DEPARTMENT OF PHYSICS
KYOTO UNIVERSITY.

No.

修士論文

弦の場の理論におけるディリクレ膜

(D-brane in String Field Theory)

平成九年二月三日

京都大学大学院理学研究科
橋本幸士

概要

統一理論と期待されている超弦理論は次元が10で無矛盾であるため、何らかの非摂動的効果で4次元にコンパクト化されると思われるが、その過程は明らかでない。しかし、近年の超弦理論の発展は目覚ましく、それはディリクレ膜（D-brane）という弦の境界が、弦理論の非摂動的性質（双対性）を担う、という発見からであった。

本論文では、関連事項の review を行なった上で、弦理論の非摂動的定式化として研究されて来た弦の場の理論の形式の中に、この D-brane を導入することを試みる。

まず、境界状態をソースとした項を HIKKO の閉弦の場の理論の作用に加えると、この項は D-brane 作用と一致することを見る。また境界状態をも含む様に拡張された弦の場の理論の対称性が、σ-model の対称性と同一になることを示す。この時、BI 作用が、対称性の要請から自然に現れる。更なる仮定から D-brane 作用への補正を計算し、既存の σ-model の結果との比較を試みる。

目次

§1 序論

重力を含みまた大統一理論を低エネルギーでもたらす量子論は「究極理論」と呼ばれるが、現在その唯一の候補として知られているのは超弦理論である。超弦理論はその基本的性格として閉弦の形で重力を含み、また量子化することによって量子重力をもたらすが、それは粒子としての量子重力と異なり発散をもたらさないと期待されている。また超弦理論は次元10で world sheet（世界面）の conformal anomaly が消える、つまり無矛盾であることから、現実的な理論とみなすためには4次元へのコンパクト化を必要とする。このコンパクト化の過程で、その内部空間の自由度の分だけ豊富なゲージ構造を生むことが知られており、これが低エネルギーで大統一理論をもたらすと説明される。

この様に美しい性質を持つ超弦理論だが、現在その最大の困難となっているのは理論の真空の決定である。ここに言う「真空」とは、特に背景時空の真空期待値のことである。つまり問題は、コンパクト時空がどの様なものに決まり（これからゲージ場や物質場の内容が分かる）、また何如に非コンパクトミンコフスキー4次元時空が出るか、を明らかにすることなのである。

二十年来発展して来た超弦理論は、本質的に一体問題であった。Polyakov 作用

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int_{\mathcal{M}} d^2\sigma \sqrt{\gamma}\, \gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^M \partial_\beta X^N \eta_{MN} \qquad (1\text{-}1)$$

は、粒子の対応で言うと、質点力学の作用

$$\mathcal{S} = \int_{\mathcal{L}} d\tau \left(\frac{1}{2e} \dot{x}^M \dot{x}^N \eta_{MN} - \frac{1}{2} e m^2 \right) \qquad (1\text{-}2)$$

にあたっている。[1] ここに $\mathcal{M}$ は world sheet として与えられるリーマン面で

あり、Σ は world line である。η_{MN} とあらわに書いたのは、これらの作用が一体問題であり、与えられた（metric などの）背景場（background fields）の中で運動するダイナミクスのみ与えるということを強調するためである。つまり、特定の真空の周りの摂動論なのである。背景場をあらわに書いたものは（non-linear）σ-model と呼ばれ、例えば

$$S_\sigma = \int_M d^2\sigma \left[\sqrt{\gamma}\, \gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^M \partial_\beta X^N g_{MN}(X) - \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^M \partial_\beta X^N B_{MN}(X) \right] \frac{-1}{4\pi\alpha'}$$

$$+ \int_{\partial M} d\tau\, \partial_\tau X^M A_M(X) \frac{1}{2\pi\alpha'} \qquad (1\text{-}3)$$

もしくは

$$S_\sigma = \int_\Sigma d\tau \left[\frac{1}{2e} \dot{x}^M \dot{x}^N g_{MN}(x) - \frac{1}{2} e m^2 + \dot{x}^M A_M(x) \right] \qquad (1\text{-}4)$$

という作用で陽に見える。$g_{MN}(X), B_{MN}(X), A_M(X), A_M(x)$ は手で与える背景場である。[2]

特定の背景の下での弦のダイナミクスは詳しく解析されて来たが、しかし背景の決定は何如に行なえるだろうか？粒子の場合は、これは場に対する作用を書く、つまり場の理論に進むことで解決される。例えば重力と 1-form gauge 場の系の場合、

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(R(g) + \frac{1}{4} g^{MP} g^{NQ} F_{MN} F_{PQ} \right). \qquad (1\text{-}5)$$

where $F_{MN} := \nabla_M A_N - \nabla_N A_M$

∇：共変微分

この作用を変分することによって求められる場の運動方程式を解くことで、古典的な（soliton 解としての）場の配位が決定される。この作用自体は、対称性と種々の仮定、要請から書き下す。

このことを弦の理論の場合も行なってみると、弦の理論の背景場

の配位即ち真空を決定出来るのではないだろうか。弦では、場の argument は X^M であり、これは free 周りで展開することにすれば

$$\mathcal{Z} := \left\{ x^M, p^M, \alpha_n^{(+)M}, \alpha_n^{(-)M}, c_n^{(+)}, c_n^{(-)}, \bar{c}_n^{(+)}, \bar{c}_n^{(-)} (,\alpha) \right\} \qquad (1\text{-}6)$$

を座標と見ることができる。[3] 弦の場 (string field) $\Phi[\mathcal{Z}]$ はこの $\mathcal{Z}$ の関数として定義される。

　この $\Phi[\mathcal{Z}]$ で書かれた作用は、粒子の時と同様、対称性から決定すべきものであり、例えば開弦では Batalin - Vilkovisky 形式[4] などから

$$S = \frac{1}{2} \Phi \cdot Q_B \Phi + \frac{g}{3} \Phi \cdot (\Phi * \Phi)$$

なる作用が許される。(この作用に使われる記号、意味等は詳しく §2 で見る。)

	粒子	弦
場	$\phi(x)$ 又は $\vert\phi\rangle$	$\Phi[\mathcal{Z}]$ 又は $\vert\Phi\rangle$
場の argument (座標)	x^M	$\mathcal{Z} = \left\{ x^M, p^M, \alpha_n^{(+)M}, \cdots \right\}$
相互作用	local	(粒子の意味では non local)

表1

　場の理論を量子化することで、多体系の生成・消滅を考えることが出来る。具体的には、正準量子化[5]でもよいが、特に背景に依存しない形式を見たい場合、経路積分による量子化が適当である。作用を用いた、経路積分による生成汎関数を評価することで、弦理論の非摂動的な性質(この中に真空の決定も含まれる)が明らかにされると期待される。[6]

さて近年弦理論の非摂動的性質の理解が飛躍的に進展しているが、それは弦の場の理論からではなく、主に弦の σ-model から決定される低エネルギー有効作用の離散的対称性（双対性, duality）からであった。

