\tau)} \right) \wedge \left(\frac{d\theta(\tau)}{\theta'(\tau)} \right) \right], \quad (2.203)$$

$$\text{Sch}(\theta) = \begin{cases} \text{Sch} \left\{ \tan \frac{\theta}{2}, \tau \right\} & (\theta \in \text{Diff}(S^1)/\text{PSL}(2, \mathbb{R})) \\ \text{Sch} \left\{ \tanh \frac{\theta}{2}, \tau \right\} & (\theta \in \text{Diff}(S^1)/\text{U}(1)) \end{cases}. \quad (2.204)$$

ここで'は τ についての微分で, d は \mathcal{M} 上の外微分である. 上の symplectic 形式を Kirillov-Kostant-Souriau (KKS) symplectic 形式と呼ぶ. $\text{Diff}(S^1)/\text{PSL}(2, \mathbb{R}), \text{Diff}(S^1)/\text{U}(1)$ のそれぞれの場合について $\text{Sch}(\theta)$ を代入して整理すれば,

$$\Omega = \int_0^\beta d\tau \left[\frac{d\theta'(\tau) \wedge d\theta''(\tau)}{\theta'^2(\tau)} \mp d\theta(\tau) \wedge d\theta'(\tau) \right] \quad (2.205)$$

$$= \int_0^\beta d\tau \left[\frac{d\theta'(\tau)}{\theta'(\tau)} \wedge \left(\frac{d\theta'(\tau)}{\theta'(\tau)} \right)' \mp d\theta(\tau) \wedge (d\theta(\tau))' \right] \quad (2.206)$$

となる. 途中 \mathcal{M} 上の外微分 d と τ についての微分'が可換であることを用いた. 負符号が $\text{Diff}(S^1)/\text{PSL}(2, \mathbb{R})$, 正符号が $\text{Diff}(S^1)/\text{U}(1)$ のときである. この symplectic 形式 Ω には二つの特徴がある. 一つ目は symplectic 形式 Ω から定義される体積形式によって Schwarz 作用の分配関数を計算すると, Duistermaat-Heckman 公式 [24] によって 2 次までの摂動計算と厳密な計算の一致が保証されることである. これは 2.4.4 節で解説する. 二つ目は JT 重力と BF ゲージ理論の対応関係を用いると, 2.3 節で計量を積分する際に用いた Weil-Petersson symplectic 形式と上式の KKS symplectic 形式が自然に導かれることである [6]. ここではこれを簡単に解説しよう. まず JT 重力の作用は

$$I_{\text{JT}} = -\frac{1}{2} \int_M \sqrt{\det g} \Phi(R+2) - \int_{\partial M} \sqrt{\det h} \Phi(K-1) \quad (2.207)$$

と与えられるのであったが, これは以下のように書き換えられる [25-27] :

$$I_{\text{JT}} = I_{\text{BF}} = -i \int_M \text{Tr}[BF] + \frac{i}{2} \int_{\partial M} \text{Tr}[BA]. \quad (2.208)$$

ここで, $F := dA + A \wedge A$ で, A は $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ 値 1-形式ゲージ場で, B は $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ 値 0-形式ゲージ場である. ゲージ場 A, B と JT 重力の多脚場 e^1, e^2 と接続形式 $\omega^a_b = \epsilon^a_b \omega$ は以下のように結びついて

²⁴例えば, $\dim \mathcal{M} = 4$, $\Omega = dx \wedge dp + dy \wedge dq$ であれば $\eta = \frac{1}{2!} \Omega \wedge \Omega = dx \wedge dp \wedge dy \wedge dq$. なお, $\Omega = (1/2!) \Omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$ および $\dim \mathcal{M} = 2n$ と書けば $\Omega^n/n! = \sqrt{\det \Omega} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{2n}$ と書ける. したがって, symplectic 形式 Ω は Riemann 幾何における計量に対応することがわかる.

²⁵Symplectic 形式であることは以下のようにして示せる: $d\theta'/\theta' = d(\log \theta')$ であることを用いれば, 後の (2.206) 式から $\Omega = \int_0^\beta d\tau [d(\log \theta') \wedge d(\log \theta')' \mp d\theta \wedge d\theta']$ と変形できるので, 閉形式 $d\Omega = 0$ であることは明らかである. 次に, 非退化性であるが, これには $\theta = \tau$ での非退化性を示せば十分である. なぜなら, 2.4.4 節で示した等式 $\iota_V \Omega = dH$ と Cartan の公式 $\mathcal{L}_V = d\iota_V + \iota_V d$ (ここで \mathcal{L}_V は V 方向の Lie 微分) を用いれば, $\mathcal{L}_V \Omega = d\iota_V \Omega + \iota_V d\Omega = 0$ であるので, Ω は $\text{U}(1)$ 不変である. 今考えている多様体は $\text{Diff}(S^1)$ を適当な群で割ったものだから, $\text{U}(1)$ 変換によって任意の点から他の点へ移り変わることができる. したがって, ある一点で非退化性を示せば, 他の点での非退化性も示せたことになる. $\theta = \tau$ での非退化性は, 式 (2.222), (2.248) のような Fourier 展開を用いた具体的な基底による表示を用いれば示せる.

いる：

$$B = -i \begin{pmatrix} -\Phi_1 & \Phi_2 + \Phi \\ \Phi_2 - \Phi & \Phi_1 \end{pmatrix} = i\Phi_1\sigma_3 - i\Phi_2\sigma_1 + \Phi\sigma_2, \quad (2.209)$$

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -e^1 & e^2 - \omega \\ e^2 + \omega & e^1 \end{pmatrix} = -e^1\sigma_3 + e^2\sigma_1 - i\omega\sigma_2. \quad (2.210)$$

書き換えの詳細は付録 B.2 節に記した。ここで、ゲージ場 A の積分測度を以下の標準的な (canonical)symplectic 形式から定義する：

$$\Omega(\delta_1 A, \delta_2 A) := 2 \int \text{Tr}[\delta_1 A \wedge \delta_2 A]. \quad (2.211)$$

ここで \wedge は時空である多様体 M 上の 1 形式についての外積である。また、 $\delta_1 A, \delta_2 A$ はゲージ場の全体である多様体の接空間の元で、直感的にはゲージ場 A をゲージ変換などで微小変換させたときの変化分である。この symplectic 形式を再び JT 重力側の物理量で書き直せば、Weil-Petersson 測度を定める Weil-Petersson symplectic 形式と KKS symplectic 形式 (2.203) が現れる [6] (導出の詳細は B.3 節に記した)。このことから、KKS symplectic 形式 (2.203) は Weil-Petersson symplectic 形式と関係があり、両者は JT 重力のゲージ理論による記述において自然な対応があることが言える。この意味で KLS symplectic 形式 (2.203) を用いて積分測度を定義することは自然である。

2.4.3 1 loop 計算

前節までの古典解および KLS symplectic 形式から Schwarz 作用の分配関数を摂動計算する。

1. Disk 形の場合：古典解 $\theta_0(\tau) = 2\pi\tau/\beta$ の周りでの摂動展開

$$\theta(\tau) = \frac{2\pi}{\beta} (\tau + \epsilon(\tau)) \quad (2.212)$$

を考える。周期性 $\theta(\tau + \beta) = \theta(\tau) + 2\pi$ より、揺らぎ ϵ は β 周期関数である：

$$\epsilon(\tau + \beta) = \epsilon(\tau). \quad (2.213)$$

したがって以下のように Fourier 展開できる：

$$\epsilon(\tau) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\epsilon_n e^{-\frac{2\pi i}{\beta} n\tau} + \epsilon_{-n} e^{\frac{2\pi i}{\beta} n\tau} \right). \quad (2.214)$$

ここで $\{\epsilon_n, \epsilon_{-n}\}_{n \in \mathbb{N}_{\geq 2}}$ は $\bar{\epsilon}_n = \epsilon_{-n}$ を満たす複素定数で、2.2 節で述べた擬南部-Goldstone mode に対応する。これは、場 θ の全体がなす空間 $\text{Diff}(S^2)/\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ 上における古典解 $\theta_0 \in \text{Diff}(S^2)/\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ 近傍の座標を与えるので、 $\theta_0 \in \text{Diff}(S^2)/\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ の接空間の基底は $\text{Diff}(S^2)/\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ 上の外微分 d を持ちいて $d\epsilon_n, d\epsilon_{-n}$ と書ける (図 19)。 $n = 0, \pm 1$ を除いたのはこれらが境界上の $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ 変換の生成子だからである。これは次のようにして理解できる。 $n = 0$ は

$$\theta = \theta_0 + 2\epsilon_0 \quad (2.215)$$

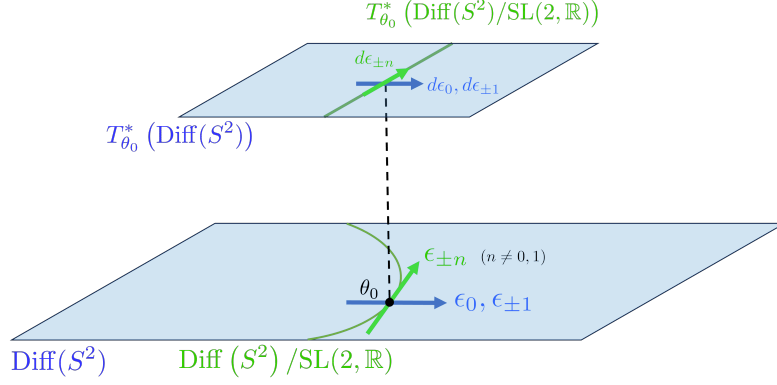


図 19: 場 θ の全体がなす空間 $\text{Diff}(S^2)$ (図中下部の青四角) と $\text{Diff}(S^2)/\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ (図中下部の緑曲線) の概念図. $\{\epsilon_n, \epsilon_{-n}\}_{n \in \mathbb{N}_{\geq 2}}$ は $\text{Diff}(S^2)$ における古典解 θ_0 近傍の座標を与える. そのうち, $\epsilon_0, \epsilon_{\pm 1}$ (図中青矢印) は $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ 変換で移り合う方向の座標であるから, $\text{Diff}(S^2)/\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ における座標は $\epsilon_{\pm n}$ ($n \neq 0, \pm 1$) (図中緑矢印) である. それに伴い, θ_0 における余接空間 $T_{\theta_0}^*(\text{Diff}(S^2))$ (図中上部の青四角) と $T_{\theta_0}^*(\text{Diff}(S^2)/\text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ (図中上部の緑直線) 上の基底はそれぞれ $d\epsilon_{\pm n}$ (図中青矢印と緑矢印) および $d\epsilon_{\pm n}$ ($n \neq 0, \pm 1$) (図中青矢印) になる.

と古典解に定数項を加える mode である. これを $\theta \mapsto \theta + 2\epsilon_0$ という微小変換だと見なすと, この微小変換に対応するベクトル場は ∂_θ である. 同様に $n = \pm 1$ は

$$\theta = \theta_0 + 2(\text{Re } \epsilon_1) \cos \theta_0 + 2(\text{Im } \epsilon_{-1}) \sin \theta_0 \quad (2.216)$$

と古典解に $2(\text{Re } \epsilon_1) \cos \theta_0$ を加える mode と $2(\text{Re } \epsilon_{-1}) \sin \theta_0$ を加える mode の 2 つの mode に対応する. これらをそれぞれ $\theta \mapsto \theta + 2(\text{Re } \epsilon_1) \cos \theta_0$, $\theta \mapsto \theta + 2(\text{Re } \epsilon_{-1}) \sin \theta_0$ という微小変換だと見なすと, この微小変換に対応する境界 ∂M 上のベクトル場は $\cos \theta \partial_\theta$, $\sin \theta \partial_\theta$ である. 結局, 摂動展開の内 $n = 0, 1$ の mode はベクトル場 ∂_θ , $\cos \theta \partial_\theta$, $\sin \theta \partial_\theta$ による微小変換に対応している. これら 3 つのベクトル場は 2.1.1 節で導いた境界上に制限された Killing ベクトル場 (2.57), (2.58), (2.59) に他ならない. したがって境界上の $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ 変換の生成子である.

展開 (2.214) を用いれば $\theta'(\tau), \theta''(\tau)$ は以下のように与えられる:

$$\theta'(\tau) = \frac{2\pi}{\beta} \left[1 - \frac{2\pi i}{\beta} \sum_{n=2}^{\infty} n \left(\epsilon_n e^{-\frac{2\pi i}{\beta} n \tau} - \epsilon_{-n} e^{\frac{2\pi i}{\beta} n \tau} \right) \right], \quad (2.217)$$

$$\theta''(\tau) = - \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^3 \sum_{n=2}^{\infty} n^2 \left(\epsilon_n e^{-\frac{2\pi i}{\beta} n \tau} + \epsilon_{-n} e^{\frac{2\pi i}{\beta} n \tau} \right). \quad (2.218)$$

したがって, Schwarz 作用の摂動展開

$$\begin{aligned} I_{\text{Sch}} \left[\tan \frac{\theta}{2} \right] &= -\gamma \int_0^\beta d\tau \text{Sch} \left\{ \tan \frac{\theta}{2}, \tau \right\} \\ &= \frac{\gamma}{2} \int_0^\beta d\tau \left[\left(\frac{\theta''(\tau)}{\theta'(\tau)} \right)^2 - \theta'(\tau)^2 \right] \\ &= -\frac{2\pi^2 \gamma}{\beta} + \frac{(2\pi)^4 \gamma}{\beta^3} \sum_{n \geq 2} n^2 (n^2 - 1) \epsilon_n \epsilon_{-n} + O(\epsilon^4) \end{aligned} \quad (2.219)$$

を得る. また, $\theta, \theta', \theta''$ に対して $\text{Diff}(S^2)/\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ 上の外微分 d を作用させると

$$d\theta(\tau) = \frac{2\pi}{\beta} \sum_{n=2}^{\infty} \left(e^{-\frac{2\pi i}{\beta} n\tau} d\epsilon_n + e^{\frac{2\pi i}{\beta} n\tau} d\epsilon_{-n} \right), \quad (2.220)$$

$$d\theta'(\tau) = \frac{2\pi}{\beta} \left[1 - \frac{2\pi i}{\beta} \sum_{n=2}^{\infty} n \left(e^{-\frac{2\pi i}{\beta} n\tau} d\epsilon_n - e^{\frac{2\pi i}{\beta} n\tau} d\epsilon_{-n} \right) \right], \quad (2.221)$$

$$d\theta''(\tau) = - \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^3 \sum_{n=2}^{\infty} n^2 \left(e^{-\frac{2\pi i}{\beta} n\tau} d\epsilon_n + e^{\frac{2\pi i}{\beta} n\tau} d\epsilon_{-n} \right). \quad (2.222)$$

となるので, $\text{Diff}(S^2)/\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ 上の KKS symplectic 形式の摂動展開

$$\begin{aligned} \Omega &= \int_0^\beta d\tau \left[\frac{d\theta'(\tau) \wedge d\theta''(\tau)}{\theta'^2(\tau)} - d\theta(\tau) \wedge d\theta'(\tau) \right] \\ &= \frac{(2\pi)^3}{\beta^2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n^2 - 1) d\epsilon_n \wedge d\epsilon_{-n} + \mathcal{O}(\epsilon^4) \end{aligned} \quad (2.223)$$

を得る. これより体積形式

$$\eta = \prod_{n=2}^{\infty} \frac{(2\pi)^3}{\beta^2} n(n^2 - 1) d\epsilon_n \wedge d\epsilon_{-n} + \mathcal{O}(\epsilon^4) \quad (2.224)$$

が得られる. 以上の計算結果から分配関数 $Z_{\text{Sch}}^{\text{Disk}}(\beta)$ を求める:

$$\begin{aligned} Z_{\text{Sch}}^{\text{Disk}}(\beta) &:= \int_{\text{Diff}(S^1)/\text{PSL}(2, \mathbb{R})} \mathcal{D}\theta e^{-I_{\text{Sch}}[\tan \frac{\theta}{2}]} \\ &= \prod_{n=2}^{\infty} \left[\frac{(2\pi)^3}{\beta^2} n(n^2 - 1) \int d\epsilon_n d\epsilon_{-n} \right] \exp \left[\frac{2\pi^2 \gamma}{\beta} - \frac{(2\pi)^4 \gamma}{\beta^3} \sum_{m \geq 2} m^2 (m^2 - 1) \epsilon_m \epsilon_{-m} + \mathcal{O}(\epsilon^4) \right] \\ &= e^{\frac{2\pi^2 \gamma}{\beta}} \prod_{n=2}^{\infty} \frac{(2\pi)^3}{\beta^2} n(n^2 - 1) \int d\epsilon_n d\epsilon_{-n} \exp \left[-\frac{(2\pi)^4 \gamma}{\beta^3} n^2 (n^2 - 1) \epsilon_n \epsilon_{-n} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^4). \end{aligned} \quad (2.225)$$

となる. 積分部分は Gauss 積分の公式から

$$\begin{aligned} &\int d\epsilon_n d\bar{\epsilon}_n \exp \left[-\frac{(2\pi)^4 \gamma}{\beta^3} n^2 (n^2 - 1) \epsilon_n \bar{\epsilon}_n \right] \\ &= 2 \int d\xi d\eta \exp \left[-\frac{(2\pi)^4 \gamma}{\beta^3} n^2 (n^2 - 1) (\xi^2 + \eta^2) \right] \quad (\xi := \text{Re } \epsilon_n, \eta := \text{Im } \epsilon_n) \\ &= 2 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp \left[-\frac{(2\pi)^4 \gamma}{\beta^3} n^2 (n^2 - 1) \xi^2 \right] \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \exp \left[-\frac{(2\pi)^4 \gamma}{\beta^3} n^2 (n^2 - 1) \eta^2 \right] \right\} \\ &= \frac{\beta^3}{(2\pi)^3 \gamma} \frac{1}{n^2 (n^2 - 1)} \end{aligned} \quad (2.226)$$

であるから,

$$\begin{aligned} Z_{\text{Sch}}^{\text{Disk}}(\beta) &= e^{\frac{2\pi^2 \gamma}{\beta}} \prod_{n=2}^{\infty} \frac{(2\pi)^3}{\beta^2} n(n^2 - 1) \frac{\beta^3}{(2\pi)^3 \gamma} \frac{1}{n^2 (n^2 - 1)} \\ &= e^{\frac{2\pi^2 \gamma}{\beta}} \prod_{n=2}^{\infty} \frac{\beta}{\gamma n} \end{aligned} \quad (2.227)$$

を得る.

無限積 $\prod_{n \geq 2} \frac{2\pi\beta}{\gamma n}$ はそのままでは発散してしまう。そこで、 ζ 関数を用いて発散を処理し正則化する。まず、 $A := 2\pi\beta/\gamma$ とおく。ここで以下の量を考えよう：

$$F(s) := A^s \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A}{n}\right)^s = \sum_{n=1}^{\infty} e^{s \log \frac{A}{n}}. \quad (2.228)$$

$F(s)$ を微分すると、

$$\frac{dF}{ds}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{s \log \frac{A}{n}} \log \frac{A}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A}{n}\right)^s \log \frac{A}{n} \quad (2.229)$$

となる。これに $s = 0$ を代入すれば、

$$\frac{dF}{ds}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{A}{n}. \quad (2.230)$$

一方で、 $F(s) := A^s \zeta(s)$ であったから、

$$\frac{dF}{ds}(s) = A^s \zeta(s) \log A + A^s \zeta'(s) \quad (2.231)$$

より、

$$\frac{dF}{ds}(0) = \zeta(0) \log A + \zeta'(0) = -\frac{1}{2} \log(2\pi A). \quad (2.232)$$

ここで、 ζ 関数の特殊値 $\zeta(0) = -1/2$, $\zeta'(0) = -(\log 2\pi)/2$ を用いた。式 (2.230), (2.232) より、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{A}{n} = -\frac{1}{2} \log(2\pi A). \quad (2.233)$$

したがって、

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi A}}. \quad (2.234)$$

よって、

$$\prod_{n \geq 2} \frac{A}{n} = \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{2\pi}{A}\right)^{\frac{3}{2}}. \quad (2.235)$$

無限大の発散は ζ 関数の特殊値 $\zeta(0) = -1/2$, $\zeta'(0) = -(\log 2\pi)/2$ を用いたことで処理されている。結局、以下を得る：

$$Z_{\text{Sch}}^{\text{Disk}}(\beta) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{2\pi^2\gamma}{\beta}} \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}}. \quad (2.236)$$

最後に分配関数 $Z_{\text{Sch}}^{\text{Disk}}(\beta)$ に対する状態密度関数 $\rho_{\text{JT}}(E)$ を計算する：

$$Z_{\text{Sch}}^{\text{Disk}}(\beta) = \int_0^{\infty} dE e^{-\beta E} \rho_{\text{JT}}(E). \quad (2.237)$$

逆 Laplace 変換をすれば以下を得る（導出は付録 A.2 節参照）：

$$\rho_{\text{JT}}(E) = \frac{\gamma}{2\pi^2} \sinh\left(2\pi\sqrt{2\gamma E}\right). \quad (2.238)$$

これはランダム行列側の密度関数と対応しており、Saad-Shenker-Stanford 対応を示す上で最も重要な表式である。

2. **Trumpet 形の場合**：古典解 $\theta(\tau) = b\tau/\beta$ の周りでの摂動展開

$$\theta(\tau) = \frac{b}{\beta} (\tau + \epsilon(\tau)) \quad (2.239)$$

を考える。周期性 $\theta(\tau + \beta) = \theta(\tau) + b$ より、揺らぎ ϵ は β 周期関数である：

$$\epsilon(\tau + \beta) = \epsilon(\tau). \quad (2.240)$$

したがって以下のように Fourier 展開できる：

$$\epsilon(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\epsilon_n e^{-\frac{2\pi i}{\beta} n\tau} + \epsilon_{-n} e^{\frac{2\pi i}{\beta} n\tau} \right]. \quad (2.241)$$

ここで $\{\epsilon_n, \epsilon_{-n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ は複素定数で、2.2 節で述べた擬南部-Goldstone mode に対応する。 $n = 0$ を除いたのはこれらが並進変換 $U(1)$ の生成子だからである。この展開を用いれば $\theta'(\tau), \theta''(\tau)$ は以下のように与えられる：

$$\theta'(\tau) = \frac{b}{\beta} \left[1 - \frac{2\pi i}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\epsilon_n e^{-\frac{2\pi i}{\beta} n\tau} - \epsilon_{-n} e^{\frac{2\pi i}{\beta} n\tau} \right) \right], \quad (2.242)$$

$$\theta''(\tau) = -\frac{b}{\beta} \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\epsilon_n e^{-\frac{2\pi i}{\beta} n\tau} + \epsilon_{-n} e^{\frac{2\pi i}{\beta} n\tau} \right). \quad (2.243)$$

したがって、Schwarz 作用の摂動展開

$$\begin{aligned} I_{\text{Sch}} \left[\tan \frac{\theta}{2} \right] &= -\gamma \int_0^\beta d\tau \text{Sch} \left\{ \tan \frac{\theta}{2}, \tau \right\} \\ &= \frac{\gamma}{2} \int_0^\beta d\tau \left[\left(\frac{\theta''(\tau)}{\theta'(\tau)} \right)^2 + \theta'(\tau)^2 \right] \\ &= \frac{\gamma b^2}{\beta} + \frac{(2\pi)^4 \gamma}{\beta^3} \sum_{n \geq 2} n^2 \left(n^2 + \frac{b^2}{(2\pi)^2} \right) \epsilon_n \epsilon_{-n} + \mathcal{O}(\epsilon^4) \end{aligned} \quad (2.244)$$

を得る。また、 $\theta, \theta', \theta''$ に対して $\text{Diff}(S^2)/U(1)$ 上の外微分 d を作用させると

$$d\theta(\tau) = \frac{b}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\frac{2\pi i}{\beta} n\tau} d\epsilon_n + e^{\frac{2\pi i}{\beta} n\tau} d\epsilon_{-n} \right), \quad (2.245)$$

$$d\theta'(\tau) = \frac{b}{\beta} \left[1 - \frac{2\pi i}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(e^{-\frac{2\pi i}{\beta} n\tau} d\epsilon_n - e^{\frac{2\pi i}{\beta} n\tau} d\epsilon_{-n} \right) \right], \quad (2.246)$$

$$d\theta''(\tau) = -\frac{b}{\beta} \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(e^{-\frac{2\pi i}{\beta} n\tau} d\epsilon_n + e^{\frac{2\pi i}{\beta} n\tau} d\epsilon_{-n} \right). \quad (2.247)$$

となるので、 $\text{Diff}(S^2)/U(1)$ 上の KKS symplectic 形式の摂動展開

$$\begin{aligned} \Omega &= \int_0^\beta d\tau \left[\frac{d\theta'(\tau) \wedge d\theta''(\tau)}{\theta'^2(\tau)} + d\theta(\tau) \wedge d\theta'(\tau) \right] \\ &= \frac{(2\pi)^3}{\beta^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(n^2 + \frac{b^2}{(2\pi)^2} \right) d\epsilon_n \wedge d\epsilon_{-n} + \mathcal{O}(\epsilon^4) \end{aligned} \quad (2.248)$$

を得る。これより体積形式

$$\eta = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2\pi)^3}{\beta^2} n \left(n^2 + \frac{b^2}{(2\pi)^2} \right) d\epsilon_n \wedge d\epsilon_{-n} + \mathcal{O}(\epsilon^4) \quad (2.249)$$

が得られる．以上の計算結果から分配関数 $Z_{\text{Sch}}^{\text{Disk}}(\beta)$ を求める：

$$\begin{aligned}
Z_{\text{Sch}}^{\text{Trp}}(\beta, b) &:= \int_{\text{Diff}(S^1)/\text{U}(1)} \mathcal{D}\theta e^{-I_{\text{Sch}}[\tan \frac{\theta}{2}]} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2\pi)^3}{\beta^2} n \left(n^2 + \frac{b^2}{(2\pi)^2} \right) \int d\epsilon_n d\bar{\epsilon}_{-n} \right] \exp \left[-\frac{\gamma b^2}{\beta} + \frac{(2\pi)^4 \gamma}{\beta^3} \sum_{m \geq 1} m^2 \left(m^2 + \frac{b^2}{(2\pi)^2} \right) \epsilon_m \bar{\epsilon}_{-m} + \mathcal{O}(\epsilon^4) \right] \\
&= e^{-\frac{\gamma b^2}{\beta}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2\pi)^3}{\beta^2} n \left(n^2 + \frac{b^2}{(2\pi)^2} \right) \int d\epsilon_n d\bar{\epsilon}_{-n} \exp \left[\frac{(2\pi)^2 \gamma}{\beta^3} n^2 \left(n^2 + \frac{b^2}{(2\pi)^2} \right) \epsilon_n \bar{\epsilon}_{-n} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^4).
\end{aligned} \tag{2.250}$$

となる．積分部分は Gauss 積分の公式から，

$$\begin{aligned}
&\int d\epsilon_n d\bar{\epsilon}_n \exp \left[-\frac{(2\pi)^2 \gamma}{\beta^3} n^2 \left(n^2 + \frac{b^2}{(2\pi)^2} \right) \epsilon_n \bar{\epsilon}_n \right] \\
&= 2 \int d\xi d\eta \exp \left[-\frac{(2\pi)^2 \gamma}{\beta^3} n^2 \left(n^2 + \frac{b^2}{(2\pi)^2} \right) (\xi^2 + \eta^2) \right] \quad (\xi := \text{Re } \epsilon_n, \eta := \text{Im } \epsilon_n) \\
&= 2 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp \left[-\frac{(2\pi)^2 \gamma}{\beta^3} n^2 \left(n^2 + \frac{b^2}{(2\pi)^2} \right) \xi^2 \right] \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \exp \left[-\frac{(2\pi)^2 \gamma}{\beta^3} n^2 \left(n^2 + \frac{b^2}{(2\pi)^2} \right) \eta^2 \right] \right\} \\
&= \frac{\beta^3}{(2\pi)^2 \gamma} \frac{1}{n^2 \left(n^2 + \frac{b^2}{(2\pi)^2} \right)}
\end{aligned} \tag{2.251}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
Z_{\text{Sch}}^{\text{Trp}}(\beta, b) &= e^{-\frac{2\pi^2 \gamma}{\beta}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2\pi)^3}{\beta^2} n \left(n^2 + \frac{b^2}{(2\pi)^2} \right) \frac{\beta^3}{(2\pi)^2 \gamma} \frac{1}{n^2 \left(n^2 + \frac{b^2}{(2\pi)^2} \right)} \\
&= e^{-\frac{2\pi^2 \gamma}{\beta}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi\beta}{\gamma} \frac{1}{n}
\end{aligned} \tag{2.252}$$

を得る．Disk 形のとくと同様の ζ 関数を用いた正則化によって以下を得る：

$$Z_{\text{Sch}}^{\text{Trp}}(\beta, b) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\gamma b^2}{2\beta}}. \tag{2.253}$$

2.4.4 Duistermaat-Heckman 公式と超対称局所化

ここでは Duistermaat-Heckman 公式 [24] について解説をする．この公式を用いると，前節の 1 loop 計算の結果 (2.236), (2.253) が厳密な計算結果と一致することが保証される．まず，Duistermaat-Heckman 公式の内容を解説した後に，前節の条件がその公式の条件を満たすことを示す．最後に，超対称局所化を用いて公式の導出を行う．なお，本節の内容は [5, 28] を参考にしている．

Duistermaat-Heckman 公式とは次のような定理である：Symplectic 多様体 (\mathcal{M}, Ω) 上に Hamiltonian H とその Hamiltonian ベクトル場 V が定義されている． V の生成する flow が $\text{U}(1)$ であるとき，以下の積分 Z は停留点周りの 2 次の摂動計算が厳密な結果と一致する：

$$Z := \int_{\mathcal{M}} \exp \left(-\frac{H}{g^2} \right) \eta. \tag{2.254}$$

ここで η は symplectic 形式 Ω から式 (2.202) によって定義される体積形式で, g は定数で Schwarz 理論の場合は γ に相当する. 以上の定理に現れた数学用語についていくつか解説しておく. まず, Hamiltonian H とその Hamiltonian ベクトル場 V とは

$$\iota_V \Omega = dH \quad (2.255)$$

を満たすものとして定義される. ここで ι は内部積である. Hamiltonian H は今考えている JT 重力や Schwarz 理論の Hamiltonian というわけではなく, 単なる symplectic 多様体 \mathcal{M} 上の C^∞ 関数である²⁶. また, Hamiltonian ベクトル場 V の生成する flow が $U(1)$ であるというのは, \mathcal{M} 上に $U(1)$ 変換があって, その生成子が H で微小変換が V で与えられることを意味する. Schwarz 理論の場合は座標 τ に関する微小並進 $\theta(\tau + \epsilon) = \theta(\tau) + \epsilon\theta'(\tau)$ が $U(1)$ 微小変換に対応するので, ベクトル場は $V = \theta' \partial_\theta$ と与えられる.

今, Ω として $\text{Diff}(S^1)/\text{PSL}(2, \mathbb{R}), \text{Diff}(S^1)/U(1)$ 上に定義した KLS symplectic 形式 (2.203) を, H として Schwarz 作用 I_{Sch} を選べば, これらは Duistermaat-Heckman 公式の条件を満たす. 以下でこれを示す. 以下 $\mathcal{M}_- := \text{Diff}(S^1)/\text{PSL}(2, \mathbb{R}), \mathcal{M}_+ := \text{Diff}(S^1)/U(1)$ とする. \mathcal{M}_\mp 上の 2-形式 (2.206) および \mathcal{M}_\mp 上の関数である Schwarz 作用

$$I_{\text{Sch}}[\theta] = \frac{\gamma}{2} \int_0^\beta d\tau \left[\left(\frac{\theta''}{\theta'} \right)^2 \mp \theta'^2 \right] =: \frac{\gamma}{2} H[\theta] \quad (2.256)$$

に対して, 等式 (2.255) が成り立ことを示せば良い. ここで $V = \theta' \partial_\theta$ である. 左辺を計算しよう. $d\theta(\partial_\theta) = 1$ に注意すれば,

$$\begin{aligned} \iota_V \Omega &= \int_0^\beta d\tau \left[\frac{(d\theta(\theta' \partial_\theta))'}{\theta'} \left(\frac{d\theta'}{\theta'} \right)' - \frac{d\theta'}{\theta'} \left(\frac{(d\theta(\theta' \partial_\theta))'}{\theta'} \right)' \mp (d\theta(\partial_\theta)(d\theta)' - d\theta(d\theta(\partial_\theta))') \right] \\ &= 2 \int_0^\beta d\tau \left[\frac{\theta''}{\theta'} \left(\frac{d\theta'}{\theta'} \right)' \mp \theta'(d\theta)' \right] \end{aligned} \quad (2.257)$$

となる. 1 段目から 2 段目の式変形には部分積分を用いた. 一方左辺は,

$$\begin{aligned} dH &= \int_0^\beta d\tau d \left[\left(\frac{\theta''}{\theta'} \right)^2 \mp \theta'^2 \right] \\ &= 2 \int_0^\beta d\tau \left[\frac{\theta' d\theta'' - \theta'' d\theta'}{\theta'^2} \mp \theta' d\theta' \right] \\ &= 2 \int_0^\beta d\tau \left[\frac{\theta''}{\theta'} \left(\frac{d\theta'}{\theta'} \right)' \mp \theta'(d\theta)' \right] \end{aligned} \quad (2.258)$$

となる. したがって, $\iota_V \Omega = dH$ が示せた. これにより, 前節の 1 loop 計算は Duistermaat-Heckman 公式の仮定を満たすので, 計算結果 (2.236), (2.253) が厳密な計算結果と一致することが示された.

最後に, Duistermaat-Heckman 公式の簡単な導出を行う. 導出には超対称局所化 (supersymmetric localization) と呼ばれる手法を用いる. 以下, (\mathcal{M}, Ω) を $2n$ 次元 symplectic 多様体 (すなわち場の全体), V を $U(1)$ 変換を生成する Hamilton ベクトル場, H をその Hamiltonian とする. 簡単のため有限次元の場合を取り扱う. 今, \mathcal{M} 上のある座標を $\{x^i\}_{i=1}^{2n}$ とする. また, 以下では $\psi^i := dx^i$ と表記し, 外積の記号も $dx^i \wedge dx^j = \psi^i \psi^j$ と省略する. このように表記すれば, ψ^i は Grassmann 数

²⁶解析力学から symplectic 幾何が発展した歴史的な経緯から Hamiltonian と呼ばれている.

とみなせる. Schwarz 理論においては, x^i が境界上の Boson θ に対応し ψ^i が Fermion $d\theta$ に対応する. このとき, 以下の等式が成り立つ:

$$\int \exp\left(-\frac{H}{g^2}\right) \eta = \int \exp\left(-\frac{H}{g^2} + \Omega\right). \quad (2.259)$$

と書ける. ここで $e^\Omega := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Omega^k$ と略記した. このように書けば, e^Ω のうち積分に効いてくるのは $k = 2n$ の項, すなわち $\Omega^{2n}/(2n)! = \eta$ であることがわかるので, 等式の成立が簡単に示せる²⁷.

次に, 以下のような変換を与える作用素 Q を考えよう:

$$Qx^i = \psi^i, \quad Q\psi^i = \frac{1}{g^2} V^i. \quad (2.260)$$

ここで $V = V^i \partial_i$ である. この変換は boson に対応する 0-形式 x^i, V^i と Fermion に対応する 1-形式 ψ^i を入れ替える超対称変換 (supersymmetric transformation) である. 作用素 Q は形式的に以下のように書ける²⁸:

$$Q = d + \frac{1}{g^2} \iota_V. \quad (2.261)$$

定義 (2.260) より $Q^2 x^i = \frac{1}{g^2} V^i$ であることや, 上式 (2.261) より $Q^2 = \frac{1}{g^2} \mathcal{L}_V$ であること²⁹ から, Q^2 は M 上の U(1) 変換を与える. ここで \mathcal{L}_V は V 方向の Lie 微分である. したがって, 任意の U(1) 不変量 W に対して $Q^2 W = 0$ が成り立つ. 以上のような超対称変換 Q に関して, 等式 (2.259) の左辺における

$$H' := \frac{H}{g^2} - \Omega \quad (2.262)$$

は不変である. すなわち, $QH' = 0$ である. これは計算によって簡単に示せる:

$$\begin{aligned} QH' &= \frac{1}{g^2} QH - Q\Omega \\ &= \frac{1}{g^2} dH - \frac{1}{g^2} d\Omega - \frac{1}{g^2} \iota_V \Omega = 0. \end{aligned}$$

最後の式変形は symplectic 形式 Ω の定義 $d\Omega = 0$ および Hamiltonian の定義 $\iota_V \Omega = dH$ を用いた. 以上のことを用いると, 以下で定義される $Z(t)$ は t に依存しないことがわかる:

$$Z(t) := \int \exp(-H' - tQW). \quad (2.263)$$

²⁷以下のようにしても証明できる. まず, $\Omega = \frac{1}{2} \Omega_{ij} dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2} \Omega_{ij} \psi^i \psi^j$ とおくと,

$$\begin{aligned} \int d\psi^{2n} \exp\left(\frac{1}{2} \Omega_{ij} \psi^i \psi^j\right) &= \sum_{k=i}^{\infty} \int d\psi^{2n} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{2} \Omega_{ij} \psi^i \psi^j\right)^k = \sum_{k=i}^{\infty} \int d\psi^{2n} \frac{1}{k!} \frac{1}{2^k} \Omega_{i_1 j_1} \cdots \Omega_{i_k j_k} \psi^{i_1} \psi^{j_1} \cdots \psi^{i_k} \psi^{j_k} \\ &= \frac{1}{n!} \frac{1}{2^n} \Omega_{i_1 j_1} \cdots \Omega_{i_n j_n} \epsilon^{i_1 j_1 \cdots i_n j_n} \end{aligned}$$

である. 途中 Grassmann 積分の性質

$$\int d\psi^N \psi_{i_1} \cdots \psi_{i_m} = 0 \quad (m < N), \quad \int d\psi^N \psi_{i_1} \cdots \psi_{i_N} = \epsilon^{i_1 \cdots i_N}$$

を用いた. 上式より,

$$\begin{aligned} \int dx^{2n} \int d\psi^{2n} \exp\left(-\frac{H}{g^2} + \frac{1}{2} \Omega_{ij} \psi^i \psi^j\right) &= \int dx^{2n} \frac{1}{n!} \frac{1}{2^n} \Omega_{i_1 j_1} \cdots \Omega_{i_n j_n} \epsilon^{i_1 j_1 \cdots i_n j_n} \exp\left(-\frac{H}{g^2}\right) \\ &= \int \frac{\Omega^n}{n!} \exp\left(-\frac{H}{g^2}\right) = \int \exp\left(-\frac{H}{g^2}\right) \eta \end{aligned}$$

となる.

²⁸ $Qx^i = dx^i + \frac{1}{g^2} \iota_V x^i = \psi^i, \quad Q\psi^i = d^2 x^i + \frac{1}{g^2} \iota_V dx^i = \frac{1}{g^2} V^i.$

²⁹ $Q^2 = \left(d + \frac{1}{g^2} \iota_V\right)^2 = +\frac{1}{g^2} (d\iota_V + \iota_V d) = \frac{1}{g^2} \mathcal{L}_V.$ 最後, $d^2 = \iota_V^2 = 0$ および Cartan の公式 $d\iota_V + \iota_V d = \mathcal{L}_V$ を用いた.

ここで W は任意の $U(1)$ 不変量である。この主張は超対称局所化定理 (supersymmetric localization theorem) と呼ばれる。これを以下で示そう。上式の両辺を t で微分すれば、

$$\begin{aligned}\frac{dZ}{dt}(t) &= - \int QW \exp(-H' - tQW) \\ &= - \int Q [W \exp(-H' - tQW)] \\ &= - \int d [W \exp(-H' - tQW)] \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。3 段目から 4 段目の式変形では \mathcal{M} が境界を持たないことあるいは W が境界上で消えることを仮定した。以上の計算から $\frac{dZ}{dt}(t) = 0$ であるため、 $Z(t)$ は t に依存しないことが示せた。超対称局所化定理および等式 (2.259) から、特に以下の式が従う：

$$\int \exp\left(-\frac{H}{g^2}\right) \eta = \lim_{t \rightarrow \infty} \int \exp(-H' - tQW). \quad (2.264)$$

上式の左辺は $QW = 0$ となる点の寄与のみが残る。したがって、積分を評価する際にはそのような点の周りでの局所的な計算を行えば良い。このように、全空間に渡って行う積分計算をある点の周りでの局所的な計算に帰着させることを局所化 (localization) といい、特に今の場合は超対称性もちいているので超対称局所化 (supersymmetric localization) と呼ぶ。ここで $U(1)$ 不変量 W として symplectic 形式 Ω を取れば、 $Q\Omega = 0$ を満たす点は $\iota_V \Omega = dH$ が消える点となる。 $dH = 0$ を満たす点は Hamiltonian H の停留点に他ならない。したがって、積分 $Z = \int \eta e^{-H/g^2}$ を計算するには、停留点近傍の寄与を評価すれば十分である。

2.5 総括

本節では 2.2, 2.4 節の結果を用いて JT 重力の分配関数の計算を行う。また、 $Z_{g,n}$ を漸次計算する方法を導出する。

前節までの計算から、JT 重力の分配関数は以下のように書ける：

$$Z(\beta_1, \dots, \beta_n) = \sum_{g=0}^{\infty} \frac{Z_{g,n}(\beta_1, \dots, \beta_n)}{(e^{-S_0})^{2g+n-2}}, \quad (2.265)$$

$$Z_{g,n}(\beta_1, \dots, \beta_n) = \begin{cases} Z_{\text{Sch}}^{\text{Disk}}(\beta_1) & (g, n) = (0, 1) \\ \int \prod_{m=1}^n [b_m db_m Z_{\text{Sch}}^{\text{Trp}}(\beta_m, b_m)] V_{g,n}(b_1, \dots, b_n) & (g, n) \neq (0, 1) \end{cases}. \quad (2.266)$$

ここで $Z_{\text{Sch}}^{\text{Disk}}(\beta)$, $Z_{\text{Sch}}^{\text{Trp}}(\beta, b)$ は Schwarz 作用の分配関数で式 (2.236), (2.253) で与えられる。上式において境界の長さ β と dilaton の境界値 γ は常に比 γ/β で現れる。したがって、 γ を特定の数と取っても一般性を失わないので、以下では

$$\gamma = \frac{1}{2} \quad (2.267)$$

と取る³⁰．よって Schwarz 作用の分配関数は

$$Z_{\text{Sch}}^{\text{Disk}}(\beta) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2\beta}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{\pi^2}{\beta}}, \quad (2.268)$$

$$Z_{\text{Sch}}^{\text{Trp}}(\beta, b) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2\beta}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{b^2}{4\beta}} \quad (2.269)$$

となる．以下で $Z_{g,n}$ の具体的な表式を得る方法を解説する．

2.5.1 Disk 形および wormhole 形, pants 形の場合: $(g, n) = (0, 1), (0, 2), (0, 3)$

これまでに得られた表式より, $Z_{0,2}$ は

$$\begin{aligned} Z_{0,2}(\beta_1, \beta_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty b db \left(\frac{1}{2\beta_1}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{b^2}{4\beta_1}} \left(\frac{1}{2\beta_2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{b^2}{4\beta_2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\sqrt{\beta_1\beta_2}} \int_0^\infty dx e^{-\frac{\beta_1+\beta_2}{2\beta_1\beta_2}x} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\beta_1\beta_2}}{\beta_1 + \beta_2} \end{aligned} \quad (2.270)$$

となる．途中 $x := b^2/2$ と置換積分を行った．また, $Z_{0,3}$ は

$$\begin{aligned} Z_{0,3}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) &= \prod_{m=1}^3 \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2\beta_m}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty b_m db_m e^{-\frac{b_m^2}{4\beta_m}} \\ &= \prod_{m=1}^3 \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2\beta_m}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty dx_m e^{-\frac{x_m}{2\beta_m}} \\ &= \prod_{m=1}^3 \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2\beta_m}\right)^{\frac{1}{2}} 2\beta_m \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\beta_1\beta_2\beta_3} \end{aligned} \quad (2.271)$$

となる．途中 $x_m := b_m^2/2$ と置換積分を行った．

したがって, disk 形 $(g, n) = (0, 1)$ および wormhole 形 $(g, n) = (0, 2)$, pants 形 $(g, n) = (0, 3)$ のときの分配関数が厳密に計算できた：

$$Z_{0,1}(\beta) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2\beta}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{\pi^2}{\beta}}, \quad (2.272)$$

$$Z_{0,2}(\beta_1, \beta_2) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\beta_1\beta_2}}{\beta_1 + \beta_2}, \quad (2.273)$$

$$Z_{0,3}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\beta_1\beta_2\beta_3}. \quad (2.274)$$

このように厳密に分配関数が具体的に計算できることが JT 重力の最も重要な特徴である．量子重力の分配関数であるのにも関わらず厳密計算することができた要因としては以下が考えられる：

1. Dilaton 積分により bulk の計量が双曲計量に限られるので, 計量の汎関数積分が簡単に実行できる．
2. 境界上に現れる Schwarz 理論は Duistermaat-Heckman 公式によって厳密に分配関数が計算できる．

³⁰ $\gamma = 1/(2\pi^2)$ と取る流儀もある．付録 C のように Witten-Kontsevich 重力との対応をみる際にはこのように取った方が式が見やすくなる．

2.5.2 一般の場合: $(g, n) \neq (0, 1), (0, 2), (0, 3)$

次に $Z_{g,n}(g, n) \neq (0, 1), (0, 2)$ を考えよう. このときは

$$\begin{aligned} Z_{g,n}(b_1, \dots, b_m) &= \int \prod_{m=1}^n \left[b_m db_m \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2\beta_m} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{b_m^2}{4\beta_m}} \right] V_{g,n}(b_1, \dots, b_m) \\ &= \left(\frac{1}{4\pi} \right)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\frac{1}{\beta_1 \cdots \beta_n}} \int \prod_{m=1}^n \left[dx_m e^{-\frac{x_m^2}{2\beta_m}} \right] V_{g,n}(x_1, \dots, x_m) \end{aligned} \quad (2.275)$$

となる. 途中 $x_m := b_m^2/2$ と置換積分を行った. ここで Mirzakhani 漸化式 (2.168) を用いると, Weil-Petersson 体積は b_m^2 の多項式でその次数はたかだか $3g + n - 3$ であることが示せる [14] (証明は付録 A.3.1 節参照)³¹:

$$V_{g,n}(b_1, \dots, b_n) = \sum_{k+\sum_{i=1}^n d_i=3g+n-3} \pi^{2k} V_{d_1 \dots d_n}^{g,n} b_1^{2d_1} \cdots b_n^{2d_n} = \sum_{k+\sum_{i=1}^n d_i=3g+n-3} \pi^{2k} V_{d_1 \dots d_n}^{g,n} x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n}. \quad (2.276)$$

ここで $V_{d_1 \dots d_n}^{g,n} \in \mathbb{Q}$ は定数である. したがって, Weil-Petersson 体積の表式が得られれば,

$$\int_0^\infty dx e^{-\frac{x}{2\beta}} x^k = k!(2\beta)^{k+1} \quad (2.277)$$

より³², Weil-Petersson 体積の Laplace 変換に相当している式 (2.275) 最後の積分は厳密に計算することができる:

$$\begin{aligned} Z_{g,n}(\beta_1, \dots, \beta_n) &= \sqrt{\beta_1 \cdots \beta_n} \sum_{k+\sum_{i=1}^n d_i=3g+n-3} \pi^{k+\frac{n}{2}} d_1! \cdots d_n! V_{d_1 \dots d_n}^{g,n} (2\beta_1)^{d_1} \cdots (2\beta_n)^{d_n} \\ &\equiv \sqrt{\beta_1 \cdots \beta_n} \sum_{k+\sum_{i=1}^n d_i=3g+n-3} \pi^{k+\frac{n}{2}} Z_{k_1 \dots k_2}^{g,n} \beta_1^{d_1} \cdots \beta_n^{d_n}. \end{aligned} \quad (2.278)$$

最後, 定数 $Z_{d_1 \dots d_n}^{g,n} \in \mathbb{Q}$ を以下のように定義した:

$$Z_{d_1 \dots d_n}^{g,n} := 2^{2\sum_{i=1}^n d_i} d_1! \cdots d_n! V_{d_1 \dots d_n}^{g,n}. \quad (2.279)$$

ただし, 一般の (g, n) に対する Weil-Petersson 体積の表式,³³すなわち係数 $V_{d_1 \dots d_n}^{g,n}$ は知られていないので, Mirzakhani 漸化式 (2.168) を用いて漸次計算しなければならない. 前節で紹介した Weil-Petersson 体積の具体例 (2.171), (2.172), (2.173), (2.174), (2.175) を Laplace 変換することで分配関数を計算すると以下ようになる:

$$Z_{1,1}(\beta) = \frac{\sqrt{\beta}(\pi^2 + \beta^2)}{6\sqrt{\pi}}, \quad (2.280)$$

$$Z_{0,4}(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = \frac{2\sqrt{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \pi^2)}{\pi}, \quad (2.281)$$

$$Z_{1,2}(\beta_1, \beta_2) = \frac{\sqrt{\beta_1\beta_2}[2(\beta_1^2 + \beta_1\beta_2 + \beta_2^2) + 4\pi^2(\beta_1 + \beta_2) + 3\pi^4]}{12\pi}, \quad (2.282)$$

$$Z_{0,5}(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5) = \frac{32\sqrt{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5} \left[5\pi + 2 \left(\sum_{i=1}^5 \beta_i \right) \left(\sum_{i=1}^5 \beta_i + 3\pi^2 \right) \right]}{\sqrt{\pi^5}}, \quad (2.283)$$

$$Z_{2,1}(\beta) = \frac{48\sqrt{\beta} (40\beta^4 + 232\pi^2\beta^3 + 556\pi^4\beta^2 + 676\pi^6\beta + 435\pi^8)}{\sqrt{\pi}}. \quad (2.284)$$

³¹付録 C.1 節の式 (C.4) も参照されたい.