弦理論においては質量スペクトラムは離散的な無限に続く一系列（調和振動子）となって現れる。最低状態（超弦理論では massless）の次の第一励起状態はプランク質量程度の大きさの質量を持つ（一体問題の弦の作用(1-1)式に含まれる唯一のパラメータ α'、つまり弦の tension を適当に取る）ので、低エネルギーつまり現在の我々のエネルギースケールでは massless mode が重要である。この理由から massive mode を無視する（もしくは積分する）と、massless スペクトラムを表す場 g_{MN}, B_{MN}, … は弦の σ-model で自然に結合（couple）する形に書ける。これらの場は弦理論の共形不変性（conformal invariance）のために、ある関係式を満たさなければいけないことが分かる（詳しい導出は§3とする）。この関係式を、場の運動方程式と見て、実際に変分でそれらを与える作用を書くことが出来、この作用を低エネルギー有効作用と呼ぶ。例えば type IIB 超弦理論の場合、この有効作用は

$$S = \int d^{10}x \sqrt{-g}\left[R(g) + \frac{1}{4}\mathrm{tr}(\partial M \partial M^{-1}) - \frac{1}{12} H^t M H\right]. \qquad (1\text{-}7)$$

$$\text{where } H = \begin{pmatrix} dB^{(1)} \\ dB^{(2)} \end{pmatrix}, \quad M = e^{\phi}\begin{pmatrix} |\chi + ie^{-\phi}|^2 & \chi \\ \chi & 1 \end{pmatrix}$$

この作用には、次の離散的対称性（S-duality）がある：

$$\Theta \in SL(2,\mathbb{Z}), \quad \begin{cases} H \mapsto (\Theta^t)^{-1} H, \\ M \mapsto \Theta M \Theta^t \end{cases} \qquad (1\text{-}8)$$

ここで特に $\Theta = \Theta_0 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ と選ぶと、これは $\chi = 0$ で

$$B^{(1)}_{MN} \longmapsto B^{(2)}_{MN}, \quad B^{(2)}_{MN} \longmapsto -B^{(1)}_{MN}, \quad e^{-\phi} \mapsto e^{\phi} \qquad (1\text{-}9)$$

となり $B^{(1)}_{MN}$ と $B^{(2)}_{MN}$ を入れ替える対称性になっている。type IIB 超弦理論では NS-NS sector から $B^{(1)}_{MN}$、R-R sector から $B^{(2)}_{MN}$ が来ているが、弦は NS-NS charged state を表現出来る一方で、R-R charged state は表せない。では果して、Θ_0 で入れ替わる、弦の双対 (dual) のものとは何なのであろうか？

上の Θ で注目すべきは、$\Theta = \Theta_0$ の時にこの変換は弦の結合定数 (coupling) ($\sim e^{\phi}$) を逆数 $e^{-\phi}$ にするものになっているということである。つまり Θ_0 は strong - weak duality なのである。故に、この有効作用の duality を弦理論全体の対称性と仮定すると、弦理論の強結合のダイナミクスの情報を、この duality は提供しているに違いない。

Polchinski は、弦理論の強結合で fundamental となる object (つまり弦の双対 (dual) であり、かつ R-R charge を持つ) ものは Dirichlet brane (D-brane) と呼ばれる弦の境界 (boundary) であると conjecture した [1]。type IIB 超弦理論は閉弦の理論だと従来考えられていたが、この conjecture によると、その理論の中に Dirichlet 型境界条件を持つ開弦が含まれており、理論の強結合極限ではその境界が fundamental として振舞うと言うのである。”

この conjecture には様々な角度から consistency が得られ、また更に新理論の可能性、高次元 object とのつながりが探究されて来た。type IIA 超弦理論の強結合としての M - theory [2]、super-membrane theory [3] と D-brane M-theory とのつながり、また type IIB 超弦理論の S-duality を明快に説明する F-theory [4]、更にこれらの compact 化から出て来る様々な string-string duality である。

これらの発展の際に一つの大きな役割を果したものが、先に紹介した低エネルギー有効作用である。特に、D-brane の低エネルギーの振舞いを表す D-brane 作用 (D-brane action) の持つ双対の性質は重要であった [5]。この D-brane 作用は §3 で詳しく紹介することにしよう。

本論文の目的は、弦の場の理論の枠組に、弦の境界(D-brane)の概念を導入することである。D-braneは上で述べた様に、(弦理論の現在の最大の目標である)非摂動的性質の理解に大きな手助けとなるobjectであり、また弦の場の理論は弦理論の一つの非摂動的定式化である。これらを融合する試みは未だ全く行なわれておらず、本稿が初めてであろうと思われる。

§2で弦の場の理論、§3で境界を表すboundary stateとD-braneの有効作用をreviewする。§4では、§3で紹介したboundary stateを用いて、source項を持つ新しい弦の場の理論の作用を提案し、その対称性と低エネルギーでの意味を議論する。加えて、弦のσ-modelの対称性と弦の場の理論の対称性の比較・対照から、D-brane作用への弦の場の理論からの補正を導く。§5で最後に、以上の議論の問題点と、これからの可能性、特に新しい作用の意味・解釈について述べる。

本稿のnotationは、[6]とは少し異なる(σ-modelとの対応をみるため)。

$$X^{\mu}(\tau,\sigma) = x^{\mu}+p^{\mu}\tau+\frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\left(\alpha_n^{(+)\mu}e^{in(\tau+\sigma)}+\alpha_n^{(-)\mu}e^{in(\tau-\sigma)}\right). \quad (1\text{-}10)$$

註 1　Nambu-Goto型作用とこれら(1-1),(1-2)は古典的に同値であり、弦(2次元理論)の場合だけ、対応するPolyakov型作用には宇宙項は無い。詳しくは弦理論の包括的な教科書である[7]、もしくは[8]に更に高次元のobjectに関する議論がある。

2　以下、本稿では $\alpha'=\frac{1}{2}$ とする。

3　αは弦の長さを与える量で、HIKKO[6]の弦の場の理論に必要となる。

4　BV形式は、対称性を持つ作用を構成するための手引きであり、特にBRST形式を通じた経路積分量子化を行なう際の理解を明

確にしてくれる。[9] の Appendix I を参照のこと。

5 例えば light cone 弦の場の理論は、教科書 [10] に詳しい。

6 本稿では第二量子化は扱わない。

7 D-brane に関する良い入門的 review は [11] 等がある。

DEPARTMENT OF PHYSICS
KYOTO UNIVERSITY.

§2. 弦の場の理論 (String Field Theory, SFT)

§1では弦理論の真空の決定のために場の理論への移行が重要であることを見た。ここでは、特に bosonic closed string について、弦の場 (String field) の古典的作用を構成し、その対称性、低エネルギー極限を考えてみよう。

§2-1. 自由な作用[1]

弦は一体問題としては、2次元の共形場理論 (CFT) とみなすことが出来、その作用 (1-1) 式から求まる運動方程式を具体的に解けば、弦座標 $X^\mu(\tau,\sigma)$ に対して (1-10) 式の展開を得る。また共変的に扱う際には ghost 座標 c, $\bar{c}$ も同様に振動子で展開される (一体問題の詳しい話は [7] を参照。)。

弦の場は、これらの弦座標の (汎) 関数として定義されるので、

$$
\begin{aligned}
\text{座標 } Z &= \{X^\mu, c, \bar{c} \text{ の全 mode}\} \\
&= \{x^\mu,\ \alpha_n^{(+)\mu},\ \alpha_n^{(-)\mu},\ c_n^{(+)},\ c_n^{(-)},\ \bar{c}_n^{(+)},\ \bar{c}_n^{(-)} (, \alpha)\}
\end{aligned}
\qquad (2\text{-}1)
$$

を用いて $\Phi[Z]$ と書かれる[2]。この $\Phi[Z]$ に対して、以下の条件を置く：

(1) Φ の ghost 数 n_{FP} を -1 と置く。(ここで、$n_{FP}(c) = -n_{FP}(\bar{c}) = 1$)

(2) Φ は real である、即ち

$$
\Phi^\dagger[Z] = \Phi[\tilde{Z}] \quad \text{where } \tilde{Z} = \{X^\mu(-\sigma), -c(-\sigma), \bar{c}(-\sigma), -\alpha\} \qquad (2\text{-}2)
$$

(3) Φ は、Z の中の σ の translation により変化しない、即ち σ-translation の生成子を

$$
L^{(+)} - L^{(-)} = \int_0^{2\pi} d\sigma \left(X^{\mu\prime} P_\mu + c' \pi_c + \bar{c}' \pi_{\bar{c}} \right) \qquad (2\text{-}3)
$$

$'$: σ 微分、P, π_c, $\pi_{\bar{c}}$ は共役運動量

として $\quad (L^{(+)} - L^{(-)})\,\Phi = 0 \qquad (2\text{-}4)$

(もしくは $L^{(+)} = L^{(-)}$ の sector への射影演算子を $\mathcal{P}$ と書けば
$\mathcal{P}\,\Phi = \Phi.$) $\qquad (2\text{-}5)$

- (1)は、Φを振動子で展開し、zero mode x^M (とα) の依存性を係数に残した表現[3]

$$
\begin{aligned}
|\Phi\rangle = -\bar{c}_0 \Big[& \varphi(x)|0\rangle + \Big\{ \tfrac{1}{2}\hat{h}_{MN}(x)\,(\alpha^M_{-1}\alpha^N_{-1})^{(+-)}|0\rangle \\
& + \tfrac{1}{2}B_{MN}(x)\,(\alpha^M_{-1}\alpha^N_{-1})^{[+-]}|0\rangle + \hat{D}(x)\,(c_{-1}\bar{c}_{-1})^{(+-)}|0\rangle \\
& + S(x)\,(c_{-1}\bar{c}_{-1})^{[+-]}|0\rangle \Big\} + \cdots \Big] \\
& + \tfrac{i}{2}\Big[\Big\{ b_M(x)\,(\bar{c}_{-1}\alpha^M_{-1})^{(+-)}|0\rangle + e_M(x)\,(\bar{c}_{-1}\alpha^M_{-1})^{[+-]}|0\rangle \Big\} + \cdots \Big]
\end{aligned}
\qquad (2\text{-}6)
$$

において[4]係数場 $\varphi, \hat{h}, \cdots$ の ghost 数を定める条件であるが、以下特に、これら係数場の ghost 数を 0 と置く。(excitation number が $N^{(+)} = N^{(-)} \leq 1$ のものは上に挙げたものだけで、これらの ghost 数は 0 である。)

- (2)は係数場のエルミート性を決める定義式である。
- (3)は自然な条件であろう。L は (τ, σ) で張られる2次元空間の並進の生成子であり、(2-3)式の組み合わせで σ 方向の並進となる。

さて、この条件のついた任意の状態 $|\Phi\rangle$ に関して、Kato-Ogawa は第一量子化の観点から (共変的に BRST 形式を用いて量子化し) 以下の事実を導いた [12]:

$$Q_B|\Phi\rangle = 0 \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \Phi : \text{physical} \qquad (2\text{-}7)$$

とし、更に ghost zero mode については $\{c_0, \bar{c}_0\} = 1$ から doubling が起こるので $|\downarrow\downarrow\rangle$ state のみ選ぶ、即ち

$$\bar{c}_0|\Phi\rangle = 0 \quad \text{and} \quad \pi_c^0|\Phi\rangle = 0 \qquad (2\text{-}8)$$

とすると、この physical Φ について、on-shell 条件

$$L\,|\Phi\rangle = 0 \qquad \text{where } L = \{Q_B, \overline{c}_0\} = -L_0^X - L_0^{FP} + a \tag{2-9}$$

が成立します $|\Phi\rangle$ は

$$|\Phi\rangle = |DDF\rangle + \hat{Q}_B|*\rangle \tag{2-10}$$

$$\text{where}\begin{cases} |DDF\rangle : \text{横波 mode のみで張られる正ノルム state.} \\ \hat{Q}_B := Q_B\big|_{\text{ghost zero mode}=0}. \end{cases}$$

と展開されるため非負ノルムとなる (no ghost theorem)。

Q_B は BRST 電荷であり、[5]

$$\begin{aligned} Q_B &:= -2\left(Q_B^{(+)} + Q_B^{(-)}\right) \\ Q_B^{(\pm)} &:= \sum_{m=-\infty}^{\infty} :\left(L_{-m}^{X(\pm)} + \frac{1}{2}L_{-m}^{FP(\pm)} - a\,\delta_{m,0}\right)c_m: \\ L_m^{X(\pm)} &:= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} :\alpha_n^{(\pm)M}\,\alpha_{m-n\,M}^{(\pm)}: \\ L_m^{FP(\pm)} &:= \sum_{n=-\infty}^{\infty}(n+m):\overline{c}_{m-n}^{(\pm)}\,c_n^{(\pm)}: \end{aligned} \tag{2-11}$$

と構成され、これは $d=26$, $a=1$ の時にのみ

$$Q_B^{\,2} = 0 \tag{2-12}$$

を満たす。

これらの事実を用いて、弦の場の作用を考えてみよう。上の physical condition (2-7) を導く作用は、

$$S = \frac{1}{2}\Phi\cdot Q_B\Phi \quad \left(= \frac{1}{2}\langle\Phi|Q_B|\Phi\rangle\right) \tag{2-13}$$

と書ける。ここで・積は

$$\Phi_1\cdot\Phi_2 := \int dZ\;\pi_c^0\;\Phi_1[\tilde{Z}]\,\Phi_2[Z] \tag{2-14}$$

で定義され[6] non-zero mode に対しては通常の bracket notation $\langle \Phi_1 | \Phi_2 \rangle$ に対応している。

この作用には、

$$\delta \Phi = Q_B \Lambda \qquad \text{for } {}^\forall \Lambda,\ n_{FP}(\Lambda) = -2 \tag{2-15}$$

という[7]対称性が（$d=26$, $\alpha=1$ で）存在することに注目しよう[8]。
この parameter Λ は弦の場の自由度を持つから、この対称性は係数場で見れば無限個の関数自由度を持った対称性なのである。

以上の様に、大きな対称性を持った弦の場の理論の作用(2-13)が構成された訳だが、この作用と対称性は具体的にどの様な意味を持つのか、各励起 mode について係数場で表現して見てみよう。