³²Gamma 関数の定義 $\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ および公式 $\Gamma(k+1) = k!$ を用いた.

³³ $g = 0$ の場合は任意の n に対する表式が知られている [29].

最後に、ランダム行列との対応を導くための準備をしておく。まず、Weil-Petersson 体積 $V_{g,n}(b_1, \dots, b_n)$ に $b_1 \cdots b_n$ をかけたものを Laplace 変換した $W_{g,n}(z_1, \dots, z_n)$ を定義しておく：

$$W_{g,n}(z_1, \dots, z_n) := 2^{-\delta_{g,1}\delta_{n,1}} \prod_{m=1}^n \left[\int_0^\infty b_m db_m e^{-z_m b_m} \right] V_{g,n}(b_1, \dots, b_n). \quad (2.285)$$

係数 $2^{-\delta_{g,1}\delta_{n,1}}$ は特殊例 $(g, n) = (1, 1)$ のためにつけた。すなわち、 $bV_{1,1}(b)$ を $1/2$ 倍した $b\tilde{V}_{1,1}(b)$ の Laplace 変換として $W_{1,1}$ を定義する。具体例は以下の通り：

$$W_{0,3}(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{z_1^2 z_2^2 z_3^2}, \quad (2.286)$$

$$W_{1,1}(z) = \frac{3 + 2\pi^2 z^2}{24z^4}, \quad (2.287)$$

$$W_{0,4}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{6(z_1^2 z_2^2 z_3^2 + z_1^2 z_2^2 z_4^2 + z_1^2 z_3^2 z_4^2 + z_2^2 z_3^2 z_4^2) + 4\pi^2 z_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^2}{2z_1^4 z_2^4 z_3^4 z_4^4}, \quad (2.288)$$

$$W_{1,2}(z_1, z_2) = \frac{5(z_1^4 + z_2^4) + 3z_1^2 z_2^2 + 4\pi^2(z_1^4 z_2^2 + z_1^2 z_2^4) + 2\pi^4 z_1^4 z_2^4}{8z_1^6 z_2^6}, \quad (2.289)$$

$$W_{0,5}(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = \frac{1}{z_1^6 z_2^6 z_3^6 z_4^6 z_5^6} \left[15 \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq 5} z_i^4 z_j^4 z_k^4 z_l^4 + 18 \sum_{1 \leq i < j \leq 5} z_i^2 z_j^2 \prod_{k \neq i, j} z_k^4 + 18\pi^2 \sum_{i=1}^5 z_i^2 \prod_{i \neq j} z_j^4 + 10\pi^4 z_1^4 z_2^4 z_3^4 z_4^4 z_5^4 \right], \quad (2.290)$$

$$W_{2,1}(z) = \frac{1575 + 2030\pi^2 z^2 + 1390\pi^4 z^4 + 676\pi^6 z^6 + 290\pi^8 z^8}{1920z^{10}}. \quad (2.291)$$

また、JT 重力の分配関数 $Z_{g,n}(\beta_1, \dots, \beta_n)$ を Laplace 変換した $R_{g,n}(E_1, \dots, E_n)$ も定義しておく：

$$R_{g,n}(E_1, \dots, E_n) := \prod_{m=1}^n \left(- \int_0^\infty d\beta_m e^{\beta_m E_m} \right) Z_{g,n}(\beta_1, \dots, \beta_n). \quad (2.292)$$

これは $W_{g,n}$ を使って以下のように書ける：

$$\begin{aligned} R_{g,n}(E_1, \dots, E_n) &= \prod_{m=1}^n \left(- \int_0^\infty d\beta_m e^{\beta_m E_m} \int_0^\infty b_m db_m Z_{\text{Sch}}^{\text{trumpet}}(\beta_m, b_m) \right) V_{g,n}(b_1, \dots, b_n) \\ &= \prod_{m=1}^n \left(- \frac{1}{2\sqrt{-E_m}} \int_0^\infty b_m db_m e^{-\sqrt{-E_m} b_m} \right) V_{g,n}(b_1, \dots, b_n) \\ &= \prod_{m=1}^n \left(- \frac{1}{2z_m} \int_0^\infty b_m db_m e^{-z_m b_m} \right) V_{g,n}(b_1, \dots, b_n) \\ &= 2^{\delta_{g,1}\delta_{n,1}} \frac{W_{g,n}(z_1, \dots, z_n)}{(-2)^n z_1 \cdots z_n} \Big|_{z_m = \sqrt{-E_m}}. \end{aligned} \quad (2.293)$$

ただし $E_m < 0$ ($m = 1, \dots, n$) を仮定し。最後は $z_m := \sqrt{-E_m}$ ($m = 1, \dots, n$) と置いた。また、2 段目から 3 段目の式変形は以下を用いた（導出は付録 A.4 節参照）：

$$\int_0^\infty d\beta e^{\beta E} Z_{\text{Sch}}^{\text{trumpet}}(\beta, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty d\beta \frac{e^{\beta E - \frac{b^2}{4\beta}}}{\sqrt{2\beta}} = \frac{e^{-b\sqrt{-E}}}{2\sqrt{-E}}. \quad (2.294)$$

実はこの $R_{g,n}$ があとでみるランダム行列の resolvent に対応している。さらに、Laplace 変換した

Weil-Petersson 体積 $W_{g,n}(z_1, \dots, z_n)$ は以下の漸化式を満たす [30] :

$$W_{g,n}(z_1, J) = \operatorname{Res}_{z \rightarrow 0} \left[\frac{\pi}{\sin(2\pi z)(z_1^2 - z^2)} \left(W_{g-1, n+1}(z, -z, J) + \sum'_{\substack{h_1+h_2=g \\ I_1 \cup I_2=J}} W_{h_1, 1+|I_1|}(z, I_1) W_{h_2, 1+|I_2|}(-z, I_2) \right) \right]. \quad (2.295)$$

ここで $J = \{z_2, \dots, z_n\}$ である. また, \sum' は $|I_1| = h_1 = 0$ または $|I_2| = h_2 = 0$ の場合を除いて和を取ることを意味する. 上式は Mirzakhani 漸化式 (2.168) を Laplace 変換すれば導出できる (付録 A.3.4 節参照). 漸化式の初項として $W_{0,2}$ を

$$W_{0,2}(z_1, z_2) := \frac{1}{(z_1 - z_2)^2}. \quad (2.296)$$

と定義すれば, Laplace 変換された Weil-Petersson 体積 $W_{g,n}$ が逐次計算できる. それと関係式 (2.293) を用いれば, Laplace 変換した JT 重力の分配関数 $R_{g,n}$ を計算することができる. 最後に $R_{g,n}$ を逆 Laplace 変換すれば, JT 重力の分配関数 $Z_{g,n}$ を計算することができる. なお, この Laplace 変換および逆 Laplace 変換はその積分を具体的に計算することが可能である. このことをみるために, Weil-Petersson 体積の多項式表示 (2.276) および分配関数の多項式表示 (2.278) を考えよう. これらを用いると, Laplace 変換した Weil-Petersson 体積 $W_{g,n}$ は以下のように $1/z_m$ の多項式として書ける:

$$W_{g,n}(z_1, \dots, z_n) = 2^{-\delta_{g,1}\delta_{n,1}} \sum_{k+\sum_{i=1}^n d_i=3g+n-3} \frac{\pi^k (2d_1+1)! \cdots (2d_n+1)! V_{d_1 \dots d_n}^{g,n}}{z_1^{2d_1+2} \cdots z_n^{2d_n+2}} \quad (2.297)$$

$$\equiv \sum_{k+\sum_{i=1}^n d_i=3g+n-3} \frac{\pi^k W_{d_1 \dots d_n}^{g,n}}{z_1^{2d_1+2} \cdots z_n^{2d_n+2}}. \quad (2.298)$$

最後, 定数 $W_{k_1 \dots k_n}^{g,n} \in \mathbb{Q}$ を以下のように定義した:

$$W_{d_1 \dots d_n}^{g,n} := 2^{-\delta_{g,1}\delta_{n,1}} (2d_1+1)! \cdots (2d_n+1)! V_{d_1 \dots d_n}^{g,n}. \quad (2.299)$$

計算には以下を用いた:

$$\int_0^\infty bdb e^{-zb} b^{2k} = \frac{\Gamma(2k+2)}{z^{2k+2}} = \frac{(2k+1)!}{z^{2k+2}}. \quad (2.300)$$

一方, resolvent $R_{g,n}$ は以下のように $1/E_m$ の多項式に $1/\sqrt{E_1 \cdots E_n}$ をかけたものとして書ける:

$$R_{g,n}(E_1, \dots, E_n) = \sum_{k+\sum_{i=1}^n d_i=3g+n-3} \frac{(2d_1+1)! \cdots (2d_n+1)!}{(-2)^n 2^{\sum_{i=1}^n d_i}} \frac{\pi^k Z_{d_1 \dots d_n}^{g,n}}{E_1^{d_1+\frac{3}{2}} \cdots E_n^{d_n+\frac{3}{2}}} \quad (2.301)$$

$$\equiv \frac{1}{\sqrt{E_1 \cdots E_n}} \sum_{k+\sum_{i=1}^n d_i=3g+n-3} \frac{\pi^k R_{d_1 \dots d_n}^{g,n}}{E_1^{d_1+1} \cdots E_n^{d_n+1}}. \quad (2.302)$$

最後, 定数 $R_{d_1 \dots d_n}^{g,n} \in \mathbb{Q}$ を以下のように定義した:

$$R_{d_1 \dots d_n}^{g,n} := \frac{(2d_1+1)! \cdots (2d_n+1)!}{(-2)^n 2^{\sum_{i=1}^n d_i}} Z_{d_1 \dots d_n}^{g,n} \quad (2.303)$$

$$= \frac{(2d_1+1)! \cdots (2d_n+1)!}{(-2)^n} V_{d_1 \dots d_n}^{g,n}. \quad (2.304)$$

計算には以下を用いた：

$$-\int_0^\infty d\beta e^{\beta E} \beta^{k+\frac{1}{2}} = -\frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{2^{k+1}(-E)^{k+\frac{3}{2}}} = -\frac{(2k+1)!!}{2^{k+1}(-E)^{k+\frac{3}{2}}}\sqrt{\pi}. \quad (2.305)$$

以上のことから、Laplace 変換した Weil-Petersson 体積 $W_{g,n}$ と resolvent $R_{g,n}$ の積分は具体的に実行することが可能であることがわかった。また、 $V_{g,n}, W_{g,n}, R_{g,n}, Z_{g,n}$ のいずれか 1 つが得られれば他の 3 つも容易に計算することができる。特に、積分計算をしなくとも上述の多項式表示を用いれば単純な代数計算をすれば良い。

以上のことをまとめる。JT 重力の分配関数 $Z_{g,n}$ ($(g,n) \neq (0,1), (0,2), (0,3)$) は以下の流れで計算することができる。

1. Mirzakhani 漸化式 (2.168) を用いて Weil-Petersson 体積 $V_{g,n}$ を計算する。
2. 式 (2.275) を用いて Weil-Petersson 体積 $V_{g,n}$ の Laplace 変換として JT 重力の分配関数 $Z_{g,n}$ が得られる。

あるいは、以下の流れで計算することもできる。

1. Laplace 変換された Mirzakhani 漸化式 (2.295) を用いて Laplace 変換された Weil-Petersson 体積 $W_{g,n}$ を計算する。
2. 式 (2.293) を用いて Laplace 変換された Weil-Petersson 体積 $W_{g,n}$ から Laplace 変換された JT 重力の分配関数 $R_{g,n}$ を計算する。
3. $R_{g,n}$ を逆 Laplace 変換として JT 重力の分配関数 $Z_{g,n}$ が得られる。

JT 重力の分配関数 $Z_{g,n}$ が以上のようにして厳密計算できることは、分配関数 $Z_{g,n}$ が 2 次元双曲面の moduli 空間の体積である Weil-Petersson 体積 $V_{g,n}$ の Laplace 変換により計算でき、Weil-Petersson 体積 $V_{g,n}$ が Mirzakhani 漸化式で計算できるからである。このことから、「本質的には JT 重力の分配関数は境界付き 2 次元双曲面の数え上げである」と解釈できる。これは前述したように、JT 重力の分配関数の計算における汎関数積分が bulk の形の数え上げに対応した moduli 空間上の積分と、境界の形の数え上げに対応した埋め込みの積分に帰着できたことから直感的に理解できる。

3 ランダム行列

本節では、[6, 21, 31–34]を参考にして、ランダム行列について概説およびランダム行列の分配和と呼ばれる量の相関関数が JT 重力の分配関数と一致すること、すなわち Saad-Shenker-Stanford (SSS) 対応 [6] の導出を行う。

まずランダム行列を定義する。ランダム行列とは行列を確率変数とする確率理論のことである。本稿では主に Hermite 行列について取り扱う。以下、 $N \times N$ Hermite 行列の全体を $\mathcal{H}(N)$ と書く。関数 $A : \mathcal{H}(N) \rightarrow \mathbb{R}$ の期待値 $\langle A \rangle$ を以下のように定義する：

$$\langle A \rangle := \frac{1}{\mathcal{Z}} \int_{\mathcal{H}(N)} dH e^{-N \text{Tr}[V(H)]} A(H), \quad (3.1)$$

$$\mathcal{Z} := \int_{\mathcal{H}(N)} dH e^{-N \text{Tr}[V(H)]}. \quad (3.2)$$

ここで積分測度 dH は Hermite 行列 H の各成分 $(H_{ij})_{i,j=1}^N$ を用いて、 N^2 個の実パラメータの積分として定義される：

$$dH = \prod_{i=1}^N dH_{ii} \prod_{j<i}^N dH_{ij}^R dH_{ij}^I \quad (H_{ij}^R := \text{Re}(H_{ij}), H_{ij}^I := \text{Im}(H_{ij})) \quad (3.3)$$

と定義される。また、 $V : \mathcal{H}(N) \rightarrow \mathcal{H}(N)$ はポテンシャルと呼ばれる関数で、確率密度関数 $e^{-N \text{Tr}[V(H)]}$ を与える。 \mathcal{Z} は確率密度関数の規格化因子で分配関数と呼ばれる。以下では期待値の中でもキュムラントまたは連結部分と呼ばれる量 $\langle A^n \rangle_{\text{conn.}}$ が重要である。これは任意の実数 $z \in \mathbb{R}$ に対して以下を満たすものとして定義される：

$$\langle e^{zA} \rangle = \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \langle A^n \rangle_{\text{conn.}} \right]. \quad (3.4)$$

直感的には、Feynman 図の連結部分だけを数え上げることに対応する。いま分配和 $Z(\beta) : \mathcal{H}(N) \rightarrow \mathbb{R}$ を以下のように定義する：

$$Z(\beta) := \text{Tr} [e^{-\beta H}]. \quad (3.5)$$

この分配和の n 点相関関数

$$\langle Z(\beta_1) \cdots Z(\beta_n) \rangle := \frac{1}{\mathcal{Z}} \int_{\mathcal{H}(N)} dH e^{-N \text{Tr}[V(H)]} \text{Tr} [e^{-\beta_1 H}] \cdots \text{Tr} [e^{-\beta_n H}] \quad (3.6)$$

の連結部分がある設定の元で計算すると、JT 重力の分配関数 $Z(\beta_1, \dots, \beta_n)$ に一致する。これが本節で示される SSS 対応である。

まず準備として 3.1 節でランダム行列における Feynman 図を解説する。その後 3.2 節で種数展開について解説する。最後に 3.3 節ではそれまでの計算を元に JT 重力とランダム行列の SSS 対応について解説する。

3.1 Feynman 図

本節では、場の理論における Feynman 図の手法を用いたランダム行列の計算方法について解説する。Hermite 行列 H を 0 次元上の場とみなし、ランダム行列の分配関数 \mathcal{Z} をその場の理論の分配関

数とみなそう。すると、 $-N \text{Tr}[V(H)]$ が場の作用、ポテンシャル $V(H)$ が場のポテンシャルに相当する。ポテンシャル $V(H)$ を

$$V(H) = \frac{1}{2}H^2 - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{v_n}{n} H^n \quad (3.7)$$

のように展開すれば、第 1 項が質量項³⁴、第 2 項が自己相互作用項に相当する。以上のような同一視ができるので、通常場の理論における期待値の計算は Feynman 図の数え上げに帰着できるのと同様にランダム行列の期待値の計算も Feynman 図の数え上げに帰着できる。

まず、自由場に相当する $v_n = 0 (n \geq 3)$ のときを考える。このとき、分配関数は Gauss 積分に帰着できて

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0 &:= \int_{\mathbf{H}(N)} dH e^{-\frac{N}{2} \text{Tr}[H^2]} \\ &= \int \prod_{i=1}^N dH_{ii} \prod_{j<i}^N dH_{ij}^R dH_{ij}^I \exp \left[-\frac{N}{2} \left(\sum_{i=1}^N H_{ii}^2 + 2 \sum_{i<j}^n (H_{ij}^{R^2} + H_{ij}^{I^2}) \right) \right] \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{N}{2}x^2} \right)^N \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-Nx^2} \right)^{N(N-1)} \\ &= \left(\frac{2\pi}{N} \right)^{\frac{N}{2}} \left(\frac{\pi}{N} \right)^{\frac{N(N-1)}{2}} = 2^{\frac{N}{2}} \left(\frac{\pi}{N} \right)^{\frac{N^2}{2}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

となる。次に伝搬関数 $\langle H_{ij}H_{kl} \rangle_0$ を計算しよう。Gauss 積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} x = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} x^2 = \sqrt{\frac{\pi}{(2a)^3}} \quad (3.9)$$

より、 $i = l, j = k$ 以外では積分が 0 になることから、

$$\begin{aligned} \langle H_{ij}H_{kl} \rangle_0 &:= \frac{1}{\mathcal{Z}_0} \int_{\mathbf{H}(N)} dH e^{-\frac{N}{2} \text{Tr}[H^2]} H_{ij}H_{kl} \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_0} \prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} dH_{ii} e^{-\frac{N}{2}H_{ii}^2} \prod_{j<i}^N \int_{-\infty}^{\infty} dH_{ij}^R e^{-NH_{ij}^{R^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dH_{ij}^I e^{-NH_{ij}^{I^2}} \\ &\quad \times [H_{ij}^R H_{kl}^R - H_{ij}^I H_{kl}^I + 2i (H_{ij}^R H_{kl}^I + H_{ij}^I H_{kl}^R)] \\ &= \frac{1}{N} \delta_{il} \delta_{jk} \end{aligned} \quad (3.10)$$

となる。この結果は、通常場の理論同様、ソース $J \in \mathbf{H}(N)$ を入れた分配関数

$$\mathcal{Z}_0[J] := \frac{1}{\mathcal{Z}_0} \int_{\mathbf{H}(N)} dH e^{-\frac{N}{2} \text{Tr}[H^2] + \text{Tr}[JH]} \quad (3.11)$$

を用いて計算することができる。なぜなら、

$$\frac{\partial^2 \mathcal{Z}_0[J]}{\partial J_{ji} \partial J_{lk}} = \frac{1}{\mathcal{Z}_0} \int_{\mathbf{H}(N)} dH e^{-\frac{N}{2} \text{Tr}[H^2]} \frac{\partial^2}{\partial J_{ji} \partial J_{lk}} e^{\text{Tr}[JH]} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\mathcal{Z}_0} \int_{\mathbf{H}(N)} dH e^{-\frac{N}{2} \text{Tr}[H^2]} \frac{\partial^2}{\partial J_{ji} \partial J_{lk}} e^{\text{Tr}[JH]} \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_0} \int_{\mathbf{H}(N)} dH e^{-\frac{N}{2} \text{Tr}[H^2]} H_{ij}H_{kl} e^{\text{Tr}[JH]} =: \langle H_{ij}H_{kl} e^{\text{Tr}[JH]} \rangle_0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

³⁴ここで係数を 1/2 と取っているが、 H を適当にスケール倍すれば他の係数に取れる。

より,

$$\frac{\delta^2 \mathcal{Z}_0[J]}{\delta J_{ji} \delta J_{lk}} \Big|_{J=0} = \langle H_{ij} H_{kl} \rangle_0 \quad (3.14)$$

となるからである. 一方で, 分配関数は

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0[J] &:= \frac{1}{\mathcal{Z}_0} \int_{\mathbf{H}(N)} dH e^{-\frac{N}{2} \text{Tr}[H^2] + \text{Tr}[JH]} \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_0} \int_{\mathbf{H}(N)} dH e^{-\frac{N}{2} \text{Tr}[(H - \frac{1}{N}J)^2] + \frac{1}{2N} \text{Tr}[J^2]} \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_0} \int_{\mathbf{H}(N)} dH e^{-\frac{N}{2} \text{Tr}[H^2]} e^{\frac{1}{2N} \text{Tr}[J^2]} = e^{\frac{1}{2N} \text{Tr}[J^2]} \end{aligned} \quad (3.15)$$

と変形できる. 途中, $H - \frac{1}{N}J \rightarrow H$ と変数変換を行った. ここで, 公式 (A.148) より以下が従う:

$$\langle H_{ij} H_{kl} \rangle_0 = \frac{\partial^2 \mathcal{Z}_0[J]}{\partial J_{ji} \partial J_{lk}} \Big|_{J=0} = \frac{1}{N} \delta_{il} \delta_{jk}. \quad (3.16)$$

以上の結果を, 以下のような Feynman 図で書くことにしよう:

$$\begin{array}{ccc} i & \text{-----} & l \\ & & | \\ j & \text{-----} & k \end{array} := \frac{1}{N} \delta_{il} \delta_{jk}. \quad (3.17)$$

通常の場合の理論では伝搬関数は 1 本の線分であるが, 今は行列の添字が 2 つあるのに対応して伝搬関数は 2 本の線分で表される. Kronecker delta によって等しくなる添字, すなわち縮約される添字を線分でむすんでいる. Feynman 図における各伝搬関数の寄与は $1/N$ になることに注意されたい. 以上の計算と同様に分配関数 $\mathcal{Z}_0[J]$ を n 回微分することで $2n$ 点伝搬関数を得る:

$$\begin{aligned} &\langle H_{i_1 j_1} H_{i_2 j_2} \cdots H_{i_{2n} j_{2n}} \rangle_0 \\ &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}} \langle H(\sigma(1)) H(\sigma(2)) \rangle_0 \cdots \langle H(\sigma(2n-1)) H(\sigma(2n)) \rangle_0 \\ &= \langle H(1) H(2) \rangle_0 \langle H(3) H(4) \rangle_0 \cdots \langle H(2n-1) H(2n) \rangle_0 + \cdots \end{aligned} \quad (3.18)$$

ここで \mathfrak{S}_{2n} は $2n$ 次対称群で, $H_{i_k j_k} = H(k)$ のように行列の添字を略記した. また, 2 段目の \cdots で省略した項には $1, 2, \dots, n$ の位置を入れ替えてできる項を重複なしで並べたものが現れる. これは通常の場合の理論における Wick の定理に対応する. 例えば, 4 点関数は以下のように書ける:

$$\begin{aligned} &\langle H(1) H(2) H(3) H(4) \rangle_0 \\ &= \langle H(1) H(2) \rangle_0 \langle H(3) H(4) \rangle_0 + \langle H(1) H(3) \rangle_0 \langle H(2) H(4) \rangle_0 + \langle H(1) H(4) \rangle_0 \langle H(3) H(2) \rangle_0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

次に, 自己相互作用項がある場合を考える. 分配関数を各結合定数 v_n ($n \geq 3$) について摂動展開すると以下ようになる:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &:= \int_{\mathbf{H}(N)} dH e^{-\frac{N}{2} \text{Tr}[H^2] + N \sum_{n=3}^{\infty} \frac{v_n}{n} \text{Tr}[H^n]} \\ &= \int_{\mathbf{H}(N)} dH e^{-\frac{N}{2} \text{Tr}[H^2]} \prod_{n=3}^{\infty} \left(\sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{1}{m_n!} \left(\frac{N v_n}{n} \text{Tr}[H^n] \right)^{m_n} \right) \\ &= \mathcal{Z}_0 \sum_{m_3, \dots=0}^{\infty} \left\langle \prod_{n=3}^{\infty} \left(\frac{N v_n}{n} \text{Tr}[H^n] \right) \right\rangle_0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

したがって、Feynman 図における各頂点の寄与は Nv_n と予想される。これを具体的な計算で示そう。まず簡単のために $v_3 \neq 0, v_4 = v_5 = \dots = 0$ を考える：

$$V(H) = \frac{1}{2}H^2 - \frac{v_3}{3}H^3. \quad (3.21)$$

このとき、分配関数は v_3 について展開すると

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \mathcal{Z}_0 + \frac{Nv_3}{3} \langle \text{Tr}[H^3] \rangle_0 + \mathcal{O}(v_3^2) \\ &= \mathcal{Z}_0 + \mathcal{O}(v_3^2) \end{aligned} \quad (3.22)$$

となる。ここで $\langle H_{ij}H_{kl}H_{mn} \rangle_0 = 0$ を用いた。いま、3点関数 $\langle H_{ij}H_{kl}H_{mn} \rangle$ を v_3 について1次の項まで計算する：

$$\begin{aligned} &\langle H_{ij}H_{kl}H_{mn} \rangle \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}} \int_{\text{H}(N)} dH e^{-\frac{N}{2} \text{Tr}[H^2] + \frac{Nv_3}{3} \text{Tr}[H^3]} H_{ij}H_{kl}H_{mn} \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_0} \int_{\text{H}(N)} dH e^{-\frac{N}{2} \text{Tr}[H^2]} H_{ij}H_{kl}H_{mn} + \frac{1}{\mathcal{Z}_0} \int_{\text{H}(N)} dH e^{-\frac{N}{2} \text{Tr}[H^2]} \frac{Nv_3}{3} \text{Tr}[H^3] H_{ij}H_{kl}H_{mn} + \mathcal{O}(v_3^2) \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_0} \int_{\text{H}(N)} dH e^{-\frac{N}{2} \text{Tr}[H^2]} \frac{Nv_3}{3} \text{Tr}[H^3] H_{ij}H_{kl}H_{mn} + \mathcal{O}(v_3^2) \\ &= \left\langle \frac{Nv_3}{3} \text{Tr}[H^3] H_{ij}H_{kl}H_{mn} \right\rangle_0 + \mathcal{O}(v_3^2) \\ &= \frac{Nv_3}{3} \sum_{i',j',k',l',m',n'=1}^N \delta_{i'l'} \delta_{k'n'} \delta_{m'j'} \langle H_{ij}H_{kl}H_{mn}H_{j'i'}H_{l'k'}H_{n'm'} \rangle_0 + \mathcal{O}(v_3^2) \\ &= \frac{Nv_3}{3} \sum_{i',j',k',l',m',n'=1}^N \delta_{i'l'} \delta_{k'n'} \delta_{m'j'} \left(\langle H_{ij}H_{j'i'} \rangle_0 \langle H_{kl}H_{l'k'} \rangle_0 \langle H_{mn}H_{n'm'} \rangle_0 + \dots \right. \\ &\quad \left. + \langle H_{ij}H_{kl} \rangle_0 \langle H_{mn}H_{j'i'} \rangle_0 \langle H_{l'k'}H_{n'm'} \rangle_0 + \dots \right) + \mathcal{O}(v_3^2) \end{aligned} \quad (3.23)$$

ここで2段目から3段目の式変形は $\langle H_{ij}H_{kl}H_{mn} \rangle_0 = 0$ を用いた。また、最後の式変形は式 (3.18) を用いた。最後の表式において、 $\langle H_{ij}H_{j'i'} \rangle_0 \langle H_{kl}H_{l'k'} \rangle_0 \langle H_{mn}H_{n'm'} \rangle_0 + \dots$ は'付きの添字とそうでない添字を持つもので縮約をとった項が含まれていて、 $\langle H_{ij}H_{kl} \rangle_0 \langle H_{mn}H_{j'i'} \rangle_0 \langle H_{l'k'}H_{n'm'} \rangle_0 + \dots$ '付きの添字同士で縮約をとったものが含まれている。... には、直前の項において'付きの添字の位置を入れ替えた項が含まれる。'付きの添字を適当に取り替えることで、上式は以下のように書ける：

$$\begin{aligned} &\langle H_{ij}H_{kl}H_{mn} \rangle \\ &= \sum_{i',j',k',l',m',n'=1}^N \left(v_3 N \delta_{i'l'} \delta_{k'n'} \delta_{m'j'} \langle H_{ij}H_{j'i'} \rangle_0 \langle H_{kl}H_{l'k'} \rangle_0 \langle H_{mn}H_{n'm'} \rangle_0 \right. \\ &\quad + v_3 N \delta_{i'n'} \delta_{m'l'} \delta_{k'j'} \langle H_{ij}H_{j'i'} \rangle_0 \langle H_{kl}H_{l'k'} \rangle_0 \langle H_{mn}H_{n'm'} \rangle_0 \\ &\quad + v_3 N \delta_{i'l'} \delta_{k'n'} \delta_{m'j'} \langle H_{ij}H_{kl} \rangle_0 \langle H_{mn}H_{j'i'} \rangle_0 \langle H_{l'k'}H_{n'm'} \rangle_0 \\ &\quad + v_3 N \delta_{i'l'} \delta_{k'n'} \delta_{m'j'} \langle H_{ij}H_{nm} \rangle_0 \langle H_{mn}H_{j'i'} \rangle_0 \langle H_{l'k'}H_{n'm'} \rangle_0 \\ &\quad \left. + v_3 N \delta_{i'l'} \delta_{k'n'} \delta_{m'j'} \langle H_{kl}H_{nm} \rangle_0 \langle H_{mn}H_{j'i'} \rangle_0 \langle H_{l'k'}H_{n'm'} \rangle_0 \right) + \mathcal{O}(v_3^2) \end{aligned} \quad (3.24)$$

上式の第 1, 2 項における係数 $v_3 N \delta_{j'm'} \delta_{i'l'} \delta_{k'n'}$, $v_3 N \delta_{l'm'} \delta_{j'k'} \delta_{i'n'}$ が頂点関数である．実際，上式を Feynman 図で書こう．前述の通り，伝搬関数 $\langle H_{ij} H_{lk} \rangle_0$ を 2 重線で描き，縮約を取る添字同士を結ぶことにする．第 1, 2 項は以下のような連結グラフに対応する：

$$\begin{aligned}
& v_3 N \delta_{j'm'} \delta_{i'l'} \delta_{k'n'} \langle H_{ij} H_{i'j'} \rangle_0 \langle H_{kl} H_{k'l'} \rangle_0 \langle H_{mn} H_{m'n'} \rangle_0 \\
& + v_3 N \delta_{l'm'} \delta_{j'k'} \delta_{i'n'} \langle H_{ij} H_{i'j'} \rangle_0 \langle H_{kl} H_{k'l'} \rangle_0 \langle H_{mn} H_{m'n'} \rangle_0 \\
= & \begin{array}{c} l \quad k \\ | \quad | \\ l' \quad k' \\ \diagup \quad \diagdown \\ i' \quad j' \quad n' \quad m' \\ \diagdown \quad \diagup \\ j \quad m \end{array} + \begin{array}{c} n \quad m \\ | \quad | \\ n' \quad m' \\ \diagup \quad \diagdown \\ i' \quad j' \quad k' \quad l' \\ \diagdown \quad \diagup \\ j \quad k \end{array} . \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Feynman 図中赤色の部分が頂点関数に対応している．すなわち，以下のように Feynman 則を定める：

$$\begin{array}{c} nm \\ | \\ i \quad j \quad k \end{array} = v_3 N \delta_{jk} \delta_{lm} \delta_{ni} . \tag{3.26}$$

また，第 3～5 項は以下のような非連結グラフに対応している：

$$\begin{aligned}
& v_3 N \delta_{i'l'} \delta_{k'n'} \delta_{m'j'} \langle H_{ij} H_{kl} \rangle_0 \langle H_{mn} H_{n'm'} \rangle_0 \langle H_{l'k'} H_{j'i'} \rangle_0 \\
& + v_3 N \delta_{i'l'} \delta_{k'n'} \delta_{m'j'} \langle H_{ij} H_{nm} \rangle_0 \langle H_{kl} H_{l'k'} \rangle_0 \langle H_{l'k'} H_{j'i'} \rangle_0 \\
& + v_3 N \delta_{i'l'} \delta_{k'n'} \delta_{m'j'} \langle H_{kl} H_{nm} \rangle_0 \langle H_{ij} H_{j'i'} \rangle_0 \langle H_{l'k'} H_{n'm'} \rangle_0 \\
= & \begin{array}{c} l \quad k \\ || \\ i \quad j \end{array} \begin{array}{c} l' \quad k' \\ \diagup \quad \diagdown \\ n' \quad m' \\ \diagdown \quad \diagup \\ i' \quad j' \end{array} + \begin{array}{c} nm \\ || \\ i \quad j \end{array} \begin{array}{c} n' \quad m' \\ \diagup \quad \diagdown \\ l' \quad l \\ \diagdown \quad \diagup \\ k' \quad k \end{array} + \begin{array}{c} l \quad k \\ || \\ nm \end{array} \begin{array}{c} l' \quad k' \\ \diagup \quad \diagdown \\ i' \quad i \\ \diagdown \quad \diagup \\ n' \quad m' \quad j' \quad j \end{array} . \tag{3.27}
\end{aligned}$$

なお，このような非連結 Feynman 図は連結部分の計算に寄与しない．これを具体的な計算によって示そう．まず，連結相関関数の定義式 (3.4) の両辺を展開し z^3 の項を比較することで以下を得る：

$$\langle H_{ij} \rangle_{\text{conn.}} = \langle H_{ij} \rangle, \tag{3.28}$$

$$\langle H_{ij} H_{kl} \rangle_{\text{conn.}} = \langle H_{ij} H_{kl} \rangle - \langle H_{ij} \rangle_{\text{conn.}} \langle H_{kl} \rangle_{\text{conn.}}, \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}
\langle H_{ij} H_{kl} H_{nm} \rangle_{\text{conn.}} & = \langle H_{ij} H_{kl} H_{nm} \rangle - \langle H_{ij} H_{kl} \rangle_{\text{conn.}} \langle H_{nm} \rangle_{\text{conn.}} \\
& \quad - \langle H_{ij} H_{nm} \rangle_{\text{conn.}} \langle H_{kl} \rangle_{\text{conn.}} - \langle H_{kl} H_{nm} \rangle_{\text{conn.}} \langle H_{ij} \rangle_{\text{conn.}} - \langle H_{ij} \rangle_{\text{conn.}} \langle H_{kl} \rangle_{\text{conn.}} \langle H_{nm} \rangle_{\text{conn.}} . \tag{3.30}
\end{aligned}$$

さらに, Wick の定理 (3.18) を用いれば, 以下の結果を得る:

$$\begin{aligned}
\langle H_{ij} \rangle &= \frac{1}{\mathcal{Z}} \int_{\mathbf{H}(N)} dH e^{-\frac{N}{2} \text{Tr}[H^2] + \frac{Nv_3}{3} \text{Tr}[H^3]} H_{ij} \\
&= \frac{1}{\mathcal{Z}_0} \int_{\mathbf{H}(N)} dH e^{-\frac{N}{2} \text{Tr}[H^2]} H_{ij} + \frac{1}{\mathcal{Z}_0} \int_{\mathbf{H}(N)} dH e^{-\frac{N}{2} \text{Tr}[H^2]} \frac{Nv_3}{3} \text{Tr}[H^3] H_{ij} + \mathcal{O}(v_3^2) \\
&= \langle H_{ij} \rangle_0 + \frac{Nv_3}{3} \sum_{k', l', m'=1}^N \langle H_{k'l'} H_{l'm'} H_{m'k'} H_{ij} \rangle_0 \\
&= v_3 \delta_{ij},
\end{aligned} \tag{3.31}$$

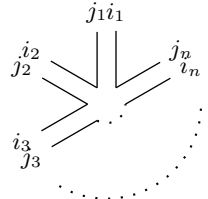
$$\begin{aligned}
\langle H_{ij} H_{kl} \rangle &= \frac{1}{\mathcal{Z}} \int_{\mathbf{H}(N)} dH e^{-\frac{N}{2} \text{Tr}[H^2] + \frac{Nv_3}{3} \text{Tr}[H^3]} H_{ij} H_{kl} \\
&= \frac{1}{\mathcal{Z}_0} \int_{\mathbf{H}(N)} dH e^{-\frac{N}{2} \text{Tr}[H^2]} H_{ij} H_{kl} + \frac{1}{\mathcal{Z}_0} \int_{\mathbf{H}(N)} dH e^{-\frac{N}{2} \text{Tr}[H^2]} \frac{Nv_3}{3} \text{Tr}[H^3] H_{ij} H_{kl} + \mathcal{O}(v_3^2) \\
&= \langle H_{ij} H_{kl} \rangle_0 + \frac{Nv_3}{3} \sum_{k', l', m'=1}^N \langle H_{k'l'} H_{l'm'} H_{m'k'} H_{ij} H_{kl} \rangle_0 + \mathcal{O}(v_3^2) \\
&= \langle H_{ij} H_{kl} \rangle_0 + \mathcal{O}(v_3^2).
\end{aligned} \tag{3.32}$$

したがって,

$$\begin{aligned}
\langle H_{ij} H_{kl} H_{nm} \rangle_{\text{conn.}} &= \langle H_{ij} H_{i'j'} \rangle_0 \langle H_{kl} H_{k'l'} \rangle_0 \langle H_{mn} H_{m'n'} \rangle_0 v_3 N \delta_{j'm'} \delta_{i'l'} \delta_{k'n'} \\
&\quad + \langle H_{ij} H_{i'j'} \rangle_0 \langle H_{kl} H_{k'l'} \rangle_0 \langle H_{mn} H_{m'n'} \rangle_0 v_3 N \delta_{l'm'} \delta_{j'k'} \delta_{i'n'} + \mathcal{O}(v_3^2)
\end{aligned} \tag{3.33}$$

と連結 Feynman 図の寄与のみが残る. したがって, 連結相関関数を計算するには, 連結 Feynman 図の寄与のみを考えれば良い. 特に, 分配関数 \mathcal{Z} は 0 点相関関数とみなせるから, 外線を持たない連結 Feynman 図の数え上げに対応することがわかる.

式 (3.26) 同様に, 一般の n 点相互作用 $(v_n/n) \text{Tr}[H^n]$ がある場合に対しても Feynman 則を以下のように定める:

$$

$$= v_n N \delta_{j_n i_1} \delta_{j_1 i_2} \delta_{j_2 i_3} \cdots \delta_{j_{n-1} i_n}. \tag{3.34}$$$$

3.2 種数展開

本節では種数展開について解説する. 分配和の n 点相関関数の連結部分は行列のサイズ N を用いて

$$\langle Z(\beta_1) \cdots Z(\beta_n) \rangle_{\text{conn.}} = \sum_{g=0}^{\infty} \frac{Z_{g,n}(\beta_1, \dots, \beta_n)}{N^{2g+n-2}} \tag{3.35}$$

と展開される. これを種数展開 (genus expansion) と呼ぶ. 本節では, まず上式のように展開できることを Feynman 図を用いて示す. その後, JT 重力とランダム行列の対応を 3.3 節で導出するための準備として, 展開係数 $Z_{g,n}$ の具体的な計算方法を解説する.