Φ の展開式 (2-6) と Q_B の振動子表示 (2-11) を、作用 (2-13) に代入すると

$$\begin{aligned}\Phi \cdot Q_B \Phi = \int d^dx \Big[&\tfrac{1}{2}\varphi(\Box+8)\varphi + \tfrac{1}{4}\hat{h}_{MN}\Box\hat{h}^{MN} + \tfrac{1}{4}B_{MN}\Box B^{MN} \\ &- \tfrac{1}{2}\hat{D}\Box D + \tfrac{1}{2}S\Box S + b^M(\partial_M\hat{D} - \partial^N\hat{h}_{MN}) \\ &+ e^M(\partial_M S - \partial^N B_{NM}) - \tfrac{1}{2}(b_M b^M + e_M e^M) \Big].\end{aligned} \tag{2-16}$$

また、対称性の方は

$$\begin{aligned}|\Lambda\rangle = -\bar{c}_0 \Big\{ i \Big[\varepsilon_M(x)\left(\bar{c}_{-1}\alpha_{-1}^M\right)^{(+-)}|0\rangle + \zeta_M(x)\left(\bar{c}_{-1}\alpha_{-1}^M\right)^{[+-]}|0\rangle \Big] + \cdots \Big\} \\ - \frac{1}{2\sqrt{2}}\eta(x)\,\bar{c}_{-1}^{(+)}\bar{c}_{-1}^{(-)}|0\rangle + \cdots\end{aligned} \tag{2-17}$$

を代入すると (2-15) は

$$\begin{aligned}&\delta\hat{h}_{MN} = \partial_M\varepsilon_N + \partial_N\varepsilon_M, \quad \delta B_{MN} = \partial_M\zeta_N - \partial_N\zeta_M, \quad \delta\varphi = 0, \\ &\delta\hat{D} = \partial_M\varepsilon^M, \quad \delta S = -\partial_M\zeta^M + \eta, \quad \delta b_M = -\Box\varepsilon_M, \quad \delta e_M = -\Box\zeta_M + \partial_M\eta\end{aligned} \tag{2-18}$$

となる。対称性 $\eta(x)$ の自由度を用いて場 $\mathcal{S}(x)$ を gauge away し、
また書き下した作用 (2-16) から見える様に場 $e_M(x)$, $b_M(x)$ は補助場であるのでその運動方程式

$$\begin{cases} b_M = \partial_M \hat{D} - \partial^N \hat{h}_{MN} \\ e_M = \partial_M \mathcal{S} - \partial^N B_{NM} \end{cases} \qquad (2\text{-}19)$$

を用いて消去(積分)する。更に、

$$\begin{cases} h_{MN} := \hat{h}_{MN} - \eta_{MN} D \\ D := \hat{D} - \frac{1}{2} h_M{}^M \end{cases} \qquad (2\text{-}20)$$

の再定義を行なうと、作用 (2-16) は

$$\begin{aligned} \Phi \cdot Q_B \Phi = \int d^d x \Big[& \frac{1}{2} \varphi (\Box + 8) \varphi \\ & + \Big\{ \frac{1}{4} h^{MN} \left(\Box h_{MN} - 2 \partial_N \partial^P h_{MP} + 2 \partial_M \partial_N h^P{}_P - \eta_{MN} \Box h^P{}_P \right) \\ & - \frac{1}{4} \partial_P B_{MN} \left(\partial^M B^{NP} + \partial^N B^{PM} + \partial^P B^{MN} \right) \\ & + \frac{d-2}{4} D \Box D \Big\} + \cdots \Big] \end{aligned} \qquad (2\text{-}21)$$

となる。右辺1行目はタキオン(質量の二乗が負)であり、無視する。2行目は Einstein-Hilbert 作用の bilinear 項

$$\frac{1}{2} \sqrt{-g}\, R(g) \Big|_{\text{bilinear}} \qquad g_{MN} = \eta_{MN} + h_{MN} \qquad (2\text{-}22)$$

に一致することから、係数場 h_{MN} は重力子 (graviton) である。3行目は Kalb-Ramond (2-form) gauge 場 B_{MN} の運動項

$$-\frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{3!} H_{MNP} H^{MNP} \qquad H_{MNP} := \partial_M B_{NP} + \partial_N B_{PM} + \partial_P B_{MN} \quad (2\text{-}23)$$

となっている。4行目は dilaton と呼ばれる scalar 場の運動項である。
これらは第一量子化の時に良く知られた場 (excitation number が1以下) に対しての、自然な作用と言えよう。

まとめると、

$$S = \frac{1}{2}\Phi \cdot Q_B \Phi = \frac{1}{2}\int d^d x \left[\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, R(g) \Big|_{\text{bilinear}} - \frac{d-2}{4}(\partial D)^2 - \frac{1}{12}H^2 \right] \qquad (2\text{-}24)$$

+ 非 massless mode.

また場の再定義の後では変換 Δ は

$$\begin{cases} \delta h_{MN} = \partial_M \varepsilon_N + \partial_N \varepsilon_M, \\ \delta B_{MN} = \partial_M \xi_N - \partial_N \xi_M, \\ \delta D = 0, \quad \delta\varphi = 0 \end{cases} \qquad (2\text{-}25)$$

であり、これから、$\varepsilon_M(x)$ は一般座標変換、$\xi_M(x)$ は $B_{MN}(x)$ の gauge 変換になっていることが分かる。

§2-2. 相互作用

前節では physical condition (2-7) を再現する自由な作用 (2-13) を構成したが、それでは弦の相互作用（例えば n 弦相互作用, n≥3）はどの様にこの形式に導入出来るだろうか？

図 1

三弦相互作用を定義しよう。弦1と弦2が相互作用して弦3になる、という状況を

$$\Phi_3[Z_3] = \int dZ_1 dZ_2\, \Phi_1[Z_1]\, \Phi_2[Z_2]\, V_{123}[Z_1, Z_2, \tilde{Z}_3] \quad \left(=: (\Phi_1 * \Phi_2)[Z_3] \right) \qquad (2\text{-}26)$$

もしくは bracket の記法では

$$|\Phi_1 * \Phi_2\rangle_3 := \langle\Phi_1|\langle\Phi_2|V_{123}\rangle \tag{2-27}$$

と書くことにする。ここで $V_{123}[z_1, z_2, \hat{z}_3]$ は弦1,2,3の振動子(座標) z_1, z_2, z_3 で書かれたある表式であり，また $|V_{123}\rangle$ も同様 z_1, z_2, z_3 で書かれた関数が真空 $|0\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3$ にかかったもので，$V_{123}[z_1, z_2, \hat{z}_3]$ のFock表示である。これは粒子では

$$V_{123} \sim \int dx_1\, dx_2\, \delta(x_3 - x_1)\, \delta(x_3 - x_2) \tag{2-28}$$

の様なものに対応している。何故なら，

$$\int dx\,(\phi(x))^3$$

$$= \underbrace{\int}_{\substack{\text{bracket}\\(\cdot\,\text{積})}} dx_3\, \underset{\substack{\uparrow\\ \Phi_3[z_3]}}{\phi(x_3)} \underbrace{\overbrace{\int \underset{\substack{\uparrow\\ dz_1 dz_2}}{dx_1 dx_2}\, \delta(x_3 - x_1)\, \delta(x_3 - x_2)}^{V_{123}}}_{(*\,\text{積})} \underset{\substack{\uparrow\\ \Phi_1[z_1]}}{\phi(x_1)}\, \underset{\substack{\uparrow\\ \Phi_2[z_2]}}{\phi(x_2)} \qquad \longleftarrow \text{粒子}$$

$$V_{123}[z_1, z_2, \hat{z}_3] \qquad\qquad \longleftarrow \text{弦}$$

と書き直せるためである。(2-28)は，

$$x_1 = x_3\ , \quad x_2 = x_3 \tag{2-29}$$

という固有方程式の解を積分したものになっていることを注意しておく。

対応から三弦相互作用を表す作用の項は

$$\Phi_3 \cdot (\Phi_1 * \Phi_2) \qquad \Big(\langle\Phi_3|\Phi_1 * \Phi_2\rangle\Big) \tag{2-30}$$

となり，この相互作用項を自由な作用(2-13)に加えることで，三弦相互作用の入った作用を書くことが出来る：

$$S = \frac{1}{2}\Phi \cdot Q_B \Phi + \frac{g}{3}\Phi \cdot (\Phi * \Phi)\ . \tag{2-31}$$

ここで g は相互作用の強さを与える係数，つまり結合定数である。

さて、この相互作用を導入することで、自由な作用(2-13)にあった大きな対称性(2-15)は損なわれないだろうか。[9] gauge変換が相互作用を含む様、一般化しよう。この時、次の対応を見ると分かり易い[13]：

Φ	$\leftrightarrow$	$A = A_M(x)\,dx^M$
$Q_B\ (Q_B^2 = 0)$	$\leftrightarrow$	$d\ (d^2 = 0)$
$S = \frac{1}{2}\Phi\cdot Q_B\Phi$	$\leftrightarrow$	$S = \frac{1}{2}\int \mathrm{tr}\, A\wedge dA$
$\delta\Phi = Q_B\Lambda$	$\leftrightarrow$	$\delta A = d\lambda \quad \lambda$: 0-form

表2

表2の右欄は(3次元) Chern-Simons (CS)理論である。これを相互作用のある場合に拡張すると、gauge変換はhomogeneousな回転部分を加えて

$$\delta A = d\lambda + g[A,\lambda] \tag{2-32}$$

(A,λはnon-Abelianとする。)であり、作用はこのgauge変換で不変な

$$S = \int \mathrm{tr}\left(\frac{1}{2}A\wedge dA + \frac{g}{3}A\wedge A\wedge A\right) \tag{2-33}$$

となる。この作用と弦の場の理論の作用(2-31)の類似性は顕著であるから(・と＊が共に「∧」になってしまっていることに注意しておこう)、(2-32)より弦の場のgauge変換を

$$\delta\Phi = Q_B\Lambda + g(\Phi*\Lambda - \Lambda*\Phi) \tag{2-34}$$

とすればうまくいきそうである。[10] 実際に作用(2-31)に対してこのgauge変換を施してみよう。CS理論のgauge不変性のためには

$$d^2 = 0\ ,\quad \begin{cases} d(A\lambda) = dA\cdot\lambda - A\wedge d\lambda \\ d(\lambda A) = d\lambda\wedge A + \lambda\, dA \end{cases}\ ,\quad \int d(\text{関数}) = 0 \tag{2-35}$$

などの微分形式の公式に加えて、traceの順回性

$$\mathrm{tr}(M_1M_2\cdots M_n) = \mathrm{tr}(M_nM_1M_2\cdots M_{n-1}) \tag{2-36}$$

が必要であることは、具体的に代入してみると分かるが、弦の場の理論の場合もそれらと同様な恒等式が必要となる。

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \frac{1}{2}\delta\Phi\cdot Q_B\Phi + \frac{1}{2}\Phi\cdot Q_B\delta\Phi \\
&\quad + \frac{g}{3}\delta\Phi\cdot(\Phi*\Phi) + \frac{g}{3}\Phi\cdot(\delta\Phi*\Phi) + \frac{g}{3}\Phi\cdot(\Phi*\delta\Phi) \\
&= \frac{1}{2}Q_B\Lambda\cdot Q_B\Phi + \frac{1}{2}\Phi\cdot Q_B^2\Lambda \\
&\quad + g\Big[\frac{1}{2}(\Phi*\Lambda)\cdot Q_B\Phi - \frac{1}{2}(\Lambda*\Phi)\cdot Q_B\Phi + \frac{1}{2}\Phi\cdot Q_B(\Phi*\Lambda) \\
&\qquad - \frac{1}{2}\Phi\cdot Q_B(\Lambda*\Phi) + \frac{1}{3}Q_B\Lambda\cdot(\Phi*\Phi) \\
&\qquad + \frac{1}{3}\Phi\cdot(Q_B\Lambda*\Phi) + \frac{1}{3}\Phi\cdot(\Phi*Q_B\Lambda)\Big] \\
&\quad + \frac{g^2}{3}\Big[(\Phi*\Lambda)\cdot(\Phi*\Phi) - (\Lambda*\Phi)\cdot(\Phi*\Phi) \\
&\qquad + \Phi\cdot((\Phi*\Lambda)*\Phi) - \Phi\cdot((\Lambda*\Phi)*\Phi) \\
&\qquad + \Phi\cdot(\Phi*(\Phi*\Lambda)) - \Phi\cdot(\Phi*(\Lambda*\Phi))\Big].
\end{aligned}
\tag{2-37}
$$

CS理論の作用の不変性と同じ形の cancelation を要請しよう。すると、

$$
Q_B^2 = 0\ , \qquad \int Q_B(\text{関数}) = 0 \quad (\text{部分積分}) \tag{2-38}
$$

という自由な作用の場合に既に要請したものに加えて、

$$
\begin{cases}
Q_B(\Phi*\Lambda) = (Q_B\Phi)*\Lambda - \Phi*(Q_B\Lambda)\ , \\
Q_B(\Lambda*\Phi) = (Q_B\Lambda)*\Phi + \Lambda*(Q_B\Phi)
\end{cases}
\tag{2-39}
$$

と

$$
A\cdot(B*C) = B\cdot(C*A) = C\cdot(A*B) \qquad (A, B, C = \Phi, Q_B\Lambda) \tag{2-40}
$$

で $O(g)$ の cancelation を達成出来る!! (2-39) の公式と (2-38) は CS 理論での (2-35)，また (2-40) は (2-36) に対応している。

$O(g^2)$ の項については、CS理論と同じ cancelation の形

$$
(\Phi*\Lambda)\cdot(\Phi*\Phi) - (\Lambda*\Phi)\cdot(\Phi*\Phi) = 0\ , \ \cdots \tag{2-41}
$$