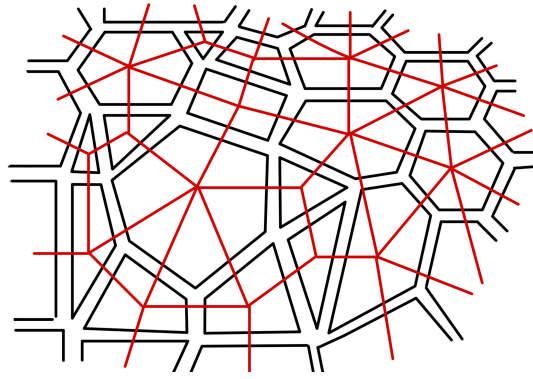


図 20: Feynmann 図 (黒線) とその双対グラフ (赤線)

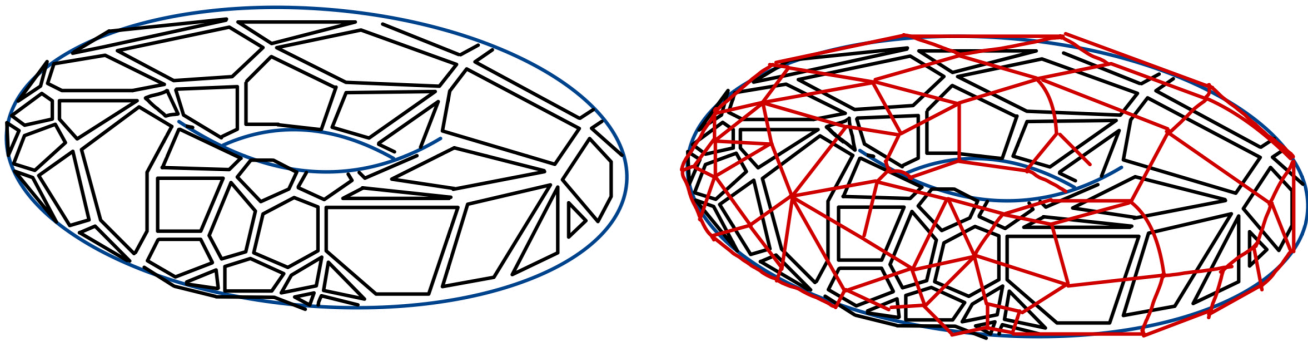


図 21: Feynman 図 (黒線) とその双対グラフ (赤線) の例

今、頂点が V 個で伝搬関数が P 本、loop が L 個であるような連結 Feynman 図を考えよう。この Feynman 図における N の次数を計算する。各頂点は N 、伝搬関数は N^{-1} の寄与を持つ。loop は $\frac{1}{N} \delta_{il} \delta_{jk} \delta^{il} \delta^{jk} = N$ の寄与を持つので、全体として N^{V-P+L} の重みを持つ。ここで、この Feynman 図の双対グラフを考えよう。すなわち、各ループを頂点とし、伝搬関数を横断するように辺を引いたグラフを考える (図 20)。すると、この双対グラフは面は V 個、辺は P 本、頂点は L 個であるような多面体となる。Euler の多面体定理より、ある閉多面体について

$$\text{面の数} - \text{辺の数} + \text{頂点の数} = 2 - 2 \times \text{穴の数} \quad (3.36)$$

が成り立つ。したがって、考えている Feynman 図の重みは、その双対グラフである多面体の穴の数、すなわち種数 g を用いて $N^{V-P+L} = N^{2-2g}$ と書ける。分配関数 \mathcal{Z} の連結部分 $\log \mathcal{Z}$ は、散乱行列同様上述のような連結 Feynman 図を全て数えあげたものであるから、以下が従う：

$$\log \mathcal{Z} = \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} F_g. \quad (3.37)$$

ここで F_g は双対グラフが種数 g となるような Feynman 図の寄与を表した定数である。上式が分配関数の連結部分 $\log \mathcal{Z}$ の種数展開である。

上式を用いて分配和の n 点相関関数 $\langle Z(\beta_1) \cdots Z(\beta_n) \rangle_{\text{conn.}}$ の種数展開を導く。ここで、Hermite

行列 H に対して固有値密度 $\rho(E)$ ($E \in \mathbb{R}$) を以下のように定義する：

$$\rho(E) = \sum_{i=1}^N \delta(E - \lambda_i) \quad (3.38)$$

ここで 1_N は $N \times N$ 単位行列, λ_i は H の i 番目の固有値である. 分配和 $Z(\beta)$ について

$$Z(\beta) = \text{Tr}[e^{-\beta H}] = \sum_{i=1}^N e^{-\beta \lambda_i} = \sum_{i=1}^N \int_0^\infty dE e^{-\beta E} \delta(E - \lambda_i) = \int_0^\infty dE e^{-\beta E} \rho(E) \quad (3.39)$$

となるから, 分配和 $Z(\beta)$ は固有値密度 $\rho(E)$ の Laplace 変換として得られる. したがって,

$$\langle Z(\beta_1) \cdots Z(\beta_n) \rangle_{\text{conn.}} = \int_0^\infty e^{-\beta_1 E_1} \cdots \int_0^\infty e^{-\beta_n E_n} \langle \rho(E_1) \cdots \rho(E_n) \rangle_{\text{conn.}} \quad (3.40)$$

となるので, 分配和の種数展開を導くには固有値密度の種数展開を導けば良い. 今, 分配関数 Z をポテンシャル V の汎関数とみなせば

$$\begin{aligned} \frac{\delta \log Z[V]}{\delta V(E1_N)} &= \frac{1}{Z} \int dH' e^{-NV(H')} (-N) \frac{\delta V(H')}{\delta V(E1_N)} \\ &= -\frac{N}{Z} \int dH' e^{-NV(H')} \rho(E) = -N \langle \rho(E) \rangle \end{aligned} \quad (3.41)$$

が成り立つ. 途中の汎関数微分は以下を用いた：

$$V(H') = \sum_{i=1}^N V(\lambda'_i) = V(E1_N) \sum_{i=1}^N \delta(E - \lambda'_i). \quad (3.42)$$

ここで λ'_i は H' の固有値である. 同様に

$$\frac{\delta^n \log Z[V]}{\delta V(E_1 1_N) \cdots \delta V(E_n 1_N)} = (-N)^n \langle \rho(E_1) \cdots \rho(E_n) \rangle_{\text{conn}} \quad (3.43)$$

となる. したがって, $\log Z$ の種数展開 (3.37) より

$$\begin{aligned} \langle \rho(E_1) \cdots \rho(E_n) \rangle_{\text{conn.}} &= \frac{1}{(-N)^n} \frac{\delta^n \log Z[V]}{\delta V(E_1 1_N) \cdots \delta V(E_n 1_N)} \\ &= \frac{1}{(-N)^n} \frac{\delta^n}{\delta V(E_1 1_N) \cdots \delta V(E_n 1_N)} \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} F_g[V] \\ &= \sum_{g=0}^{\infty} \frac{1}{N^{2g+n-2}} \left(-\frac{\delta^n F_g[V]}{\delta V(E_1 1_N) \cdots \delta V(E_n 1_N)} \right) \\ &\equiv \sum_{g=0}^{\infty} \frac{\rho_{g,n}(E_1, \dots, E_n)}{N^{2g+n-2}} \end{aligned} \quad (3.44)$$

と展開できる.

なお, 以上の議論は以下のようにしても理解できる. まず, 分配和 $Z(\beta)$ を以下のように展開しておく：

$$Z(\beta) := \text{Tr}[e^{-\beta H}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^k}{k!} \text{Tr}[H^k]. \quad (3.45)$$

すると, 分配和の n 点相関関数は以下のように $\text{Tr}[H^n]$ の相関関数として書ける：

$$\langle Z(\beta_1) \cdots Z(\beta_n) \rangle_{\text{conn.}} = \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_1)^{k_1} \cdots (-\beta_n)^{k_n}}{k_1! \cdots k_n!} \langle \text{Tr}[H^{k_1}] \cdots \text{Tr}[H^{k_n}] \rangle_{\text{conn.}} \quad (3.46)$$

$$\langle \text{Tr}[H^3] \rangle = \sum_{i,j,k,l,m,n=1}^N \delta_{jk} \delta_{lm} \delta_{ni} \langle H_{ij} H_{kl} H_{mn} \rangle =$$

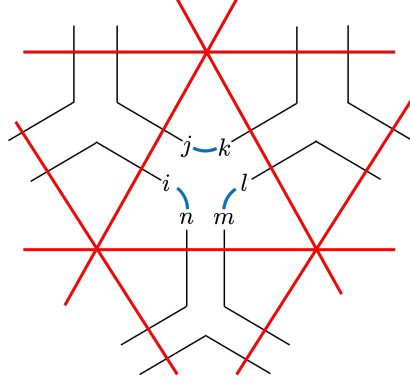


図 22: $\text{Tr}[H^3]$ の挿入. 黒線が Feynman 図, 赤線がその双対グラフである. 青線は外線の添字の縮約に対応している.

そこで $\langle \text{Tr}[H^{k_1}] \cdots \text{Tr}[H^{k_n}] \rangle_{\text{conn.}}$ を考えよう. 実は, 各 $\text{Tr}[H^k]$ の挿入は前述の Feynman 図において, その双対グラフから k 個の辺を持つ面を切り取ることに対応している. 言い換えれば, $\text{Tr}[H^k]$ の挿入は Feynman 図の双対グラフに k 個の辺からなる境界を挿入することに対応している (図 22). これは, 以下のようにして理解できる. まず, $\text{Tr}[H^{k_1}]$ の期待値は以下のように書ける:

$$\langle \text{Tr}[H^{k_1}] \rangle_{\text{conn.}} = \sum_{i_1, j_1, \dots, i_k, j_k} \delta_{j_1 i_2} \cdots \delta_{j_k i_1} \langle H_{i_1 j_1} \cdots H_{i_k j_k} \rangle_{\text{conn.}} \quad (3.47)$$

左辺の期待値 $\langle H_{i_1 j_1} \cdots H_{i_k j_k} \rangle_{\text{conn.}}$ は $2k$ 本の外線を持つ連結 Feynman 図に対応している. $2k$ 本の外線は双対グラフでは k 本の辺に対応するので, 期待値 $\langle H_{i_1 j_1} \cdots H_{i_k j_k} \rangle_{\text{conn.}}$ に対応する双対 Feynman 図は k 本の辺からなる境界を持つ多面体とみなせる. したがって $\text{Tr}[H^k]$ の挿入は Feynman 図の双対グラフに k 個の辺からなる境界を挿入することに対応している.

n 点相関関数 $\langle \text{Tr}[H^{k_1}] \cdots \text{Tr}[H^{k_n}] \rangle_{\text{conn.}}$ を Feynman 図を用いて計算することを考えよう. 頂点を V 個で伝搬関数を P 本, loop を L 個とする. すると, この双対グラフは面は V 個, 辺は P 本, 頂点は L 個であるような多面体となる. Euler の多面体定理より, 境界を持つ多面体について

$$\text{面の数} - \text{辺の数} + \text{頂点の数} = 2 - \text{境界の数} - 2 \times \text{穴の数} \quad (3.48)$$

が成り立つ. したがって, 考えている Feynman 図の重みは, その双対グラフである多面体の穴の数, すなわち種数 g および境界数 n を用いて $N^{V-P+L} = N^{2-n-2g}$ と書ける. 以上のことから, $\log Z$ が種数 g の多面体の数えあげだっただのに対応して, n 点相関関数 $\langle \text{Tr}[H^{k_1}] \cdots \text{Tr}[H^{k_n}] \rangle_{\text{conn.}}$ は種数 g で辺が k_1, \dots, k_n 本の n 個の境界を持つ多面体の数えあげに対応することがわかる [35, 36]:

$$\langle \text{Tr}[H^{k_1}] \cdots \text{Tr}[H^{k_n}] \rangle_{\text{conn.}} = \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g-n} T_{g,n}(k_1, \dots, k_n). \quad (3.49)$$

ここで $T_{g,n}(k_1, \dots, k_n)$ は双対グラフが k_1, \dots, k_n 個の辺からなる n 個の境界を持つような Feynman 図の寄与を表した定数である. したがって, $\langle \text{Tr}[H^{k_1}] \cdots \text{Tr}[H^{k_n}] \rangle_{\text{conn.}}$ の和で表される分配和の n 点相関関数も

$$\langle Z(\beta_1) \cdots Z(\beta_n) \rangle_{\text{conn.}} = \sum_{g=0}^{\infty} \frac{Z_{g,n}(\beta_1, \dots, \beta_n)}{N^{2g+n-2}} \quad (3.50)$$

と展開できる. ここで

$$Z_{g,n}(\beta_1, \dots, \beta_n) := \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_1)^{k_1} \cdots (-\beta_n)^{k_n}}{k_1! \cdots k_n!} T_{g,n}(k_1, \dots, k_n) \quad (3.51)$$

である. 実は, 分配和 $Z(\beta) = \text{Tr}[e^{-\beta H}]$ は loop 作用素と呼ばれ, 分配和の挿入は長さ β の境界の挿入とみなせることが知られている (Loop 作用素については [32] の 8.1 章などを参照されたい). このことから, 分配和の n 点連結相関関数は境界つき 2 次元面の数え上げとみなせる. 2.5 節で述べたように JT 重力の分配関数も境界つき 2 次元面の数え上げであったから, 両者は関係があると期待される. 次節以降で具体的にそれを見ていこう.

3.2.1 Disk 形の場合: $(g, n) = (0, 1)$

種数展開の展開係数 $Z_{0,1}$ を計算しよう. 連結部分の定義式 (3.4) において, z の 1 次の項を比較すれば $\langle A \rangle = \langle A \rangle_{\text{conn.}}$ となる. したがって, $\langle Z(\beta) \rangle = \langle Z(\beta) \rangle_{\text{conn.}}$ であるから, 単に分配和の期待値を考えれば良い. ここで行列のサイズを無限大に取る極限 $N \rightarrow \infty$ における固有値密度 $\rho_0(E)$ を

$$\rho_0(E) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \langle \rho(E) \rangle \quad (3.52)$$

と定義する. $1/N$ は規格化

$$\int dE \rho_0(E) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int dE \langle \rho(E) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left\langle \int dE \sum_{i=1}^N \delta(E - \lambda_i) \right\rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \times N = 1 \quad (3.53)$$

のためにつけた. $\langle Z(\beta) \rangle$ の種数展開 (3.37) を具体的に書けば

$$\langle Z(\beta) \rangle = N Z_{0,1}(\beta) + \frac{1}{N} Z_{1,1}(\beta) + \frac{1}{N^3} Z_{2,1}(\beta) + \cdots \quad (3.54)$$

となるから,

$$Z_{0,1}(\beta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \langle Z(\beta) \rangle \quad (3.55)$$

である. 分配和 $Z(\beta)$ と固有値密度 $\rho(E)$ の関係式 (3.39) および $\rho_0(E)$ の定義式 (3.52) から以下が従う:

$$Z_{0,1}(\beta) = \int_0^{\infty} e^{-\beta E} \rho_0(E). \quad (3.56)$$

したがって, $Z_{0,1}$ を計算するには $N \rightarrow \infty$ における固有値密度 $\rho_0(E)$ を計算すれば良い. ところで, ??節において JT 重力の分配関数は disk 形 $(g, n) = (0, 1)$ のときには, (2.237), (2.238) において $\gamma = 1/2$ とした式から

$$Z_{0,1} = Z_{\text{Sch}}^{\text{Disk}}(\beta) = \int_0^{\infty} dE e^{-\beta E} \rho_{\text{JT}}(E), \quad (3.57)$$

$$\rho_{\text{JT}}(E) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sinh(2\pi\sqrt{E}) \quad (3.58)$$

となることがわかった. そこで, ランダム行列の分配和の 1 点相関関数において $\rho_0(E) = \rho_{\text{JT}}(E) = \sinh(2\pi\sqrt{E})/(2\pi)^2$ と取ることができれば, ランダム行列の $Z_{0,1}$ と JT 重力の $Z_{0,1}$ が一致する. この対応関係については 3.3 節で詳しく議論する.

最後に、ポテンシャル V から $\rho_0(E)$ および $Z_{0,1}(\beta)$ を具体的に計算する方法を説明しておく。まず行列積分 dH を固有値 λ_i の積分に書き換えることができる（導出は付録 A.6 で行った）：

$$\mathcal{Z} = \int d^N \lambda \Delta^2(\lambda) e^{-N \sum_{i=1}^n V(\lambda_i)}, \quad (3.59)$$

$$\Delta^2(\lambda) := \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2, \quad d^N \lambda = d\lambda_1 \cdots d\lambda_N. \quad (3.60)$$

ここで、 $\Delta^2(\lambda)$ は Van der Monde 行列式と呼ばれ、Hermitian 行列 H から固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ への変数変換によって現れる Jacobi 行列式と見なすこともできるし、ゲージ理論における Faddeev-Popov 行列式と見なすこともできる。上式をさらに式変形すれば、分配関数 \mathcal{Z} は以下のように書ける：

$$\mathcal{Z} = \int d^N \lambda e^{-N \sum_{i=1}^n V_{\text{eff}}(\lambda_i)}, \quad (3.61)$$

$$V_{\text{eff}}(\lambda_i) := V(\lambda_i) - \frac{1}{N} \sum_{i < j} \log(\lambda_i - \lambda_j)^2. \quad (3.62)$$

$V_{\text{eff}}(\lambda_i)$ を有効ポテンシャルと呼ぶ。 $N \rightarrow \infty$ の極限では、分配関数における被積分関数の鞍点が支配的になる。したがって、 $V'_{\text{eff}}(\lambda) = 0$ を満たす固有値 λ の寄与が支配的になる。また、 $N \rightarrow \infty$ の極限で固有値が分布 $\rho(E)$ から分布 $N\rho_0(E) := \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \rho(E) \rangle$ に置き変わるのので、有効ポテンシャル $V_{\text{eff}}(\lambda_i)$ に現れる離散和は以下のように主値積分に置き換えられる：

$$\begin{aligned} \sum_{i < j} \log(\lambda_i - \lambda_j)^2 &= \sum_{i < j} \int d\lambda \log(\lambda - \lambda_j)^2 \delta(\lambda - \lambda_i) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{\lambda - \epsilon} d^N \lambda \rho(\lambda) \log(\lambda - \lambda_j)^2 + \int_{\lambda + \epsilon}^{+\infty} d^N \lambda \rho(\lambda) \log(\lambda - \lambda_j)^2 \right] \\ &\rightarrow N \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{\lambda - \epsilon} d^N \lambda \rho_0(\lambda) \log(\lambda - \lambda_j)^2 + \int_{\lambda + \epsilon}^{+\infty} d^N \lambda \rho_0(\lambda) \log(\lambda - \lambda_j)^2 \right] \\ &=: N\mathcal{P} \int d\lambda \rho_0(\lambda) \log(\lambda - \lambda_j)^2. \end{aligned} \quad (3.63)$$

したがって、

$$V_{\text{eff}}(E) = V(E) - N\mathcal{P} \int d\lambda \rho_0(\lambda) \log(\lambda - E)^2 \quad (3.64)$$

となる。ここで表記を簡単にするために λ_i を E に置き換えた。両辺を E で微分すれば

$$V'_{\text{eff}}(\lambda_i) = V(\lambda_i) - N\mathcal{P} \int d\lambda \rho_0(\lambda) \frac{-2}{\lambda - E} \quad (3.65)$$

である。これを用いると、鞍点方程式 $V'_{\text{eff}}(E) = 0$ は以下のように書き換えられる：

$$V'(E) = 2\mathcal{P} \int d\lambda \frac{\rho_0(\lambda)}{E - \lambda}. \quad (3.66)$$

これがポテンシャル V と固有値密度 ρ_0 の関係式である。ここで、分配和 $Z(\beta)$ の Laplace 変換を考えよう：

$$R(E) := - \int_0^{\infty} d\beta e^{\beta E} Z(\beta). \quad (3.67)$$

これを resolvent と呼ぶ。Laplace 変換は簡単に実行できて以下ようになる：

$$\begin{aligned}
 R(E) &= - \int_0^\infty d\beta e^{\beta E} \text{Tr}[e^{-\beta H}] \\
 &= \text{Tr} \left[- \int_0^\infty d\beta e^{\beta(E-H)} \right] \\
 &= \text{Tr} \left[\frac{1}{E-H} \right] = \sum_{i=1}^N \frac{1}{E-\lambda_i}.
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

ここで Hermite 行列 H の任意の固有値 λ_i に対して $E < \lambda_i$ であると仮定した。ここで δ 関数の定義³⁵

$$\delta(z) := \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{z+i\epsilon} - \frac{1}{z-i\epsilon} \right) \tag{3.69}$$

から、固有値密度 $\rho(E)$ を resolvent $R(E)$ を用いて書くことができる：

$$\begin{aligned}
 \rho(E) &:= \sum_{i=1}^N \delta(E-\lambda_i) \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{E-\lambda_i+i\epsilon} - \frac{1}{E-\lambda_i-i\epsilon} \right) \\
 &= \frac{R(E+i\epsilon) - R(E-i\epsilon)}{2\pi i}.
 \end{aligned} \tag{3.70}$$

ここで、分配和の期待値 $\langle Z(\beta) \rangle$ の種数展開

$$\langle Z(\beta) \rangle_{\text{conn.}} = NZ_{0,1}(\beta) + \frac{1}{N}Z_{1,1}(\beta) + \frac{1}{N^3}Z_{2,1}(\beta) + \dots \tag{3.71}$$

から resolvent の期待値 $\langle Z(\beta) \rangle$ も

$$\langle R(E) \rangle_{\text{conn.}} = NR_{0,1}(E) + \frac{1}{N}R_{1,1}(E) + \frac{1}{N^3}R_{2,1}(E) + \dots \tag{3.72}$$

と種数展開できることから以下が従う

$$\rho_0(E) = \frac{R_{0,1}(E+i\epsilon) - R_{0,1}(E-i\epsilon)}{2\pi i}, \tag{3.73}$$

$$R_{0,1}(E) = \int d\beta e^{\beta E} Z_{0,1}(\beta). \tag{3.74}$$

上式と鞍点方程式 (3.66) および Hilbert の公式 (証明は A.7 節で行った)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{f(x)}{x-(p \pm i\epsilon)} = \mathcal{P} \int \frac{f(x)}{x-p} dx \pm i\pi f(p) \tag{3.75}$$

から

$$\begin{aligned}
 V'(E) &= 2\mathcal{P} \int d\lambda \frac{\rho_0(\lambda)}{E-\lambda} \\
 &= 2\mathcal{P} \int \frac{d\lambda}{2\pi i} \frac{R_{0,1}(\lambda+i\epsilon) - R_{0,1}(\lambda-i\epsilon)}{E-\lambda} \\
 &= R_{0,1}(E+i\epsilon) + R_{0,1}(E-i\epsilon)
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

³⁵ここでは佐藤超関数の意味で定義したが、通常の意味での δ 関数の定義 $\int z f(z) \delta(z-a) = f(a)$ を再現することはあとで述べる Hilbert の公式 (3.75) から導かれる。

となる．上式と留数積分を用いれば以下の式が導かれる：

$$R_{0,1}(E) = \frac{1}{2} \int_{C_E} \frac{d\lambda}{2\pi i} \frac{V'(\lambda)}{\lambda - E} \sqrt{\frac{\sigma(E)}{\sigma(\lambda)}} \quad (3.77)$$

ここで σ は実数 a_+, a_- を用いて

$$\sigma(z) := (z - a_+)(z - a_-) \quad (3.78)$$

と定義される関数で， C_E は $\lambda = E$ を反時計回りする経路で，実軸上の線分 $[a_-, a_+]$ を含まないものである．実軸上の線分 $[a_-, a_+]$ は固有値密度 ρ_0 の台，すなわち固有値密度が非零を取る領域である．関数 σ は分岐点 $[a_-, a_+]$ の処理のためにつけてある．計算の詳細は付録 A.8 節に記した．上式 (3.77) を逆 Laplace 変換すれば，ポテンシャル V から $Z_{0,1}$ を計算できる．

3.2.2 Wormhole 形の場合: $(g, n) = (0, 2)$

種数展開の展開係数 $Z_{0,2}$ を計算しよう．前節と同様に分配和 $Z(\beta)$ の Laplace 変換したものである resolvent $R(E)$ に注目する．分配和 $Z(\beta)$ と resolvent $R(E)$ の 2 点相関関数の種数展開 (3.35) は

$$\langle Z(\beta_1)Z(\beta_2) \rangle_{\text{conn.}} = Z_{0,2}(\beta_1, \beta_2) + \frac{1}{N^2} Z_{1,2}(\beta_1, \beta_2) + \dots, \quad (3.79)$$

$$\langle R(\beta_1)R(\beta_2) \rangle_{\text{conn.}} = R_{0,2}(\beta_1, \beta_2) + \frac{1}{N^2} R_{1,2}(\beta_1, \beta_2) + \dots \quad (3.80)$$

と与えられるので，

$$R_{0,2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle R(\beta_1)R(\beta_2) \rangle_{\text{conn.}} \quad (3.81)$$

を計算すれば $Z_{0,2}$ はその逆 Laplace 変換として与えられる．さらに式 (3.68) より resolvent $R(E)$ は固有値密度 ρ を用いて

$$R(E) = \sum_{i=1} \frac{1}{E - \lambda_i} = \int d\lambda \frac{\rho(\lambda)}{E - \lambda} \quad (3.82)$$

と書けるので

$$\langle R(E_1)R(E_2) \rangle_{\text{conn.}} = \int d\lambda_1 \int d\lambda_2 \frac{1}{E_1 - \lambda_1} \frac{1}{E_1 - \lambda_1} \langle \rho(\lambda_1)\rho(\lambda_2) \rangle_{\text{conn}} \quad (3.83)$$

となる．したがって固有値密度の 2 点相関関数 $\langle \rho(\lambda_1)\rho(\lambda_2) \rangle_{\text{conn}}$ を計算すればよい．式 (3.41), (3.43) より

$$\begin{aligned} \langle \rho(\lambda_1)\rho(\lambda_2) \rangle_{\text{conn}} &= \frac{1}{N^2} \frac{\delta}{\delta V(\lambda_2)} \frac{\delta}{\delta V(\lambda_1)} \log \mathcal{Z} \\ &= \frac{1}{N} \frac{\delta}{\delta V(\lambda_2)} \langle \rho(\lambda_1) \rangle = \frac{\delta}{\delta V(\lambda_2)} \rho_0(\lambda_1) \end{aligned} \quad (3.84)$$

である．一方，鞍点方程式 (3.66) より

$$\begin{aligned} V'(E_1) &= 2\mathcal{P} \int d\lambda \frac{\rho_0(\lambda)}{E_1 - \lambda} \\ &= \int d\lambda_1 \rho_0(\lambda_1) \left(\frac{1}{E_1 + i\epsilon - \lambda_1} + \frac{1}{E_1 - i\epsilon - \lambda_1} \right) \end{aligned} \quad (3.85)$$

となる. ここで Hilbert の公式 (3.75) から導かれる等式

$$2\mathcal{P} \int \frac{f(x)}{x-p} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left(\frac{1}{x-(p-i\epsilon)} + \frac{1}{x-(p+i\epsilon)} \right) \quad (3.86)$$

を用いた. これに

$$\begin{aligned} V'(E) &= \int d\lambda V'(\lambda) \delta(E-\lambda) = [V(\lambda) \delta(E-\lambda)]_{\lambda=-\infty}^{\infty} - \int d\lambda V(\lambda) \frac{d}{d\lambda} \delta(E-\lambda) \\ &= - \int d\lambda V(\lambda) \frac{d}{d\lambda} \delta(E-\lambda) \end{aligned} \quad (3.87)$$

を代入すれば,

$$\int d\lambda_1 \rho_0(\lambda_1) \left(\frac{1}{E_1+i\epsilon-\lambda_1} + \frac{1}{E_1-i\epsilon-\lambda_1} \right) = - \int d\lambda V(\lambda) \frac{d}{d\lambda} \delta(E_1-\lambda) \quad (3.88)$$

となる. 両辺を $V(\lambda)$ で汎関数微分して (3.84) を代入すれば

$$\int d\lambda_1 \langle \rho(\lambda_1) \rho(\lambda_2) \rangle_{\text{conn}} \left(\frac{1}{E_1+i\epsilon-\lambda_1} + \frac{1}{E_1-i\epsilon-\lambda_1} \right) = - \frac{d}{d\lambda_2} \delta(E_1-\lambda_2) \quad (3.89)$$

を得る. 両辺に $1/(E_2-\lambda_2)$ を掛けて λ_2 について積分すれば (3.83) 式と合わせて

$$R_{0,2}(E_1+i\epsilon, E_2) + R_{0,2}(E_1-i\epsilon, E_2) = - \frac{1}{(E_1-E_2)^2} \quad (3.90)$$

を得る. ここで, 鞍点方程式を用いることは $N \rightarrow \infty$ の極限をとっていることと同値であることと式 (3.81) から, 左辺は $\langle R(E_1)R(E_2) \rangle_{\text{conn}}$ でなく $R_{0,2}(E_1, E_2)$ となっていることに注意されたい. 前節の $R_{0,1}$ のときと同様にして $R_{0,2}$ が計算できて

$$R_{0,2}(E_1, E_2) = \frac{1}{2(E_1-E_2)^2} \left(\frac{E_1 E_2 - (a_+ + a_-)(E_1 + E_2)/2 + a_+ a_-}{\sqrt{\sigma(E_1)} \sqrt{\sigma(E_2)}} - 1 \right) \quad (3.91)$$

となる (導出は付録 A.9 節参照). 特に, $a_+ = -a_- \equiv a$ の場合には以下の表式を得る:

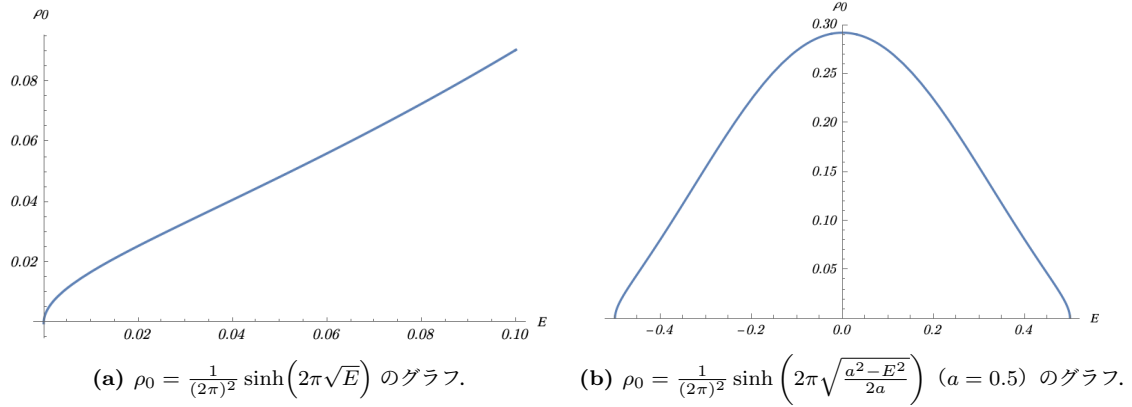
$$R_{0,2}(E_1, E_2) = \frac{1}{2(E_1-E_2)^2} \left(\frac{E_1 E_2 - a^2}{\sqrt{\sigma(E_1)} \sqrt{\sigma(E_2)}} - 1 \right). \quad (3.92)$$

3.2.3 一般の場合: $(g, n) \neq (0, 1), (0, 2)$

この場合には, Eynard 漸化式 [37] と呼ばれる方法で漸次計算できることが知られている. Eynard 漸化式を解説するには, double scaling limit と呼ばれる極限について解説しなければならないので, 次節でこれを説明する.

3.3 Saad-Shenker-Stanford 対応

本節では, double scaling limit と呼ばれる極限のもとでランダム行列と JT 重力が対応する, Saad-Shenker-Stanford (SSS) 対応 [6] を示す. 区別をつけるために, ランダム行列における分配和 $Z(\beta)$ の n 点相関関数を種数展開した時の係数を $Z_{g,n}^{\text{RM}}$ と書き, JT 重力における分配関数を $Z_{g,n}^{\text{JT}}$ のように書き, 添字 RM, JT でこれらを区別する.

図 23: 固有値密度 ρ_0 のグラフ.

前節までの計算によって、ランダム行列の固有値密度を

$$\rho_0 = \rho_{\text{JT}} = \frac{1}{(2\pi)^2} \sinh(2\pi\sqrt{E}) \quad (3.93)$$

と取れば、ランダム行列と JT 重力の対応が導かれると予想されていた。しかし、これは有界な台を持たず、規格化もされていない (図 23a)。そこで、まず、有界な台 $[-a, a]$ を持つ固有値密度 (図 23b)

$$\rho_0 = \frac{S(a)}{(2\pi)^2} \sinh\left(2\pi\sqrt{\frac{a^2 - E^2}{2a}}\right) \quad (3.94)$$

を用意する。ここで $S(a)$ は規格化定数である。その後、 $E \rightarrow E - a$ と置き換えた後、 $a \rightarrow \infty$ の極限を取れば固有値密度 (3.94) は式 (3.93) に規格化定数を掛けたもの

$$\rho_0 = \frac{S}{(2\pi)^2} \sinh(2\pi\sqrt{E}) \quad (3.95)$$

に一致するようになる (図 24)。ここで $S := \lim_{a \rightarrow \infty} S(a)$ とおいた。これは発散するが、その問題については後で触れる。行列のサイズ N だけでなく固有値密度の台を無限に大きくする 2 つの極限を取っているの、これを double scaling limit と呼ぶ。

固有値密度 (3.95) のもとで $Z_{g,n}^{\text{RM}}$ を計算しよう。まず、 $Z_{0,1}^{\text{RM}}$ は式 (3.56) より、

$$Z_{0,1}^{\text{RM}}(\beta) = SZ_{0,1}^{\text{JT}}(\beta) \quad (3.96)$$

となる。

次に、 $Z_{0,2}^{\text{RM}}$ を考える。式 (3.92) において $E_1 \rightarrow E_1 - a, E_2 \rightarrow E_2 - a$ と並進したあとに $a \rightarrow \infty$ の極限を取れば

$$R_{0,2}^{\text{RM}}(E_1, E_2) = \frac{1}{4\sqrt{E_1 E_2}(\sqrt{-E_1} + \sqrt{-E_2})^2} \quad (3.97)$$

と、固有値密度の詳細に依らない表式を得る。これをさらに逆 Laplace 変換して以下を得る (導出は付録 A.10 節参照)：

$$Z_{0,2}^{\text{RM}}(\beta_1, \beta_2) = \frac{\sqrt{\beta_1 \beta_2}}{2\pi(\beta_1 + \beta_2)} = Z_{0,2}^{\text{JT}}(\beta_1, \beta_2). \quad (3.98)$$

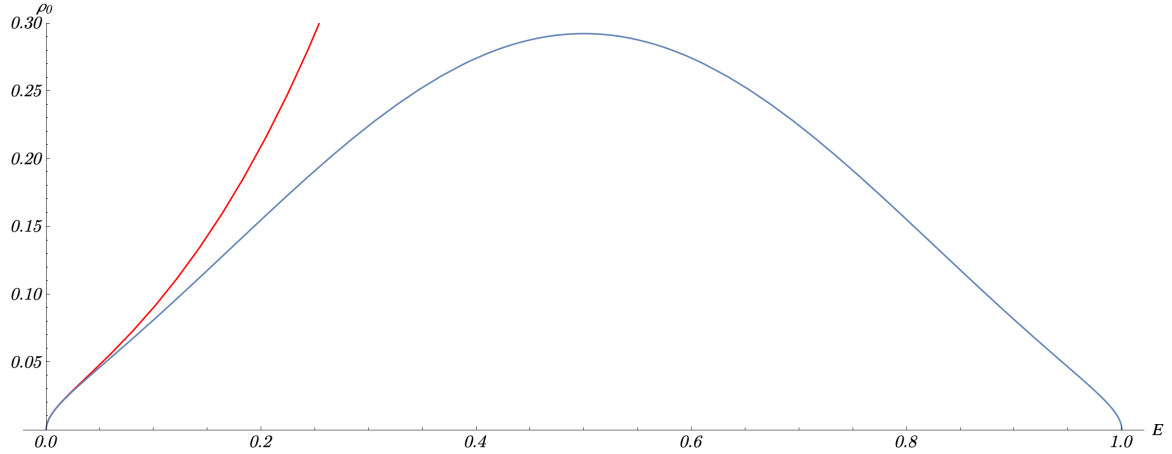


図 24: $\rho_0 = \frac{1}{(2\pi)^2} \sinh(2\pi\sqrt{E})$ のグラフ (赤線) と $\rho_0 = \frac{1}{(2\pi)^2} \sinh\left(2\pi\sqrt{\frac{a^2 - (E-a)^2}{2a}}\right)$ ($a = 0.5$) のグラフ (青線). $a \rightarrow \infty$ の極限を取ることによって両者のグラフが一致する.

最後に, $(g, n) \neq (0, 1), (0, 2)$ の場合を考えよう. より高次の $(g, n) \neq (0, 1), (0, 2)$ について計算するために Resolvent $R_{g,n}$ を変形した, 以下で定義される量を考えよう:

$$W_{g,n}(z_1, \dots, z_n) := \begin{cases} 2zy(z) & (g, n) = (0, 1) \\ \frac{1}{(z_1 - z_2)^2} & (g, n) = (0, 2) \\ (-2)^n z_1 \dots z_n R_{g,n}(-z_1^2, \dots, -z_n^2) & (g, n) \neq (0, 1), (0, 2) \end{cases}. \quad (3.99)$$

ここで $z_m := \sqrt{-E_m}$ ($m = 1, \dots, n$) である. Double scaling limit をとったあとの $W_{g,n}((g, n) \neq (0, 1), (0, 2))$ に対して以下の漸化式が成り立つ [37]:

$$\begin{aligned} & W_{g,n}(z_1, J) \\ &= \text{Res}_{z \rightarrow 0} \left[\frac{1}{4y(z)(z_1^2 - z^2)} \left(W_{g-1, n+1}(z, -z, J) + \sum_{\substack{h_1+h_2=g \\ I_1 \cup I_2=J}} W_{h_1, 1+|I_1|}(z, I_1) W_{h_2, 1+|I_2|}(z, I_2) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.100)$$

ここで $J = \{z_2, \dots, z_n\}$ および spectral curve を $y(z) := -\pi i \rho_0(-z^2)$ と定義した. この漸化式を Eynard 漸化式あるいは位相的漸化式 (topological recursion) と呼ぶ. この証明は次節に回すことにして, ここでは JT 重力との対応を見ていこう. まず, Eynard 漸化式 (3.100) に固有値密度 (3.95) を代入することで,

$$\begin{aligned} & W_{g,n}^{\text{RM}}(z_1, J) \\ &= \text{Res}_{z \rightarrow 0} \left[\frac{1}{S \sin(2\pi z)(z_1^2 - z^2)} \left(W_{g-1, n+1}^{\text{RM}}(z, -z, J) + \sum_{\substack{h_1+h_2=g \\ I_1 \cup I_2=J}} W_{h_1, 1+|I_1|}^{\text{RM}}(z, I_1) W_{h_2, 1+|I_2|}^{\text{RM}}(z, I_2) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.101)$$

を得る. この両辺に S^{2-2g-n} を掛けて

$$\begin{aligned} & S^{2-2g-n} W_{g,n}^{\text{RM}}(z_1, J) \\ &= \text{Res}_{z \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\sin(2\pi z)(z_1^2 - z^2)} \left(S^{2-2(g-1)-(n+1)} W_{g-1,n+1}^{\text{RM}}(z, -z, J) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \sum_{\substack{h_1+h_2=g \\ I_1 \cup I_2=J}} S^{2-2h_1-(1+|I_1|)} W_{h_1,1+|I_1|}^{\text{RM}}(z, I_1) S^{2-2h_2-(1+|I_2|)} W_{h_2,1+|I_2|}^{\text{RM}}(z, I_2) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.102)$$

となる. 上式を Laplace 変換された Mirzakhani 漸化式 (2.295) と比較すれば, $S^{2-2g-n} W_{g,n}^{\text{RM}} = W_{g,n}^{\text{JT}}$ となる. したがって,

$$S^{2-2g-n} Z_{g,n}^{\text{RM}}(\beta_1, \dots, \beta_n) = Z_{g,n}^{\text{JT}}(\beta_1, \dots, \beta_n) \quad (3.103)$$

である.

以上の結果 (3.96), (3.98), (3.103) を種数展開の表式に代入することで以下を得る:

$$\langle Z(\beta_1) \cdots Z(\beta_n) \rangle_{\text{conn.}} = \sum_{g=0}^{\infty} \frac{Z_{g,n}^{\text{JT}}(\beta_1, \dots, \beta_n)}{(N/S)^{2g+n-2}}. \quad (3.104)$$

そこで, $N/S = e^{S_0}$ を保つように double scaling limit $N, a \rightarrow \infty$ を取れば,

$$\langle Z(\beta_1) \cdots Z(\beta_n) \rangle_{\text{conn.}} = Z^{\text{JT}}(\beta_1, \dots, \beta_n) \quad (3.105)$$

となる. すなわち, JT 重力の分配関数の全体 $Z(\beta_1, \dots, \beta_n)$ と n 点相関関数 $\langle Z(\beta_1) \cdots Z(\beta_n) \rangle_{\text{conn.}}$ が一致する. このランダム行列と JT 重力の対応のことを Saad-Shenker-Stanford (SSS) 対応 [6] と呼ぶ.

最後に, SSS 対応の物理的な解釈を与える. 2.2 節で見たように, 分配関数は 1 次元境界上の Schwarz 理論を用いて書けるのであった. そこで, JT 重力の量子論は 1 次元境界上の量子系と双対となることが期待される. しかし, 2.5 節の結果 (2.266) からわかるように, 境界が複数ある場合には

$$Z(\beta_1, \dots, \beta_n) = Z(\beta_1) \cdots Z(\beta_n) \quad (3.106)$$

のように, 境界が 1 つの場合の単純な積で書くことはできない. これを JT 重力における factorization problem と呼ぶ [38]. これは bulk の Weil-Petersson 体積からの寄与があることと, bulk と境界を繋ぐ測地線の長さおよび捻りパラメータ由来の積分があるからであった. すなわち, bulk の handle が複数あることが factorization problem の要因である. これにより, JT 重力に双対な 1 次元境界上の量子系が存在しないことがわかる. しかし, SSS 対応 (3.105) に現れるランダム行列 H を 1 次元境界上の理論の Hamiltonian とみなせば, 「境界が n 個の JT 重力は n 個の量子系の ensemble 平均をとったものに等しい」とみなすことができる:

$$Z^{\text{JT}}(\beta_1, \dots, \beta_n) = \langle \text{Tr}[e^{-\beta_1 H}] \cdots \text{Tr}[e^{-\beta_n H}] \rangle_{\text{conn.}} \quad (3.107)$$

すなわち, ランダム行列 H は JT 重力の各境界上の Hamiltonian に対応し, その分布を定めるのがランダム行列のポテンシャル V だと解釈できる.

3.4 Eynard 漸化式

ここでは Eynard 漸化式の証明の流れを簡単に解説する．詳しい解説は [31] の 4 章や原論文 [37] を参考にされたい．

まず，以下の積分を考えよう：

$$I_{k_1, k_2, \dots, k_n} := \sum_{i, j=1}^N \frac{1}{Z} \int_{\mathcal{H}(N)} dH \frac{\partial}{\partial H_{ij}} \left((H^{k_1})_{ij} \text{Tr}[H^{k_2}] \dots \text{Tr}[H^{k_n}] e^{-N \text{Tr}[V(H)]} \right). \quad (3.108)$$

この積分の被積分関数は全微分の形をしているため，Stokes の定理より，

$$I_{k_1, k_2, \dots, k_n} := \sum_{i, j=1}^N \frac{1}{Z} \int_{\partial \mathcal{H}(N)} dH_{ij} \left((H^{k_1})_{ij} \text{Tr}[H^{k_2}] \dots \text{Tr}[H^{k_n}] e^{-N \text{Tr}[V(H)]} \right). \quad (3.109)$$

となる．しかし，ランダム行列の各成分 $H_{i,j}$ を無限大に取れば確率密度関数 $e^{-N \text{Tr}[V(H)]}$ は 0 に収束するので，この境界積分 (3.109) は 0 となる．したがって，

$$I_{k_1, k_2, \dots, k_n} = 0 \quad (3.110)$$

である．一方，

$$\frac{\partial}{\partial H_{ij}} (H^k)_{ij} = \begin{cases} 0 & (k = 0) \\ 1 & (k = 1) \\ \sum_{l=1}^{k-1} \text{Tr}[H^l] \text{Tr}[H^{l-k-1}] & (k > 1) \end{cases}, \quad (3.111)$$

$$(H^{k_1})_{ij} \frac{\partial}{\partial H_{ij}} \text{Tr}[H^k] = k \text{Tr}[H^{k+k_1-1}], \quad (3.112)$$

$$(H^{k_1})_{ij} \frac{\partial}{\partial H_{ij}} e^{-N \text{Tr}[V(H)]} = -N e^{-N \text{Tr}[V(H)]} \text{Tr}[V'(H) H^{k_1}]. \quad (3.113)$$

であるから，

$$\begin{aligned} I_{k_1, k_2, \dots, k_n} &= \sum_{l=1}^{k_1-1} \langle \text{Tr}[H^l] \text{Tr}[H^{l-k_1-1}] \text{Tr}[H^{k_2}] \dots \text{Tr}[H^{k_n}] \rangle + \sum_{j=2}^n k_j \langle \text{Tr}[H^{k_2}] \dots \text{Tr}[H^{k_j+k_1-1}] \dots \text{Tr}[H^{k_n}] \rangle \\ &\quad - N \langle \text{Tr}[V'(H) H^{k_1}] \text{Tr}[H^{k_2}] \dots \text{Tr}[H^{k_n}] \rangle \end{aligned} \quad (3.114)$$

となる．式 (3.110) と合わせて以下のループ方程式を得る：

$$\begin{aligned} &N \langle \text{Tr}[V'(H) H^{k_1}] \text{Tr}[H^{k_2}] \dots \text{Tr}[H^{k_n}] \rangle \\ &= \sum_{l=1}^{k_1-1} \langle \text{Tr}[H^l] \text{Tr}[H^{l-k_1-1}] \text{Tr}[H^{k_2}] \dots \text{Tr}[H^{k_n}] \rangle + \sum_{j=2}^n k_j \langle \text{Tr}[H^{k_2}] \dots \text{Tr}[H^{k_j+k_1-1}] \dots \text{Tr}[H^{k_n}] \rangle \end{aligned} \quad (3.115)$$

次に，resolvent $R(E)$ を考えよう．式 (3.68) より，

$$R(E) = \text{Tr} \left[\frac{1}{E - H} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{E^{k+1}} \text{Tr}[H^k] \quad (3.116)$$

となるので以下を得る：

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{1}{E^{k_1+1}} \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{1}{E_2^{k_2+1}} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{1}{E_n^{k_n+1}} \langle \text{Tr}[V'(H)H^{k_1}] \text{Tr}[H^{k_2}] \cdots \text{Tr}[H^{k_n}] \rangle \\ &= \left\langle \text{Tr} \left[\frac{V'(H)}{E-H} \right] R(E_2) \cdots R(E_n) \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.117)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{1}{E^{k_1+1}} \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{1}{E_2^{k_2+1}} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{1}{E_n^{k_n+1}} \sum_{l=1}^{k_1-1} \langle \text{Tr}[H^l] \text{Tr}[H^{l-k_1-1}] \text{Tr}[H^{k_2}] \cdots \text{Tr}[H^{k_n}] \rangle \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{E^{l+1}} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{1}{E^{k'+1}} \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{1}{E_2^{k_2+1}} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{1}{E_n^{k_n+1}} \langle \text{Tr}[H^l] \text{Tr}[H^{k'}] \text{Tr}[H^{k_2}] \cdots \text{Tr}[H^{k_n}] \rangle \\ &= \langle R(E)R(E)R(E_2) \cdots R(E_n) \rangle, \end{aligned} \quad (3.118)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{1}{E^{k_1+1}} \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{1}{E_2^{k_2+1}} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{1}{E_n^{k_n+1}} \sum_{j=2}^n k_j \langle \text{Tr}[H^{k_2}] \cdots \text{Tr}[H^{k_j+k_1-1}] \cdots \text{Tr}[H^{k_n}] \rangle \\ &= \sum_{j=2}^n \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{1}{E^{k_1+1}} \sum_{k_j=0}^{\infty} \frac{k_j}{E_j^{k_j+1}} \langle R(E_2) \cdots \text{Tr}[H^{k_j+k_1-1}] \cdots R(E_n) \rangle \\ &= \sum_{j=2}^n \frac{\partial}{\partial E_j} \frac{\langle R(E)R(E_2) \cdots R(E_{j-1})R(E_{j+1}) \cdots R(E_n) \rangle - \langle R(E_2) \cdots R(E_n) \rangle}{E - E_j}. \end{aligned} \quad (3.119)$$

したがって、ループ方程式 (3.115) のの両辺に $\sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{1}{E^{k_1+1}} \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{1}{E_2^{k_2+1}} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{1}{E_n^{k_n+1}}$ を掛けることで以下を得る：

$$\begin{aligned} & N \left\langle \text{Tr} \left[\frac{V'(H)}{E-H} \right] R(E_2) \cdots R(E_n) \right\rangle \\ &= \langle R(E)R(E)R(E_2) \cdots R(E_n) \rangle + \sum_{j=2}^n \frac{\partial}{\partial E_j} \frac{\langle R(E)R(E_2) \cdots R(E_{j-1})R(E_{j+1}) \cdots R(E_n) \rangle - \langle R(E_2) \cdots R(E_n) \rangle}{E - E_j}. \end{aligned} \quad (3.120)$$

これが resolvent に対するループ方程式である。さらに、両辺を連結部分を用いて書き直すと以下のようになる：

$$\begin{aligned} & N (V'(E)R_{n+1}(E, \mathcal{E}) - P_{n-1}(E; \mathcal{E})) \\ &= R_{n+1}(E, E, \mathcal{E}) + \sum_{\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \mathcal{E}} R_{1+|\mathcal{F}_1|}(E, \mathcal{F}_1) R_{1+|\mathcal{F}_1|}(E, \mathcal{F}_1) + \sum_{j=2}^n \frac{\partial}{\partial E_j} \frac{R_{n-1}(E, \mathcal{E} \setminus \{E_j\}) - R_{n-1}(\mathcal{E})}{E - E_j}. \end{aligned} \quad (3.121)$$

ここで $\mathcal{E} := \{E_2, \dots, E_n\}$ および補助関数

$$P_{n-1}(E; \mathcal{E}) := \left\langle \text{Tr} \left[\frac{V(E) - V'(H)}{E-H} \right] R(E_2) \cdots R(E_n) \right\rangle_{\text{conn.}} \quad (3.122)$$

を定義した。この補助関数 $P_n(E; \mathcal{E})$ も種数展開できることが知られている：

$$P_{n-1}(E; \mathcal{E}) = \sum_{g=0}^{\infty} \frac{P_{g,n}(E; \mathcal{E})}{N^{2g+n-2}}. \quad (3.123)$$

補助関数 P_n および resolvent R_n の種数展開をループ方程式に代入することで以下を得る：

$$\begin{aligned} & V'(E)(R_{g,n}(E, \mathcal{E}) - P_{g,n}(E; \mathcal{E})) \\ &= R_{g-1,n+1}(E, E, \mathcal{E}) + \sum_{\substack{h_1+h_2=g \\ \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \mathcal{E}}} R_{h_1,1+|\mathcal{F}_1|}(E, \mathcal{F}_1) R_{h_2,1+|\mathcal{F}_1|}(E, \mathcal{F}_1). \end{aligned} \quad (3.124)$$

整理して

$$R_{g,n}(E, \mathcal{E}) = \frac{1}{V'(E)} \left[R_{g-1,n+1}(E, E, \mathcal{E}) + \sum_{\substack{h_1+h_2=g \\ \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \mathcal{E}}} R_{h_1,1+|\mathcal{F}_1|}(E, \mathcal{F}_1) R_{h_2,1+|\mathcal{F}_2|}(E, \mathcal{F}_2) \right] + P_{g,n}(E; \mathcal{E}) \quad (3.125)$$

となる. $z := \sqrt{E}, z_m := \sqrt{-E_m} (m = 2, \dots, n)$ と変数変換し, 両辺に $(-2)^n z z_2 \cdots z_n$ をかければ, $W_{g,n}$ の定義式 (3.99) より以下を得る:

$$W_{g,n}(z, J) = -\frac{1}{2zV'(z)} \left[W_{g-1,n+1}(z, z, J) + \sum_{\substack{h_1+h_2=g \\ I_1 \cup I_2 = J}} W_{h_1,1+|I_1|}(z, I_1) W_{h_2,1+|I_2|}(z, I_2) \right] + (-2)^n z z_2 \cdots z_n P_{g,n}(z; J). \quad (3.126)$$

ここで $J := \{z_2, \dots, z_n\}$ とした.

最後に, 漸化式 (3.126) を留数を用いて書き直そう. 簡単のため以下の仮定をする.

1. 任意の (g, n) に対して $W_{g,n}$ が $z \neq 0$ で解析的である.
2. 任意の (g, n) に対して $W_{g,n}$ は各引数の入れ替えおよび符号の反転で不変である.
3. 任意の (g, n) に対して $W_{g,n}$ は $|z| \rightarrow \infty$ で十分早く 0 に収束する.

このとき留数定理から以下が成り立つ:

$$W_{g,n}(z_1, J) = - \left(\operatorname{Res}_{z \rightarrow z_1} + \operatorname{Res}_{z \rightarrow -z_1} \right) \frac{z}{z_1^2 - z^2} W_{g,n}(z, J). \quad (3.127)$$

仮定 1 より, 上式の左辺の関数の持つ特異点は極 $z = 0, \pm z_1$, のみであるから, 留数定理より以下が従う:

$$W_{g,n}(z_1, J) = - \left(\int_{C_\infty} - \int_{C_0} \right) \frac{dz}{2\pi i} \frac{z}{z_1^2 - z^2} W_{g,n}(z, J). \quad (3.128)$$

ここで積分経路 C_∞ は原点を中心とする半径 ∞ の円で, C_0 は原点を中心とする半径が十分小さい (内部に極を含まない) 円である. 今, 仮定 3 より $W_{g,n}$ は $|z| \rightarrow \infty$ で十分早く 0 に収束するので, 積分 \int_{C_∞} は 0 となる. したがって,

$$\begin{aligned} W_{g,n}(z_1, J) &= \int_{C_0} \frac{dz}{2\pi i} \frac{z}{z_1^2 - z^2} W_{g,n}(z, J) \\ &= \operatorname{Res}_{z \rightarrow 0} \frac{z}{z_1^2 - z^2} W_{g,n}(z, J). \end{aligned} \quad (3.129)$$

となる. 最後再び留数定理を用いた. 上式の左辺に漸化式 (3.126) を代入すれば

$$\begin{aligned} W_{g,n}(z_1, J) &= - \operatorname{Res}_{z \rightarrow 0} \frac{z}{2V'(z)(z_1^2 - z^2)} \left[W_{g-1,n+1}(z, -z, J) + \sum_{\substack{h_1+h_2=g \\ I_1 \cup I_2 = J}} W_{h_1,1+|I_1|}(z, I_1) W_{h_2,1+|I_2|}(-z, I_2) \right] \\ &\quad + (-2)^n \operatorname{Res}_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 z_2 \cdots z_n}{z_1^2 - z^2} P_{g,n}(z; J) \end{aligned} \quad (3.130)$$

となる. ここでさらに以下の仮定をする:

4. 任意の (g, n) に対して $P_{g,n}$ が $z = 0$ で解析的である.
5. $z = 0$ の十分近傍で $V'(z) \sim -2y(z)$ である.

以上の仮定から

$$\begin{aligned}
 & W_{g,n}(z_1, J) \\
 &= \operatorname{Res}_{z \rightarrow 0} \left[\frac{1}{4y(z)(z_1^2 - z^2)} \left(W_{g-1, n+1}(z, -z, J) + \sum_{\substack{h_1+h_2=g \\ I_1 \cup I_2=J}} W_{h_1, 1+|I_1|}(z, I_1) W_{h_2, 1+|I_2|}(z, I_2) \right) \right] \\
 & \hspace{25em} (3.131)
 \end{aligned}$$

と Eynard 漸化式を得る.

以上の議論では説明を簡単にするためにいくつかの仮定をおいたが、本来はより厳密な議論と複雑な留数計算を要する。本修士論文ではこれ以上の詳細は述べないため、厳密な証明は原論文 [37] を参照されたい。

4 まとめと展望

本節では前節までに得られた JT 重力の分配関数と SSS 対応に関する議論をまとめるともに、それらの考察として、これまで知られている応用研究を導出抜きに紹介し、将来的な展望を述べる。

4.1 まとめ

本修士論文では、まず 2 節で JT 重力の分配関数を計算した。Jackiw-Teitelboim (JT) 重力とは、2 次元 dilaton 重力の一種であって、その Euclid 作用が以下で与えられるものであった：

$$I_{\text{JT}} = -\frac{S_0}{2\pi} \left[\underbrace{\frac{1}{2} \int_M \sqrt{\det g} d^2x R + \int_{\partial M} \sqrt{\det h} dx K}_{=S_0\chi(M)} \right] - \left[\underbrace{\frac{1}{2} \int_M \sqrt{\det g} d^2x \Phi(R+2)}_{\text{set } R=-2} + \underbrace{\int_{\partial M} \sqrt{\det h} dx \Phi(K-1)}_{=\text{Schwarz 作用 } I_{\text{Sch}}} \right]. \quad (2.1)$$

2 次元の特殊性から、Einstein 方程式を与える第 1, 2 項は時空 M の Euler 標数 $\chi(M)$ を与える topological 項となり、力学的な自由度を与えない。第 3, 4 項が dilaton Φ と重力の相互作用を表した項である。第 3 項は dilaton が Lagrange 未定乗数として振る舞うために、 $R = -2$ の拘束条件を与える。したがって、bulk の計量は双曲計量に固定される。双曲計量の汎関数積分は Weil-Petersson 体積と呼ばれ、Mirzakhani 漸化式を用いれば任意の topology に対して厳密な表式を求めることができる。第 4 項は境界の長さを β_1, \dots, β_n に固定し、境界上での dilaton の値を $1/2$ に固定する Dirchlet 境界条件の下で、境界上に現れる重力の boundary mode F を記述する Schwarz 作用 I_{Sch} に書き換えられる。Schwarz 作用の分配関数は Duistermaat-Heckman 公式を用いれば厳密な表式を計算することができる。したがって、JT 重力の分配関数は

$$\begin{aligned} Z(\beta_1, \dots, \beta_n) &= \int \mathcal{D}g \int \mathcal{D}\Phi e^{I_{\text{JT}}} \\ &= \sum_{g=0}^{\infty} e^{S_0\chi(M)} \underbrace{\int \mathcal{D}g_{\text{bulk}} \delta(R+2)}_{=\text{Weil-Petersson 体積 } V_{g,n}} \int \mathcal{D}F e^{-I_{\text{Sch}}} \end{aligned} \quad (4.1)$$

と書ける。結局、JT 重力は bulk における双曲計量の汎関数積分と境界上の boundary mode の汎関数積分の積に帰着される。ここで、bulk における双曲計量の汎関数積分は、bulk の形についての積分である。また、境界上の boundary mode は境界が bulk にどう埋め込まれているかを表すものであったから、汎関数積分 $\int \mathcal{D}F e^{-I_{\text{Sch}}}$ は境界の形についての積分である。したがって、JT 重力の分配関数の計算は時空である境界付き 2 次元面を様々な形について数え上げることに対応する。実際、

分配関数の具体的な計算結果は

$$Z(\beta_1, \dots, \beta_n; \gamma_1, \dots, \gamma_n) = \sum_{g=0}^{\infty} \frac{Z_{g,n}(\beta_1, \dots, \beta_n)}{(e^{-S_0})^{2g+n-2}} \quad (4.2)$$

$$Z_{g,n}(\beta_1, \dots, \beta_n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2\beta}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{\pi^2}{\beta}} = \int_0^{\infty} dE e^{-\beta E} \frac{1}{2\pi^2} \sinh(2\pi\sqrt{E}) & (g, n) = (0, 1) \\ \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\beta_1\beta_2}}{\beta_1 + \beta_2} & (g, n) = (0, 2) \\ \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\frac{1}{\beta_1 \cdots \beta_n}} \int \prod_{m=1}^n [dz e^{-\frac{x}{2\beta_m}}] V_{g,n}(x_1, \dots, x_m) & (g, n) \neq (0, 1), (0, 2) \end{cases} \quad (4.3)$$

となり、一般の topology に関する計算結果は Weil-Petersson 体積の Laplace 変換として与えられる。ここで、 $(g, n) = (0, 1)$ の計算結果に現れる $\rho_{JT}(E) = \frac{1}{2\pi^2} \sinh(2\pi\sqrt{E})$ は時空が Disk 形のときの JT 重力の固有値密度とみなせる。なぜなら、境界の長さ β を境界上の虚時間の周期だとみなせば、 β は逆温度とみなせるからである。

続く 3 節では ランダム行列を導入し、Saad-Shenker-Stanford (SSS) 対応を導いた。ランダム行列とは、ランダムに値を取る $N \times N$ 行列 Hermite 行列に依存するような量 $A(H)$ に対して、その期待値を

$$\langle A \rangle := \frac{1}{Z} \int dH e^{-N \text{Tr}[V(H)]} A(H) \quad (4.4)$$

$$Z := \int dH e^{-N \text{Tr}[V(H)]} \quad (4.5)$$

と定義するような確率理論であった。関数 $e^{-N \text{Tr}[V(H)]}$ が Hermite 行列 H の確率分布に相当する。ここで、分配和 $Z(\beta) := \text{Tr}[e^{-\beta H}]$ および固有値密度 $\rho(E) := \sum_{i=1}^N \delta(E - \lambda_i)$ (λ_i ($i = 1, \dots, N$) は行列 H の固有値) を考えよう。このとき、固有値密度が $N \rightarrow \infty$ の極限において

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\langle \rho(E) \rangle}{N} = \rho_{JT}(E) \quad (4.6)$$

を満たすのならば、分配和の n 点相関関数の連結部分は JT 重力の分配関数と一致する。ただし、固有値密度が以上の式を満たすためには、 $N \rightarrow \infty$ の極限を取ると同時に固有値の分布する範囲も無限大の極限 (double scaling limit) を取らなければならない。以上の主張が SSS 対応であった。SSS 対応の証明の要点は、JT 重力の分配関数に現れる $Z_{g,n}$ を計算する際に用いる Mirzakhani 漸化式と、分配和の n 点相関関数を計算する際の Eynard 漸化式が一致することであった。しかし、直感的には以下のように理解できる。 Z を 0 次元上の場 H に関する分配関数とみなせば、その連結真空 Feynman 図 (の双対グラフ) は閉多面体とみなせる。したがって、分配関数の連結部分 $\log Z$ は閉多面体の数え上げに対応する。特に、行列のサイズ N を無限大に取る極限では、各連結真空 Feynman 図に対応する閉多面体が 2 次元閉曲面とみなせる。したがって、分配関数の連結部分 $\log Z$ は $N \rightarrow \infty$ の極限で 2 次元閉曲面の数え上げに対応する。さらに、分配和 $Z(\beta) := \text{Tr}[e^{-\beta H}]$ の挿入は Feynman 図に対応する 2 次元閉曲面に長さ β の境界を挿入することに相当することが知られている。したがって、分配和の n 点相関関数の連結部分の計算は Feynman 図である境界付き 2 次元閉曲面の数え上げをすることに等しい。ここで、JT 重力の分配関数の計算は時空である境界付き 2 次元面の数え上げ

に等しいのであった。よって、分配和の n 点相関関数の連結部分も JT 重力の分配関数も境界付き 2 次元面の数え上げである。

次節以降では、JT 重力の分配関数の計算結果と SSS 対応の応用について紹介するとともに、それらの研究の将来的な展望を述べる。

4.2 次元削減

本稿で概説した JT 重力は、単なる toy model ではなく、現実的な模型とも関係がある。例えば、球対称で宇宙項が 0 であるような 4 次元時空を次元削減 (dimensional reduction) することで JT 重力の作用が得られることが知られている [39, 40]。ここで、次元削減とは時空の対称性を用いて高次元の時空をより低次元の時空へ変形することを指す。今の場合では、球対称性を用いて 4 次元時空を時間方向と動径方向の 2 次元時空に変形することを意味している。次元削減して得られた JT 重力の分配関数を用いて、元々の 4 次元時空におけるブラックホールエントロピーなどの 4 次元重力の熱的性質が調べられている [39–41]。

今後の研究として、高次元時空が球対称性以外の対称性の場合にも JT 重力へ次元削減できるのか、4 次元以上の時空でも同様のことが行えるかなどを調べることが考えられる。これにより、高次元量子重力の性質を JT 重力によって調べたり、あるいは次元削減の手法そのものについて理解することができるかもしれない。例えば、高次元重力を低次元重力へ次元削減した際に、高次元側と低次元側でどのような対応があるかなどを調べることができるかもしれない。もしそのようなことがわかれば、10 次元の超弦理論を次元削減して 4 次元の標準模型を再現する研究に応用することができるであろう。

4.3 非摂動効果

SSS 対応 (3.105) において、JT 重力側の表式は種数展開で得られているのであった。これは、 e^{S_0} に関する摂動展開である。しかし、右辺のランダム行列側では 1 つの行列積分で表されている。したがって、SSS 対応は JT 重力の非摂動な表式を与えている。これにより、JT 重力の非摂動効果を考察することができる [6]。

ところで、現在のところ超弦理論は非摂動的な定式化が完全にできていない。非摂動的定式化のヒントとして考えられているのが、ランダム行列である。これは、本稿で見たようにランダム行列が 2 次元面の数えあげに対応していることに起因する。SSS 対応によって JT 重力の非摂動効果を考察できることが契機となって、弦理論の非摂動効果の研究が進むかもしれない。

4.4 JT 重力の拡張

本稿で議論した JT 重力の作用に付加項を加えた場合を考えよう。以下では、付加項を加えた場合でもランダム行列との対応がある場合を紹介する。

まず, JT 重力の作用に以下の BF ゲージ理論の作用を加えた場合を考えよう:

$$I = I_{\text{JT}} - i \int_M \text{Tr} [BF] - \frac{i}{2} \int_{\partial M} d\tau \text{Tr} [(A_\tau)^2]. \quad (4.7)$$

ここで $F := dA + A \wedge A$, B は adjoint valued scalar 場である. このような場合でも双対な行列模型が存在して, その密度関数は JT 重力の密度関数 ρ_{JT} を用いて

$$\rho(E; r) = \frac{\dim(r)}{\text{Vol}(G)} \rho_{\text{JT}} \left(E - \frac{c_2(r)}{2} \right) \quad (4.8)$$

と与えられることが知られている [42, 43]. ここで G はゲージ群, r は G の表現, c_2 は quadratic Casimir である.

また, JT 重力に dilaton の付加的なポテンシャル $U(\phi)$ を加えた場合を考えよう:

$$I = -\frac{S_0}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \int_M \sqrt{\det g} R + \int_{\partial M} \sqrt{\det h} K \right] - \left[\frac{1}{2} \int_M \sqrt{\det g} (\Phi(R+2) + U(\phi)) + \int_{\partial M} \sqrt{\det h} \Phi(K-1) \right]. \quad (4.9)$$

このような場合でも, 双対な行列模型が存在して, その density は

$$\rho(E; U) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \sinh(2\pi\sqrt{E}) + \frac{e^{2\pi\sqrt{E}} U(\sqrt{E}) + e^{-2\pi\sqrt{E}} U(-\sqrt{E})}{8\pi\sqrt{E}} \quad (4.10)$$

と与えられることが知られている [44]. 第 1 項が JT 重力の場合の density で, 第 2 項がそこからのズレに対応している. また, 本稿では宇宙項を負にとったが, 正にとった場合にもランダム行列との対応があることも知られている [45].

以上のように, JT 重力にいくつかの付加項を加えた場合についてもランダム行列との対応があることが知られてい [42–45]. 今後の研究の方針として, どれまでの付加項ならばランダム行列との対応があるか, あるいはランダム行列側と対応がある場合の付加項はどのような場合かを調べることが考えられる. それにより, 2次元重力とランダム行列の対応が明らかになり, 2次元重力の性質をランダム行列側から調べることができると期待される. より具体的に言えば, ランダム行列側においてどのような密度関数であれば2次元重力と対応があるのか, ブラックホール熱力学などに関する重力側の予想をランダム行列側から調べることができるのか, などの研究が考えられる.

4.5 Witten-Kontsevich 重力

本稿で議論した JT 重力とランダム行列の対応関係の根底には Witten-Kontsevich (WK) 重力または topological 重力と呼ばれる理論がある [46, 47]. これは, Witten により提唱されたもので, 2次元重力の研究手法において, 2次元面上の位相不変量に注目する理論である. 数学的に言えば, 微分位相幾何における交叉理論を用いる手法である. WK 重力と同様に, ランダム行列も2次元面の位相不変量と関係があったことを思い出せば(??節参照), WK 重力とランダム行列の間に対応がありそうである. この WK 重力とランダム行列が対応しているという予想が Witten 予想 [46, 47] と呼ばれ, Kontsevich により証明された [12]. ところで, 前節で見たように JT 重力とランダム行列が対応しているのであった. ランダム行列と WK 重力が対応しているのだから, JT 重力と WK 重力の間に何らかの対応関係があるはずである. 実際, WK 重力におけるパラメータを適当に取れば, WK

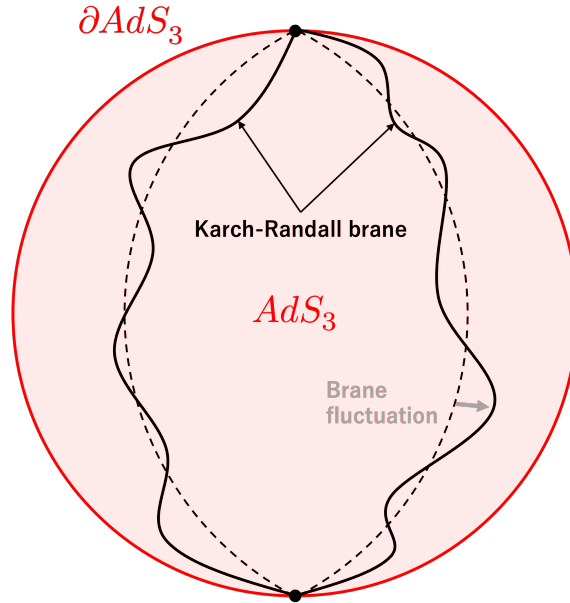


図 25: 3次元反 de-Sitter 空間 AdS_3 上の Karch-Randall brane とそのゆらぎの概念図.

重力と JT 重力が対応することが知られている [17, 18]³⁶ (付録 C 節参照). ここから, 前節で紹介したような JT 重力を変形したような理論も WK 重力と対応していることが予想される. そして更なる応用として, 2次元重力を WK 重力側で調べることができると期待される. WK 重力側においてどのようなパラメータであれば2次元重力と対応があるのか, 沼地予想やブラックホール熱力学などに関する重力側の予想を WK 重力側から調べることができるのか, などの研究が考えられる.

4.6 Ensemble 平均と holography, 沼地予想

3.3 節の最後に述べたように, SSS 対応 (3.107) から, 境界が n 個の JT 重力は n 個の量子系の ensemble 平均と解釈できるのであった. それでは, 一般に重力理論をその境界上の理論の ensemble 平均と解釈することはできるのだろうか. 2次元重力理論の場合には, ゲージ/重力対応を仮定すればそのような解釈ができると Geng らによって予想されている [48, 49]. Geng らは 3次元反 de-Sitter 空間上に Karch-Randall brane と呼ばれる 2次元曲面を 2つ入れた重力理論を考えると, その 2次元曲面 (brane) 上の低エネルギー有効理論が JT 重力になることを示した. この低エネルギー有効理論としての JT 重力における dilaton は brane のゆらぎとして現れる (図 25). そして, 一般に, 3次元側にゲージ/重力対応を仮定すれば, その 3次元時空上の brane に現れる 2次元 dilaton 重力理論は JT 重力のように 1次元境界上の理論の ensemble 平均と解釈できると予想している.

高次元の場合には, 重力理論を境界上の理論の ensemble 平均として解釈することができないと予想されている [50]. McNamara と Vafa はこれを baby universe と呼ばれる理論 [51–53] に基づいて議論を行った. McNamara と Vafa の元の議論 [50] および Marolf と Maxfield による議論 [54] を参考にして, 以下でこれをごく簡単に解説しよう. 2節でも行ったように, 重力の経路積分を考える際には時空の可能な topology も全て数え上げる. すなわち, handle/wormhole が複数付けられたよう

³⁶そもそも, JT 重力とランダム行列の対応を示す際に用いた Mirzakhani 漸化式は交叉理論の研究から生み出されたものである.

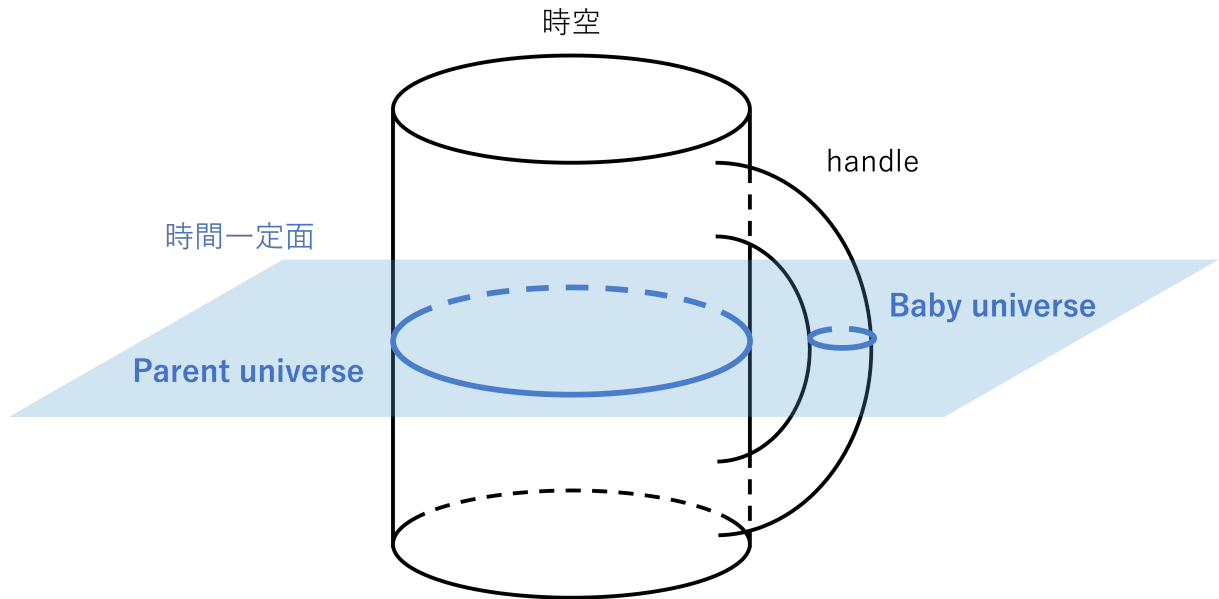


図 26: Baby universe の概念図. 本体の宇宙を parent universe と呼び、そこから分裂するようにして生まれた小さな宇宙を baby universe と呼ぶ.

な時空も考慮する. このような時空では, 本体の宇宙から分裂して小さな宇宙が生成され, そしてその小さな宇宙は本体の宇宙に吸収されて消滅する, 小さな宇宙の生成消滅が起きているとみなせる. この小さい宇宙のことを baby universe と呼ぶ (図 26). このとき, Coleman の α parameter と呼ばれる量を導入することで, baby universe の生成消滅やその状態を量子力学的に記述することができるようになる. すると, 「時空の可能な topology を全て数え上げる」というのは, 「baby universe の可能な状態について足しあげる」と言い換えられる. このことを用いると, 重力の経路積分を境界上の理論の ensemble 平均として解釈できるようになることが知られている. ところで, 量子重力は万物の理論を記述する理論であることが期待されているため, その理論内に free parameter が含まれないことが期待されている. 例えば, 相互作用の結合定数は力学的な場の期待値として与えられるべきだと考えられている. この free parameter を持たないという条件は, 沼地予想の最も基礎的なものである. 沼地予想とは, 量子重力と無矛盾な場の理論が満たすべき条件に関する予想のことである. 前述の baby universe 理論はこの沼地予想に矛盾してしまう. そこで McNamara と Vafa は次のような baby universe hypothesis と呼ばれる仮説を立てた: 「baby universe の可能な状態のなす Hilbert 空間の次元は 1 である.」これは大雑把に言えば, baby universe の可能な状態が 1 つしかないことを意味している. 実は, これにより, Coleman の α parameter の導入が不要になり, 「量子重力は free parameter を持たない」という沼地予想との整合性がとれる. しかし, JT 重力は境界上の理論の ensemble 平均として解釈できるので, 上述のような議論を用いると, これは沼地予想に矛盾する. これに対し, McNamara と Vafa は, そもそも 2 次元重力はその自由度の少なさから沼地予想の適用外であって, ensemble 解釈は 2 次元特有のものであると指摘した. さらに彼らは, この 2 次元重力特有の ensemble 解釈は高次元の holograph を用いて説明ができること, 低次元重力は不完全な物理理論であって高次元重力の brane 上に現れる理論と見なすべきであることを主張している.

謝辞

指導教員である檜垣徹太郎准教授には学部および修士課程の3年間研究および勉学に関する指導をしていただきありがとうございました。山本直希准教授および岡朋治教授には本修士論文の副査を担当していただき、本論文をより良いものにするためのコメントを頂戴いたしました。お忙しい中、副査をしていただいたことに感謝申し上げます。また、明治学院大学の酒井一博准教授には研究会や集中講義、メール等で私の拙い質問に答えていただきました。お忙しい中、私の質問に丁寧に答えて下さったことに感謝申し上げます。そして、檜垣グループの先輩である Wisconsin 大学の阿部慶彦さんには、JT 重力のゼミでお世話になりました。さらに、立教大学理論物理学研究室修士2年堀越啓吾さん、東京大学駒場素粒子論研究室修士2年宮坂一輝さん、東京大学福嶋研究室博士1年嶋田 侑祐さんには、矢上キャンパスまでお越しいただいて講演および議論をしていただき、ありがとうございました。特に、堀越さんにはその後もメールで JT 重力とランダム行列に関する質問をさせていただきました。修士論文を書く上で、非常に参考になりましたこと、感謝申し上げます。日々の研究活動においては、理論研究室の学生のみなさんにお世話になりましたこと感謝申し上げます。特に檜垣グループの後輩である修士1年後藤興萌さん、山本グループの博士2年花井奏太さん、同グループ修士1年宮宇地優花さんには、日々のゼミでお世話になりました。また、慶應理論研の学生以外にも、多くの友人の手助けによって修士課程の2年間を過ごすことができました。特に、早稲田大学基幹理工学研究科博士3年小川大貴さん、慶應義塾大学理工学研究科修士2年篠原杏さん、同研究科修士1年堀内文貴さんには古くからの友人として日々の生活を支えてくださったことに感謝申し上げます。最後に、幼い日の私に素粒子論の世界を紹介して下さったお茶の水女子大学素粒子論研究室 Cho Gi-Chol 教授に感謝申し上げます。

付録

A 計算の詳細

本節では本編で省略した計算の詳細について述べる.

A.1 共形ゲージ

本節では共形ゲージ (2.27) での曲率の計算を行う.

まず Christoffel 記号

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} := \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}) \quad (\text{A.1})$$

を計算する. 計量の非零成分が $g_{z\bar{z}} = g_{\bar{z}z} = e^{2\omega(z)}/2$ であることに注意すれば, Christoffel 記号 $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ の非零成分は以下の 2 つである:

$$\Gamma^z_{z\tau} = g^{z\bar{z}}\partial_z g_{z\bar{z}} = -2\partial_z\omega, \quad (\text{A.2})$$

$$\Gamma^{\bar{z}}_{\bar{z}\bar{z}} = g^{z\bar{z}}\partial_{\bar{z}} g_{z\bar{z}} = -2\partial_{\bar{z}}\omega. \quad (\text{A.3})$$

次に, Ricci テンソル

$$R_{\mu\nu} := \partial_{\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu\mu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\rho\mu} + \Gamma^{\rho}_{\rho\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\rho\mu} \quad (\text{A.4})$$

を計算する:

$$\begin{aligned} R_{z\tau} &:= \partial_{\rho}\Gamma^{\rho}_{z\tau} - \partial_u\Gamma^{\rho}_{\rho z} + \Gamma^{\rho}_{\rho\sigma}\Gamma^{\sigma}_{z\tau} - \Gamma^{\rho}_{z\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\rho z} \\ &= \partial_u\Gamma^z_{z\tau} - \partial_u\Gamma^z_{z\tau} + \Gamma^z_{z\tau}\Gamma^z_{z\tau} - \Gamma^z_{z\tau}\Gamma^z_{z\tau} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} R_{\bar{z}\bar{z}} &:= \partial_{\rho}\Gamma^{\rho}_{\bar{z}\bar{z}} - \partial_{\bar{z}}\Gamma^{\rho}_{\rho\bar{z}} + \Gamma^{\rho}_{\rho\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\bar{z}\bar{z}} - \Gamma^{\rho}_{\bar{z}\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\rho\bar{z}} \\ &= \partial_{\bar{z}}\Gamma^{\bar{z}}_{\bar{z}\bar{z}} - \partial_{\bar{z}}\Gamma^{\bar{z}}_{\bar{z}\bar{z}} + \Gamma^{\bar{z}}_{\bar{z}\bar{z}}\Gamma^{\bar{z}}_{\bar{z}\bar{z}} - \Gamma^{\bar{z}}_{\bar{z}\bar{z}}\Gamma^{\bar{z}}_{\bar{z}\bar{z}} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} R_{z\bar{z}} &:= \partial_{\rho}\Gamma^{\rho}_{z\bar{z}} - \partial_{\bar{z}}\Gamma^{\rho}_{\rho z} + \Gamma^{\rho}_{\rho\sigma}\Gamma^{\sigma}_{z\bar{z}} - \Gamma^{\rho}_{\bar{z}\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\rho z} \\ &= -\partial_{\bar{z}}\Gamma^z_{z\tau} = 2\partial_z\partial_{\bar{z}}\omega = 4e^{-2\omega}(\partial_z\partial_{\bar{z}}\omega)g_{z\bar{z}}, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} R_{\bar{z}z} &:= \partial_{\rho}\Gamma^{\rho}_{\bar{z}z} - \partial_z\Gamma^{\rho}_{\rho\bar{z}} + \Gamma^{\rho}_{\rho\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\bar{z}z} - \Gamma^{\rho}_{z\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\rho\bar{z}} \\ &= -\partial_z\Gamma^{\bar{z}}_{\bar{z}\bar{z}} = 2\partial_z\partial_{\bar{z}}\omega = 4e^{-2\omega}(\partial_z\partial_{\bar{z}}\omega)g_{\bar{z}z}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

これより,

$$R_{\mu\nu} = 4e^{-2\omega}(\partial_z\partial_{\bar{z}}\omega)g_{\mu\nu} \quad (\text{A.9})$$

を得るので, スカラー曲率 $R := g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ は

$$R = 8e^{-2\omega}(\partial_z\partial_{\bar{z}}\omega) \quad (\text{A.10})$$

となる.

A.2 状態密度関数 (2.238) の導出

ここでは状態密度関数 (2.238) の導出を行う。分配関数 (2.236) を直接逆 Laplace 変換するのは難しいので、状態密度関数 (2.238) を Laplace 変換して分配関数 (2.236) と一致することを示すことにする。すなわち、以下の積分を計算する：

$$I := \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty dE e^{-\beta E} \sinh\left(2\pi\sqrt{2\gamma E}\right). \quad (\text{A.11})$$

まず、双曲線関数 \sinh を指数関数で書き直す：

$$\begin{aligned} I &= \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty dE e^{-\beta E} \frac{e^{2\pi\sqrt{2\gamma E}} - e^{-2\pi\sqrt{2\gamma E}}}{2} \\ &= \frac{\gamma}{4\pi^2} \int_0^\infty dE e^{-\beta E + 2\pi\sqrt{2\gamma E}} - \frac{\gamma}{4\pi^2} \int_0^\infty dE e^{-\beta E - 2\pi\sqrt{2\gamma E}} =: I_+ - I_-. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

最後以下のようにおいた：

$$I_\pm := \frac{\gamma}{4\pi^2} \int_0^\infty dE e^{-\beta E \pm 2\pi\sqrt{2\gamma E}}. \quad (\text{A.13})$$

これは以下のようにして Gauss 積分に帰着できる：

$$\begin{aligned} I_\pm &= -\frac{\gamma}{4\pi^2} \int_0^\infty dE \exp\left[-\left(\sqrt{\beta E} \mp \sqrt{\frac{2\pi^2\gamma}{\beta}}\right)^2 + \frac{2\pi^2\gamma}{\beta}\right] \\ &= -\frac{\gamma}{2\pi^2} e^{\frac{2\pi^2\gamma}{\beta}} \int_{\mp\sqrt{\frac{2\pi^2\gamma}{\beta}}}^\infty dx \left(\frac{x}{\beta} \pm \frac{\sqrt{2\pi^2\gamma}}{\beta^{3/2}}\right) e^{-x^2} \\ &= -\frac{\gamma}{2\pi^2\beta} e^{\frac{2\pi^2\gamma}{\beta}} \int_{\mp\sqrt{\frac{2\pi^2\gamma}{\beta}}}^\infty dx x e^{-x^2} \mp \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{2\pi^2\gamma}{\beta}} \int_{\mp\sqrt{\frac{2\pi^2\gamma}{\beta}}}^\infty dx e^{-x^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

途中、以下のように変数変換した：

$$x_\pm := \sqrt{\beta E} \mp \sqrt{\frac{2\pi^2\gamma}{\beta}}, \quad dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta}{E}} dE. \quad (\text{A.15})$$

ここで、

$$\int_{-a}^\infty dx x e^{-x^2} = -\int_{-\infty}^a dx x e^{-x^2}, \quad \int_{-a}^\infty dx e^{-x^2} = \int_{-\infty}^a dx e^{-x^2} \quad (\text{A.16})$$

であるから、

$$I_+ = \frac{\gamma}{2\pi^2\beta} e^{\frac{2\pi^2\gamma}{\beta}} \int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{2\pi^2\gamma}{\beta}}} dx x e^{-x^2} + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{2\pi^2\gamma}{\beta}} \int_{\sqrt{\frac{2\pi^2\gamma}{\beta}}}^\infty dx e^{-x^2} \quad (\text{A.17})$$

$$I_- = -\frac{\gamma}{2\pi^2\beta} e^{\frac{2\pi^2\gamma}{\beta}} \int_{\sqrt{\frac{2\pi^2\gamma}{\beta}}}^\infty dx x e^{-x^2} - \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{2\pi^2\gamma}{\beta}} \int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{2\pi^2\gamma}{\beta}}} dx e^{-x^2} \quad (\text{A.18})$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} I &= I_+ - I_- \\ &= \frac{\gamma}{2\pi^2\beta} e^{\frac{2\pi^2\gamma}{\beta}} \int_{-\infty}^\infty dx x e^{-x^2} + \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{2\pi^2\gamma}{\beta}} \int_{-\infty}^\infty dx e^{-x^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{2\pi^2\gamma}{\beta}} \sqrt{\pi} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{2\pi^2\gamma}{\beta}} \sqrt{\pi}. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

よって、状態密度関数 (2.238) を Laplace 変換したものは分配関数 (2.236) に一致する。

A.3 Weil-Petersson 体積に関する諸公式

本節では, Weil-Petersson 体積に関する諸公式の導出を行う.

A.3.1 Weil-Petersson 体積の多項式表示 (2.276) の証明

ここでは, Weil-Petersson 体積の多項式表示 (2.276) の証明を帰納法によって行う. なお本節の証明は [13] の 6 節を参考に行っている.