を要請すると(CS理論では wedge積「$\wedge$」の反可換性と traceの順回性で cancelしていたが) 弦の場の理論への直接の一般化が難しい。例えば(2-41)を実現するために

$$\Phi * \Lambda = \Lambda * \Phi \tag{2-42}$$

などとしてしまうと相互作用が消えてしまう。そこで, wedge $\leftrightarrow$ $*$ の対応と ghost数から

$$\Phi * \Lambda = -\Lambda * \Phi \tag{2-43}$$

が自然なので, これを採用すると, $O(g^2)$ の cancelationは

$$(\Phi*\Lambda)\cdot(\Phi*\Phi) + \Phi\cdot((\Phi*\Lambda)*\Phi) + \Phi\cdot(\Phi*(\Phi*\Lambda)) = 0 \tag{2-44}$$

で達成されることになる。[12] この第一項は

$$\begin{aligned}(\Phi*\Lambda)\cdot(\Phi*\Phi) &= (\Phi*\Phi)\cdot(\Phi*\Lambda) \\ &= \Phi\cdot(\Lambda*(\Phi*\Phi)) = \Phi\cdot((\Phi*\Phi)*\Lambda)*(-1)\end{aligned} \tag{2-45}$$

と書けるので(第一の等式で

$$\Phi_A\cdot\Phi_B = (-)^{|A||B|}\,\Phi_B\cdot\Phi_A \tag{2-46}$$

という恒等式を用いた。(これは・積の定義(2-14)で Z を $\tilde{Z}$ と書けば分かる。$|A|$ は $n_{FP}(\Phi_A)$ のこと。) また第二の等式は ghost数を考慮しながら(2-40)を使い, 第三の等式では(2-43)を用いた。) これより(2-44)は

$$\Phi\cdot\Big((\Phi*\Phi)*\Lambda - (\Phi*\Lambda)*\Phi + (\Lambda*\Phi)*\Phi\Big) = 0. \tag{2-47}$$

以上, 作用の不変性のために得られた恒等式(2-39,40,43,47)を, 任意の ghost数を持つ状態に対して自然に拡張すると, 以下の恒等式を得る:

- ライプニッツ則 $\quad Q_B(\Phi_A*\Phi_B) = (Q_B\Phi_A)*\Phi_B + (-)^{|A|}\,\Phi_A*(Q_B\Phi_B) \qquad (2\text{-}48)$
- 順回対称性 $\quad \Phi_A\cdot(\Phi_B*\Phi_C) = (-)^{|A||B|+|A||C|}\,\Phi_B\cdot(\Phi_C*\Phi_A) \qquad (2\text{-}49)$
- 反可換性 $\quad \Phi_A*\Phi_B = -(-)^{|A||B|}\,\Phi_B*\Phi_A \qquad (2\text{-}50)$

○ヤコビ恒等式

$$(\Phi_A * \Phi_B) * \Phi_C + (-)^{|A||B|+|A||C|}(\Phi_B * \Phi_C) * \Phi_A + (-)^{|B||C|+|B||A|}(\Phi_C * \Phi_A) * \Phi_B = 0. \qquad (2\text{-}51)$$

よって，＊積（即ち相互作用関数V_{123}）はこれら四等式を満たすものであるとすると，作用は対称性を持つ。[13]

HIKKO［6］は，次の$|V_{123}\rangle$が上の四等式を満足することを示した：

$$|V_{123}\rangle = [\mu(1,2,3)]^2 \wp^{(1)} \wp^{(2)} \wp^{(3)} \prod_{r=1}^{3}\left(1 - \overline{c}_0^{(r)} \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_{int}^{(r)}\right) \cdot \exp\left(F(1,2,3)\right)|0\rangle_{1,2,3}\ \delta(1,2,3) \qquad (2\text{-}52)$$

ここで，

$$F(1,2,3) = \sum_{I}\sum_{r,s}\sum_{n,m>0} \overline{N}^{rs}_{nm}\left(\frac{1}{2}\alpha^{(I)(r)}_{-n}\alpha^{(I)(s)}_{-m} + i\,\gamma^{(I)(r)}_{-n}\overline{\gamma}^{(I)(s)}_{-m}\right) + \frac{1}{2}\sum_{I}\sum_{r}\sum_{n>0}\overline{N}^{r}_{n}\alpha^{(I)(r)}_{-n}\cdot \mathbb{P}^{(r)} + \tau_0 \sum_{r}\frac{1}{\alpha_r}\frac{p_r^2}{4}$$

$$\overline{N}^{rs}_{nm} = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3\left(\frac{\alpha_r}{n} + \frac{\alpha_s}{m}\right)^{-1}\overline{N}^{r}_{n}\overline{N}^{s}_{m},$$

$$\overline{N}^{r}_{n} = \frac{1}{\alpha_r} f_n\left(-\frac{\alpha_{r+1}}{\alpha_r}\right)e^{n\tau_0/\alpha_r}, \quad (\alpha_{r+3} := \alpha_r)$$

$$f_n(x) = \frac{\Gamma(nx)}{n!\,\Gamma(nx-n+1)}, \quad \mathbb{P}^{(r)} = \alpha_r p_{r+1} - \alpha_{r+1} p_r, \qquad (2\text{-}53)$$

$$\gamma^{(I)(r)}_{n} = i\,n\,\alpha_r c^{(I)(r)}_{n}, \quad \overline{\gamma}^{(r)}_{n} = \overline{c}_n^{(r)}/\alpha_r, \quad \tau_0 = \sum_r \alpha_r \log|\alpha_r|,$$

$$\omega_{int}^{(r)} = \frac{i}{\sqrt{2}}\sum_{I}\sum_{s}\sum_{n>0}\left(\chi^{rs}\overline{N}^{s}_{n} + \frac{1}{\alpha_r}\sum_{m=1}^{n-1}\overline{N}^{rs}_{n-m,m}\right)\gamma^{(I)(s)}_{-n},$$

$$\chi^{rs} = \delta^{rs}\frac{1}{\alpha_r}(\alpha_{r-1} - \alpha_{r+1}) + \sum_{t=1}^{3}\epsilon^{rst},$$

$$[\mu(1,2,3)]^2 = \exp\left(-2\tau_0\sum_{r=1}^{3}\frac{1}{\alpha_r}\right), \quad \delta(1,2,3) = (2\pi)^d\delta^{2d}\left(\sum_r p_r\right)\cdot 2\pi\delta\left(\sum_r \alpha_r\right),$$

$\wp^{(i)}$：弦iについての射影演算子(2-5)．

この$|V_{123}\rangle$は，次図2の様な三弦相互作用を意味している。

図 2

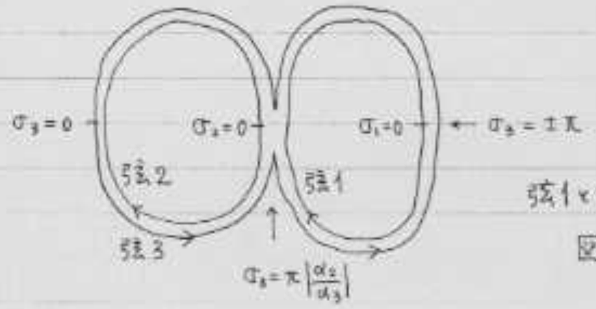
と言うのも、詳しい構成法は略すが、(2-52)の表式のうち $\exp[F(1,2,3)]$ の部分は

$$0 = \theta(\pi\alpha_1 - |\sigma|)X_M^{(\pm)(1)}(\sigma_1) + \theta(|\sigma| - \pi\alpha_1)X_M^{(\pm)(2)}(\sigma_2) - X_M^{(\pm)(3)}(\sigma_3) \quad \left(:= f\right)$$

$$\left(\sigma_1(\sigma) = \frac{\sigma}{\alpha_1},\ \sigma_2(\sigma) = \frac{\sigma - \pi\alpha_1 \mathrm{sgn}(\sigma)}{\alpha_2},\ \sigma_3(\sigma) = \frac{\pi|\alpha_3|\,\mathrm{sgn}(\sigma) - \sigma}{|\alpha_3|}\right) \tag{2-54}$$

という(固有)方程式の解(固有状態)になっているからである。

$$f\,|V_{123}\rangle \cong 0 \tag{2-55}$$



弦1と弦2が弦3とoverlapしている。

図 3

註 1 本節(§2-1)の議論の大半は九後先生の明解なreview[14]からのものである。
また本論文ではHIKKOのSFT[6]を採用している。

2 αは弦の長さを表す量であり、light cone SFTでは $\alpha = p^+$ となる。

3 π_c^0(次註参照) dependenceは以降勝手に無視する処法をとる。

4 本論文での対称和・反対称和の定義は

$$(ab)^{(+-)} := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a^{(+)}b^{(-)} + a^{(-)}b^{(+)}\right),\quad (ab)^{[+-]} := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a^{(+)}b^{(-)} - a^{(-)}b^{(+)}\right) \tag{2-56}$$

また zero mode の定義は

$$\alpha_0^{(+)M} = \alpha_0^{(-)M} = \frac{1}{2}p^M = -\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x_M},$$

$$\overline{c}_0^{(\pm)} =: \frac{1}{2}\overline{c}_0 \mp i\pi_c^0,\quad c_0^{(\pm)} =: \frac{\partial}{\partial \overline{c}_0} \pm \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial \pi_c^0} \tag{2-57}$$

つまり ghost の振動子展開は

DEPARTMENT OF PHYSICS
KYOTO UNIVERSITY.

$$
\begin{aligned}
c(\sigma) &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left\{ i\frac{\partial}{\partial \pi_c^0} + \sum_{n\neq 0}\left(c_n^{(+)} - c_{-n}^{(-)}\right)e^{in\sigma}\right\} \\
\bar{c}(\sigma) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left\{ \bar{c}_0 + \sum_{n\neq 0}\left(\bar{c}_n^{(+)} + \bar{c}_{-n}^{(-)}\right)e^{in\sigma}\right\} \qquad (\tau=0)
\end{aligned}
\tag{2-58}
$$

としている。

5 (2-11) 第一式中の (-2) の因子は convention である。

6 π_c^0 は積分の定義と考える。dZ の中に $d\pi_c^0$ が入っているため、この定義では $\int d\pi_c^0\, \pi_c^0$ となり π_c^0 independent 部分を取り出す都合になる。註3の処法を採る場合は π_c^0 は書かなくてよい。

7 ghost 数をまとめると、簡便的に

	Φ	Q_B	Λ	$*$積
n_{FP}	-1	1	-2	1

8 積分 measure 内の π_c^0 は、Q_B の部分積分の際にひっかかると思うかもしれないが、$\{Q_B, \pi_c^0\} = i(L^{(+)} - L^{(-)})$ の等式を用いれば (2-4) によりこの寄与は消える。

9 BV 形式 (§1 註4) を用いて、量子化を見据えた厳密な構成も出来るが、本節では発見法的な構成を見よう。

10 $*$積の ghost 数は 2 であると簡便的に言える。(註7参照)

11 CS 理論と SFT との対応は、Witten の開弦 SFT の場合により正確となる [13]。

12 この (2-44) 式は、(2-40) を用いて $(\Phi * \Lambda)\cdot(\Phi * \Phi) = 0$ とも書ける。

13 註12から分かる様に、ヤコビ恒等式 (2-51) まで一般化する必要性は他の恒等式に比べて低い、と言えよう。

§3. D-brane

§1ではD-braneがdualityにおいて重要でありひいては非摂動的性質の理解へと繋がる可能性を持つ，ということを紹介したが，D-braneの詳しい紹介は[5]とその中の参考文献を参照してもらうとして，ここでは§4，§5に必要な知識の紹介を行なう。

§3-1. D-braneとboundary state

開弦の理論にはT-dualityと呼ばれる離散的対称性がある。開弦の含まれた理論に対してこのT-dual変換を施すと，開弦のセクターはT不変ではないので異なる理論に写るが，このT変換は開弦の境界条件(boundary condition)を

$$\text{Neumann 型} \quad \underset{T}{\longleftrightarrow} \quad \text{Dirichlet 型} \tag{3-1}$$

と写すことが知られている[11]。

通常の自由端(Neumann)の開弦理論にT変換を行なうとこの様にDirichlet型境界条件を持った開弦の理論が出来るが，この固定端(= Dirichlet)の弦の端点の集合をDirichlet brane (D-brane)と呼ぶ。普通D-braneはDirichlet p-braneと書けば

$$\text{座標の添字 } M = \begin{cases} \mu = 0 \sim p \quad : \; p+1 \text{ 個 Neumann 型} \\ \lambda = p+1 \sim d-1 : \; d-p-1 \text{ 個 Dirichlet 型} \end{cases} \tag{3-2}$$

の境界条件を持つ開弦の端点の乗る超空間，と定義される。即ち，D-p-braneは$p+1$次元world volumeを持つ。

Polchinskiのconjecture[1]では，D-braneはtype II(つまり閉弦の)超弦理論に自然に入って来ると予言されている。ここではこの考えに添って，D-braneを表す状態を閉弦の枠組で見てみよう。

境界のある world sheet を持つ弦理論は，閉弦でなく本質的に開弦の理論になってしまう。すなわち，world sheet を表す X^M を (σ, τ) で振動子展開した時の right-mover と left-mover の係数 $\alpha_n^{(+)}$, $\alpha_n^{(-)}$ が境界上で関係づいて

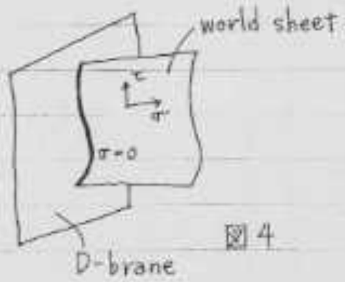


図4

$$\alpha_n^{(+)} \sim \alpha_{-n}^{(-)} \tag{3-3}$$

となりこれから振動子座標は係列の定在波になってしまう。しかしここで考えたいのは閉弦の理論であるので，図の様に境界(D-brane)と結合していると考え，また境界では，$\alpha^{(+)}$ と $\alpha^{(-)}$ で書かれた状態