$V_{g,n}$ が多項式表示 (2.276) できることを示すために $3g + n > 3g' + n'$ に対して以下を仮定する ::

$$V_{g',n'}(b_1, \dots, b_{n'}) = \sum_{k+\sum_{i=1}^{n'} d_i=3g'+n'-3} \pi^{2k} V_{d_1, \dots, d_n}^{g',n'} b_1^{2d_1} \dots b_{n'}^{2d_{n'}}. \quad (\text{A.20})$$

まず, Mirzakhani 漸化式 (2.168) の両辺に b_1 をかけて b_1 で微分したものを考えよう:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b_1} b_1 V_{g,n}(b_1, B) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty b'_2 db'_2 \frac{\partial D(b_1, b'_1, b'_2)}{\partial b_1} \\ &\quad \times \left[V_{g-1, n+1}(b'_1, b'_2, B) + \sum_{\substack{h_1+h_2=g, \\ B_1 \cup B_2=B, \\ \text{stable}}} V_{h_1, 1+|B_1|}(b'_1, B_1) V_{h_2, 1+|B_2|}(b'_2, B_2) \right] \\ &\quad + \sum_{k=2}^n \int_0^\infty b'_1 db'_1 \frac{\partial}{\partial b_1} [b_1 - T(b_1, b'_1, b_k)] V_{g, n-1}(b'_1, B \setminus \{b_k\}). \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

ここで式 (2.176) より

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b_1} [b_1 - T(b_1, b_2, b_3)] &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 + e^{\frac{-b_1+b_2-b_3}{2}}} + \frac{1}{1 + e^{\frac{-b_1+b_2+b_3}{2}}} + \frac{1}{1 + e^{\frac{b_1+b_2-b_3}{2}}} + \frac{1}{1 + e^{\frac{b_1+b_2+b_3}{2}}} \right] \\ &= \frac{1}{2} [H(b_2, b_1 + b_3) + H(b_2, b_1 - b_3)] \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

となる. ここで以下のように定義した:

$$H(x, y) := \frac{1}{1 + e^{\frac{x+y}{2}}} + \frac{1}{1 + e^{\frac{x-y}{2}}}. \quad (\text{A.23})$$

また, 式 (2.177) より

$$\begin{aligned} \frac{\partial D(b_1, b_2, b_3)}{\partial b_1} &= \frac{e^{b_1}}{e^{b_1} + e^{\frac{b_2+b_3}{2}}} + \frac{e^{-b_1}}{e^{-b_1} + e^{\frac{b_2+b_3}{2}}} = \frac{1}{1 + e^{\frac{-b_1+b_2+b_3}{2}}} + \frac{1}{1 + e^{\frac{b_1+b_2+b_3}{2}}} \\ &= H(b_2 + b_3, b_1) \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

となる．漸化式 (A.21) にこれらと多項式表示 (A.20) を代入すると以下ようになる：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial b_1} b_1 V_{g,n}(b_1, B) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty b'_2 db'_2 H(b'_1 + b'_2, b_1) \\
&\times \left[\sum_{k+\sum_{i=1}^{n+1} d_i=3g+n-5} \pi^{2k} V_{d_1 \dots d_{n+1}}^{g-1, n+1} b_1^{2d_1} b_2^{2d_2} b_3^{2d_3} \dots b_n^{2d_{n+1}} \right. \\
&+ \sum_{\substack{h_1+h_2=g, \\ B_1 \cup B_2=B, \\ \text{stable}}} \sum_{\substack{k+\sum_{i=1}^{1+|B_1|} d_i=3h_1+|B_1|-2 \\ l+\sum_{j=1}^{1+|B_2|} e_j=3h_2+|B_2|-2}} \pi^{2(k+l)} V_{d_1 \dots d_{1+|B_1|}}^{h_1, 1+|B_1|} V_{e_1 \dots e_{1+|B_2|}}^{h_2, 1+|B_2|} b_1^{2d_1} b_2^{2e_1} \dots \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \sum_{\substack{l+\sum_{i=1}^n d_i=3g+n-4 \\ i \neq k}} \int_0^\infty b'_1 db'_1 [H(b'_1, b_1 + b_k) + H(b'_1, b_1 - b_k)] \pi^{2l} V_{d_1 \dots d_n}^{g, n-1} b_1^{2d_1} \dots \\
&= \frac{1}{2} \left[\sum_{k+\sum_{i=1}^{n+1} d_i=3g+n-5} \pi^{2k} V_{d_1 \dots d_{n+1}}^{g-1, n+1} I_{d_1, d_2}(b_1) b_2^{2d_3} \dots b_n^{2d_{n+1}} \right. \\
&+ \sum_{\substack{h_1+h_2=g, \\ B_1 \cup B_2=B, \\ \text{stable}}} \sum_{\substack{k+\sum_{i=1}^{1+|B_1|} d_i=3h_1+|B_1|-2 \\ l+\sum_{j=1}^{1+|B_2|} e_j=3h_2+|B_2|-2}} \pi^{2(k+l)} V_{d_1 \dots d_{1+|B_1|}}^{h_1, 1+|B_1|} V_{e_1 \dots e_{1+|B_2|}}^{h_2, 1+|B_2|} I_{d_1, e_1}(b_1) \dots \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \sum_{\substack{l+\sum_{i=1}^n d_i=3g+n-4 \\ i \neq k}} [J_{d_1}(b_1 + b_k) + J_{d_1}(b_1 - b_k)] \pi^{2l} V_{d_1 \dots d_n}^{g, n-1} \dots \quad (A.25)
\end{aligned}$$

途中... で省略した部分には b_2, \dots, b_n のいずれか適当な変数が含まれる．また，最後以下のようにおいた：

$$I_{i,j}(b) := \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty db'_2 db'_2 H(b'_1 + b'_2, b) b_1^{2i} b_2^{2j}, \quad (A.26)$$

$$J_i(b) := \int_0^\infty b' db' H(b', b) b'^{2i}. \quad (A.27)$$

以下でこれを計算する．

まず $I_{i,j}$ を計算する． $b' := b'_1 + b'_2$ と変数変換すれば，

$$\begin{aligned}
I_{i,j}(b) &= \int_0^\infty db' H(b', b) \int_0^{b'} db'_2 b_2^{2j+1} (b' - b'_2)^{2i+1} \\
&= \frac{(2i+1)!(2j+1)!}{(2i+2j+3)!} \int_0^\infty db' H(b', b) b'^{2i+2j+3} = \frac{(2i+1)!(2j+1)!}{(2i+2j+3)!} J_{i+j+1}(b) \quad (A.28)
\end{aligned}$$

となる．ここで b'_2 に関する積分は以下の β 関数の積分公式を用いた：

$$\int_0^a x^m (a-x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} a^{m+n+1}. \quad (A.29)$$

したがって $J_i(b)$ を計算すれば $I_{i,j}$ を計算できる．

次に $J_i(b)$ を計算する：

$$J_i(b) = \int_0^\infty b' db' \left[\frac{1}{1 + e^{\frac{b'+b}{2}}} + \frac{1}{1 + e^{\frac{b'-b}{2}}} \right] b'^{2i}. \quad (A.30)$$

第1項は $x := (b' + b)/2$, 第2項は $x := (b' - b)/2$ と変数変換すれば,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} J_i(b) &= \int_{\frac{b}{2}}^{\infty} dx \frac{(2x-b)^{2i+1}}{1+e^x} + \int_{-\frac{b}{2}}^{\infty} dx \frac{(2x+b)^{2i+1}}{1+e^x} \\ &= \int_0^{\infty} dx \frac{(2x-b)^{2i+1}}{1+e^x} - \int_0^{\frac{b}{2}} dx \frac{(2x-b)^{2i+1}}{1+e^x} + \int_0^{\infty} dx \frac{(2x+b)^{2i+1}}{1+e^x} - \int_0^{-\frac{b}{2}} dx \frac{(2x+b)^{2i+1}}{1+e^x} \\ &= \int_0^{\infty} dx \frac{(2x-b)^{2i+1} + (2x+b)^{2i+1}}{1+e^x} - \int_0^{\frac{b}{2}} dx (2x-b)^{2i+1} \left(\frac{1}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^{-x}} \right) \quad (\text{A.31}) \end{aligned}$$

最後の式変形において, 2段目の第4項を $x \rightarrow -x$ と置き換えた. 上式第2項の積分は, 式 (A.57) より

$$\begin{aligned} - \int_0^{\frac{b}{2}} dx (2x-b)^{2i+1} \left(\frac{1}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^{-x}} \right) &= - \int_0^{\frac{b}{2}} dx (2x-b)^{2i+1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{b^{2(i+1)}}{2(i+1)} \quad (\text{A.32}) \end{aligned}$$

となる. 式 (A.31) 第1項の積分は二項定理を用いて

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dx \frac{(2x-b)^{2i+1} + (2x+b)^{2i+1}}{1+e^x} &= \int_0^{\infty} dx \frac{1}{1+e^x} \sum_{k=0}^{2i+1} \left[\binom{2i+1}{k} (2x)^k (-b)^{2i+1-k} + \binom{2i+1}{k} (2x)^k b^{2i+1-k} \right] \\ &= \sum_{j=0}^i 2^{2(j+1)} b^{2(i-j)} \binom{2i+1}{2j+1} \int_0^{\infty} dx \frac{x^{2j+1}}{1+e^x} \quad (\text{A.33}) \end{aligned}$$

と変形できる. 最後は k が奇数以外の項が0となることを用いた. 最下段の積分は式 (A.59) を用いれば ζ 関数に帰着できる³⁷ :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dx \frac{x^{2j+1}}{1+e^x} &= \int_0^{\infty} dx \frac{x^{2j+1}}{e^x-1} - \int_0^{\infty} dx \frac{2x^{2j+1}}{e^{2x}-1} \\ &= \int_0^{\infty} dx \frac{x^{2j+1}}{e^x-1} - 2^{-2j-1} \int_0^{\infty} dx \frac{x^{2j+1}}{e^x-1} \\ &= (1-2^{-2j-1})(2j+1)! \zeta(2j+2) \\ &= (1-2^{-2j-1})(2j+1)! \frac{(-1)^{j+2} (2\pi)^{2j+2} B_{2j+2}}{2(2j+2)!} \\ &= \frac{(-1)^{j+2} (2^{2j+1}-1)}{2(j+1)} B_{2j+2} \pi^{2j+2} \quad (\text{A.34}) \end{aligned}$$

1段目から2段目の式変形は $2x \rightarrow x$ と置き換えた. また, 4段目から5段目は ζ 関数の公式

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n+1} (2\pi)^{2n} B_{2n}}{2(2n)!} \quad (\text{A.35})$$

³⁷ ζ 関数は以下のように積分表示できる :

$$\zeta(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{e^x-1} dx.$$

を用いた。ここで B_{2n} は Bernoulli 数と呼ばれる有理数である³⁸。以上の計算から

$$\begin{aligned} J_i(b) &= \frac{b^{2(i+1)}}{2(i+1)} + \sum_{j=0}^i \binom{2i+1}{2j+1} \frac{(-1)^{j+2} 2^{2(j+1)} (2^{2j+1} - 1)}{j+1} B_{2j+2} \pi^{2j+2} b^{2(i-j)} \\ &= \frac{b^{2(i+1)}}{2(i+1)} + \sum_{k+m=i+1} \frac{(-1)^{m+1} 2^{2m} (2^{2m-1} - 1)}{m} B_{2m} \pi^{2m} b^{2k} \\ &= \sum_{k+m=i+1} \pi^{2m} J_i^k b^{2k} \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

となる。1 段目から 2 段目は $k = i - j, m = j + 1$ と置いた。また、最後定数 $J_i^k \in \mathbb{Q}$ を

$$J_i^k := \begin{cases} \frac{1}{2(j+1)} & (k = i+1) \\ \frac{(-1)^{m+1} 2^{2m} (2^{2m-1} - 1)}{m} B_{2m} & (j \neq i) \end{cases} \quad (\text{A.37})$$

と置いた。例えば、 $J_0(b), J_1(b), J_2(b)$ は以下のようになる：

$$J_0(b) = \frac{2\pi^2}{3} + \frac{1}{2}b^2, \quad (\text{A.38})$$

$$J_1(b) = \frac{28}{15}\pi^4 + 2\pi^2 b^2 + \frac{1}{4}b^4, \quad (\text{A.39})$$

$$J_2(b) = \frac{992}{63}\pi^6 + \frac{56}{3}\pi^4 b^2 + \frac{10}{3}\pi^2 b^4 + \frac{1}{6}b^6, \quad (\text{A.40})$$

$$J_3(b) = \frac{4064}{15}\pi^8 + \frac{992}{3}\pi^6 b^2 + \frac{196}{3}\pi^4 b^4 + \frac{14}{3}\pi^2 b^6 + \frac{1}{8}b^8. \quad (\text{A.41})$$

式 (A.36) を用いれば $I_{i,j}$ は以下のように書ける：

$$I_{i,j}(b) = \sum_{k+l=i+j+2} \pi^{2k} \frac{(2i+1)!(2j+1)!}{(2i+2j+3)!} J_{i+j+1}^l b^{2l} \equiv \sum_{k+l=i+j+2} \pi^{2k} H_{i,j}^l b^{2l}. \quad (\text{A.42})$$

例えば、 $I_{0,0}(b), I_{1,0}(b), I_{0,1}(b), I_{1,1}(b), I_{2,0}(b), I_{0,2}(b)$ は以下のようになる：

$$I_{0,0}(b) = \frac{1}{6}J_1(b), \quad (\text{A.43})$$

$$I_{1,0}(b) = I_{0,1}(b) = \frac{1}{20}J_2(b), \quad (\text{A.44})$$

$$I_{1,1}(b) = \frac{1}{140}J_3(b), \quad (\text{A.45})$$

$$I_{2,0}(b) = I_{0,2}(b) = \frac{1}{42}J_3(b). \quad (\text{A.46})$$

これまでに得られた多項式表示 (A.36), (A.42) を式 (A.47) に代入すれば以下のようになる：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b_1} b_1 V_{g,n}(b_1, B) &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k+\sum_{i=1}^{n+1} d_i=3g+n-5} \sum_{m+l=d_1+d_2+2} \pi^{2(k+m)} J_{d_1, d_2}^l V_{d_1, \dots, d_{n+1}}^{g-1, n+1} b_1^{2l} b_2^{2d_3} \dots b_n^{2d_{n+1}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{h_1+h_2=g, \\ B_1 \cup B_2=B, \\ \text{stable}}} \sum_{i+j=d_1+e_1+2} \sum_{\substack{k+\sum_{i=1}^{1+|B_1|} d_i=3h_1+|B_1|-2 \\ l+\sum_{j=1}^{1+|B_2|} e_j=3h_2+|B_2|-2}} \pi^{2(k+l+j)} \Gamma_{d_1, e_1}^i V_{d_1, \dots, d_{1+|B_1|}}^{h_1, 1+|B_1|} V_{e_1, \dots, e_{1+|B_2|}}^{h_2, 1+|B_2|} b_1^{2i} \dots \right] \end{aligned}$$

³⁸Bernoulli 数は以下の漸化式を用いて計算できることが知られている：

$$B_0 = 1, \quad B_n = -\frac{1}{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k.$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \sum_{l+\sum_{i=1}^n d_i=3g+n-4} \sum_{\substack{i+j=d_1+1 \\ i \neq k}} \pi^{2(i+l)} J_{d_1}^j V_{d_1 \dots d_n}^{g,n-1} [(b_1 + b_k)^{2j} + (b_1 - b_k)^{2j}] \dots \quad (\text{A.47})$$

左辺を整理していく。まず第1項を整理する：

$$\begin{aligned} & \sum_{k+\sum_{i=1}^{n+1} d_i=3g+n-5} \sum_{m+l=d_1+d_2+2} \pi^{2(k+m)} I_{d_1, d_2}^l V_{d_1 \dots d_{n+1}}^{g-1, n+1} b_1^{2l} b_2^{2d_3} \dots b_n^{2d_{n+1}} \\ &= \sum_{k'+\sum_{i=1}^n d'_i=3g+n-3} \pi^{2k'} \left(\sum_{d_1+d_2+k=k'+d'_1-2} I_{d_1, d_2}^{d'_1} V_{d_1 d_2, d'_2 \dots d'_n}^{g-1, n+1} \right) b_1^{2d'_1} b_2^{2d'_2} \dots b_n^{2d'_n}. \end{aligned}$$

ここで $k' := k + m$, $d'_1 := l$, $d'_2 := d_3, \dots, d'_n := d_{n+1}$ と置いた。次に第2項を整理する：

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{h_1+h_2=g, \\ B_1 \cup B_2=B, \\ \text{stable}}} \sum_{i+j=d_1+e_1+2} \sum_{\substack{k+\sum_{i=1}^{1+|B_1|} d_i=3h_1+|B_1|-2 \\ l+\sum_{j=1}^{1+|B_2|} e_j=3h_2+|B_2|-2}} \pi^{2(k+l+j)} I_{d_1, e_1}^i V_{d_1 \dots d_{1+|B_1|}}^{h_1, 1+|B_1|} V_{e_1 \dots e_{1+|B_2|}}^{h_2, 1+|B_2|} b_1^{2i} \dots \\ &= \sum_{k'+\sum_{i=1}^n d'_i=3g+n-3} \pi^{2k'} \left(\sum_{\substack{h_1+h_2=g, \\ B_1 \cup B_2=B, \\ \text{stable}}} \sum_{\substack{d_1+k=3h_1+|B_1|-2-\sum_{i=2}^{1+|B_1|} d_i \\ e_1+l=3h_2+|B_2|-2-\sum_{i=2}^{1+|B_2|} e_i}} I_{d_1, e_1}^i V_{d_1 \dots d_{1+|B_1|}}^{h_1, 1+|B_1|} V_{e_1 \dots e_{1+|B_2|}}^{h_2, 1+|B_2|} \right) b_1^{2d'_1} b_2^{2d'_2} \dots b_n^{2d'_n}. \end{aligned}$$

ここで $k' := k + l + j$, $d'_1 := i$ および d_m, d_n を適当に d'_m と置いた。最後に第3項を整理する：

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^n \sum_{l+\sum_{i=1}^n d_i=3g+n-4} \sum_{\substack{i+j=d_1+1 \\ i \neq k}} \pi^{2(i+l)} J_{d_1}^j V_{d_1 \dots d_n}^{g,n-1} [(b_1 + b_k)^{2j} + (b_1 - b_k)^{2j}] \dots \\ &= \sum_{k=2}^n \sum_{l+\sum_{i=1}^n d_i=3g+n-4} \sum_{i+j=d_1+1} \pi^{2(i+l)} J_{d_1}^j V_{d_1 \dots d_n}^{g,n-1} \sum_{m=0}^j 2 \binom{2m}{2j} b_1^{2m} b_k^{2(j-m)} \dots \\ &= \sum_{k=2}^n \sum_{k'+\sum_{i=1}^n d'_i=3g+n-3} \sum_{d_1-i=d'_1-1} \pi^{2k'} J_{d_1}^{d'_1+d'_k} V_{d_1 \dots d'_n}^{g,n-1} 2 \binom{2(d'_1+d'_k)}{2d'_1} b_1^{2d'_1} b_2^{2d'_2} \dots b_n^{2d'_n}. \end{aligned}$$

ここで $k' := l + i$, $d'_1 := j$, $d'_k := m - j$, $d'_2 := d_2, \dots, d'_n := d_n$ と置いた。以上の結果から、

$$\frac{\partial}{\partial b_1} b_1 V_{g,n}(b_1, B) = \sum_{k'+\sum_{i=1}^n d'_i=3g+n-3} \pi^{2k'} \frac{V_{d_1 \dots d'_n}^{g,n}}{2d'_1+1} b_1^{2d'_1} \dots b_n^{2d'_n} \quad (\text{A.48})$$

となる。ここで定数 $V_{d'_1 \dots d'_n}^{g,n} \in \mathbb{Q}$ を

$$\begin{aligned} V_{d'_1 \dots d'_n}^{g,n} &:= \frac{2d'_1+1}{2} \left[\sum_{d_1+d_2+k=k'+d'_1-2} I_{d_1, d_2}^{d'_1} V_{d_1 d_2, d'_2 \dots d'_n}^{g-1, n+1} \right. \\ &+ \sum_{\substack{h_1+h_2=g, \\ B_1 \cup B_2=B, \\ \text{stable}}} \sum_{\substack{d_1+k=3h_1+|B_1|-2-\sum_{i=2}^{1+|B_1|} d_i \\ e_1+l=3h_2+|B_2|-2-\sum_{i=2}^{1+|B_2|} e_i}} I_{d_1, e_1}^i V_{d_1 \dots d_{1+|B_1|}}^{h_1, 1+|B_1|} V_{e_1 \dots e_{1+|B_2|}}^{h_2, 1+|B_2|} \\ &+ 2 \sum_{d_1-i=d'_1-1} J_{d_1}^{d'_1+d'_k} V_{d_1 \dots d'_n}^{g,n-1} \left. \binom{2(d'_1+d'_k)}{2d'_1} \right] \quad (\text{A.49}) \end{aligned}$$

と置いた. 式 (A.48) の両辺を b で積分した後 b で割れば以下の多項式表示を得る:

$$V_{g,n}(b_1, \dots, b_n) = \sum_{k'+\sum_{i=1}^n d'_i=3g+n-3} \pi^{2k'} V_{d'_1 \dots d'_n}^{g,n} b_1^{2d'_1} \dots b_n^{2d'_n}. \quad (\text{A.50})$$

A.3.2 $\tilde{V}_{1,1}$ (2.184) の計算

ここでは積分 (2.184) を計算し, Weil-Petersson 体積 $\tilde{V}_{1,1}$ の表式を導く. なお本節の計算は [13] の 6 節を参考にしている. 直接積分を実行するのは難しいので, 式 (2.184) の両辺に b をかけて b で微分したものを考えよう:

$$\frac{\partial}{\partial b}(b\tilde{V}_{1,1}(b)) = \frac{1}{2} \int_0^\infty b' db' \frac{\partial D(b, b', b')}{\partial b}. \quad (\text{A.51})$$

左辺の被積分関数を計算すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial D(b, b', b')}{\partial b} &= 2 \frac{\partial}{\partial b} \log \left[\frac{e^{\frac{b}{2}} + e^{b'}}{e^{-\frac{b}{2}} + e^{b'}} \right] \\ &= \frac{e^{\frac{b}{2}}}{e^{\frac{b}{2}} + e^{b'}} + \frac{e^{-\frac{b}{2}}}{e^{-\frac{b}{2}} + e^{b'}} \\ &= \frac{1}{1 + e^{b' - \frac{b}{2}}} + \frac{1}{1 + e^{b' + \frac{b}{2}}} \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

となるので,

$$\frac{\partial}{\partial b}(b\tilde{V}_{1,1}(b)) = \frac{1}{2} \int_0^\infty b' db' \left(\frac{1}{1 + e^{b' - \frac{b}{2}}} + \frac{1}{1 + e^{b' + \frac{b}{2}}} \right) \quad (\text{A.53})$$

である. 上式 (A.53) 第 1 項の積分については, $x := b' - b/2$ と変数変換をすれば,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty b' db' \frac{1}{1 + e^{b' - \frac{b}{2}}} &= \int_{-\frac{b}{2}}^\infty dx \left(x + \frac{b}{2} \right) \frac{1}{1 + e^x} \\ &= \int_0^\infty dx \left(x + \frac{b}{2} \right) \frac{1}{1 + e^x} + \int_{-\frac{b}{2}}^0 dx \left(x + \frac{b}{2} \right) \frac{1}{1 + e^x} \\ &= \int_0^\infty dx \left(x + \frac{b}{2} \right) \frac{1}{1 + e^x} + \int_{\frac{b}{2}}^0 dx \left(x - \frac{b}{2} \right) \frac{1}{1 + e^{-x}} \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

となる. 最後, 第 2 項は $x \rightarrow -x$ の置き換えをした. また, 式 (A.53) 第 2 項の積分については $x := b' - b/2$ と変数変換をすれば,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty b' db' \frac{1}{1 + e^{b' + \frac{b}{2}}} &= \int_{\frac{b}{2}}^\infty dx \left(x - \frac{b}{2} \right) \frac{1}{1 + e^x} \\ &= \int_0^\infty dx \left(x - \frac{b}{2} \right) \frac{1}{1 + e^x} + \int_{\frac{b}{2}}^0 dx \left(x - \frac{b}{2} \right) \frac{1}{1 + e^x} \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

となる. したがって,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b}(b\tilde{V}_{1,1}(b)) &= \frac{1}{2} \left[2 \int_0^\infty dx \frac{x}{1 + e^x} + \int_{\frac{b}{2}}^0 dx \left(x - \frac{b}{2} \right) \left(\frac{1}{1 + e^x} + \frac{1}{1 + e^{-x}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[2 \int_0^\infty dx \frac{x}{1 + e^x} + \int_{\frac{b}{2}}^0 dx \left(x - \frac{b}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[2 \int_0^\infty dx \frac{x}{1 + e^x} + \frac{b^2}{8} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

となる. 1 段目から 2 段目の式変形は

$$\frac{1}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^{-x}} = 1 \quad (\text{A.57})$$

を用いた. 最後の積分は以下のようにして ζ 関数に帰着できる:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx \frac{x}{1+e^x} &= \int_0^\infty dx \frac{x}{e^x-1} - \int_0^\infty dx \frac{2x}{e^{2x}-1} \\ &= \int_0^\infty dx \frac{x}{e^x-1} - \frac{1}{2} \int_0^\infty dx \frac{x}{e^x-1} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty dx \frac{x}{e^x-1} = \frac{1}{2} \zeta(2) = \frac{\pi^2}{12} \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

最初の式変形は恒等式

$$\frac{1}{e^x+1} - \frac{1}{e^x-1} = -\frac{2}{e^{2x}-1} \quad (\text{A.59})$$

を用いて, 次の式変形は第 2 項において $2x \rightarrow x$ の置き換えを行った. 最後は ζ 関数の特殊値 $\zeta(2) = \pi^2/6$ を用いた. 結局以下を得る:

$$\frac{\partial}{\partial b} (b\tilde{V}_{1,1}(b)) = \frac{\pi^2}{12} + \frac{b^2}{16}. \quad (\text{A.60})$$

両辺 b で不定積分した後 b で割れば式 (2.182) を得る.

A.3.3 Weil-Petersson 体積の具体的な計算

ここでは Mirzakhani 漸化式 (2.168) を用いて, 様々な Weil-Petersson 体積を具体的に計算する. 漸化式 (2.168) の左辺の積分を直接実行するのは難しいので以下のような流れで計算する.

手順 1 Mirzakhani 漸化式 (2.168) の両辺に b_1 をかけて b_1 で微分する. すなわち, $\frac{\partial}{\partial b_1} b_1 V_{g,n}$ を計算する.

手順 2 公式 (A.24), (A.22) を用いて漸化式左辺の $\frac{\partial}{\partial b_1} D, \frac{\partial}{\partial b_1} (b_1 - T)$ を I_i, J_i に変換する. すなわち, $\frac{\partial}{\partial b_1} b_1 V_{g,n}$ を I_i, J_i の線型結合で表す.

手順 3 積分 I_i, J_i は公式 (A.36), (A.42) を用いて計算する.

手順 4 これまでの計算で $\frac{\partial}{\partial b_1} b_1 V_{g,n}$ が b_1, b_2, \dots の多項式として求められるので, 最後にそれを b_1 で積分した後 b_1 で割れば $V_{g,n}$ が得られる.

以下でこの手順の具体例を見ていこう.

$V_{0,4}$ の計算 Mirzakhani 漸化式 (2.168) および $V_{0,3}$ の表式 (2.145) より, 以下が成り立つ (図 27):

$$V_{0,4}(b_1, b_2, b_3, b_4) = \sum_{k=2}^k \int_0^\infty b' db' \left[1 - \frac{T(b_1, b', b_k)}{b_1} \right] V_{0,3}(b', \{b_2, b_3, b_4\} / \{b_k\}) \quad (\text{A.61})$$

$$= \sum_{k=2}^k \int_0^\infty b' db' \left[1 - \frac{T(b_1, b', b_k)}{b_1} \right]. \quad (\text{A.62})$$

上式の両辺に b_1 をかけて b_1 で微分すれば以下を得る:

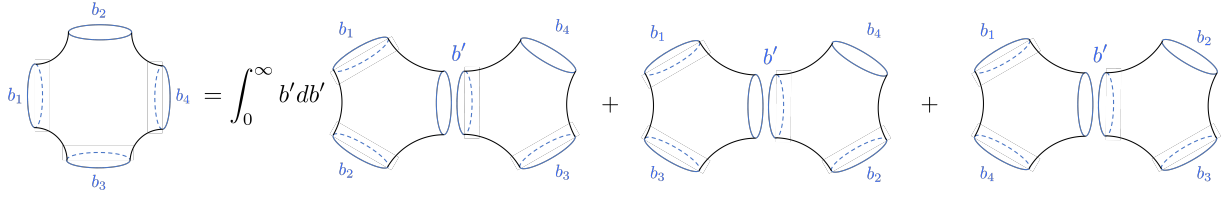


図 27: (A.61) 式の図形的な理解.

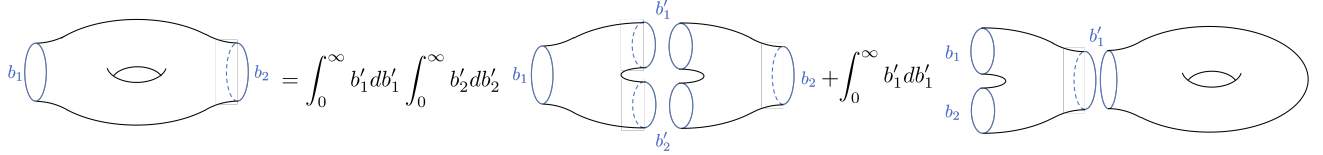


図 28: (A.65) 式の図形的な理解.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial b_1} b_1 V_{0,4}(b_1, b_2, b_3, b_4) &= \sum_{k=2}^k \int_0^\infty b' db' \frac{\partial}{\partial b_1} [b_1 - T(b_1, b', b_k)] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^k \int_0^\infty b' db' [H(b', b_1 + b_k) + H(b', b_1 - b_k)] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^k [J_0(b_1 + b_k) + J_0(b_1 - b_k)]. \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^k \left[\frac{(b_1 + b_k)^2}{2} + \frac{(b_1 - b_k)^2}{2} + \frac{4\pi^2}{3} \right] \\
&= 2\pi^2 + \frac{3b_1^2}{2} + \frac{b_2^2 + b_3^2 + b_4^2}{2} \tag{A.63}
\end{aligned}$$

となる. 途中, T と H の変換公式 (A.22) および J_i の定義式 (A.27), J_0 の表式 (A.38) を用いた. 両辺 b_1 で積分し, b_1 で割れば以下を得る:

$$V_{0,4}(b_1, b_2, b_3, b_4) = \frac{4\pi^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2}{2}. \tag{A.64}$$

$V_{1,2}$ の計算 Mirzakhani 漸化式 (2.168) および $V_{0,3}$ の表式 (2.145) および $\tilde{V}_{1,1}$ の表式 (2.182) より, 以下が成り立つ (図 28):

$$V_{1,2}(b_1, b_2) = \frac{1}{2} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty b'_2 db'_2 \frac{D(b_1, b'_1, b'_2)}{b_1} V_{0,3}(b'_1, b'_2, b_2) + \int_0^\infty b'_1 db'_1 \left[1 - \frac{T(b_1, b'_1, b_2)}{b_1} \right] V_{1,1}(b'_1) \tag{A.65}$$

$$= \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty b'_2 db'_2 \frac{D(b_1, b'_1, b'_2)}{b_1} + \int_0^\infty b'_1 db'_1 \left[1 - \frac{T(b_1, b'_1, b_2)}{b_1} \right] \frac{4\pi^2 + b'_1{}^2}{48}. \tag{A.66}$$

上式の両辺に b_1 をかけて b_1 で割れば以下を得る:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial b_1} b_1 V_{1,2}(b_1, b_2) \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty b'_2 db'_2 \frac{\partial}{\partial b_1} D(b_1, b'_1, b'_2) + \int_0^\infty b'_1 db'_1 \frac{\partial}{\partial b_1} [b_1 - T(b_1, b'_1, b_2)] \frac{4\pi^2 + b'_1{}^2}{48} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty b'_2 db'_2 H(b'_1 + b'_2, b_1) + \frac{1}{2} \int_0^\infty b'_1 db'_1 [H(b'_1, b_1 + b_2) + H(b'_1, b_1 - b_2)] \frac{4\pi^2 + b'_1{}^2}{48}
\end{aligned}$$

$$= \int_0^\infty b_1' db_1' \int_0^\infty b_2' db_2' \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} \\ + \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} \\ + \int_0^\infty b_1' db_1' \left[\text{Diagram 7} + \text{Diagram 8} + \text{Diagram 9} + \text{Diagram 10} \right] \end{array} \right]$$

図 29: (A.69) 式の図形的な理解.

$$= \frac{1}{2} I_{0,0}(b_1) + \frac{\pi^2}{24} [J_0(b_1 + b_2) + J_0(b_1 - b_2)] + \frac{1}{96} [J_1(b_1 + b_2) + J_1(b_1 - b_2)]$$

$$= \frac{5b_1^4 + 6b_1^2 b_2^2 + b_2^4 + 48\pi^2 b_1^2 + 16\pi^2 b_2^2 + 48\pi^4}{192}. \quad (\text{A.67})$$

となる. 途中, 公式 (A.24), (A.22) および $I_{i,j}, J_i$ の定義式 (A.26), (A.27), I_{00} の表式 (A.43), J_0 の表式 (A.38), J_1 の表式 (A.39) を用いた. 両辺 b_1 で積分した後 b_1 で積分すれば, 以下を得る:

$$V_{1,2}(b_1, b_2) = \frac{(4\pi^2 + b_1^2 + b_2^2)(12\pi^2 + b_1^2 + b_2^2)}{192}. \quad (\text{A.68})$$

$V_{0,5}$ の計算 Mirzakhani 漸化式 (2.168) および $V_{0,3}$ の表式 (2.145) および $V_{0,4}$ の表式 (2.172) より, 以下が成り立つ (図 29):

$$V_{0,5}(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty b_1' db_1' \int_0^\infty b_2' db_2' \frac{D(b_1, b_1', b_2')}{b_1}$$

$$\times [V_{0,3}(b_1', b_2, b_3) V_{0,3}(b_2', b_4, b_5) + V_{0,3}(b_1', b_2, b_4) V_{0,3}(b_2', b_3, b_5) + V_{0,3}(b_1', b_2, b_5) V_{0,3}(b_2', b_3, b_4)$$

$$+ V_{0,3}(b_2', b_2, b_3) V_{0,3}(b_1', b_4, b_5) + V_{0,3}(b_2', b_2, b_4) V_{0,3}(b_1', b_3, b_5) + V_{0,3}(b_2', b_2, b_5) V_{0,3}(b_1', b_3, b_4)]$$

$$+ \int_0^\infty b_1' db_1' \left\{ \left[1 - \frac{T(b_1, b_1', b_2)}{b_1} \right] V_{0,4}(b_1', b_3, b_4, b_5) + \left[1 - \frac{T(b_1, b_1', b_3)}{b_1} \right] V_{0,4}(b_1', b_2, b_4, b_5) \right.$$

$$\left. + \left[1 - \frac{T(b_1, b_1', b_4)}{b_1} \right] V_{0,4}(b_1', b_2, b_3, b_5) + \left[1 - \frac{T(b_1, b_1', b_5)}{b_1} \right] V_{0,4}(b_1', b_2, b_3, b_4) \right\} \quad (\text{A.69})$$

$$= 3 \int_0^\infty b_1' db_1' \int_0^\infty b_2' db_2' \frac{D(b_1, b_1', b_2')}{b_1} + \sum_{k=2}^5 \int_0^\infty b_1' db_1' \left[1 - \frac{T(b_1, b_1', b_k)}{b_1} \right] \frac{4\pi^2 + b_1'^2 + \sum_{m \neq k}^5 b_m^2}{2}. \quad (\text{A.70})$$

上式の両辺に b_1 をかけて b_1 で割れば以下を得る:

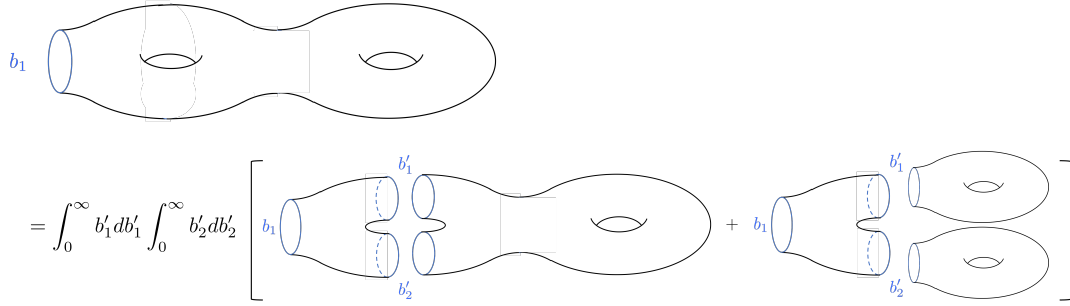


図 30: (A.74) 式の図形的な理解.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial b_1} b_1 V_{0,5}(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \\
&= 3 \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty b'_2 db'_2 \frac{\partial}{\partial b_1} D(b_1, b'_1, b'_2) + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^5 \int_0^\infty b'_1 db'_1 \frac{\partial}{\partial b_1} [b_1 - T(b_1, b'_1, b_k)] \frac{4\pi^2 + b_1'^2 + \sum_{\substack{m=2 \\ m \neq k}}^5 b_m^2}{2} \\
&= 3I_{0,0}(b_1) + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^5 \left[\left(2\pi^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{m=2 \\ m \neq k}}^5 b_m^2 \right) (J_0(b_1 + b_k) + J_0(b_1 - b_k)) + \frac{1}{2} (J_1(b_1 + b_k) + J_1(b_1 - b_k)) \right]
\end{aligned} \tag{A.71}$$

となる. 途中, 公式 (A.24), (A.22) および $I_{i,j}, J_i$ の定義式 (A.26), (A.27) を用いた. 上式に $I_{0,0}$ の表式 (A.43), J_0 の表式 (A.38), J_1 の表式 (A.39) を代入すると

$$\frac{\partial}{\partial b_1} b_1 V_{0,5}(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) = \frac{1}{8} \left(5b_1^4 + \sum_{i=2}^5 b_i^4 + 12b_1^2 \sum_{i=2}^5 b_i^2 + 4 \sum_{\substack{i,j=2 \\ i < j}}^5 b_i b_j + 72\pi^2 b_1^2 + 24\pi^2 \sum_{i=2}^5 b_i^2 + 80\pi^4 \right) \tag{A.72}$$

となる. 上式の両辺を b_1 で積分した後, b_1 で割れば以下が得られる:

$$V_{0,5}(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) = \frac{1}{8} \left(80\pi^2 + \sum_{i=1}^5 b_i^4 + 4 \sum_{1 \leq i < j \leq 5} b_i^2 b_j^2 + 24\pi^2 \sum_{i=1}^5 b_i^2 \right). \tag{A.73}$$

$V_{2,1}$ の計算 Mirzakhani 漸化式 (2.168) および $V_{1,2}$ の表式 (2.173), $\tilde{V}_{1,2}$ の表式 (2.182) より, 以下が成り立つ (図 30):

$$\begin{aligned}
V_{2,1}(b_1) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty b'_2 db'_2 \frac{D(b_1, b'_1, b'_2)}{b_1} \left[V_{1,2}(b'_1, b'_2) + \tilde{V}_{1,1}(b'_1) \tilde{V}_{1,1}(b'_2) \times 2 \right] \tag{A.74} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty b'_2 db'_2 \frac{D(b_1, b'_1, b'_2)}{b_1} \left[\frac{(4\pi^2 + b_1'^2 + b_2'^2)(12\pi^2 + b_1'^2 + b_2'^2)}{192} + \frac{(4\pi^2 + b_1'^2)(4\pi^2 + b_2'^2)}{48^2} \right] \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty b'_2 db'_2 \frac{D(b_1, b'_1, b'_2)}{b_1} \frac{12(b_1'^4 + b_2'^4) + 25b_1'^2 b_2'^2 + 196\pi^2 (b_1'^2 + b_2'^2) + 592\pi^4}{2304}.
\end{aligned} \tag{A.75}$$

上式の両辺に b_1 をかけて b_1 で割れば以下を得る:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial b_1} b_1 V_{2,1}(b_1) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty b'_2 db'_2 H(b'_1 + b'_2, b_1) \frac{12(b'_1{}^4 + b'_2{}^4) + 25b'_1{}^2 b'_2{}^2 + 196\pi^2 (b'_1{}^2 + b'_2{}^2) + 592\pi^4}{2304} \\
&= \frac{1}{1152} [12(I_{2,0}(b_1) + I_{0,2}(b_1)) + 25I_{1,1}(b_1) + 196\pi^2 (I_{1,0}(b_1) + I_{0,1}(b_1)) + 592\pi^4 I_{0,0}(b_1)] \\
&= \frac{1}{1152} [24I_{0,2}(b_2) + 25I_{1,1}(b_1) + 392\pi^2 I_{0,1}(b_1) + 192\pi^4 I_{0,0}(b_1)]. \tag{A.76}
\end{aligned}$$

となる. 途中, 公式 (A.24) および $I_{i,j}$ の定義式 (A.26) を用いた. 上式に $I_{0,0}$ の表式 (A.43), $I_{1,0}$ の表式 (A.44), $I_{2,0}$ の表式 (A.46) を代入すれば

$$\frac{\partial}{\partial b_1} b_1 V_{2,1}(b_1) = \frac{45b_1^8 + 3248\pi^2 b_1^6 + 66720\pi^4 b_1^4 + 389376\pi^6 b_1^2 + 334080\pi^8}{2211840} \tag{A.77}$$

となる. 上式の両辺を b_1 で積分した後, b_1 で割れば以下が得られる:

$$V_{2,1}(b_1) = \frac{(4\pi^2 + b_1^2)(12\pi^2 + b_1^2)(6960\pi^4 + 384\pi^2 b_1^2 + 5b_1^4)}{2211840}. \tag{A.78}$$

A.3.4 Laplace 変換された Mirzakhani 漸化式 (2.295) の導出

本節では Laplace 変換された Mirzakhani 漸化式 (2.295) の導出を行う. なお, 本節は [30] の付録 A 節を参考にしている. 以下, 元々の Mirzakhani 漸化式の適用外である $(g, n) = (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1)$ の場合は除外する. $(g, n) = (0, 3), (1, 1)$ の場合は最後に考える.

まず, 漸化式 (2.168) の両辺に b_1 をかけたものを考える:

$$\begin{aligned}
b_1 V_{g,n}(b_1, B) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty b'_2 db'_2 D(b_1, b'_1, b'_2) V(b'_1, b'_2, B) \\
&\quad + \sum_{k=2}^n \int_0^\infty b'_1 db'_1 [b_1 - T(b_1, b'_1, b_k)] V_{g,n-1}(b'_1, B \setminus \{b_k\}). \tag{A.79}
\end{aligned}$$

ただし, 表記を簡単にするために以下のように置いた:

$$V(b'_1, b'_2, B) := V_{g-1, n+1}(b'_1, b'_2, B) + \sum_{\substack{h_1+h_2=g, \\ B_1 \cup B_2=B, \\ \text{stable}}} V_{h_1, 1+|B_1|}(b'_1, B_1) V_{h_2, 1+|B_2|}(b'_2, B_2). \tag{A.80}$$

ここで公式 (A.22), (A.24) より,

$$b_1 - T(b_1, b_2, b_3) = \frac{1}{2} \int_0^{b_1} dx [H(b_2, x + b_3) + H(b_2, x - b_3)], \tag{A.81}$$

$$D(b_1, b_2, b_3) = \int_0^{b_1} dx H(b_2 + b_3, x) \tag{A.82}$$

となるので, これを (A.79) 式に代入して以下を得る:

$$\begin{aligned}
b_1 V_{g,n}(b_1, B) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty b'_2 db'_2 \int_0^{b_1} dx H(b'_1 + b'_2, x) V(b'_1, b'_2, B) \\
&\quad + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^{b_1} dx [H(b'_1, x + b_k) + H(b'_1, x - b_k)] V_{g,n-1}(b'_1, B \setminus \{b_k\}). \tag{A.83}
\end{aligned}$$

すると, Laplace 変換された Weil-Petersson 体積 $W_{g,n}$ の定義式 (??) と合わせて以下が得られる :

$$\begin{aligned}
& W_{g,n}(z_1, \dots, b_n) \\
& := \prod_{m=1}^n \left[\int_0^\infty b_m db_m e^{-z_m b_m} \right] V_{g,n}(b_1, \dots, b_n) \\
& = \int_0^\infty db_1 e^{-z_1 b_1} \prod_{m=2}^n \left[\int_0^\infty b_m db_m e^{-z_m b_m} \right] b_1 V_{g,n}(b_1, B) \\
& = \frac{1}{2} \int_0^\infty db_1 e^{-z_1 b_1} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty b'_2 db'_2 \int_0^{b_1} dx H(b'_1 + b'_2, x) \prod_{m=2}^n \left[\int_0^\infty b_m db_m e^{-z_m b_m} \right] V(b'_1, b'_2, B) \\
& + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2} \int_0^\infty db_1 e^{-z_1 b_1} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^{b_1} dx \int_0^\infty b_k db_k e^{-z_k b_k} [H(b'_1, x + b_k) + H(b'_1, x - b_k)] \\
& \quad \times \prod_{\substack{m=2 \\ m \neq k}}^n \left[\int_0^\infty b_m db_m e^{-z_m b_m} \right] V_{g,n-1}(b'_1, B \setminus \{b_k\}) \\
& = \frac{1}{2} \int_0^\infty db_1 e^{-z_1 b_1} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty b'_2 db'_2 \int_0^{b_1} dx H(b'_1 + b'_2, x) \hat{W}(b'_1, b'_2, J) \\
& + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2} \int_0^\infty db_1 e^{-z_1 b_1} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^{b_1} dx \int_0^\infty b_k db_k e^{-z_k b_k} [H(b'_1, x + b_k) + H(b'_1, x - b_k)] \hat{W}_{g,n-1}(b'_1, J \setminus \{z_k\}).
\end{aligned} \tag{A.84}$$

ここで簡単のために特殊例 $(g, n) = (1, 1)$ のための係数 $2^{-\delta_{g,1} \delta_{n,1}}$ は省略した. また, 最後は以下のように置いた :

$$\hat{W}(b'_1, b'_2, J) := \prod_{m=2}^n \left[\int_0^\infty b_m db_m e^{-z_m b_m} \right] V(b'_1, b'_2, B), \tag{A.85}$$

$$\hat{W}_{g,n-1}(b'_1, J \setminus \{z_k\}) := \prod_{\substack{m=2 \\ m \neq k}}^n \left[\int_0^\infty b_m db_m e^{-z_m b_m} \right] V_{g,n-1}(b'_1, B \setminus \{b_k\}). \tag{A.86}$$

式 (A.84) 第 1 項の積分 :

$$K_1 := \frac{1}{2} \int_0^\infty db_1 e^{-z_1 b_1} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty b'_2 db'_2 \int_0^{b_1} dx H(b'_1 + b'_2, x) \hat{W}(b'_1, b'_2, J) \tag{A.87}$$

を計算しよう. まず, 積分 $\int_0^\infty db_1 e^{-z_1 b_1} \int_0^{b_1} dx$ を以下のように変形する :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty db_1 e^{-z_1 b_1} \int_0^{b_1} dx f(x) &= \int_0^\infty dx \int_x^\infty db_1 e^{-z_1 b_1} f(x) \\
&= \frac{1}{z_1} \int_0^\infty dx e^{-z_1 x} f(x).
\end{aligned} \tag{A.88}$$

ここで被積分関数をまとめて $f(x)$ と書いた. 最初の式変形は積分順序の交換, 次の式変形は b_1 積分の実行を行った. 以上から,

$$K_1 = \frac{1}{2z_1} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty b'_2 db'_2 \int_0^\infty dx e^{-z_1 x} H(b'_1 + b'_2, x) \hat{W}(b'_1, b'_2, J) \tag{A.89}$$

となる. x 積分を実行するために, 以下の関数の展開を行う :

$$H(b'_1 + b'_2, x) := \frac{1}{1 + e^{\frac{b'_1 + b'_2 + x}{2}}} + \frac{1}{1 + e^{\frac{b'_1 + b'_2 - x}{2}}}. \tag{A.90}$$

第1項は任意の $b_1, b_2, x > 0$ に対して以下のように展開できる³⁹ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + e^{\frac{b'_1 + b'_2 + x}{2}}} &= e^{\frac{b'_1 + b'_2 + x}{2}} \frac{1}{1 + e^{-\frac{b'_1 + b'_2 + x}{2}}} \\ &= e^{\frac{b'_1 + b'_2 + x}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m e^{-m \frac{b'_1 + b'_2 + x}{2}} \\ &= - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m e^{-m \frac{b'_1 + b'_2 + x}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{A.91})$$

第2項は $b'_1 + b'_2 - x > 0$ であれば

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + e^{\frac{b'_1 + b'_2 - x}{2}}} &= e^{\frac{b'_1 + b'_2 - x}{2}} \frac{1}{1 + e^{-\frac{b'_1 + b'_2 - x}{2}}} \\ &= e^{\frac{b'_1 + b'_2 - x}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m e^{-m \frac{b'_1 + b'_2 - x}{2}} \\ &= - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m e^{-m \frac{b'_1 + b'_2 - x}{2}} \end{aligned} \quad (\text{A.92})$$

と展開できて, $b'_1 + b'_2 - x < 0$ であれば

$$\frac{1}{1 + e^{\frac{b'_1 + b'_2 - x}{2}}} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m e^{m \frac{b'_1 + b'_2 - x}{2}} \quad (\text{A.93})$$

と展開できる. したがって,

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} dx e^{-z_1 x} H(b'_1 + b'_2, x) \\ &= - \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dx e^{-z_1 x} (-1)^m e^{-m \frac{b'_1 + b'_2 + x}{2}} \\ &\quad - \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{b'_1 + b'_2} dx e^{-z_1 x} (-1)^m e^{-m \frac{b'_1 + b'_2 - x}{2}} + \sum_{m=0}^{\infty} \int_{b'_1 + b'_2}^{\infty} dx e^{-z_1 x} (-1)^m e^{m \frac{b'_1 + b'_2 - x}{2}} \\ &= - \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m \frac{b'_1 + b'_2}{2}} \frac{(-1)^m}{z_1 + \frac{m}{2}} \\ &\quad - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{z_1 - \frac{m}{2}} \left(e^{-\frac{m}{2}(b'_1 + b'_2)} - e^{-z_1(b'_1 + b'_2)} \right) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{z_1 + \frac{m}{2}} e^{-z_1(b'_1 + b'_2)} \\ &= - \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^m}{z_1 - \frac{m}{2}} + \frac{(-1)^m}{z_1 + \frac{m}{2}} \right) \left(e^{-\frac{m}{2}(b'_1 + b'_2)} - e^{-z_1(b'_1 + b'_2)} \right) + \frac{e^{-z_1(b'_1 + b'_2)}}{z_1} \\ &= - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2z_1(-1)^m}{z_1^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2} \left(e^{-\frac{m}{2}(b'_1 + b'_2)} - e^{-z_1(b'_1 + b'_2)} \right) + \frac{e^{-z_1(b'_1 + b'_2)}}{z_1} \\ &= - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2z_1(-1)^m}{z_1^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2} e^{-\frac{m}{2}(b'_1 + b'_2)} + \frac{2\pi}{\sin(2\pi z_1)} e^{-z_1(b'_1 + b'_2)} \end{aligned} \quad (\text{A.94})$$

となる. 最初の式変形は関数 $H(b'_1 + b'_2, x)$ の展開, 次の式変形は x 積分の実行を行った. また, 最後の式変形は

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{z^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2z^2} + \frac{\pi}{z \sin(2\pi z)} \quad (\text{A.95})$$

³⁹ $|x| \ll 1$ に対して以下のように展開できることを用いた.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m.$$

を用いた（本節の最後で示す）．上式 (A.94) を式 (A.89) に代入すれば

$$\begin{aligned}
K_1 &= -\frac{1}{2z_1} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty b'_2 db'_2 \left(\sum_{m=1}^\infty \frac{2z_1(-1)^m}{z_1^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2} e^{-\frac{\pi}{2}(b'_1+b'_2)} + \frac{2\pi}{\sin(2\pi z_1)} e^{-z_1(b'_1+b'_2)} \right) \hat{W}(b'_1, b'_2, J) \\
&= \sum_{m=1}^\infty \frac{z_1(-1)^m}{z_1^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2} W\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}, J\right) + \frac{\pi}{z_1 \sin(2\pi z_1)} W(z_1, z_1, J) \\
&= \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^\infty \frac{z_1(-1)^m}{2\left(z_1^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2\right)} W\left(\frac{m}{2}, -\frac{m}{2}, J\right) + \frac{\pi}{2z_1 \sin(2\pi z_1)} W(z_1, -z_1, J) + \frac{\pi}{2(-z_1) \sin(-2\pi z_1)} W(z_1, -z_1, J)
\end{aligned} \tag{A.96}$$

となる．ここで以下のように置いた：

$$W(z_1, z_2, J) := W_{g-1, n+1}(z_1, z_2, B) + \sum_{\substack{h_1+h_2=g, \\ I_1 \cup I_2=J, \\ \text{stable}}} W_{h_1, 1+|I_1|}(z_1, I_1) W_{h_2, 1+|I_2|}(z_2, I_2). \tag{A.97}$$

以上の式変形で，1段目から2段目は b'_1, b'_2 についての Laplace 変換を実行した．また，最後の式変形は $W_{g,n}$ の多項式表示 (2.298) から $W_{g,n}$ は引数の符号の反転で不変であることを用いた．最後に，留数を用いて式 (A.96) を書き直そう． $W_{g,n}$ の多項式表示 (2.298) から $W(z, z, J)$ は $z \neq 0$ で解析的であることがわかるので，以下が成り立つ：

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{z \rightarrow \pm z_1} \frac{\pi}{\sin(2\pi z)(z_1^2 - z^2)} W(z, -z, J) &= -\frac{\pi}{2(\pm z_1) \sin(\pm 2\pi z_1)} W(z_1, -z_1, J), \tag{A.98} \\
\operatorname{Res}_{z \rightarrow \pm \frac{m}{2}} \frac{\pi}{\sin(2\pi z)(z_1^2 - z^2)} W(z, -z, J) &= \operatorname{Res}_{z \rightarrow \pm \frac{m}{2}} \frac{\pi(-1)^m}{\sin(2\pi(z \pm \frac{m}{2}))(z_1^2 - z^2)} W(z, -z, J) \\
&= \operatorname{Res}_{z \rightarrow 0} \frac{\pi(-1)^m}{\sin(2\pi z)\left(z_1^2 - \left(z \pm \frac{m}{2}\right)^2\right)} W\left(z \pm \frac{m}{2}, -z \mp \frac{m}{2}, J\right) \\
&= \frac{\pi(-1)^m}{2\left(z_1^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2\right)} W\left(\pm \frac{m}{2}, \mp \frac{m}{2}, J\right). \tag{A.99}
\end{aligned}$$

したがって，

$$K_1 = -\left(\operatorname{Res}_{z \rightarrow z_1} + \operatorname{Res}_{z \rightarrow -z_1} + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^\infty \operatorname{Res}_{z \rightarrow \pm \frac{m}{2}} \right) \frac{\pi}{\sin(2\pi z)} \frac{1}{z(z-z_1)} W(z, z, J) \tag{A.100}$$

となる．上式の左辺の関数の持つ特異点は極 $z = 0, \pm z_1, \pm m/2$ のみであるから，留数定理より以下が従う：

$$K_1 = -\left(\int_{C_\infty} - \int_{C_0} \right) \frac{dz}{2\pi i} \frac{\pi}{\sin(2\pi z)(z_1^2 - z^2)} W(z, -z, J). \tag{A.101}$$

ここで積分経路 C_∞ は原点を中心とする半径 ∞ の円で， C_0 は原点を中心とする半径が十分小さい（内部に極を含まない）円である．今， $W_{g,n}$ の多項式表示 (2.298) から $W(z, z, J)$ は $1/z$ について4次以上の多項式であるから積分 \int_{C_∞} は0となる．したがって，

$$\begin{aligned}
K_1 &= \int_{C_0} \frac{dz}{2\pi i} \frac{\pi}{\sin(2\pi z)(z_1^2 - z^2)} W(z, -z, J) \\
&= \operatorname{Res}_{z \rightarrow 0} \frac{\pi}{\sin(2\pi z)(z_1^2 - z^2)} W(z, -z, J). \tag{A.102}
\end{aligned}$$

となる．最後再び留数定理を用いた．

次に式 (A.84) 第 2 項の積分

$$K_2 := \frac{1}{2} \int_0^\infty db_1 e^{-z_1 b_1} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^{b_1} dx \int_0^\infty b_k db_k e^{-z_k b_k} [H(b'_1, x + b_k) + H(b'_1, x - b_k)] \hat{W}_{g,n-1}(b'_1, J \setminus \{z_k\}) \quad (\text{A.103})$$

を計算しよう．直接これを計算するのは難しいので，

$$K'_2 := \frac{1}{2} \int_0^\infty db_1 e^{-z_1 b_1} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^{b_1} dx \int_0^\infty db_k e^{-z_k b_k} [H(b'_1, x + b_k) + H(b'_1, x - b_k)] \hat{W}_{g,n-1}(b'_1, J \setminus \{z_k\}) \quad (\text{A.104})$$

を計算し，最後に z_k で微分して負符号を付ける：

$$K_2 = -\frac{\partial K'_2}{\partial z_k}. \quad (\text{A.105})$$

K_1 の計算と同様に式変形 (A.88) を用いれば，

$$\begin{aligned} K'_2 &= \frac{1}{2z_1} \int_0^\infty dx e^{-z_1 x} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty db_k e^{-z_k b_k} [H(b'_1, x + b_k) + H(b'_1, x - b_k)] \hat{W}_{g,n-1}(b'_1, J \setminus \{z_k\}) \\ &= \frac{1}{2z_1} \int_0^\infty dx e^{-z_1 x} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty db_k e^{-z_k b_k} H(b'_1, x + b_k) \hat{W}_{g,n-1}(b'_1, J \setminus \{z_k\}) \\ &\quad + \frac{1}{2z_1} \int_0^\infty dx e^{-z_1 x} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty db_k e^{-z_k b_k} H(b'_1, x - b_k) \hat{W}_{g,n-1}(b'_1, J \setminus \{z_k\}) \end{aligned} \quad (\text{A.106})$$

となる．式 (A.106) の第 1 項は $y := x + b_k$ と変数変換すれば

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2z_1} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty db_k e^{-z_k b_k} \int_{b_k}^\infty dy e^{-z_1(y-b_k)} H(b'_1, y) \hat{W}_{g,n-1}(b'_1, J \setminus \{z_k\}) \\ &= \frac{1}{2z_1} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty db_k e^{-(z_k-z_1)b_k} \int_{b_k}^\infty dy e^{-z_1 y} H(b'_1, y) \hat{W}_{g,n-1}(b'_1, J \setminus \{z_k\}) \\ &= \frac{1}{2z_1} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty dy e^{-z_1 y} \int_0^y db_k e^{-(z_k-z_1)b_k} H(b'_1, y) \hat{W}_{g,n-1}(b'_1, J \setminus \{z_k\}) \\ &= \frac{1}{2z_1} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty dy e^{-z_1 y} \frac{e^{-(z_k-z_1)y} - 1}{-(z_k-z_1)} H(b'_1, y) \hat{W}_{g,n-1}(b'_1, J \setminus \{z_k\}) \\ &= \frac{1}{2z_1} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty dy \frac{e^{-z_1 y} - e^{-z_k y}}{z_k - z_1} H(b'_1, y) \hat{W}_{g,n-1}(b'_1, J \setminus \{z_k\}) \end{aligned} \quad (\text{A.107})$$

となる．2 段目から 3 段目は x 積分と b_k 積分の交換，3 段目から 4 段目は b_k 積分の実行を行った．

式 (A.106) の第 2 項は $y := x - b_k$ と変数変換すれば，

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2z_1} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty db_k e^{-z_k b_k} \int_{-b_k}^\infty dy e^{-z_1(y+b_k)} H(b'_1, y) \hat{W}_{g,n-1}(b'_1, J \setminus \{z_k\}) \\ &= \frac{1}{2z_1} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty db_k e^{-(z_1+z_k)b_k} \int_{-b_k}^\infty dy e^{-z_1 y} H(b'_1, y) \hat{W}_{g,n-1}(b'_1, J \setminus \{z_k\}) \\ &= \frac{1}{2z_1} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty dy e^{-z_1 y} \int_0^\infty db_k e^{-(z_1+z_k)b_k} H(b'_1, y) \hat{W}_{g,n-1}(b'_1, J \setminus \{z_k\}) \\ &\quad + \frac{1}{2z_1} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_{-\infty}^0 dy e^{-z_1 y} \int_{-y}^\infty db_k e^{-(z_1+z_k)b_k} H(b'_1, y) \hat{W}_{g,n-1}(b'_1, J \setminus \{z_k\}) \\ &= \frac{1}{2z_1} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty dy e^{-z_1 y} \frac{1}{z_1 + z_k} H(b'_1, y) \hat{W}_{g,n-1}(b'_1, J \setminus \{z_k\}) \\ &\quad + \frac{1}{2z_1} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_{-\infty}^0 dy e^{-z_1 y} \frac{e^{(z_1+z_k)y}}{z_1 + z_k} H(b'_1, y) \hat{W}_{g,n-1}(b'_1, J \setminus \{z_k\}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2z_1} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty dy \frac{e^{-z_1 y}}{z_1 + z_k} H(b'_1, y) \hat{W}_{g,n-1}(b'_1, J \setminus \{z_k\}) \\
&\quad + \frac{1}{2z_1} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty dy \frac{e^{-z_k y}}{z_1 + z_k} H(b'_1, y) \hat{W}_{g,n-1}(b'_1, J \setminus \{z_k\}) \\
&= \frac{1}{2z_1} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty dy \frac{e^{-z_1 y} + e^{-z_k y}}{z_1 + z_k} H(b'_1, y) \hat{W}_{g,n-1}(b'_1, J \setminus \{z_k\}) \tag{A.108}
\end{aligned}$$

となる．2段目から3段目は y 積分と b_k 積分の交換，3段目から4段目は b_k 積分の実行を行った．以上をまとめると，

$$\begin{aligned}
K'_2 &= \frac{1}{2z_1} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty dy \left(\frac{e^{-z_1 y} - e^{-z_k y}}{z_1 - z_k} + \frac{e^{-z_1 y} + e^{-z_k y}}{z_1 + z_k} \right) H(b'_1, y) \hat{W}_{g,n-1}(b'_1, J \setminus \{z_k\}) \\
&= \frac{1}{z_1} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty dy \frac{z_1 e^{-z_k y} - z_k e^{-z_1 y}}{z_1^2 - z_k^2} H(b'_1, y) \hat{W}_{g,n-1}(b'_1, J \setminus \{z_k\}) \tag{A.109}
\end{aligned}$$

となる．次に y 積分を実行しよう：

$$\int_0^\infty dy \frac{z_1 e^{-z_k y} - z_k e^{-z_1 y}}{z_1^2 - z_k^2} H(b'_1, y). \tag{A.110}$$

そのためには以下の積分を計算すれば良い：

$$\int_0^\infty dy e^{-zy} H(b'_1, y). \tag{A.111}$$

これは式 (A.94) において $z_1 \rightarrow z$, $b'_1 + b'_2 \rightarrow b'_1$ と置き換えれば求められる：

$$\int_0^\infty dy e^{-zy} H(b'_1, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2z(-1)^m e^{-\frac{m}{2}b'_1}}{z^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2} + \frac{2\pi}{\sin(2\pi z)} e^{-zb'_1}. \tag{A.112}$$

最後の式変形は無級数 (A.95) を用いた．上式より，

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty dy \frac{z_1 e^{-z_k y} - z_k e^{-z_1 y}}{z_1^2 - z_k^2} H(b'_1, y) \\
&= \frac{z_1}{z_1^2 - z_k^2} \int_0^\infty dy e^{-z_k y} H(b'_1, y) - \frac{z_k}{z_1^2 - z_k^2} \int_0^\infty dy e^{-z_1 y} H(b'_1, y) \\
&= \frac{z_1}{z_1^2 - z_k^2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2z_k(-1)^m e^{-\frac{m}{2}b'_1}}{z_k^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2} + \frac{2\pi}{\sin(2\pi z_k)} e^{-z_k b'_1} \right) - \frac{z_k}{z_1^2 - z_k^2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2z_1(-1)^m e^{-\frac{m}{2}b'_1}}{z_1^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2} + \frac{2\pi}{\sin(2\pi z_1)} e^{-z_1 b'_1} \right) \\
&= \frac{z_1 z_k}{z_1^2 - z_k^2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m e^{-\frac{m}{2}b'_1}}{z_k^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2} + \frac{2\pi}{z_k \sin(2\pi z_k)} e^{-z_k b'_1} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m e^{-\frac{m}{2}b'_1}}{z_1^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2} - \frac{2\pi}{z_1 \sin(2\pi z_1)} e^{-z_1 b'_1} \right) \tag{A.113}
\end{aligned}$$

となる．これを式 (A.109) に代入すれば，

$$\begin{aligned}
K'_2 &= \frac{z_k}{z_1^2 - z_k^2} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m e^{-\frac{m}{2}b'_1}}{z_k^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2} + \frac{2\pi}{z_k \sin(2\pi z_k)} e^{-z_k b'_1} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m e^{-\frac{m}{2}b'_1}}{z_1^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2} - \frac{2\pi}{z_1 \sin(2\pi z_1)} e^{-z_1 b'_1} \right) \\
&\quad \times \hat{W}_{g,n-1}(b'_1, J \setminus \{z_k\}) \\
&= \frac{z_k}{z_1^2 - z_k^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^m}{z_k^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2} - \frac{2(-1)^m}{z_1^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2} \right) W_{g,n-1} \left(\frac{m}{2}, J \setminus \{z_k\} \right) \\
&\quad + \frac{z_k}{z_1^2 - z_k^2} \left(\frac{2\pi}{z_k \sin(2\pi z_k)} W_{g,n-1}(z_k, J \setminus \{z_k\}) - \frac{2\pi}{z_1 \sin(2\pi z_1)} W_{g,n-1}(z_1, J \setminus \{z_k\}) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m z_k}{\left(z_k^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2\right) \left(z_1^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2\right)} W_{g,n-1} \left(\frac{m}{2}, J \setminus \{z_k\}\right) \\
&\quad + \frac{2\pi}{\sin(2\pi z_k)} \frac{1}{z_1^2 - z_k^2} W_{g,n-1}(z_k, J \setminus \{z_k\}) - \frac{2\pi}{\sin(2\pi z_1)} \frac{z_k}{z_1(z_1^2 - z_k^2)} W_{g,n-1}(z_1, J \setminus \{z_k\}) \\
&= \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^m z_k}{\left(z_k^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2\right) \left(z_1^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2\right)} W_{g,n-1} \left(\frac{m}{2}, J \setminus \{z_k\}\right) \\
&\quad + \frac{\pi}{\sin(2\pi z_k)} \frac{1}{z_1^2 - z_k^2} W_{g,n-1}(z_k, J \setminus \{z_k\}) + \frac{\pi}{\sin(2\pi(-z_k))} \frac{1}{z_1^2 - z_k^2} W_{g,n-1}(-z_k, J \setminus \{z_k\}) \\
&\quad - \frac{\pi}{\sin(2\pi z_1)} \frac{z_k}{z_1(z_1^2 - z_k^2)} W_{g,n-1}(z_1, J \setminus \{z_k\}) - \frac{\pi}{\sin(-2\pi z_1)} \frac{z_k}{(-z_1)(z_1^2 - z_k^2)} W_{g,n-1}(-z_1, J \setminus \{z_k\})
\end{aligned} \tag{A.114}$$

となる．最後に上式を留数を用いて書き換えよう． $W_{g,n-1}(z_1, J \setminus \{z_k\})$ は $z \neq 0$ で解析的なので以下が成り立つ：

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Res}_{z \rightarrow \pm z_1} \frac{2\pi}{\sin(2\pi z)} \frac{z_k}{(z_1^2 - z^2)(z^2 - z_k^2)} W_{g,n-1}(z, J \setminus \{z_k\}) \\
&= -\frac{\pi}{\sin(\pm 2\pi z_1)} \frac{z_k}{\pm z_1(z_1^2 - z_k^2)} W_{g,n-1}(\pm z_1, J \setminus \{z_k\}),
\end{aligned} \tag{A.115}$$

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Res}_{z \rightarrow \pm z_k} \frac{2\pi}{\sin(2\pi z)} \frac{z_k}{(z_1^2 - z^2)(z^2 - z_k^2)} W_{g,n-1}(z, J \setminus \{z_k\}) \\
&= \frac{\pi}{\sin(\pm 2\pi z_k)} \frac{1}{(z_1^2 - z_k^2)} W_{g,n-1}(\pm z_k, J \setminus \{z_k\}),
\end{aligned} \tag{A.116}$$

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Res}_{z \rightarrow \pm \frac{m}{2}} \frac{2\pi}{\sin(2\pi z)} \frac{z_k}{(z_1^2 - z^2)(z^2 - z_k^2)} W_{g,n-1}(z, J \setminus \{z_k\}) \\
&= \operatorname{Res}_{z \rightarrow \pm \frac{m}{2}} \frac{2\pi(-1)^m}{\sin\left(2\pi\left(z \mp \frac{m}{2}\right)\right)} \frac{z_k}{(z_1^2 - z^2)(z^2 - z_k^2)} W_{g,n-1}(z, J \setminus \{z_k\}) \\
&= \operatorname{Res}_{z \rightarrow 0} \frac{2\pi(-1)^m}{\sin(2\pi z)} \frac{z_k}{\left(z_1^2 - \left(z \pm \frac{m}{2}\right)^2\right) \left(\left(z \pm \frac{m}{2}\right)^2 - z_k^2\right)} W_{g,n-1}\left(z \pm \frac{m}{2}, J \setminus \{z_k\}\right) \\
&= \frac{(-1)^m z_k}{\left(z_1^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2\right) \left(\left(\frac{m}{2}\right)^2 - z_k^2\right)} W_{g,n-1}\left(\frac{m}{2}, J \setminus \{z_k\}\right).
\end{aligned} \tag{A.117}$$

したがって、

$$K'_2 = \left(\sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}} \operatorname{Res}_{z \rightarrow \frac{m}{2}} + \operatorname{Res}_{z \rightarrow z_1} + \operatorname{Res}_{z \rightarrow z_k} \right) \frac{4\pi}{\sin(2\pi z)} \frac{z_k}{(z_1^2 - z^2)(z^2 - z_k^2)} W_{g,n-1}(z, J \setminus \{z_k\}) \tag{A.118}$$

となる．これは K_1 のときと同様の議論によって $z = 0$ での留数に書き換えられる：

$$\begin{aligned}
K'_2 &= -\operatorname{Res}_{z \rightarrow 0} \frac{2\pi}{\sin(2\pi z)} \frac{z_k}{(z_1^2 - z^2)(z^2 - z_k^2)} W_{g,n-1}(z, J \setminus \{z_k\}) \\
&= \operatorname{Res}_{z \rightarrow 0} \frac{\pi}{\sin(2\pi z)} \frac{1}{(z_1^2 - z^2)} \left(\frac{1}{z_k + z} + \frac{1}{z_k - z} \right) W_{g,n-1}(z, J \setminus \{z_k\}).
\end{aligned} \tag{A.119}$$

よって

$$\begin{aligned}
K_2 &= -\frac{\partial K'_1}{\partial z_k} \\
&= \operatorname{Res}_{z \rightarrow 0} \frac{\pi}{\sin(2\pi z)} \frac{1}{(z_1^2 - z^2)} \left[\frac{1}{(z - z_k)^2} + \frac{1}{(z + z_k)^2} \right] W_{g,n-1}(z, J \setminus \{z_k\})
\end{aligned}$$

$$= \operatorname{Res}_{z \rightarrow 0} \frac{\pi}{\sin(2\pi z)(z_1^2 - z^2)} [W_{0,2}(z, z_k)W_{g,n-1}(-z, J \setminus \{z_k\}) + W_{g,n-1}(z, J \setminus \{z_k\})W_{0,2}(-z, z_k)]. \quad (\text{A.120})$$

となる。最後 $W_{0,2}$ の定義式 (2.296) を用いた。

これまでに得られた式を式 (A.84) に代入すれば以下を得る：

$$W_{g,n}(z_1, \dots, z_n) = K_1 + K_2 \\ = \operatorname{Res}_{z \rightarrow 0} \frac{\pi}{\sin(2\pi z)(z_1^2 - z^2)} \left[W_{g-1,n+1}(z, z, J) + \sum_{\substack{h_1+h_2=g \\ I_1 \cup I_2 = J}} W_{h_1,1+|I_1|}(z, I_1)W_{h_2,1+|I_2|}(z, I_2) \right]. \quad (\text{A.121})$$

これが Laplace 変換された Mirzakhani 漸化式 (2.295) である。

以上の証明では $(g, n) \neq (0, 3), (1, 1)$ を仮定したが、これらの場合でも上式から計算することができる。以下でそれを示そう。

1. $W_{0,3}$ の場合：Laplace 変換された Mirzakhani 漸化式 (2.295) に $(g, n) = (0, 3)$ を代入すれば、 $W_{0,2}$ の定義式 (2.296) より、

$$\begin{aligned} & \operatorname{Res}_{z \rightarrow 0} \left[\frac{\pi}{\sin(2\pi z)(z_1^2 - z^2)} (W_{0,2}(z, z_2)W_{0,2}(-z, z_3) + W_{0,2}(z, z_3)W_{0,2}(-z, z_2)) \right] \\ &= \operatorname{Res}_{z \rightarrow 0} \left[\frac{\pi}{\sin(2\pi z)(z_1^2 - z^2)} \left(\frac{1}{(z - z_2)^2} \frac{1}{(z + z_3)^2} + \frac{1}{(z - z_3)^2} \frac{1}{(z + z_2)^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{z_1^2 z_2^2 z_3^2} \end{aligned} \quad (\text{A.122})$$

となる。これは、 $W_{0,3}(z_1, z_2, z_3)$ の表式 (2.286) と一致する。したがって、 $(g, n) = (0, 3)$ の場合も漸化式 (2.295) が成立する。

2. $W_{1,1}$ の場合：Laplace 変換された Mirzakhani 漸化式 (2.295) に $(g, n) = (1, 1)$ を代入すれば、 $W_{0,2}$ の定義式 (2.296) より、

$$\begin{aligned} & \operatorname{Res}_{z \rightarrow 0} \frac{\pi}{\sin(2\pi z)(z_1^2 - z^2)} W_{0,2}(z, -z) \\ &= \operatorname{Res}_{z \rightarrow 0} \left[\frac{\pi}{\sin(2\pi z)(z_1^2 - z^2)} \frac{1}{4z^2} \right] \\ &= \frac{3 + 2\pi^2 z^2}{16z^4} \end{aligned} \quad (\text{A.123})$$

となる。これは、 $W_{1,1}(z)$ の表式 (2.287) と一致する。したがって、 $(g, n) = (1, 1)$ の場合も漸化式 (2.295) が成立する。

本節の最後に、無限級数 (A.95) の導出を行う。まず、以下の級数を考えよう：

$$S := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{(-1)^m \sin(2\pi z)}{z - \frac{m}{2}} - \frac{(-1)^m \sin(2\pi z)}{z + \frac{m}{2}} \right). \quad (\text{A.124})$$

さらに、

$$\pi \int_{-1}^1 dx e^{2\pi i(z \pm \frac{m}{2})x} = \frac{(-1)^m \sin(2\pi z)}{z \pm \frac{m}{2}} \quad (\text{A.125})$$

であるから以下のように変形できる：

$$\begin{aligned}
S &= \pi \int_{-1}^1 dx \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(e^{2\pi i(z-\frac{m}{2})x} - e^{2\pi i(z+\frac{m}{2})x} \right) \\
&= \pi \int_{-1}^1 dx e^{2\pi izx} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{e^{-im\pi x}}{m} - \frac{e^{im\pi x}}{m} \right) \\
&= \pi \int_{-1}^1 dx e^{2\pi izx} (-\log(1 - e^{-i\pi x}) + \log(1 - e^{i\pi x})) \\
&= \pi \int_{-1}^1 dx e^{2\pi izx} \log \left(\frac{1 - e^{i\pi x}}{1 - e^{-i\pi x}} \right) \\
&= \pi \int_{-1}^1 dx e^{2\pi izx} \log \left(\frac{e^{-i\pi x} - 1}{1 - e^{-i\pi x}} e^{i\pi x} \right) \\
&= \pi \int_{-1}^1 dx e^{2\pi izx} \log(-e^{i\pi x}). \tag{A.126}
\end{aligned}$$

2 段目から 3 段目の式変形は以下を用いた：

$$\log(1 - z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m}. \tag{A.127}$$

式 (A.126) の最後の積分は

$$\log(-e^{i\pi x}) = \begin{cases} i\pi(x-1) & (0 < x < 1) \\ i\pi(x-1) + 2\pi = \pi(x+1) & (-1 < x < 0) \end{cases} \tag{A.128}$$

に注意すれば⁴⁰

$$\begin{aligned}
S &= \pi \int_{-1}^1 dx e^{2\pi izx} \log(e^{i\pi(1-x)}) = \pi \int_{-1}^0 dx e^{2\pi izx} i\pi(x+1) + \int_0^1 dx e^{2\pi izx} i\pi(x-1) \\
&= \frac{2\pi z - ie^{-2i\pi z} + i}{4z^2} - \frac{-2\pi z - ie^{2i\pi z} + i}{4z^2} \\
&= \frac{\pi}{z} - \frac{\sin(2\pi z)}{2z^2} \tag{A.129}
\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \sin(2\pi z)}{z^2 - (\frac{m}{2})^2} = \frac{\pi}{z} - \frac{\sin(2\pi z)}{2z^2} \tag{A.130}$$

となる。両辺 $\sin(2\pi z)$ で割れば式 (A.95) が得られる。

A.3.5 Laplace 変換された Mirzakhani 漸化式を用いた具体的な計算

本節では Laplace 変換された Mirzakhani 漸化式 (2.295) を用いて、 $W_{0,4}, W_{1,2}, W_{0,5}, W_{2,1}$ を具体的に計算する。

⁴⁰分岐截線を虚軸上にとって積分することに相当する。

$W_{0,4}$ の計算 Laplace 変換された Mirzakhani 漸化式 (2.295) および $W_{0,2}$ の定義式 (2.296), $W_{0,3}$ の表式 (2.286) より,

$$\begin{aligned}
W_{0,4}(z_1, z_2, z_3, z_4) &= \text{Res}_{z \rightarrow 0} \left[\frac{\pi}{\sin(2\pi z)(z_1^2 - z^2)} (W_{0,2}(z, z_2)W_{0,3}(-z, z_3, z_4) + W_{0,3}(z, z_3, z_4)W_{0,2}(-z, z_2)) \right. \\
&\quad + W_{0,2}(z, z_3)W_{0,3}(-z, z_2, z_4) + W_{0,3}(z, z_2, z_4)W_{0,2}(-z, z_3) \\
&\quad + W_{0,2}(z, z_4)W_{0,3}(-z, z_2, z_3) + W_{0,3}(z, z_2, z_3)W_{0,2}(-z, z_4) \left. \right] \\
&= \text{Res}_{z \rightarrow 0} \left[\frac{\pi}{\sin(2\pi z)(z_1^2 - z^2)} \left(\frac{1}{(z - z_2)} \frac{1}{z^2 z_3^2 z_4^2} + \frac{1}{z^2 z_3^2 z_4^2} \frac{1}{(z + z_2)} \right. \right. \\
&\quad + \frac{1}{(z - z_3)} \frac{1}{z^2 z_2^2 z_4^2} + \frac{1}{z^2 z_2^2 z_4^2} \frac{1}{(z + z_3)} \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{(z - z_4)} \frac{1}{z^2 z_2^2 z_3^2} + \frac{1}{z^2 z_2^2 z_3^2} \frac{1}{(z + z_4)} \right) \right] \tag{A.131}
\end{aligned}$$

となる. そこで以下の関数 $f(z)$ の $z = 0$ における留数を計算しよう.

$$f(z) := \frac{\pi}{\sin(2\pi z)(z_1^2 - z^2)} \frac{1}{(z \pm z_i)} \frac{1}{z^2 z_j^2 z_k^2} \tag{A.132}$$

$1/\sin(z) \sim 1/z$ より, $f(z) \sim 1/z^3$ となるから, $z = 0$ は 3 位の極である. したがって

$$\begin{aligned}
\text{Res}_{z \rightarrow 0} f(z) &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz^2} \left(\frac{\pi z}{\sin(2\pi z)(z_1^2 \pm z^2)} \frac{1}{(z - z_i)} \frac{1}{z_j^2 z_k^2} \right) \\
&= \frac{9z_1^2 + 3z_i^2 + 2\pi^2 z_1^2 z_i^2}{6z_1^4 z_i^4 z_j^2 z_k^2} = \frac{9z_1^2 z_j^2 z_k^2 + 3z_i^2 z_j^2 z_k^2 + 2\pi^2 z_1^2 z_i^2 z_j^2 z_k^2}{6z_1^4 z_i^4 z_j^4 z_k^4} \tag{A.133}
\end{aligned}$$

となる. これを式 (A.131) に代入すれば

$$W_{0,4}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{6(z_1^2 z_2^2 z_3^2 + z_1^2 z_2^2 z_4^2 + z_1^2 z_3^2 z_4^2 + z_2^2 z_3^2 z_4^2) + 4\pi^2 z_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^2}{2z_1^4 z_2^4 z_3^4 z_4^4} \tag{A.134}$$

を得る.

$W_{1,2}$ の計算 Laplace 変換された Mirzakhani 漸化式 (2.295) および $W_{0,2}$ の定義式 (2.296), $W_{0,3}$ の表式 (2.286), $W_{1,1}$ の表式 (2.286) より,

$$\begin{aligned}
W_{1,2}(z_1, z_2) &= \text{Res}_{z \rightarrow 0} \left[\frac{\pi}{\sin(2\pi z)(z_1^2 - z^2)} (W_{0,3}(z, -z, z_2) + W_{0,2}(z, z_2)W_{1,1}(-z) + W_{1,1}(z)W_{0,2}(z, z_2)) \right] \\
&= \text{Res}_{z \rightarrow 0} \left[\frac{\pi}{\sin(2\pi z)(z_1^2 - z^2)} \left(\frac{1}{z^4 z_2^2} + \frac{3 + 2\pi^2}{24z^4(z - z_2)^2} + \frac{3 + 2\pi^2}{24z^4(z + z_2)^2} \right) \right] \\
&= \frac{5(z_1^4 + z_2^4) + 3z_1^2 z_2^2 + 4\pi^2(z_1^4 z_2^2 + z_1^2 z_2^4) + 2\pi^2 z_1^4 z_2^4}{8z_1^6 z_2^6} \tag{A.135}
\end{aligned}$$

となる.

$W_{0,5}$ の計算 Laplace 変換された Mirzakhani 漸化式 (2.295) および, $W_{0,2}$ の定義式 (2.296), $W_{0,3}$ の表式 (2.286), $W_{0,4}$ の表式 (2.288) より,

$$\begin{aligned} W_{0,5}(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) &= \text{Res}_{z \rightarrow 0} \left[\frac{\pi}{\sin(2\pi z)(z_1^2 - z^2)} \left(\sum_{i=2}^5 W_{0,2}(z, z_i) W_{0,4}(-z, I \setminus \{z_i\}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \sum_{i=2}^5 W_{0,4}(-z, I \setminus \{z_i\}) W_{0,2}(-z, z_i) + \sum_{2 \leq i < j \leq 5} W_{1,1}(z, z_i, z_j) W_{1,1}(-z, I \setminus \{z_i, z_j\}) \right) \right] \\ &= \frac{1}{z_1^6 z_2^6 z_3^6 z_4^6 z_5^6} \left[15 \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq 5} z_i^4 z_j^4 z_k^4 z_l^4 + 18 \sum_{1 \leq i < j \leq 5} z_i^2 z_j^2 \prod_{k \neq i, j} z_k^4 \right. \\ &\quad \left. + 18\pi^2 \sum_{i=1}^5 z_i^2 \prod_{i \neq j} z_j^4 + 10\pi^4 z_1^4 z_2^4 z_3^4 z_4^4 z_5^4 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.136})$$

となる. ここで $I := \{z_2, z_3, z_4, z_5\}$ とした.

$W_{2,1}$ の計算 Laplace 変換された Mirzakhani 漸化式 (2.295) および, $W_{0,2}$ の定義式 (2.296), $W_{0,3}$ の表式 (2.286), $W_{1,1}$ の表式 (2.286) より,

$$\begin{aligned} W_{2,1}(z_1) &= \text{Res}_{z \rightarrow 0} \left[\frac{\pi}{\sin(2\pi z)(z_1^2 - z^2)} (W_{1,2}(z, -z) + W_{1,1}(z) W_{1,1}(-z)) \right] \\ &= \text{Res}_{z \rightarrow 0} \left[\frac{\pi}{\sin(2\pi z)(z_1^2 - z^2)} \left(\frac{13z^4 + 8\pi^2 z^6 + 2\pi^4 z^8}{8z^{12}} + \left(\frac{3 + 2\pi^2 z^2}{24z^4} \right)^2 \right) \right] \\ &= \frac{1575 + 2030\pi^2 z^2 + 1390\pi^4 z^4 + 676\pi^6 z^6 + 290\pi^8 z^8}{1920z^{10}} \end{aligned} \quad (\text{A.137})$$

となる.

A.4 式 (2.294) の導出

ここでは積分計算 (2.294) を行う:

$$I := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty d\beta e^{\beta E - \frac{b^2}{4\beta}}. \quad (\text{A.138})$$

ここで $E < 0$ であることに注意されたい.

準備として以下の積分を考えよう:

$$I_\pm := \frac{1}{\sqrt{-\pi E}} \int_0^\infty d\beta \left(\frac{\sqrt{-E}}{2\sqrt{\beta}} \mp \frac{b}{4\beta\sqrt{\beta}} \right) \exp \left[- \left(\sqrt{-E}\beta \pm \frac{b}{2\sqrt{\beta}} \right)^2 \pm b\sqrt{-E} \right]. \quad (\text{A.139})$$

この積分は適当な変数変換で Gauss 積分に帰着できる. まず, I_- の方は $x_- := \sqrt{-E}\beta - \frac{b}{2\sqrt{\beta}}$ と変換すれば良い. このとき, 関数 $x_-(\beta)$ は単調増加関数であるから積分区間 $\beta \in [0, \infty)$ は $x_- \in (-\infty, \infty)$ となり,

$$dx_- = \left(\frac{\sqrt{-E}}{2\sqrt{\beta}} + \frac{b}{4\beta\sqrt{\beta}} \right) d\beta \quad (\text{A.140})$$

であるから,

$$I_- = \frac{e^{-b\sqrt{-E}}}{\sqrt{-\pi E}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_- e^{-x_-^2} = \frac{e^{-b\sqrt{-E}}}{\sqrt{-\pi E}} \sqrt{\pi} = \frac{e^{-b\sqrt{-E}}}{\sqrt{-E}} \quad (\text{A.141})$$

となる. 一方, I_+ の方は $x_+ := \sqrt{-E}\beta + \frac{b}{2\sqrt{\beta}}$ と変換する. このとき

$$dx_+ = \frac{\sqrt{-E}}{2\sqrt{\beta}} - \frac{b}{4\beta\sqrt{\beta}} \quad (\text{A.142})$$

である. しかし, 関数 $x_+(\beta)$ は $\beta = \frac{b}{2\sqrt{-E}}$ で極小値 $x_+ = \sqrt{2b\sqrt{-E}}$ を取る下に凸な関数なので, 変数変換にもなって積分区間は以下のようになる:

$$I_+ = \frac{e^{b\sqrt{-E}}}{\sqrt{-\pi E}} \left[\int_{\sqrt{2b\sqrt{-E}}}^{\infty} dx_+ + \int_{\infty}^{\sqrt{2b\sqrt{-E}}} dx_+ \right] e^{-x_+^2} = 0. \quad (\text{A.143})$$

ところで,

$$-\left(\sqrt{-E}\beta \pm \frac{b}{2\sqrt{\beta}}\right)^2 \pm b\sqrt{-E} = \beta E - \frac{b^2}{4\beta} \quad (\text{A.144})$$

であることと I_{\pm} の定義より,

$$I_+ + I_- = \frac{2}{\sqrt{-\pi E}} \int_0^{\infty} d\beta \frac{\sqrt{-E}}{2\sqrt{\beta}} e^{\beta E - \frac{b^2}{4\beta}} = 2I \quad (\text{A.145})$$

である. したがって,

$$I = \frac{e^{-b\sqrt{-E}}}{2\sqrt{-E}}. \quad (\text{A.146})$$

A.5 行列微分の公式集

本節では行列に関する微分公式をまとめる. $N \times N$ 行列 $J = (J_{ij})_{i,j=1}^N$ に対して, 以下の微分公式が成り立つ:

$$\frac{\partial}{\partial J_{ji}} e^{\frac{1}{2N} \text{Tr}[J^2]} = \frac{1}{N} J_{ij} e^{\frac{1}{2N} \text{Tr}[J^2]} \quad (\text{A.147})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial J_{ji} \partial J_{lk}} e^{\frac{1}{2N} \text{Tr}[J^2]} = \frac{1}{N} \left(\delta_{il} \delta_{jk} + \frac{1}{N} J_{ij} J_{kl} \right) e^{\frac{1}{2N} \text{Tr}[J^2]} \quad (\text{A.148})$$

$$\frac{\partial^3}{\partial J_{ji} \partial J_{lk} \partial J_{nm}} e^{\frac{1}{2N} \text{Tr}[J^2]} = \frac{1}{N^2} \left(\delta_{il} \delta_{jk} J_{mn} + \delta_{in} \delta_{jm} J_{kl} + \delta_{kn} \delta_{lm} J_{ij} + \frac{1}{N} J_{ij} J_{kl} J_{mn} \right) e^{\frac{1}{2N} \text{Tr}[J^2]} \quad (\text{A.149})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4}{\partial J_{j_1 i_1} \partial J_{j_2 i_2} \partial J_{j_3 i_3} \partial J_{j_4 i_4}} e^{\frac{1}{2N} \text{Tr}[J^2]} &= \left[\frac{1}{N^2} (\delta(1,2)\delta(3,4) + \delta(1,3)\delta(2,4) + \delta(1,4)\delta(2,3)) \right. \\ &\quad + \frac{1}{N^3} (\delta(1,2)J(3)J(4) + \delta(1,3)J(2)J(4) + \delta(1,4)J(2)J(3)) \\ &\quad \left. + \frac{1}{N^4} J(1)J(2)J(3)J(4) \right] e^{\frac{1}{2N} \text{Tr}[J^2]} \end{aligned} \quad (\text{A.150})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^5}{\partial J_{j_1 i_1} \partial J_{j_2 i_2} \partial J_{j_3 i_3} \partial J_{j_4 i_4} \partial J_{j_5 i_5}} e^{\frac{1}{2N} \text{Tr}[J^2]} &= \left[\frac{1}{N^3} (\delta(1,2)\delta(3,4)J(5) + \dots) \right. \\ &\quad + \frac{1}{N^4} (\delta(1,2)J(3)J(4)J(5) + \dots) \\ &\quad \left. + \frac{1}{N^5} J(1)J(2)J(3)J(4)J(5) \right] e^{\frac{1}{2N} \text{Tr}[J^2]} \end{aligned} \quad (\text{A.151})$$

ここで $H = (H_{ij})_{i,j=1}^N$ は J によらない $N \times N$ 行列である. また, $J(a) = J_{i_a j_a}$, $\delta(a,b) = \delta_{i_a j_b} \delta_{j_a i_b}$ と略記し, \dots と略した部分には直前の項における $1, 2, 3, 4, 5$ の位置を入れ替えてできる項を重複なしに並べたものが入る. 以下導出を記す.

1. 式 (A.147) の証明

$\text{Tr}[J^2] = \sum_{a,b=1}^N J_{ab}J_{ba}$ より,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial J_{ji}} e^{\frac{1}{2N} \text{Tr}[J^2]} &= \frac{\partial}{\partial J_{ji}} \exp \left[\frac{1}{2N} \sum_{a,b=1}^N J_{ab}J_{ba} \right] \\
&= \exp \left[\frac{1}{2N} \sum_{a,b=1}^N J_{ab}J_{ba} \right] \times \frac{1}{2N} \sum_{a,b=1}^N \left(\frac{\partial J_{ab}}{\partial J_{ji}} J_{ba} + J_{ab} \frac{\partial J_{ba}}{\partial J_{ji}} \right) \\
&= \exp \left[\frac{1}{2N} \sum_{a,b=1}^N J_{ab}J_{ba} \right] \times \frac{1}{2N} \sum_{a,b=1}^N (\delta_{ja}\delta_{ib}J_{ba} + J_{ab}\delta_{jb}\delta_{ia}) \\
&= \exp \left[\frac{1}{2N} \sum_{a,b=1}^N J_{ab}J_{ba} \right] \times (J_{ij} + J_{ij}) \\
&= \frac{1}{N} J_{ij} e^{\frac{1}{2N} \text{Tr}[J^2]}.
\end{aligned}$$

2. 式 (A.148) の証明

前段の公式より,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial J_{ji}\partial J_{lk}} e^{\frac{1}{2N} \text{Tr}[J^2]} &= \frac{\partial}{\partial J_{lk}} \left(\frac{1}{N} J_{ij} e^{\frac{1}{2N} \text{Tr}[J^2]} \right) \\
&= \frac{1}{N} \frac{\partial J_{ij}}{\partial J_{lk}} e^{\frac{1}{2N} \text{Tr}[J^2]} + \frac{1}{N} J_{ij} \frac{\partial}{\partial J_{lk}} e^{\frac{1}{2N} \text{Tr}[J^2]} \\
&= \left(\frac{1}{N} \delta_{il}\delta_{jk} + \frac{1}{N^2} J_{ij}J_{kl} \right) e^{\frac{1}{2N} \text{Tr}[J^2]}.
\end{aligned}$$

3. 式 (A.149), (A.150), (A.151) の証明

前段の公式より,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^3}{\partial J_{ji}\partial J_{lk}\partial J_{nm}} e^{\frac{1}{2N} \text{Tr}[J^2]} \\
&= \frac{\partial}{\partial J_{nm}} \left[\left(\frac{1}{N} \delta_{il}\delta_{jk} + \frac{1}{N^2} J_{ij}J_{kl} \right) e^{\frac{1}{2N} \text{Tr}[J^2]} \right] \\
&= \frac{1}{N} \delta_{il}\delta_{jk} \frac{\partial}{\partial J_{nm}} e^{\frac{1}{2N} \text{Tr}[J^2]} + \frac{1}{N^2} \frac{\partial J_{ij}}{\partial J_{nm}} J_{kl} e^{\frac{1}{2N} \text{Tr}[J^2]} + \frac{1}{N^2} J_{ij} \frac{\partial J_{kl}}{\partial J_{nm}} e^{\frac{1}{2N} \text{Tr}[J^2]} + \frac{1}{N^2} J_{ij}J_{kl} \frac{\partial}{\partial J_{nm}} e^{\frac{1}{2N} \text{Tr}[J^2]} \\
&= \frac{1}{N^2} \delta_{il}\delta_{jk} J_{mn} e^{\frac{1}{2N} \text{Tr}[J^2]} \frac{1}{N^2} \delta_{in}\delta_{jm} J_{kl} e^{\frac{1}{2N} \text{Tr}[J^2]} + \frac{1}{N^2} J_{ij} \delta_{kn} \delta_{lm} e^{\frac{1}{2N} \text{Tr}[J^2]} + \frac{1}{N^2} J_{ij}J_{kl} \frac{1}{N} J_{mn} e^{\frac{1}{2N} \text{Tr}[J^2]} \\
&= \frac{1}{N^2} \left(\delta_{il}\delta_{jk}J_{mn} + \delta_{in}\delta_{jm}J_{kl} + \delta_{kn}\delta_{lm}J_{ij} + \frac{1}{N} J_{ij}J_{kl}J_{mn} \right) e^{\frac{1}{2N} \text{Tr}[J^2]}.
\end{aligned}$$

式 (A.150), (A.151) も同様にして証明できる。

A.6 Van der Monde 行列式

本節ではランダム行列の積分測度 (3.3) を固有値積分 (3.59), (3.60) に書き換える方法を解説する。いくつかの証明方法が知られているが、ここではゲージ理論における Faddeev-Popov の方法を真似る証明について解説する。

まず、積分測度 (3.3) が $U(N)$ 変換 $H \mapsto HU$ で不変であることを示す。ユニタリ行列 $H = (H_{ij})_{i,j=1}^N \in U(N)$ および、行列 $H = (H_{ij})_{i,j=1}^N$ の行を一つ固定しよう。 $U(N)$ 変換 $H \mapsto HU$ で第 i 行 $(H_{ij})_{j=1}^N$ は以下のように変換される：

$$H_{ij} \mapsto H'_{ij} = H_{ik}U_{kj}. \quad (\text{A.152})$$

したがって、この変換に対する第 i 行 $(H_{ij})_{j=1}^N$ の Jacobian は

$$\left| \det \left(\frac{\partial H'_{ij}}{\partial H_{ik}} \right) \right| = |\det U_{kj}| = 1 \quad (\text{A.153})$$

となる。よって、積分測度 dH_{ij} の第 i 行は $U(N)$ 変換で不変である。したがって積分測度全体も $U(N)$ 変換で不変である。特に、相似変換 $H \mapsto H^U := U^\dagger M U$ で不変である：

$$dH = dH^U. \quad (\text{A.154})$$

ここで $\text{Tr}[H^n] = \text{Tr}[(H^U)^n]$ であるから $\text{Tr}[V(H)] = \text{Tr}[V(H^U)]$ となることから、ランダム行列の分配関数 (3.2) は相似変換 $H \mapsto U^\dagger M U$ で不変である：

$$\int dH e^{-N \text{Tr}[V(H)]} = \int dH^U e^{-N \text{Tr}[V(H^U)]}. \quad (\text{A.155})$$

この変換 $H \mapsto H^U$ を $U(N)$ ゲージ変換だとみなせば、分配関数 Z は $U(N)$ ゲージ場 H の分配関数である。以下、ゲージ場 H のゲージ変換を

$$H^U := U^\dagger H U \quad (\text{A.156})$$

と書く。これを無限小ゲージ変換すると、

$$H^U \rightarrow (1 - \delta U) H^U (1 + \delta U) = H^U + [H^U, \delta U] + O(\delta U^2) \quad (\text{A.157})$$

となる。ここで δU は各成分が無限小の反エルミート行列である⁴¹。変換分を δM^U と書こう。ゲージ固定条件

$$H^U - \Lambda = 0, \quad (\Lambda := \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)) \quad (\text{A.158})$$

を課す。すると、この条件の元では

$$(\delta H^U)_{ij} = ([\Lambda, \delta U])_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j) \delta U_{ij} \quad (\text{A.159})$$

となる。したがって、Faddeev-Popov 行列式 $\Delta^2(\Lambda)$ は

$$\Delta^2(\Lambda) := \det \left[\frac{\delta H^U}{\delta U} \right] = \det(\lambda_i - \lambda_j) = \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \quad (\text{A.160})$$

となる。なお、上式は以下のようにも書ける：

$$\det(\lambda_i - \lambda_j) = \det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{N-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_N & \lambda_N^2 & \cdots & \lambda_N^{N-1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.161})$$

⁴¹これは $U(N)$ の生成子が反エルミート行列であることから従う。これは、次のようにして示せる。 $U \in U(N)$ を生成子 δU を用いて、 $U = \exp(t\delta U)$ ($t \in \mathbb{R}$) と書く。ユニタリ行列の条件 $U^\dagger = U^{-1}$ より、 $\exp(t\delta U^\dagger) = \exp(-t\delta U)$ である。したがって $\delta U^\dagger = -\delta U$ であるから、生成子 δU は反エルミート行列である。

左辺を Van der Monde 行列式と呼ぶ.

通常の場合の理論における Faddeev-Popov の方法を用いれば, Faddeev-Popov 行列式 $\Delta^2(\Lambda) = \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2$ を使って分配関数 \mathcal{Z} を固有値積分に変形することができる. 以下でこれを詳しく解説しよう. まず, 以下の恒等式が成り立つ:

$$\int dU \delta(H^U - \Lambda) \Delta^2(\Lambda) = 1. \quad (\text{A.162})$$

これは次のようにして証明できる:

$$\begin{aligned} \int_{U(N)} dU \delta(H^U - \Lambda) \Delta^2(\Lambda) &= \int_{U(N)} dU \delta(H^U - \Lambda) \det \left[\frac{\delta H^U}{\delta U} \right] \\ &= \int_{U(N)} dH^U \delta(H^U - \Lambda) \\ &= 1. \end{aligned}$$

1 段目から 2 段目の式変形には変数変換 $U \rightarrow H^U$ を行い, 2 段目から 3 段目の式変形には δ 関数の規格化条件を用いた. またユニタリ行列 U の積分測度は Haar 測度で定義した⁴². 以上の恒等式 (A.162) を分配関数 \mathcal{Z} の表式 (3.2) に挿入すれば,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &:= \int_{U(N)} dU \int_{H(N)} dH \delta(H^U - \Lambda) \Delta^2(\Lambda) e^{-N \text{Tr}[V(H)]} \\ &= \int_{U(N)} dU \int_{H(N)} dH^U \delta(H^U - \Lambda) \Delta^2(\Lambda) e^{-N \text{Tr}[V(H^U)]} \\ &= \int_{U(N)} dU \int_{H(N)} dH \delta(H - \Lambda) \Delta^2(\Lambda) e^{-N \text{Tr}[V(\Lambda)]} \\ &= \int d\Lambda \Delta^2(\Lambda) e^{-N \text{Tr}[V(\Lambda)]} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^N d\lambda_i \right) \Delta^2(\Lambda) e^{-N \sum_{i=1}^N V(\lambda_i)} \end{aligned} \quad (\text{A.163})$$

となる. 1 段目から 2 段目の式変形は分配関数の $U(N)$ 不変性 (A.155) を用いて, 2 段目から 3 段目で $H^U = H$ と書き直した. 最後の 3 段目から 4 段目の式変形は Haar 測度の定義の一つである規格化条件 $\int dU = 1$ を用いた.

A.7 Hilbert の公式 (3.75) の証明

本節では Hilbert の公式 (3.75) を導く. まず, 式 (3.75) の左辺において $z := x \mp i\epsilon$ と変数変換すれば

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{f(x)}{x - (p \pm i\epsilon)} = \int_{-\infty \pm i\epsilon}^{+\infty \pm i\epsilon} dz \frac{f(z \pm i\epsilon)}{z - p} \quad (\text{A.164})$$

となる. この左辺の積分路を次のように変形する:

$$\int_{-\infty \pm i\epsilon}^{+\infty \pm i\epsilon} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty \pm i\epsilon}^{p-\delta} + \int_{p+\delta}^{+\infty \pm i\epsilon} + \int_{C_{\pm\delta}}. \quad (\text{A.165})$$

ここで $C_{+\delta}$ は半径 δ で中心 $z = a$ の円の上半分を時計周りする経路で, $C_{-\delta}$ は半径 δ で中心 $z = a$ の円の下半分を反時計周りする経路である (図 31). ここで,

⁴²Haar 測度 dU は以下の 3 条件を満たす測度として定義される: (1) **右不変性・左不変性**: 任意の $V \in U(N)$ に対して, $d(UV) = d(VU) = dU$. (2) **線形性**: 任意の定数 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ および任意の関数 $f, g: U \rightarrow \mathbb{C}$ に対して $\int dU (\alpha f(U) + \beta g(U)) = \alpha \int dU f(U) + \beta \int dU g(U)$. (3) **規格化**: $\int dU = 1$.

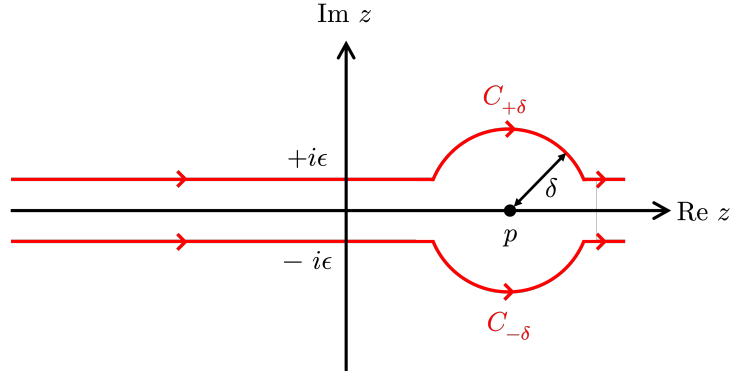


図 31: 積分経路 $\int_{-\infty \pm i\epsilon}^{p-\delta} + \int_{p+\delta}^{+\infty \pm i\epsilon} + \int_{C_{\pm\delta}}$

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_{\pm\delta}} dz \frac{f(z \pm i\epsilon)}{z - p} &= \pm \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^\pi i\delta e^{i\theta} d\theta \frac{f(\delta e^{i\theta} + a \pm i\epsilon)}{\delta e^{i\theta}} \\ &= \pm i \int_0^\pi d\theta \lim_{\delta \rightarrow 0} f(\delta e^{i\theta} + a \pm i\epsilon) = \pm i \int_0^\pi f(a) = \pm i\pi f(a) \end{aligned} \quad (\text{A.166})$$

である。途中 $z = \delta e^{i\theta} + a$ と変数変換した。また、

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty \pm i\epsilon}^{p-\delta} \frac{f(x)}{x - (p \pm i\epsilon)} + \int_{p+\delta}^{+\infty \pm i\epsilon} \frac{f(x)}{x - (p \pm i\epsilon)} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{p-\delta} \frac{f(x)}{x - p} + \int_{p+\delta}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - p} =: \mathcal{P} \int \frac{f(x)}{x - p} \quad (\text{A.167})$$

であるから、式 (3.75) が導かれる。

A.8 Resolvent(3.77) の計算

ここでは式 (3.76), (3.78) を用いて式 (3.77) の計算を行う。最初に、以下のような関数を考えよう：

$$F(\lambda) := \frac{R_{0,1}(\lambda)}{\lambda - E} \sqrt{\frac{\sigma(E)}{\sigma(\lambda)}}. \quad (\text{A.168})$$

これは、 $\lambda = E$ が 1 位の極であって⁴³、その留数は以下ようになる：

$$\text{Res}_{\lambda \rightarrow E} F(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow E} (\lambda - E) \frac{R_{0,1}(\lambda)}{\lambda - E} \sqrt{\frac{\sigma(E)}{\sigma(\lambda)}} = R_{0,1}(E). \quad (\text{A.169})$$

したがって、留数定理より以下の等式が成り立つ：

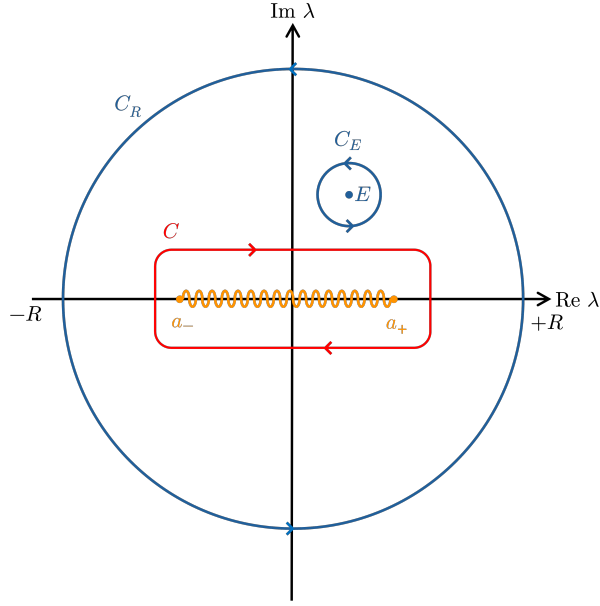
$$R_{0,1}(E) = \oint_{C_E} \frac{d\lambda}{2\pi i} \frac{R_{0,1}(\lambda)}{\lambda - E} \sqrt{\frac{\sigma(E)}{\sigma(\lambda)}}. \quad (\text{A.170})$$

ここで \oint_{C_E} は $\lambda = E$ を反時計周りに回る経路についての積分である (図 33)。ただし E は分岐截断 $[a_-, a_+]$ 上にないものとする。

この経路 C_E は分岐截断 $[a_-, a_+]$ を時計周りに回る経路 C に変形することができる (図 32)。それをみるために、原点中心で半径 R の円を反時計周りに回る経路を C_R としよう。留数定理を考えれば

$$\oint_{C_E} = \oint_C + \oint_{C_R} \quad (\text{A.171})$$

⁴³ $z = a_{\pm}$ は分岐点であることに注意されたい。

図 32: 経路 C, C, C_R

である。しかし、 $|\lambda| \rightarrow \infty$ において、resolvent の定義 $R(E) := \text{Tr}[1/(E - H)]$ より $R_{0,1}(E) \sim 1/E$ であるから $F(\lambda) \sim 1/\lambda^2$ となる。したがって、

$$\left| \oint_{C_R} F(\lambda) \right| \leq \frac{1}{R^2} \times 2\pi R \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty) \quad (\text{A.172})$$

となる。よって、 C_R の半径を無限大に取れば以下が従う。

$$\oint_{C_E} = \oint_C. \quad (\text{A.173})$$

さらに、この経路 C を図 33 の経路 $ABCD$ に変形しよう：

$$\oint_C \rightarrow \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA}. \quad (\text{A.174})$$

この内、式 (A.172) と同様の議論によって経路 BC, DA に関する積分は 0 となるので、経路 AB, CD に関する積分を考えれば良い。経路 AB に関する積分は

$$\int_{AB} \frac{d\lambda}{2\pi i} \frac{R_{0,1}(\lambda)}{\lambda - E} \sqrt{\frac{\sigma(E)}{\sigma(\lambda)}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{2\pi i} \frac{R_{0,1}(\lambda + i\epsilon)}{\lambda + i\epsilon - E} \sqrt{\frac{\sigma(E)}{\sigma(\lambda + i\epsilon)}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{2\pi i} \frac{R_{0,1}(\lambda + i\epsilon)}{\lambda - E} \sqrt{\frac{\sigma(E)}{\sigma(\lambda)}} \quad (\text{A.175})$$

となる。同様に経路 CD に関する積分は

$$\int_{CD} \frac{d\lambda}{2\pi i} \frac{R_{0,1}(\lambda)}{\lambda - E} \sqrt{\frac{\sigma(E)}{\sigma(\lambda)}} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{2\pi i} \frac{R_{0,1}(\lambda - i\epsilon)}{\lambda - i\epsilon - E} \sqrt{\frac{\sigma(E)}{\sigma(\lambda - i\epsilon)}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{2\pi i} \frac{R_{0,1}(\lambda - i\epsilon)}{\lambda - E} \sqrt{\frac{\sigma(E)}{\sigma(\lambda)}} \quad (\text{A.176})$$

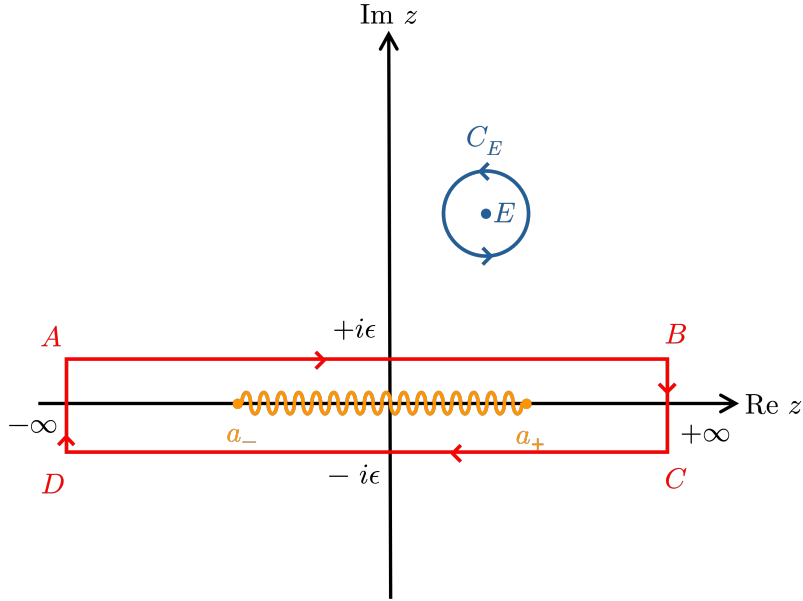


図 33: 経路 C_E および経路 $ABCD$

となる．ここで，最後の式変形は分岐点を回る時に $\sqrt{\sigma(\lambda)}$ の符号が反転することを用いた．よって

$$\begin{aligned}
 R_{0,1}(E) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{2\pi i} \frac{R_{0,1}(\lambda + i\epsilon) + R_{0,1}(\lambda - i\epsilon)}{\lambda - E} \sqrt{\frac{\sigma(E)}{\sigma(\lambda)}} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{2\pi i} \frac{V'(\lambda)}{\lambda - E} \sqrt{\frac{\sigma(E)}{\sigma(\lambda)}} \\
 &= \frac{1}{2} \int_C \frac{d\lambda}{2\pi i} \frac{V'(\lambda)}{\lambda - E} \sqrt{\frac{\sigma(E)}{\sigma(\lambda)}} \\
 &= \frac{1}{2} \int_{C_E} \frac{d\lambda}{2\pi i} \frac{V'(\lambda)}{\lambda - E} \sqrt{\frac{\sigma(E)}{\sigma(\lambda)}} \tag{A.177}
 \end{aligned}$$

となる．1 段目から 2 段目の式変形は式 (3.76) を，2 段目から 3 段目の式変形は上で経路 C から式 (A.175),(A.176) への変形と同様のことを行った．

A.9 Resolvent(3.91) の導出

ここでは式 (3.90) を用いて式 (3.91) を導く．最初に，以下のような関数を考えよう：

$$F(\lambda) := \frac{R_{0,2}(\lambda, E_2)}{\lambda - E_1} \sqrt{\sigma(\lambda)}. \tag{A.178}$$

これは， $\lambda = E_1$ が 1 位の極であって，その留数は以下のようになる⁴⁴：

$$\operatorname{Res}_{\lambda \rightarrow E_1} F(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow E_1} (\lambda - E_1) \frac{R_{0,2}(\lambda, E_2)}{\lambda - E_1} \sqrt{\sigma(\lambda)} = R_{0,2}(E_1, E_2) \sqrt{\sigma(E_1)}. \tag{A.179}$$

したがって，留数定理より以下の等式が成り立つ：

$$R_{0,2}(E_1, E_2) \sqrt{\sigma(E_1)} = \oint_{C_E} \frac{d\lambda}{2\pi i} \frac{R_{0,2}(\lambda, E_2)}{\lambda - E_1} \sqrt{\sigma(\lambda)}. \tag{A.180}$$

⁴⁴ $z = a_{\pm}$ は分岐点であることに注意されたい．また， $R_{0,2}(\lambda, E_2)$ が分岐点以外で正則であることを仮定した．

ここで \oint_{C_E} は $\lambda = E_1, E_2$ を反時計周りに回る経路（ただし分岐截断 $[a_-, a_+]$ を含まないもの）についての積分である．前節と同様の積分経路の変形および式 (3.90) を用いることで，

$$\begin{aligned} R_{0,2}(E_1, E_2)\sqrt{\sigma(E_1)} &= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{2\pi i} \frac{R_{0,2}(\lambda + i\epsilon, E_2) + R_{0,2}(\lambda - i\epsilon, E_2)}{\lambda - E_1} \sqrt{\sigma(\lambda)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{2\pi i} \frac{1}{(\lambda - E_1)(\lambda - E_2)^2} \sqrt{\sigma(\lambda)} \\ &= -\frac{1}{2} \oint_{C_E} \frac{d\lambda}{2\pi i} \frac{1}{(\lambda - E_1)(\lambda - E_2)^2} \sqrt{\sigma(\lambda)} \end{aligned} \quad (\text{A.181})$$

を得る．最後の被積分関数を $G(\lambda)$ と書けば， $\lambda = E_1$ が 1 位の極で $\lambda = E_2$ が 2 位の極であって，その留数はそれぞれ以下ようになる：

$$\begin{aligned} \text{Res}_{\lambda \rightarrow E_1} G(\lambda) &= \lim_{\lambda \rightarrow E_1} (\lambda - E_1) \frac{1}{(\lambda - E_1)(\lambda - E_2)^2} \sqrt{\sigma(\lambda)} \\ &= \frac{\sqrt{\sigma(E_1)}}{(E_1 - E_2)^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.182})$$

$$\begin{aligned} \text{Res}_{\lambda \rightarrow E_2} G(\lambda) &= \lim_{\lambda \rightarrow E_2} \frac{d}{d\lambda} (\lambda - E_2)^2 \frac{1}{(\lambda - E_1)(\lambda - E_2)^2} \sqrt{\sigma(\lambda)} \\ &= -\frac{E_1 E_2 - (a_+ + a_-)(E_1 + E_2)/2 + a_+ a_-}{(E_1 - E_2)^2 \sqrt{\sigma(E_2)}}. \end{aligned} \quad (\text{A.183})$$

したがって，式 (A.181) の最後の複素積分が留数定理によって実行できて，

$$R_{0,2}(E_1, E_2)\sqrt{\sigma(E_1)} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{\sigma(E_1)}}{(E_1 - E_2)^2} - \frac{E_1 E_2 - (a_+ + a_-)(E_1 + E_2)/2 + a_+ a_-}{(E_1 - E_2)^2 \sqrt{\sigma(E_2)}} \right] \quad (\text{A.184})$$

となる．両辺を $\sqrt{\sigma(E_1)}$ で割って整理すれば，式 (3.91) を得る．

A.10 分配和 (3.98) の導出

ここでは resolvent(3.97) を逆 Laplace 変換をすると分配和 (3.98) を得ることを導出する．ただし，resolvent(3.97) の逆 Laplace 変換を直接行うのは難しいので，分配和 (3.98) を Laplace 変換することで resolvent(3.97) が導かれることを示す．すなわち，以下の積分を計算する：

$$I := \int_0^{\infty} d\beta_1 \int_0^{\infty} d\beta_2 e^{\beta_1 E_1 + \beta_2 E_2} \frac{\sqrt{\beta_1 \beta_2}}{2\pi(\beta_1 + \beta_2)} \quad (\text{A.185})$$

ここで $E < 0$ であることに注意されたい．

まず，変数変換

$$\sqrt{-\beta_1 E_1} = r \cos \theta, \quad \sqrt{-\beta_2 E_2} = r \sin \theta, \quad (\text{A.186})$$

$$\int_0^{\infty} d\beta_1 \int_0^{\infty} d\beta_2 = \int_0^{\infty} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{4r^3 \sin \theta \cos \theta}{E_1 E_2} \quad (\text{A.187})$$

を行えば，

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{\pi \sqrt{E_1 E_2}} \int_0^{\infty} dr r^3 e^{-r^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{(\cos \theta \sin \theta)^2}{(-E_2) \cos^2 \theta + (-E_1) \sin^2 \theta} \\ &= \frac{1}{\pi \sqrt{E_1 E_2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{(\cos \theta \sin \theta)^2}{(-E_2) \cos^2 \theta + (-E_1) \sin^2 \theta} \end{aligned} \quad (\text{A.188})$$

となる。したがって、以下の積分を計算すればよい：

$$J := \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{(\cos \theta \sin \theta)^2}{(-E_2) \cos^2 \theta + (-E_1) \sin^2 \theta}. \quad (\text{A.189})$$

この積分は以下のようにして有理関数の積分に帰着できる：

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \left(\frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \right)^2 \frac{\tan^2 \theta}{(-E_2) + (-E_1) \tan^2 \theta} \\ &= \int_0^{\infty} dt \left(\frac{1}{t^2 + 1} \right)^2 \frac{t^2}{(-E_2) + (-E_1)t^2} \\ &= \int_0^{\infty} dt \left[\frac{A}{(-E_2) + (-E_1)t^2} + \frac{B}{1 + t^2} + \frac{C}{(1 + t^2)^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.190})$$

途中、 $t = \tan \theta$ と変数変換した。また、最後の部分分数分解の係数は以下で与えられる：

$$A := \frac{-E_1 E_2}{((-E_1) - (-E_2))^2} \quad B := \frac{-E_2}{((-E_1) - (-E_2))^2} \quad C := \frac{(-E_1) - (-E_2)}{((-E_1) - (-E_2))^2} \quad (\text{A.191})$$

ここで式 (A.190) の第 1 項は

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dt \frac{A}{(-E_2) + (-E_1)t^2} &= \frac{A}{(-E_2)} \int_0^{\infty} dt \frac{1}{1 + (E_1/E_2)t^2} \\ &= \frac{A}{(-E_2)} \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \int_0^{\infty} dt \frac{1}{1 + t^2} \\ &= \frac{A}{\sqrt{E_1 E_2}} \int_0^{\infty} dt \frac{1}{1 + t^2} \end{aligned} \quad (\text{A.192})$$

と簡略化される。最後、 $\sqrt{(E_1/E_2)}t \rightarrow t$ と置き直した。したがって、式 (A.190) は

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} dt \left[\left(\frac{A}{\sqrt{E_1 E_2}} + B \right) \frac{1}{1 + t^2} + \frac{C}{(1 + t^2)^2} \right] \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(\frac{A}{\sqrt{E_1 E_2}} + B \right) + C \cos^2 \theta \right] \\ &= \left(\frac{A}{\sqrt{E_1 E_2}} + B \right) \frac{\pi}{2} + \frac{C\pi}{4} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{-E_1} + \sqrt{-E_2})^2} \frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad (\text{A.193})$$

となる。1 段目から 2 段目は再び $t = \tan \theta$ と変数変換した。

よって、以下を得る：

$$I = \frac{J}{\pi \sqrt{E_1 E_2}} = \frac{1}{4 \sqrt{E_1 E_2} (\sqrt{-E_1} + \sqrt{-E_2})^2}. \quad (\text{A.194})$$

したがって、分配和 (3.98) を Laplace 変換したものは resolvent (3.97) に一致する。

B BF formulation

本節では JT 重力と BF ゲージ理論の対応 [6, 25–27] を解説する.

B.1 Riemann 幾何の復習

まずは Riemann 幾何の復習をしておく. 接続形式, 曲率形式を導入することで, Riemann 幾何とゲージ理論の間に対応があることをみる (図 1). (M, g) を d 次元 Riemann 多様体とし, $T_p M, T_p^* M$ を点 $p \in M$ における接空間 (tangent space), 余接空間 (cotangent space) とする. また, TM, T^*M を M の接束 (tangent bundle), 余接束 (cotangent bundle) とする. すなわち,

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_p M, \quad T^*M := \bigsqcup_{p \in M} T_p^* M. \quad (\text{B.1})$$

また, $C^\infty(M)$ を M 上の滑らかな実数値関数の全体, $\mathfrak{X}(M)$ を M 上の滑らかなベクトル場の全体とする. 次に, 動標構 (moving frame) と双対標構 (dual frame) を定義する. これらは, TM, T^*M における基底のようなものである. $\{e_\mu\}_{\mu=1}^d$ が M の動標構 (moving frame) であるとは, 各 e_μ は M 上のベクトル場であって, 任意の各点 $p \in M$ において $(e_\mu)_p$ が $T_p M$ の基底となることをいう. また, $\{\theta^\mu\}_{\mu=1}^d$ が $\{e_\mu\}_{\mu=1}^d$ の双対標構 (moving frame) であるとは, 各 e^μ は M 上の 1-形式であって, 任意の各点 $p \in M$ において $(\theta^\mu)_p$ が $(e_\mu)_p$ の双対基底となることをいう. 平坦な空間であれば, いわゆる座標基底 ∂_μ, dx^μ は動標構, 双対標構の代表例である. また, 各点 $p \in M$ において $(e_\mu)_p$ が $T_p M$ の正規直交基底となる時, 物理では e_μ を d 脚場あるいは多脚場と呼ぶ. 多脚場には計量の情報が含まれていることに注意しよう⁴⁵. 次に, 共変微分を定義する. 普通, 一般相対論では Christoffel 記号を用いて共変微分を定義するが, 一般にはそうでなくて良い. ベクトル場 X に対して, X 方向の共変微分 ∇_X を以下を満たす微分演算子⁴⁶ として定義する:

$$\nabla_X f = X(f) = X^\mu (\partial_\mu f) \quad (f \in C^\infty(M)), \quad (\text{B.2})$$

$$\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z \quad (Y, Z \in \mathfrak{X}(M)), \quad (\text{B.3})$$

$$\nabla_{fX} Y = f(\nabla_X Y) \quad (Y \in \mathfrak{X}(M), f \in C^\infty(M)). \quad (\text{B.4})$$

共変微分 ∇_X は以下で定義される接続係数 $\gamma_{\mu\nu}^\rho$ によって特徴付けられる.

$$\nabla_\mu e_\nu =: \gamma_{\mu\nu}^\rho e_\rho \quad (\text{B.5})$$

ここで $\nabla_\mu := \nabla_{e_\mu}$ と略記した. 動標構を座標基底 ∂_μ ととり, 接続係数が

$$\gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \quad (\text{B.6})$$

⁴⁵多脚場 $\{e_\mu\}_{\mu=1}^d$ に関して, 定義から $g(e_\mu, e_\nu) = \eta_{\mu\nu}$ となる. 座標基底 $\{\partial_\mu\}_{\mu=1}^d$ に関して, $g_{\mu\nu} := g(\partial_\mu, \partial_\nu)$ および $e_\mu = e_\mu^\nu \partial_\nu$ とすれば, $g_{\mu\nu} = e^\rho_\mu \eta_{\rho\sigma} e^\sigma_\nu$ が成り立つ. ここで $(e^\mu_\nu)_{\mu, \nu=1}^d$ は $(e_\mu^\nu)_{\mu, \nu=1}^d$ の逆行列である.

⁴⁶ここでいう微分演算子とは, Liebniz 則を満たし, 添字の縮約と可換な演算子である.

と与えられるような場合の共変微分が、通常的一般相対論での共変微分である。次に、曲率 (curvature) および捩率 (torsion) を定義する。曲率作用素 \hat{R} および捩率作用素 \hat{T} を以下で定義する：

$$\hat{R}(X, Y) := [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}, \quad (\text{B.7})$$

$$\hat{T}(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]. \quad (\text{B.8})$$

2つのベクトル場に対して、曲率作用素は微分作用素を返し、捩率作用素は実数を返すことに注意されたい。さらに、曲率テンソル R と捩率テンソル T を以下で定義する：

$$R(V_a, X^b, Y^c, Z^d) := V_a(\hat{R}(Y^c, Z^d)X^a), \quad (\text{B.9})$$

$$\Theta(V_a, X^b, Y^c) := V_a(T(X^b, Y^c)). \quad (\text{B.10})$$

ここで動標構 $\{e_\mu\}_{\mu=1}^d$ および双対標構 $\{\theta^\mu\}_{\mu=1}^d$ を1つ固定しよう。このとき、曲率テンソル R と捩率テンソル T の各成分

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} := R(V^\mu, X_\nu, Y_\rho, Z_\sigma), \quad (\text{B.11})$$

$$T^\mu{}_{\nu\rho} := \Theta(V^\mu, X_\nu, Y_\rho) \quad (\text{B.12})$$

に対して、曲率形式 $R^\mu{}_\nu$ および捩率形式 τ^ρ を

$$R^\mu{}_\nu := \frac{1}{2} R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} \theta^\rho \wedge \theta^\sigma, \quad (\text{B.13})$$

$$\tau^\rho := \frac{1}{2} T^\rho{}_{\mu\nu} \theta^\mu \wedge \theta^\nu \quad (\text{B.14})$$

と定義する。さらに、接続形式 $\omega^\mu{}_\nu$ を以下のように定義する：

$$\omega^\mu{}_\nu := \gamma^\mu{}_{\rho\nu} \theta^\rho. \quad (\text{B.15})$$

以上の微分形式は全て動標構 $\{e_\mu\}_{\mu=1}^d$ と共変微分 ∇ の決め方に依存することに注意されたい。また、通常的一般相対論では、捩率が全て消えるように接続係数が選ばれている。この場合のスカラー曲率 R と曲率形式 $R^\mu{}_\nu$ の関係は

$$*R = R_{\mu\nu} \wedge *(\theta^\mu \wedge \theta^\nu) \quad (\text{B.16})$$

となる。ここで $*$ は計量 g に関する Hodge 双対⁴⁷ で、添字は計量 $g_{\mu\nu} := g(e_\mu, e_\nu)$ を用いて下げた⁴⁸。次に、接続形式と曲率形式、捩率形式の関係を示す Cartan 構造方程式 (Cartan's structure equation) について説明する。定義より、曲率形式と捩率形式は共変微分と動標構の選び方に依存する。共変微分を特徴づけるものが接続形式であるから、曲率形式と捩率形式は動標構および接続形式から計算することができる。その公式を与えるのが Cartan 構造方程式で、以下のようになる：

$$\tau^\rho = d\theta^\rho + \omega^\rho{}_\sigma \wedge \theta^\sigma, \quad (\text{B.17})$$

$$R^\mu{}_\nu = d\omega^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\rho \wedge \omega^\rho{}_\nu. \quad (\text{B.18})$$

⁴⁷任意の n -形式 $\omega = (\omega_{\mu_1 \dots \mu_n} / n!) dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n}$ に対して

$$*\omega := \frac{\sqrt{\det g}}{n!(d-n)!} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_n}{}_{\nu_{n+1} \dots \nu_d} \omega_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_d}$$

と定義される。ここで $\epsilon^{\mu_1 \dots \mu_n}{}_{\nu_{n+1} \dots \nu_d} := \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_n \nu_{n+1} \nu_d} g^{\nu_1 \mu_1} \dots g^{\nu_n \mu_n}$ で、 $\epsilon_{\nu_1 \dots \nu_n \nu_{n+1} \nu_d}$ は完全反対称テンソルである。

⁴⁸ $R_{\mu\nu} := g_{\mu\rho} R^\rho{}_\nu$ であって、Ricci テンソルではないことに注意されたい。

第 1 式を Cartan 第 1 構造方程式, 第 2 式を Cartan 第 2 構造方程式と呼ぶ. 第 2 構造方程式はゲージ理論における場の強さテンソルの定義式 $F = dA + A \wedge A$ に似ている. 最後に, 動標構を別の動標構へと変換した場合の, 接続形式と曲率形式の変換を見ておこう. 任意の動標構 $\{e_\mu\}_{\mu=1}^d$ を任意の $d \times d$ 直交行列 $P = (P_\mu^\nu)$ に対して,

$$e'_\mu := P_\mu^\nu e_\nu \quad (\text{B.19})$$

とすれば, $\{e'_\mu\}_{\mu=1}^d$ もまた動標構である. このような変換 $e_\mu \mapsto e'_\mu$ によって, $\{e_\mu\}_{\mu=1}^d$ の双対標構 $\{\theta^\mu\}_{\mu=1}^d$ は

$$\theta'^\mu := P^\mu_\nu \theta^\nu \quad (\text{B.20})$$

と変換する. ここで $P = (P_\mu^\nu)$ の逆行列を $P^{-1} = (P^\mu_\nu)$ と書いた. さらに, 接続形式と曲率形式は以下のように変換する:

$$\omega^\mu_\nu \mapsto \omega'^\mu_\nu = P^\mu_\rho \omega^\rho_\sigma P_\nu^\sigma + P^\mu_\rho dP^\rho_\nu, \quad (\text{B.21})$$

$$R^\mu_\nu \mapsto \omega'^\mu_\nu = P^\mu_\rho R^\rho_\sigma P_\nu^\sigma. \quad (\text{B.22})$$

結果を見やすくするために, $\mathbf{R} := (R^\mu_\nu)_{\mu,\nu=1}^d$ のように形式的な行列を用いれば

$$\begin{cases} e & \mapsto Pe \\ \theta & \mapsto P^{-1}\theta \\ \mathbf{R} & \mapsto P^{-1}\mathbf{R}P \\ \omega & \mapsto P^{-1}\omega P + P^{-1}dP \end{cases} \quad (P \in O(d)) \quad (\text{B.23})$$

となる. 接続形式 ω をゲージ場, 曲率形式 \mathbf{R} を場の強さと思えば, これはゲージ群 $O(d)$ に対するゲージ変換である. 動標構 e がゲージ理論における物質場に対応している. 以上のようにして, ゲージ理論と Riemann 幾何は対応している (図 1).

| | ゲージ理論 | Riemann 幾何 |
|--------|----------------------------|--|
| 変換群 | ゲージ群 G | 直交群 $O(d)$ |
| 変換 | ゲージ変換 $g \in G$ | 座標変換 $P \in O(d)$ |
| | $A' = g^{-1}Ag + g^{-1}dg$ | $\omega' = P^{-1}\omega P + P^{-1}dP$ |
| | $F' = g^{-1}Fg$ | $\mathbf{R}' = P^{-1}\mathbf{R}P$ |
| 1-form | ゲージ場 A | 接続形式 ω |
| 2-form | 場の強さ $F = dA + A \wedge A$ | 曲率形式 $\mathbf{R} = d\omega + \omega \wedge \omega$ |

表 1: ゲージ理論と Riemann 幾何の対応

B.2 JT 重力の 1 階形式

本節では JT 重力の 1 階形式 (forst-order formalism) が $\text{PSL}(2, \mathbb{R})\text{BF}$ ゲージ理論となることをみる. ここで, 1 階形式とは計量ではなく曲率形式と接続形式を用いて表したもののことを指す. 以下

Eulidean の場合を考える。JT 重力の作用は

$$I_{\text{JT}} = -\frac{1}{2} \int_M * \Phi (R + 2) - \int_{\partial M} * \Phi (K - 1) \quad (\text{B.24})$$

と与えられるのであった。これを書き換えると、

$$I_{\text{BF}} = -i \int_M \text{Tr}[BF] + \frac{i}{2} \int_{\partial M} \text{Tr}[BA] \quad (\text{B.25})$$

となる。ここで、 $F := dA + A \wedge A$ で、 A は $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ 値 1-形式ゲージ場で、 B は $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ 値 0-形式ゲージ場である。ゲージ場 A, B と JT 重力の多脚場 e^1, e^2 と接続形式 $\omega^a_b = \epsilon^a_b \omega$ は以下のように結びついている：

$$B = -i \begin{pmatrix} -\Phi_1 & \Phi_2 + \Phi \\ \Phi_2 - \Phi & \Phi_1 \end{pmatrix} = i\Phi_1 \sigma_3 - i\Phi_2 \sigma_1 + \Phi \sigma_2, \quad (\text{B.26})$$

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -e^1 & e^2 - \omega \\ e^2 + \omega & e^1 \end{pmatrix} = -e^1 \sigma_3 + e^2 \sigma_1 - i\omega \sigma_2. \quad (\text{B.27})$$

以下ではこのことを説明する。

B.2.1 Bulk 作用

最初に、作用の bulk 部分を $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ BF ゲージ理論に書き換える。まずは作用を多脚場 $\{e_a\}_{a=1}^2$ およびスピン接続 $\{\omega^a_b\}_{a,b=1}^2$ を用いて書き換えよう。すなわち、JT 重力の 1 階形式を考えよう。以下、添字の上げ下げは δ_{ab} で行われる。スピン接続は添字 a, b について反対称であるから、2 次元の場合は自由度 1 である。したがって、ある 1-形式 ω を用いて以下のように書ける：

$$\omega^a_b = \epsilon^a_b \omega, \quad \epsilon^a_b = \begin{cases} +1 & (a=1, b=2) \\ -1 & (a=2, b=1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}. \quad (\text{B.28})$$

したがって、Cartan 第 2 構造方程式より、曲率形式 $\{R^a_b\}_{a,b=1}^2$ は以下のように与えられる：

$$R^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b = \epsilon^a_b d\omega. \quad (\text{B.29})$$

また、多脚場の正規直交性から、任意の n -形式 $\Omega = (\Omega_{a_1, \dots, a_n} / n!) e^{a_1} \wedge \dots \wedge e^{a_n}$ に対して

$$*\Omega = \frac{1}{n!(2-n)!} \epsilon^{a_1, \dots, a_n}_{b_{n+1}, \dots, b_2} \Omega_{a_1, \dots, a_n} e^{b_{n+1}} \wedge \dots \wedge e^{b_2} \quad (\text{B.30})$$

となるので、

$$*1 = e^1 \wedge e^2, \quad (\text{B.31})$$

$$*(e^a \wedge e^b) = \epsilon^{ab} \quad (\text{B.32})$$

を得る。ここで多脚場 $\{e_a\}_{a=1}^2$ の双対標構を $\{e^a\}_{a=1}^2$ と書いた。したがって、式 (B.16) より

$$\begin{aligned} *(R + 2) &= R_{ab} \wedge (e^a \wedge e^b) + 2 * 1 \\ &= \epsilon_{ab} d\omega \epsilon^{ab} + 2e^1 \wedge e^2 \\ &= 2(d\omega + e^1 \wedge e^2). \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

よって, JT 重力の作用の bulk 部分は以下のように書き換えられる:

$$\frac{1}{2} \int_M * \Phi(R+2) = \int_M \Phi(dw + e^1 \wedge e^2). \quad (\text{B.34})$$

ただし, このままでは振率 0 の条件を満たしていない. したがって, Cartan 第 1 構造方程式より,

$$de^a + \epsilon^a_b \omega \wedge e^b = 0 \quad (\text{B.35})$$

を拘束条件として課さなければならない. したがって, JT 重力の作用の bulk 部分と等価な作用は

$$I_{\text{BF}}[\omega, e^a, \Phi, \Phi_a] = \int_M [\Phi(dw + e^1 \wedge e^2) + \Phi_a(de^a + \epsilon^a_b \omega \wedge e^b)] \quad (\text{B.36})$$

である. Φ_a ($a = 1, 2$) は振率 0 の拘束条件を課すための補助スカラー場 (Lagrange の未定乗数) である. 次に, JT 重力の 1 階形式 (B.36) を $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ BF ゲージ理論に書き換えよう. そのためには, 以下のような行列を考える:

$$B := -i \begin{pmatrix} -\Phi_1 & \Phi_2 + \Phi \\ \Phi_2 - \Phi & \Phi_1 \end{pmatrix} = i\Phi_1\sigma_3 - i\Phi_2\sigma_1 + \Phi\sigma_2, \quad (\text{B.37})$$

$$A := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -e^1 & e^2 - \omega \\ e^2 + \omega & e^1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (-e^1\sigma_3 + e^2\sigma_1 - i\omega\sigma_2). \quad (\text{B.38})$$

ここで $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ は Pauli 行列である⁴⁹. すると, 式 (B.36) は以下のように書き換えられる:

$$I_{\text{BF}}[B, A] = i \int_M \text{Tr}[BF]. \quad (\text{B.39})$$

ここで

$$\begin{aligned} F &:= dA + A \wedge A \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -(de^1 + \omega \wedge e^2) & -(dw + e^1 \wedge e^2) + (de^2 - \omega \wedge e^1) \\ (dw + e^1 \wedge e^2) + (de^2 - \omega \wedge e^1) & de^1 + \omega \wedge e^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} [-(de^1 + \omega \wedge e^2)\sigma_3 + (de^2 - \omega \wedge e^1)\sigma_2 - i(dw + e^1 \wedge e^2)\sigma_1] \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

である. B を $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ 値 0-形式のゲージ場, A を $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ 値 1-形式のゲージ場だと思えば, この作用は $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ BF ゲージ理論である. 作用 (B.39) を補助場 B について変分すれば, $F = 0$ となる. すなわち, ゲージ場は平坦接続に限られる. 式 (B.40) より, この条件は $R+2=0$ かつ振率 0 の条件と同値である.

B.2.2 境界の作用

次に, JT 重力の境界項を BF ゲージ理論に書き換えよう. JT 重力の場合は, 境界項が

$$- \int_{\partial M} * \Phi(K-1) \quad (\text{B.41})$$

⁴⁹Pauli 行列は以下で与えられる:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

で、境界条件は

$$\Phi|_{\partial M} = \frac{\gamma}{\epsilon} ds^2 = \frac{d\tau^2}{\epsilon^2} \quad (\tau \sim \tau + \beta) \quad (\text{B.42})$$

であった。このとき、境界項は

$$I_{\text{Sch}} = -\gamma \int d\tau \text{Sch}\{F, \tau\} \quad (\text{B.43})$$

と boundary mode F に関する Schwarz 理論で書けるのであった。BF ゲージ理論の場合は、境界項を

$$\frac{i}{2} \int_{\partial M} \text{Tr}[BA] \quad (\text{B.44})$$

で、境界条件は

$$A|_{\partial M} = \frac{i}{2\gamma} B d\tau \quad (\text{B.45})$$

とすれば、境界項は Schwarz 理論と一致する。天降り式ではあるが、ここでは式 (B.44) から始めて式 (B.43) を導こう。まず、式 (B.44) に境界条件を代入すれば、

$$\gamma \int_{\partial M} d\tau \text{Tr}[A_\tau^2] \quad (\text{B.46})$$

となる。ここで、bulk の計量が disk 形の

$$ds_{H^2}^2 = d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\theta^2 \quad (\text{B.47})$$

または trumpet 形の

$$ds_{I^2}^2 = d\rho^2 + \cosh^2 \rho d\theta^2 \quad (\text{B.48})$$

と与えられる場合を考えよう。以下、それぞれについて具体的に計算を進めて式 (B.46) が式 (B.43) と等しくなることを示す。

1. Disk 形の場合： 計量が

$$ds_{H^2}^2 = d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\theta^2 \quad (\text{B.49})$$

と与えられるとき、多脚場は以下のように与えられる：

$$e^1 = d\rho, e^2 = \sinh \rho d\theta. \quad (\text{B.50})$$

これより、接続形式 $\omega^a_b = \omega \epsilon^a_b$ は

$$\omega = -\cosh \rho d\theta \quad (\text{B.51})$$

となる。以上をゲージ場 A の定義式に代入して

$$A := \frac{1}{2} [-e^1 \sigma_3 + e^2 \sigma_1 - i\omega \sigma_2] = \frac{1}{2} [-\sigma_3 d\rho + (\sigma_1 \sinh \rho + i\sigma_2 \cosh \rho) d\theta] \quad (\text{B.52})$$

となる。今、2.2.1 節と同様に境界 ∂M が $\rho = \rho(\tau), \theta = \theta(\tau)$ と与えられるとすれば、

$$A|_{\partial M} = \frac{1}{2} [-\sigma_3 \rho' d\tau + (\sigma_1 \sinh \rho + i\sigma_2 \cosh \rho) \theta' d\tau] \quad (\text{B.53})$$

となる。これを式 (B.46) に代入すれば、

$$\gamma \int_{\partial M} d\tau \text{Tr}[A_\tau^2] = \frac{\gamma}{2} \int_{\partial M} d\tau [\rho'(\tau)^2 - \theta'(\tau)^2] \quad (\text{B.54})$$

となる。さらに境界条件 $ds^2|_{\partial M} = d\tau^2/\epsilon^2$ を課せば、 $\rho(\tau), \theta(\tau)$ の関係式 (2.115) を得るので、

$$\gamma \int_{\partial M} d\tau \operatorname{Tr}[A_\tau^2] = \frac{\gamma}{2} \int_{\partial M} d\tau \left[\left(\frac{\theta''(\tau)}{\theta'(\tau)} \right)^2 - \theta'(\tau)^2 \right] =: I_{\text{Sch}} \left[\tan \frac{\theta}{2} \right] \quad (\text{B.55})$$

となる。最左辺は 2.2.1 節で導いた JT 重力の境界項であるから、式 (B.46) が式 (B.43) と等しいことが示せた。

2. Trumpet 形の場合：計量が

$$ds_{I_2}^2 = d\rho^2 + \cosh^2 \rho d\theta^2 \quad (\text{B.56})$$

と与えられるとき、多脚場は以下のように与えられる：

$$e^1 = d\rho, e^2 = \cosh \rho d\theta. \quad (\text{B.57})$$

これより、接続形式 $\omega^a_b = \omega \epsilon^a_b$ は

$$\omega = -\sinh \rho d\theta \quad (\text{B.58})$$

となる。以上をゲージ場 A の定義式に代入して

$$A := \frac{1}{2} [-e^1 \sigma_3 + e^2 \sigma_1 - i\omega \sigma_2] = \frac{1}{2} [-\sigma_3 d\rho + (\sigma_1 \cosh \rho + i\sigma_2 \sinh \rho) d\theta] \quad (\text{B.59})$$

となる。今、2.2.1 節と同様に境界 ∂M が $\rho = \rho(\tau), \theta = \theta(\tau)$ と与えられるとすれば、

$$A|_{\partial M} = \frac{1}{2} [-\sigma_3 \rho' d\tau + (\sigma_1 \cosh \rho + i\sigma_2 \sinh \rho) \theta' d\tau] \quad (\text{B.60})$$

となる。これを式 (B.46) に代入すれば、

$$\gamma \int_{\partial M} d\tau \operatorname{Tr}[A_\tau^2] = \frac{\gamma}{2} \int_{\partial M} d\tau [\rho'(\tau)^2 + \theta'(\tau)^2] \quad (\text{B.61})$$

となる。さらに境界条件 $ds^2|_{\partial M} = d\tau^2/\epsilon^2$ を課せば、 $\rho(\tau), \theta(\tau)$ の関係式 (2.115) を得るので、

$$\gamma \int_{\partial M} d\tau \operatorname{Tr}[A_\tau^2] = \frac{\gamma}{2} \int_{\partial M} d\tau \left[\left(\frac{\theta''(\tau)}{\theta'(\tau)} \right)^2 + \theta'(\tau)^2 \right] =: I_{\text{Sch}} \left[\tanh \frac{\theta}{2} \right] \quad (\text{B.62})$$

となる。最左辺は 2.2.2 節で導いた JT 重力の境界項であるから、式 (B.46) が式 (B.43) と等しいことが示せた。

B.2.3 ゲージ変換

ゲージ場 A に関する微小ゲージ変換 $A \rightarrow A + \delta A$ を考えよう。微小変化 δA は以下のように書ける：

$$\delta A = d\Theta + [A, \Theta], \quad \Theta = \begin{pmatrix} -\Theta^1 & \Theta^2 - \Theta^3 \\ \Theta^2 + \Theta^3 & \Theta^1 \end{pmatrix} = -\Theta^1 \sigma_3 + \Theta^2 \sigma_1 - i\Theta^3 \sigma_2. \quad (\text{B.63})$$

ここで Θ^a ($a = 1, 2, 3$) は M 上の 0-形式である。この $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ BF ゲージ理論側での微小ゲージ変換は、JT 重力側では M 上の微分同相写像による変換に対応している。以下でこれを示そう。ゲージ場 A の定義式 (B.38) を上式に代入すれば、

$$\begin{aligned} \delta A &= -d\Theta^1 \sigma_3 + d\Theta^2 \sigma_1 - id\Theta^3 \sigma_2 + \frac{1}{2} [-e^1 \sigma_3 + e^2 \sigma_1 - i\omega \sigma_2, -\Theta^1 \sigma_3 + \Theta^2 \sigma_1 - i\Theta^3 \sigma_2] \\ &= -(d\Theta^1 - \Theta^3 e^2 + \Theta^2 \omega) \sigma_3 + (d\Theta^2 - \Theta^3 e^1 + \Theta^1 \omega) \sigma_1 - i(d\Theta^3 + \Theta^1 e^2 - \Theta^2 e^1) \sigma_2 \end{aligned} \quad (\text{B.64})$$

となる．途中，Pauli 行列の交換関係

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \sigma_k \quad (\text{B.65})$$

を用いた．一方，

$$\delta A = \frac{1}{2} (-\delta e^1 \sigma_3 + \delta e^2 \sigma_1 - i \delta \omega \sigma_2) \quad (\text{B.66})$$

であるから，

$$\delta e^1 = 2 (d\Theta^1 - \Theta^3 e^2 + \Theta^2 \omega), \quad (\text{B.67})$$

$$\delta e^2 = 2 (d\Theta^2 - \Theta^3 e^1 + \Theta^1 \omega), \quad (\text{B.68})$$

$$\delta \omega = 2 (d\Theta^3 + \Theta^1 e^2 - \Theta^2 e^1) \quad (\text{B.69})$$

となる．今， M 上のベクトル場 ξ を以下を満たすものとして定義する：

$$\iota_\xi e^1 = 2\Theta^1, \quad \iota_\xi e^2 = 2\Theta^2, \quad \iota_\xi \omega = 2\Theta^3. \quad (\text{B.70})$$

ここで ι は内部積である．以上の定義から，

$$\begin{aligned} \delta e^1 &= d\iota_\xi e^1 - (\iota_\xi \omega) e^2 + (\iota_\xi e^2) \omega \\ &= d\iota_\xi e^1 + \iota_\xi (-\omega \wedge e^2) \\ &= d\iota_\xi e^1 + \iota_\xi de^1 \\ &= \mathcal{L}_\xi e^1 \end{aligned} \quad (\text{B.71})$$

となる．ここで \mathcal{L}_ξ はベクトル場 ξ に関する Lie 微分で，2 段目から 3 段目の式変形には Cartan 第 1 構造方程式から導かれる振率 0 の条件式 (B.35) を，3 段目から 4 段目の式変形は Cartan の公式 $\mathcal{L}_\xi = d\iota_\xi + \iota_\xi d$ を用いた．同様の計算によって以下が導かれる：

$$\delta e^1 = \mathcal{L}_\xi e^1, \quad (\text{B.72})$$

$$\delta e^2 = \mathcal{L}_\xi e^2, \quad (\text{B.73})$$

$$\delta \omega = \mathcal{L}_\xi \omega. \quad (\text{B.74})$$

したがって，微小ゲージ変換 $A \rightarrow A + \delta A$ は， M 上のベクトル場 ξ によって生成される微小変換に対応している．ところで， $\xi = \xi^\mu \partial_\mu$ ， $e^a = e^a_\mu dx^\mu$ ， $\omega = \omega_\mu dx^\mu$ と座標基底の下で成分表示すれば，ベクトル場 ξ の定義式 (B.63) より，

$$e^1_\mu \xi^\mu = 2\Theta^1, \quad e^2_\mu \xi^\mu = 2\Theta^2, \quad \omega_\mu \xi^\mu = 2\Theta^3 \quad (\text{B.75})$$

となる．したがって，関数 $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ が指定されれば上式が ξ_1, ξ_2 に関する連立方程式を与えるのでベクトル場 ξ が定まる．よって，任意の微小ゲージ変換に対して，それに対応したベクトル場 ξ すなわち微分同相写像が存在する．逆に，ベクトル場 ξ が与えられれば関数 $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ が定まる．よって，任意のベクトル場 ξ すなわち微分同相写像に対して，それに対応した微小ゲージ変換が存在する．したがって，ゲージ場 A のゲージ変換と M 上の微分同相写像は対応している．

B.3 Symplectic 形式

ここでは BF ゲージ理論における symplectic 形式 (2.211) が Weil-Petersson symplectic 形式 (2.154) および Kirillov-Kostant-Souriau symplectic 形式 (2.203) に一致することを示す. この symplectic 形式の一致によって, BF ゲージ理論と JT 重力の汎関数積分測度が一致するので, 両者は量子論レベルで一致することがわかる.

B.3.1 Weil-Petersson symplectic 形式

計量 (2.153) の元で symplectic 形式 (2.211) を計算しよう. まず, 多脚場 e_1, e_2 は

$$e_1 = d\rho, \quad e_2 = \cosh \rho (bdx + \tau \delta(\rho) d\rho) \quad (\text{B.76})$$

となる. したがって, 接続形式 $\omega^a_b = \omega \epsilon^a_b$ は

$$\omega = -b \sinh \rho dx \quad (\text{B.77})$$

となるので, ゲージ場 A は以下のように与えられる:

$$A := \frac{1}{2} [-e^1 \sigma_3 + e^2 \sigma_1 - i\omega \sigma_2] = \frac{1}{2} [(-\sigma_3 + \tau \delta(\rho) \sigma_1) d\rho + (\sigma_1 \cosh \rho + i\sigma_2 \sinh \rho) bdx]. \quad (\text{B.78})$$

ここでパラメータ b, τ に関する微小変化 δ_1, δ_2 を考えれば,

$$\delta_i A = \frac{1}{2} [(\delta_i \tau) \delta(\rho) \sigma_1 d\rho + (\sigma_1 \cosh \rho + i\sigma_2 \sinh \rho) (\delta_i b) dx] \quad (i = 1, 2) \quad (\text{B.79})$$

となる. これを symplectic 形式 (2.211) に代入して 以下を得る.

$$\Omega(\delta_1 A, \delta_2 A) := 2 \int \text{Tr}[\delta_1 A \wedge \delta_2 A] = \frac{1}{2} [\delta_1 b \delta_2 \tau - \delta_2 b \delta_1 \tau] \quad (\text{B.80})$$

したがって

$$\Omega = db \wedge d\tau \quad (\text{B.81})$$

となる. これは Weil-Petersson symplectic 形式 (2.154) に他ならない.

B.3.2 Kirillov-Kostant-Souriau symplectic 形式

ゲージ場 A の微小変化 $\delta_1 A, \delta_2 A$ としてゲージ変換による微小変化を考えよう:

$$\delta_i A = d\Theta_i + [A, \Theta_i] \quad (i = 1, 2). \quad (\text{B.82})$$

ここで $\Theta_i (i = 1, 2)$ は $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ 値 0-形式である. これを symplectic 形式 (2.211) に代入すれば,

$$\begin{aligned} \Omega(\delta_1 A, \delta_2 A) &= 2 \int_M \text{Tr}[\delta_1 A \wedge \delta_2 A] \\ &= 2 \int_M \text{Tr}[(d\Theta_1 + [A, \Theta_1]) \wedge \delta_2 A] \\ &= 2 \int_M d \text{Tr}[\Theta_1 \delta_2 A] - 2 \int_M \text{Tr}[\Theta_1 \wedge (d\delta_2 A + A \wedge \delta_2 A + \delta_2 A \wedge A)] \end{aligned} \quad (\text{B.83})$$

となる。途中、 $\text{Tr}[\alpha\beta] = \text{Tr}[\beta\alpha]$ を用いた。ここで、平坦接続 $F = 0$ を保つために $\delta F = 0$ を仮定すれば、

$$\delta F = \delta(dA + A \wedge A) = d\delta A + A \wedge \delta A + \delta A \wedge A = 0 \quad (\text{B.84})$$

となるので、

$$\Omega(\delta_1 A, \delta_2 A) = 2 \int_{\partial M} \text{Tr} [\Theta_1 \delta_2 A] \quad (\text{B.85})$$

を得る。以下では、上式を具体的に計算していく。

1. **Disk 形の場合**：一般のゲージ場において、Disk 形の場合における平坦接続は以下のように書くことが知られている：

$$A = g^{-1} dg. \quad (\text{B.86})$$

ここで g はゲージ群に値を取る場である。以上のようなゲージ場を pure gauge と呼ぶ。実際、今考えている問題設定ではゲージ場 (B.52) を以下のように書くことができる：

$$A = g^{-1} dg, \quad g = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\theta}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & e^{\frac{\theta}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -e^{-\frac{\theta}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & e^{\frac{\theta}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.87})$$

この pure gauge の微小変化 $\delta A = \delta g^{-1} dg + g^{-1} d\delta g$ を考えよう。この微小変化がゲージ変換によるもの $\delta A = d\Theta + [A, \Theta]$ であるとすれば、以下の等式が成り立つ：

$$\Theta = g^{-1} \delta g. \quad (\text{B.88})$$

これは具体的に代入計算することで示すことができる：

$$\begin{aligned} d\Theta + [A, \Theta] &= dg^{-1} \delta g + g^{-1} d\delta g + g^{-1} dg g^{-1} \delta g - g^{-1} \delta g g^{-1} dg \\ &= dg^{-1} \delta g + g^{-1} d\delta g - dg^{-1} g g^{-1} \delta g + \delta g^{-1} g g^{-1} dg \\ &= \delta g^{-1} dg + g^{-1} d\delta g. \end{aligned}$$

途中、 $g^{-1} g = g g^{-1}$ から従う以下の等式を用いた：

$$dg^{-1} g + g^{-1} dg = 0, \quad \delta g^{-1} g + g^{-1} \delta g = 0. \quad (\text{B.89})$$

等式 (B.88) を用いて symplectic 形式 (B.85) を計算すると以下のようになる：

$$\begin{aligned} \Omega(\delta_1 A, \delta_2 A) &= 2 \int_{\partial M} \text{Tr} [g^{-1} \delta_1 g \delta_2 (g^{-1} dg)] \\ &= 2 \int_{\partial M} \text{Tr} [g^{-1} \delta_1 g d (g^{-1} \delta_2 g)] \\ &= 2 \int_0^\beta d\tau \text{Tr} [g^{-1} \delta_1 g \partial_\tau (g^{-1} \delta_2 g)] \end{aligned} \quad (\text{B.90})$$

ここで $\Theta_1 = g^{-1}\delta_1 g$, $\delta_2 A = \delta_2 (g^{-1}dg)$ とおき, 以下の等式を用いた⁵⁰ :

$$\mathrm{Tr}[d(g^{-1}\delta g)] = \mathrm{Tr}[\delta(g^{-1}dg)]. \quad (\text{B.91})$$

したがって, symplectic 形式は以下のように書ける :

$$\Omega = 2 \int_0^\beta d\tau \mathrm{Tr} [g^{-1}dg \wedge \partial_\tau (g^{-1}dg)]. \quad (\text{B.92})$$

ここで d は場 g の全体がなす多様体上の外微分である. g の表式 (B.87) および境界 ∂M が $\rho = \rho(\tau), \theta = \theta(\tau)$ と与えられることから,

$$\Omega = \int_0^\beta d\tau [d\rho \wedge d\rho' - d\theta \wedge d\theta'] \quad (\text{B.93})$$

となる. ここで, 境界条件 (2.96) から定まる関数 $\rho(\tau), \theta(\tau)$ の関係式 (2.115) より,

$$d\rho = -\frac{d\theta'}{\theta'} \quad (\text{B.94})$$

$$d\rho' = -d\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right) = -\frac{d\theta''}{\theta'} + \theta'' \frac{d\theta'}{(\theta')^2} \quad (\text{B.95})$$

となる⁵¹ ので,

$$\Omega = \int_0^\beta d\tau \left[\frac{d\theta' \wedge d\theta''}{(\theta')^2} - d\theta \wedge d\theta' \right] \quad (\text{B.96})$$

となる. これは, KKS symplectic 形式 (2.205) に他ならない.

2. **Trumpet 形の場合**: Disk 形のとときと同様, trumpet 形のとときのゲージ場 (B.59) も以下のよ
うに pure gauge の形で書くことができる :

$$A = g^{-1}dg, \quad g = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\rho}{2}} \cosh\left(\frac{\theta}{2}\right) & e^{\frac{\rho}{2}} \sinh\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ e^{-\frac{\rho}{2}} \sinh\left(\frac{\theta}{2}\right) & e^{\frac{\rho}{2}} \cosh\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.97})$$

したがって, 前段と同様の議論によって symplectic 形式を計算することができる :

$$\begin{aligned} \Omega &= 2 \int_0^\beta d\tau \mathrm{Tr} [g^{-1}dg \wedge \partial_\tau (g^{-1}dg)] \\ &= \int_0^\beta d\tau [d\rho \wedge d\rho' + d\theta \wedge d\theta'] \\ &= \int_0^\beta d\tau \left[\frac{d\theta' \wedge d\theta''}{(\theta')^2} + d\theta \wedge d\theta' \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.98})$$

これは, KKS symplectic 形式 (2.205) に他ならない.

⁵⁰ これは以下のようにして示せる. まず, 以下のように変形する :

$$d(g^{-1}\delta g) = dg^{-1}\delta g + g^{-1}d\delta g = dg^{-1}\delta g + \delta(g^{-1}dg) - \delta g^{-1}dg.$$

ここで, $\mathrm{Tr}[dg^{-1}\delta g] = \mathrm{Tr}[\delta g^{-1}dg]$ となるので示したい等式が成り立つ. なぜなら, 式 (B.89) より, $dg^{-1} = -g^{-1}dgg^{-1}$, $\delta g = -g\delta g^{-1}g$ となるので,

$$\mathrm{Tr}[dg^{-1}\delta g] = \mathrm{Tr}[(-g^{-1}dgg^{-1})(-g\delta g^{-1}g)] = \mathrm{Tr}[g^{-1}\delta g^{-1}dgg] = \mathrm{Tr}[\delta g^{-1}dg]$$

となるからである.

⁵¹ 第 1 式は次のようにして示せる. $1/\sinh \rho = \epsilon\theta'$ の両辺を外微分して $-\cosh \rho d\rho/\sinh^2 \rho = \epsilon d\theta'$ を得る. 左辺について, $\cosh \rho \sim \sinh \rho$ より, $\cosh \rho/\sinh^2 \rho \sim 1/\sinh \rho = \epsilon\theta'$ であるから, $-\epsilon\theta' d\rho = \epsilon d\theta'$ を得る. 両辺整理すれば示したい式が得られる.

C Witten-Kontsevich 重力

本節では、2次元重力とランダム行列（行列模型）との対応を議論する上で重要な Witten-Kontsevich (WK) 重力について概説し、JT 重力は WK 重力の特別な場合であることを示す [17, 18].

C.1 交叉理論

本節では、WK 重力の基礎となる交叉理論 (intersection theory) について概説する. 交叉理論を完全に理解するためには、位相的場の理論などの数理物理的な知識、代数幾何などの数学的知識が必要となるため、ここではごく簡単に必要最低限のことを述べる. 総合的なレビューとしては [55] がある.

まず、種数 g の閉 Riemann 面に n 個の marked points p_1, \dots, p_n を入れた Σ_{g,p_1,\dots,p_n} を考えよう. この Σ_{g,p_1,\dots,p_n} の moduli 空間を $\mathcal{M}_{g,n}$ と書く. このとき、交叉数 (intersection number) $\langle \kappa^m \tau_{d_1} \cdots \tau_{d_n} \rangle_g$ ($\tau_{d_i} \cdots \tau_{d_n} \rangle_g (m, d_1, \dots, d_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$) を以下のように定義する:

$$\langle \kappa^m \tau_{d_1} \cdots \tau_{d_n} \rangle_g := \int_{\mathcal{M}_{g,n}} \kappa^m \wedge \psi_1^{d_1} \wedge \cdots \wedge \psi_n^{d_n}, \quad (\text{C.1})$$

$$\langle \tau_{d_1} \cdots \tau_{d_n} \rangle_g := \int_{\mathcal{M}_{g,n}} \psi_1^{d_1} \wedge \cdots \wedge \psi_n^{d_n}. \quad (\text{C.2})$$

ここで、 κ は第 1 Miller-Morita-Momford 類と呼ばれる量で、Weil-Petersson symplectic 形式 ω と

$$\frac{\Omega}{2\pi^2} = \kappa \quad (\text{C.3})$$

との関係がある. ψ_i は \mathcal{L}_i の第 1 Chern 類で、 \mathcal{L}_i とは p_i を変化させたときにできる moduli 空間上の曲線のことである. 左辺には τ と表記してあるのに、右辺では ψ と書いているのは、単に慣習上の記法であって、両者は全く同じものとみなして良い. $\bar{\mathcal{M}}_{g,n}$ は moduli 空間 $\mathcal{M}_{g,n}$ を Deligne-Mumford コンパクト化したもので、複素 $3g - 3 + n$ 次元空間である. κ は積分測度と関係がある量で、 τ すなわち ψ は Riemann 面の位相と関係がある量、 $\bar{\mathcal{M}}_{g,n}$ は moduli 空間を扱いやすくしたもの、交叉数は τ すなわち ψ の積の期待値、すなわち相関関数と思っておけば良い. また、markd point を考えているのは、あとで境界を入れるためである.

この交叉数と Weil-Petersson 体積 $V_{g,n}(b_1, \dots, b_n)$ の関係は以下のように与えられる [14]⁵²:

$$\begin{aligned} V_{g,n}(b_1, \dots, b_n) &= \int_{\bar{\mathcal{M}}_{g,n}} \exp\left(\Omega + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n b_i^2 \psi_i\right) \\ &= \sum_{k + \sum_i^n d_i = 3g - 3 + n} (2\pi^2)^k \frac{(b_1^2/2)^{d_1}}{d_1!} \cdots \frac{(b_n^2/2)^{d_n}}{d_n!} \langle e^{\kappa} \tau_{d_1} \cdots \tau_{d_n} \rangle \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

⁵²2.5.2 節の式 (2.276) とは以下のような対応関係がある:

$$V_{d_1 \dots d_n}^{g,n} = \frac{2^{6g+2n-6-\sum_i^n d_i}}{d_1! \cdots d_n!} \langle e^{\kappa} \tau_{d_1} \cdots \tau_{d_n} \rangle.$$

ただし, $k = \sum_{i=1}^n k_i$ で, 微分形式 A に対する指数関数 $\exp(A)$ は

$$\int_M \exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \int_M \frac{A^n}{n!} \quad (\text{C.5})$$

で定義される. ただし, A^n は微分形式 A を n 個外積をとったものである. 第 1 式の直感的な意味は以下の通り: Moduli 空間上の体積形式はその symplectic 形式 Ω を用いて $\Omega^n/n!$ と与えられる. しかし, 今, 右辺では n 個の marked point p_1, \dots, p_n がある場合を考えてるのに対して, 左辺では n 個の長さ b_1, \dots, b_n の測地線による境界がある場合を考えているので, その分の差異が $b_i^2 \psi_i$ として取り込まれている. 第 2 式は指数関数を展開している.

さて, JT 重力の分配関数は Weil-Petersson 体積の Laplace 変換の形で与えられるのであった. 今, Weil-Petersson 体積は測地線境界の長さ b_i^2 の多項式で与えられ, その係数が交叉数で与えられることがわかった. したがって, JT 重力の分配関数は交叉数と境界の長さ β_1, \dots, β_n で書けるはずである. すると, 一般に, 2次元重力であって topological な性質を持つものは, 交叉数を用いて表せそうである. すなわち, topological な 2次元重力は交叉理論と等価であることが期待される. これが topological 重力, すなわち Witten-Kontsevich 重力の基本的な考えである.

WK 重力を具体的に解説する前に, 交叉数の母関数を与えておく:

$$G(s, t_1, \dots) := \sum_{g=0}^{\infty} g_s^{2g-2} \left\langle \exp \left(s\kappa + \sum_{d=0}^{\infty} t_d \tau_d \right) \right\rangle_g, \quad (\text{C.6})$$

$$F(t_1, \dots) := \sum_{g=0}^{\infty} g_s^{2g-2} \left\langle \exp \left(\sum_{d=0}^{\infty} t_d \tau_d \right) \right\rangle_g. \quad (\text{C.7})$$

ここで

$$\langle f \rangle_g := \int_{\mathcal{M}_{g,n}} f \quad (\text{C.8})$$

と表記した. $g_s, s, \{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ は実数のパラメーターで, t_1, t_2, \dots に関して幕展開したときの係数が交叉数になっている. $G(s, t_1, \dots)$ は Weil-Petterson symplectic 形式 $\omega = (2\pi)^2 \kappa$ があるときの交叉数 $\langle \kappa^m \tau_{d_1} \cdots \tau_{d_n} \rangle$ の母関数で, $F(t_1, \dots)$ は Weil-Petterson symplectic 形式がないときの交叉数 $\langle \tau_{d_1} \cdots \tau_{d_n} \rangle$ の母関数である. 実は, 両者は以下のような変換で結びついている [55, 56]:

$$G(s, \{t_k\}) = F(\{t_k + \gamma_k s^{k-1}\}), \quad (\text{C.9})$$

$$\gamma_0 = \gamma_1 = 0, \gamma_k = \frac{(-1)^k}{(k-1)!}. \quad (\text{C.10})$$

したがって, Weil-Petterson 体積を計算するときには Weil-Petterson symplectic 形式があるときの交叉数 $\langle \kappa^m \tau_{d_1} \cdots \tau_{d_n} \rangle$ が必要であったが, Weil-Petterson symplectic 形式がないときの母関数 $F(t_k)$ を計算すれば十分である.

さて, いよいよ WK 重力の分配関数を与えよう. 長さが β_1, \dots, β_n の n 個の境界が時空にあるとき, WK 重力の分配関数は以下のように与えられる:

$$\begin{aligned} Z_{\text{WK}}(\beta_1, \dots, \beta_n) &= B(\beta_1) \cdots B(\beta_n) F(t_k) + \cdots \\ &= \sum_{g=0}^{\infty} g_s^{2g-2+n} \prod_{i=1}^n \left[\sqrt{\frac{\beta_i}{2\pi}} \sum_{d=0}^{\infty} \beta_i^d \frac{\partial}{\partial t_d} \right] \left\langle e^{\sum_{d=0}^{\infty} t_d \tau_d} \right\rangle_g + \cdots \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

ここで、最後の \dots には、 $g=0, n=1$ の disk 形のときと $g=0, n=2$ のときの wormhole 形のときの寄与が含まれている⁵³。また、 $B(\beta)$ は

$$B(\beta) = g_s \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \sum_{d=0}^{\infty} \beta^d \frac{\partial}{\partial t_d} \quad (\text{C.12})$$

と定義される微分作用素で、boundary creation operator と呼ばれる [57]。また、 $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ は理論を決めるパラメータである。第2式をみると、第1 Chern 類 τ に対する化学ポテンシャルのようなものであることがわかる。

C.2 WK 重力の特殊例としての JT 重力

本節では、WK 重力の分配関数 (C.11) において、

$$g_s = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{e^{S_0}}, t_0 = t_1 = 0, t_k = \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \quad (\text{C.13})$$

とすれば、JT 重力の分配関数に一致する [17, 18] ことを導く。

JT 重力の分配関数は以下のように与えられる：

$$Z_{\text{JT}}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = \sum_{g=0}^{\infty} e^{(2-2g-n)S_0} Z_{g,n}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n), \quad (\text{C.14})$$

$$Z_{g,n}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{2\pi\gamma}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{2\pi^2\gamma}{\beta}} & (g=0, n=1) \\ \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\beta_1\beta_2}}{\beta_1 + \beta_2} & (g=0, n=2) \\ \int \prod_{m=1}^n \left[b_m db_m \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi\beta_m}} e^{-\frac{\gamma b_m^2}{2\beta_m}} \right] V_{g,n}(b_1, b_2, \dots, b_n) & \end{cases} \quad (\text{C.15})$$

$(g, n) \neq (0, 1), (0, 2)$ のときを考えよう。このとき、Weil-Petersson 体積と交叉数の関係式 (C.4) より、

$$\begin{aligned} & Z_{g,n}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \\ &= \int \prod_{m=1}^n \left[b_m db_m \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi\beta_m}} e^{-\frac{\gamma b_m^2}{2\beta_m}} \right] \sum_{k+\sum_{i=1}^n d_i=3g-3+n} (2\pi^2)^k \frac{(b_1^2/2)^{d_1}}{d_1!} \dots \frac{(b_n^2/2)^{d_n}}{d_n!} \langle e^{\kappa\tau_{d_1}} \dots \tau_{d_n} \rangle_g \\ &= \sum_{k+\sum_{i=1}^n d_i=3g-3+n} (2\pi^2)^k \int \prod_{m=1}^n \left[b_m db_m \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi\beta_m}} e^{-\frac{\gamma b_m^2}{2\beta_m}} \frac{(b_m^2/2)^{d_m}}{d_m!} \right] \langle e^{\kappa\tau_{d_1}} \dots \tau_{d_n} \rangle_g \\ &= \sum_{k+\sum_{i=1}^n d_i=3g-3+n} (2\pi^2)^k \prod_{m=1}^n \left[\int dz_m \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi\beta_m}} e^{-\frac{\gamma}{\beta_m} z_m} \frac{z_m^{d_m}}{d_m!} \right] \langle e^{\kappa\tau_{d_1}} \dots \tau_{d_n} \rangle_g \\ &= \sum_{k+\sum_{i=1}^n d_i=3g-3+n} (2\pi^2)^k \prod_{m=1}^n \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi\beta_m}} \left(\frac{\beta_m}{\gamma}\right)^{d_m+1} \langle e^{\kappa\tau_{d_1}} \dots \tau_{d_n} \rangle_g \\ &= \left(\frac{1}{2\pi^{\frac{3}{2}}}\right)^{2-2g-n} \prod_{m=1}^n \left[\sqrt{\frac{\beta_m}{2\pi}} \frac{2\pi^2}{\gamma} \sum_{d_m=0}^{\infty} \left(\beta_m \frac{2\pi^2}{\gamma}\right)^{d_m} \right] \langle e^{\kappa\tau_{d_1}} \dots \tau_{d_n} \rangle_g \end{aligned}$$

⁵³Disk 形と wormhole 形は特殊例であったことを思い出されたい

となる．途中， $z_m := b_m^2/2$ とおき，Laplace 変換の公式

$$\int_0^\infty dz e^{-sz} z^n = \frac{s^{n+1}}{n!} \quad (\text{C.16})$$

を用いた．したがって，JT 重力の分配関数は交叉数を用いて以下のように書ける：

$$Z_{\text{JT}}(\beta_1, \dots, \beta_n) = \sum_{g=0}^{\infty} \left(\frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{e^{S_0}} \right)^{2g-2+n} \prod_{m=1}^n \left[\sqrt{\frac{\beta_m 2\pi^2}{2\pi \gamma}} \sum_{d_m=0}^{\infty} \left(\beta_m \frac{2\pi^2}{\gamma} \right)^{d_m} \right] \langle e^{\kappa \tau_{d_1} \dots \tau_{d_n}} \rangle_g + \dots \quad (\text{C.17})$$

ここで最後の \dots には disk $(g, n) = (0, 1)$ および wormhole $(g, n) = (0, 2)$ の寄与が含まれる．一方，WK 重力の分配関数に $t_0 = t_1 = 0, t_k = \frac{(-1)^k}{(k-1)!}$ を代入すれば，

$$\begin{aligned} & Z_{\text{WK}}(\beta_1, \dots, \beta_n) \\ &= B(\beta_1) \dots B(\beta_n) F(\{t_k\}_{k=0}^\infty) \Big|_{t_0=t_1=0, t_k=\frac{(-1)^k}{(k-1)!}} + \dots \\ &= B(\beta_1) \dots B(\beta_n) G(s, \{t_k\}_{k=0}^\infty) \Big|_{s=0, t_k=0} + \dots \\ &= \prod_{m=1}^n \left[g_s \sqrt{\frac{\beta_m}{2\pi}} \sum_{d_m=0}^{\infty} \beta_m^{d_m} \frac{\partial}{\partial t_{d_m}} \right] \sum_{g=0}^{\infty} g_s^{2g-1} \left\langle \exp \left(s\kappa + \sum_{d=0}^{\infty} t_d \tau_d \right) \right\rangle_g \Big|_{s=0, t_k=0} + \dots \\ &= \sum_{g=0}^{\infty} g_s^{2g-2+n} \prod_{m=1}^n \left[\sqrt{\frac{\beta_m}{2\pi}} \sum_{d_m=0}^{\infty} \beta_m^{d_m} \right] \left\langle \exp \left(s\kappa + \sum_{d=0}^{\infty} t_d \tau_d \right) \tau_{d_1} \dots \tau_{d_n} \right\rangle_g \Big|_{s=0, t_k=0} + \dots \\ &= \sum_{g=0}^{\infty} g_s^{2g-2+n} \prod_{m=1}^n \sqrt{\frac{\beta_m}{2\pi}} \sum_{d_m=0}^{\infty} \beta_m^{d_m} \langle e^{\kappa \tau_{d_1} \dots \tau_{d_n}} \rangle_g + \dots \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

となる．したがって，以下の置き換えをすれば，JT 重力の分配関数と WK 重力の分配関数は一致する：

$$g_s \rightarrow \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{e^{S_0}}, \quad \beta_m \rightarrow \beta_m \frac{2\pi^2}{\gamma}. \quad (\text{C.19})$$

参考文献

- [1] R. Jackiw, *Lower Dimensional Gravity*, *Nucl. Phys. B* **252** (1985) 343–356.
- [2] C. Teitelboim, *Gravitation and Hamiltonian Structure in Two Space-Time Dimensions*, *Phys. Lett. B* **126** (1983) 41–45.
- [3] A. Almheiri and J. Polchinski, *Models of AdS₂ backreaction and holography*, *JHEP* **11** (2015) 014 [[arXiv:1402.6334](https://arxiv.org/abs/1402.6334) [hep-th]].
- [4] J. Maldacena, D. Stanford, and Z. Yang, *Conformal symmetry and its breaking in two dimensional Nearly Anti-de-Sitter space*, *PTEP* **2016** no. 12, (2016) 12C104 [[arXiv:1606.01857](https://arxiv.org/abs/1606.01857) [hep-th]].
- [5] D. Stanford and E. Witten, *Fermionic Localization of the Schwarzian Theory*, *JHEP* **10** (2017) 008 [[arXiv:1703.04612](https://arxiv.org/abs/1703.04612) [hep-th]].
- [6] P. Saad, S. H. Shenker, and D. Stanford, *JT gravity as a matrix integral*, [arXiv:1903.11115](https://arxiv.org/abs/1903.11115) [hep-th].
- [7] S. Sachdev and J. Ye, *Gapless spin fluid ground state in a random, quantum Heisenberg magnet*, *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993) 3339 [[arXiv:cond-mat/9212030](https://arxiv.org/abs/cond-mat/9212030)].
- [8] A. Kitaev, *A simple model of quantum holography talk1*, in Talks at KITP. Apr, 2015. <https://online.kitp.ucsb.edu/online/entangled15/kitaev/>.
- [9] A. Kitaev, *A simple model of quantum holography talk2*, in Talks at KITP. May, 2015. <https://online.kitp.ucsb.edu/online/entangled15/kitaev2/>.
- [10] A. Kitaev and S. J. Suh, *The soft mode in the Sachdev-Ye-Kitaev model and its gravity dual*, *JHEP* **05** (2018) 183 [[arXiv:1711.08467](https://arxiv.org/abs/1711.08467) [hep-th]].
- [11] J. Maldacena and D. Stanford, *Remarks on the Sachdev-Ye-Kitaev model*, *Phys. Rev. D* **94** no. 10, (2016) 106002 [[arXiv:1604.07818](https://arxiv.org/abs/1604.07818) [hep-th]].
- [12] M. Kontsevich, *Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function*, *Commun. Math. Phys.* **147** (1992) 1–23.
- [13] M. Mirzakhani, *Simple geodesics and Weil-Petersson volumes of moduli spaces of bordered Riemann surfaces*, *Invent. Math.* **167** no. 1, (2006) 179–222.
- [14] M. Mirzakhani, *Weil-Petersson volumes and intersection theory on the moduli space of curves*, *J. Am. Math. Soc.* **20** no. 01, (2007) 1–24.
- [15] D. G. Crowdy, *General solutions to the 2d liouville equation*, *International Journal of Engineering Science* **35** no. 2, (1997) 141–149. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020722596000808>.

- [16] R. B. Mann, *Conservation laws and 2-D black holes in dilaton gravity*, *Phys. Rev. D* **47** (1993) 4438–4442 [[arXiv:hep-th/9206044](#)].
- [17] K. Okuyama and K. Sakai, *JT gravity, KdV equations and macroscopic loop operators*, *JHEP* **01** (2020) 156 [[arXiv:1911.01659](#) [[hep-th](#)]].
- [18] K. Okuyama and K. Sakai, *Multi-boundary correlators in JT gravity*, *JHEP* **08** (2020) 126 [[arXiv:2004.07555](#) [[hep-th](#)]].
- [19] T. Nakanishi and M. Näätänen, *Areas of two-dimensional moduli spaces*, Proceedings of the American Mathematical Society **129** no. 11, (2001) 3241–3252.
<http://www.jstor.org/stable/2668867>.
- [20] D. Stanford, *A Mirzakhani recursion for non-orientable surfaces*, [arXiv:2303.04049](#) [[hep-th](#)].
- [21] D. Stanford and E. Witten, *JT gravity and the ensembles of random matrix theory*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **24** no. 6, (2020) 1475–1680 [[arXiv:1907.03363](#) [[hep-th](#)]].
- [22] E. Witten, *Coadjoint Orbits of the Virasoro Group*, *Commun. Math. Phys.* **114** (1988) 1.
- [23] I. Bakas, *ORBITS OF DIFF S1 IN THE SPACE OF QUADRATIC DIFFERENTIALS*, *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.* **6** (1989) 137–139.
- [24] J. J. Duistermaat and G. J. Heckman, *On the Variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space*, *Invent. Math.* **69** (1982) 259–268.
- [25] R. Jackiw, *Gauge theories for gravity on a line*, *Theor. Math. Phys.* **92** (1992) 979–987 [[arXiv:hep-th/9206093](#)].
- [26] N. Ikeda, *Two-dimensional gravity and nonlinear gauge theory*, *Annals Phys.* **235** (1994) 435–464 [[arXiv:hep-th/9312059](#)].
- [27] P. Schaller and T. Strobl, *Poisson structure induced (topological) field theories*, *Mod. Phys. Lett. A* **9** (1994) 3129–3136 [[arXiv:hep-th/9405110](#)].
- [28] S. Cremonesi, *An Introduction to Localisation and Supersymmetry in Curved Space*, *PoS Modave2013* (2013) 002.
- [29] T. G. Mertens and G. J. Turiaci, *Liouville quantum gravity – holography, JT and matrices*, *JHEP* **01** (2021) 073 [[arXiv:2006.07072](#) [[hep-th](#)]].
- [30] B. Eynard and N. Orantin, *Weil-Petersson volume of moduli spaces, Mirzakhani’s recursion and matrix models*, [arXiv:0705.3600](#) [[math-ph](#)].
- [31] B. Eynard, T. Kimura, and S. Ribault, *Random matrices*, [arXiv:1510.04430](#) [[math-ph](#)].

- [32] P. H. Ginsparg and G. W. Moore, *Lectures on 2-D gravity and 2-D string theory*, in Theoretical Advanced Study Institute (TASI 92): From Black Holes and Strings to Particles, pp. 277–469. 10, 1993. [arXiv:hep-th/9304011](#).
- [33] P. Di Francesco, P. H. Ginsparg, and J. Zinn-Justin, *2-D Gravity and random matrices*, *Phys. Rept.* **254** (1995) 1–133 [[arXiv:hep-th/9306153](#)].
- [34] T. G. Mertens and G. J. Turiaci, *Solvable models of quantum black holes: a review on Jackiw–Teitelboim gravity*, *Living Rev. Rel.* **26** no. 1, (2023) 4 [[arXiv:2210.10846](#) [[hep-th](#)]].
- [35] G. 't Hooft, *A Planar Diagram Theory for Strong Interactions*, *Nucl. Phys. B* **72** (1974) 461.
- [36] E. Brezin, C. Itzykson, G. Parisi, and J. B. Zuber, *Planar Diagrams*, *Commun. Math. Phys.* **59** (1978) 35.
- [37] B. Eynard, *Topological expansion for the 1-Hermitian matrix model correlation functions*, *JHEP* **11** (2004) 031 [[arXiv:hep-th/0407261](#)].
- [38] D. Harlow and D. Jafferis, *The Factorization Problem in Jackiw-Teitelboim Gravity*, *JHEP* **02** (2020) 177 [[arXiv:1804.01081](#) [[hep-th](#)]].
- [39] N. Banerjee, T. Mandal, A. Rudra, and M. Saha, *Equivalence of JT gravity and near-extremal black hole dynamics in higher derivative theory*, *JHEP* **01** (2022) 124 [[arXiv:2110.04272](#) [[hep-th](#)]].
- [40] S. Gukov, V. S. H. Lee, and K. M. Zurek, *Near-horizon quantum dynamics of 4D Einstein gravity from 2D Jackiw-Teitelboim gravity*, *Phys. Rev. D* **107** no. 1, (2023) 016004 [[arXiv:2205.02233](#) [[hep-th](#)]].
- [41] K. Goto, *Near horizon physics of charged black holes and the Jackiw-Teitelboim gravity*. PhD thesis, Tokyo U.
- [42] L. V. Iliesiu, *On 2D gauge theories in Jackiw-Teitelboim gravity*, [arXiv:1909.05253](#) [[hep-th](#)].
- [43] D. Kapec, R. Mahajan, and D. Stanford, *Matrix ensembles with global symmetries and 't Hooft anomalies from 2d gauge theory*, *JHEP* **04** (2020) 186 [[arXiv:1912.12285](#) [[hep-th](#)]].
- [44] E. Witten, *Matrix Models and Deformations of JT Gravity*, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **476** no. 2244, (2020) 20200582 [[arXiv:2006.13414](#) [[hep-th](#)]].
- [45] J. Maldacena, G. J. Turiaci, and Z. Yang, *Two dimensional Nearly de Sitter gravity*, *JHEP* **01** (2021) 139 [[arXiv:1904.01911](#) [[hep-th](#)]].
- [46] E. Witten, *Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space*, *Surveys Diff. Geom.* **1** (1991) 243–310.

- [47] E. Witten, *On the Kontsevich model and other models of two-dimensional gravity*, in International Conference on Differential Geometric Methods in Theoretical Physics, pp. 176–216. 6, 1991.
- [48] H. Geng, A. Karch, C. Perez-Pardavila, S. Raju, L. Randall, M. Riojas, and S. Shashi, *Jackiw-Teitelboim Gravity from the Karch-Randall Braneworld*, *Phys. Rev. Lett.* **129** no. 23, (2022) 231601 [[arXiv:2206.04695](#) [hep-th]].
- [49] H. Geng, *Aspects of AdS_2 quantum gravity and the Karch-Randall braneworld*, *JHEP* **09** (2022) 024 [[arXiv:2206.11277](#) [hep-th]].
- [50] J. McNamara and C. Vafa, *Baby Universes, Holography, and the Swampland*, [arXiv:2004.06738](#) [hep-th].
- [51] S. R. Coleman, *Black holes as red herrings: Topological fluctuations and the loss of quantum coherence*, *Nucl. Phys. B* **307** (1988) 867–882.
- [52] S. B. Giddings and A. Strominger, *Loss of incoherence and determination of coupling constants in quantum gravity*, *Nucl. Phys. B* **307** (1988) 854–866.
- [53] S. B. Giddings and A. Strominger, *Baby Universes, Third Quantization and the Cosmological Constant*, *Nucl. Phys. B* **321** (1989) 481–508.
- [54] D. Marolf and H. Maxfield, *Transcending the ensemble: baby universes, spacetime wormholes, and the order and disorder of black hole information*, *JHEP* **08** (2020) 044 [[arXiv:2002.08950](#) [hep-th]].
- [55] R. Dijkgraaf and E. Witten, *Developments in Topological Gravity*, *Int. J. Mod. Phys. A* **33** no. 30, (2018) 1830029 [[arXiv:1804.03275](#) [hep-th]].
- [56] M. Mulase and B. Safnuk, *Mirzakhani’s recursion relations, Virasoro constraints and the KdV hierarchy*, [arXiv:math/0601194](#).
- [57] G. W. Moore, N. Seiberg, and M. Staudacher, *From loops to states in 2-D quantum gravity*, *Nucl. Phys. B* **362** (1991) 665–709.