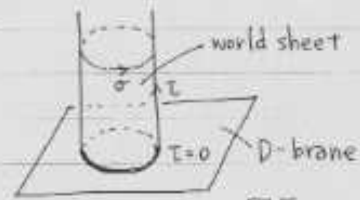


図5

$$|B\rangle \tag{3-4}$$

になっているという見方で進めてみよう。この状態 $|B\rangle$ を boundary state[2] と呼ぶ。$|B\rangle$ は境界の性質を持つものなので，(3-3) を固有方程式とする固有状態として決定するのが自然である。即ち，

$$\alpha_n^{(+)} |B\rangle \sim \alpha_{-n}^{(-)} |B\rangle . \tag{3-5}$$

(3-3) を詳しく求めて，$|B\rangle$ を決定しよう。開弦の端点には Chan-Paton 因子と呼ばれる gauge 場(の電荷)を assign 出来るので，端点の集合である D-brane の上には gauge 場を乗せることが出来る。

$$\text{gauge 場 } A_M(X) \begin{cases} A_\mu & (\text{Neumann 方向}) \\ A_i & (\text{Dirichlet 方向}) \end{cases} \tag{3-6}$$

A_M のうち Dirichlet 方向を表す A_i は [5] で見る様に D-brane を動かす自由度に対応するが，本稿ではこの mode は無いものと仮定する(→ §6 参照)。

境界に gauge 場 A_μ が couple した様子は、σ-model で次の様に書ける[3]:

$$S = -\frac{1}{2\pi}\int_M d\tau d\sigma\, \partial_a X^M \partial^a X_M + \underbrace{\frac{1}{\pi}\oint_{\partial M=\{\tau=0\}} d\sigma \left(\partial_\sigma X^\mu\right) A_\mu(X)}_{=\oint A}. \quad (3\text{-}7)$$

$\delta S = 0$ を $\delta X^i\big|_{\tau=0} = 0$ という境界条件の下で解くと、(gauge 場 $A_\mu(X)$ は 境界 $X^i = \text{constant}$. の上でのみ定義されているので $\partial_i A_\mu = 0$ に注意して。)

$$\begin{cases} \text{運動方程式} & \Box X^M = 0 \quad (3\text{-}8) \\ \text{境界条件} & \tau=0 \text{ において } \begin{cases} \partial_\tau X^\mu + F^{\mu\nu}(X)\,\partial_\sigma X_\nu = 0 \\ (X^i = \text{constant}.) \end{cases} \quad (3\text{-}9) \end{cases}$$

$$\text{ここで } F_{\mu\nu}(X) = \partial_\mu A_\nu(X) - \partial_\nu A_\mu(X). \quad (3\text{-}10)$$

を得る。(3-9) は非線型な方程式だが、特に constant field strength

$$A_\mu(X) = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} X^\nu + \text{constant}. \quad (3\text{-}11)$$

の場合は (3-9) は線型な表式になるので、この振動子表示も線型になる。運動方程式の解 (1-10) を境界条件 (3-9) に代入すると、(3-11) の時、

$$\text{境界 } \tau=0 \text{ で } \begin{cases} \text{Neumann 方向 } (\mu) \ : & \begin{cases} (\eta_{\mu\nu}+F_{\mu\nu})\,\alpha_n^{(-)\nu} + (\eta_{\mu\nu}-F_{\mu\nu})\,\alpha_{-n}^{(+)\nu} = 0, \\ p_\mu = 0 \end{cases} \quad (3\text{-}12) \\ \text{Dirichlet 方向 } (i) \ : & \alpha_n^{(+)i} - \alpha_{-n}^{(-)i} = 0, \quad x^i = \text{constant}. \quad (3\text{-}13) \end{cases}$$

まとめると、

$$\begin{cases} N: \ \alpha_n^{(-)}{}_\mu = -\Theta_\mu{}^\nu\, \alpha_{-n\,\nu}^{(+)}, & p_\mu = 0 \quad (3\text{-}14) \\ D: \ \alpha_n^{(-)}{}_i = \alpha_{-n\,i}^{(+)}, & x^i = \text{constant}. \quad (3\text{-}15) \end{cases}$$

ここで

$$\Theta_\mu{}^\nu := (\delta+F)^{-1}{}_\mu{}^\rho\,(\delta-F)_\rho{}^\nu \quad (3\text{-}16)$$

は直交行列である：

$$\Theta_{\mu\nu}\Theta^{\rho\nu} = \delta_\mu{}^\rho . \quad (\Theta_{\mu\nu} := \eta_{\nu\rho}\Theta_\mu{}^\rho \text{ 等}) \tag{3-17}$$

ghost も同様にすると，

$$c_n^{(+)} = -c_{-n}^{(-)}, \quad \bar{c}_n^{(+)} = \bar{c}_{-n}^{(-)}. \tag{3-18}$$

これら (3-14,15,18) が，境界条件の振動子表示 (constant field strength の時) である。

(3-14,15,18) を固有方程式とする固有状態を

$$|B\rangle = |B(F)\rangle \tag{3-19}$$

(F は定数 field strength を表す) と書くと，これは coherent state として簡単に解け，

$$|B(F)\rangle = N(F)\exp\left(\sum_{n>0}\left[\frac{1}{n}\left(\alpha_{-n}^{(-)i}\alpha_{-ni}^{(+)} - \alpha_{-n}^{(-)\mu}\Theta_\mu{}^\nu\alpha_{-n\nu}^{(+)}\right) + c_{-n}^{(-)}\bar{c}_{-n}^{(+)} - \bar{c}_{-n}^{(-)}c_{-n}^{(+)}\right]\right)|0\rangle . \tag{3-20}$$

規格化因子 N(F) は，⟨B(F)|B(F)⟩ が発散してしまうことから簡単には求まらないが，[17] にある手法を用いて

$$N(F) = \left(\det(\eta_{\mu\nu}+F_{\mu\nu})\right)^{-\sum_{n>0}1} = \sqrt{\det(\eta_{\mu\nu}+F_{\mu\nu})} . \tag{3-21}$$

と求まる。[4] (第二の等式ではζ関数正則化 ($\sum_{n>0}1 = \zeta(0) = -\frac{1}{2}$) を用いた。)

(3-20) は振動子部分のみの表式であり，zero mode は，固有方程式が

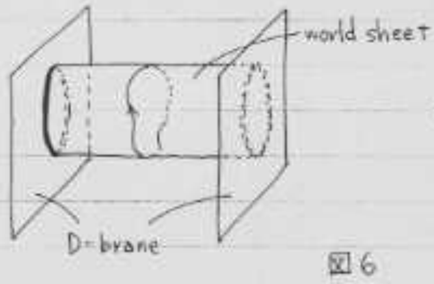
$$\begin{cases} N : & p_\mu = 0 \\ D : & x^i = c^i \quad (c^i \text{ は定数}) \end{cases} \tag{3-22}$$

であるから，x 表示で

$$\delta^{(d-p-1)}(x^i - c^i) \tag{3-23}$$

となる (μ 方向は $\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}e^{ip\cdot x}\underbrace{\delta(p)}_{\text{(3-22)の解 (p表示)}} = 1$ である)。[5]

求まった $|B(F)\rangle$ を使うと，例えば D-brane 間を閉弦が exchange することによる，その系の potential energy を計算することが出来る。[6]



$$= \langle B(F)|\, e^{-\tau L_0}\, |B(F)\rangle$$

図6

§3-2. D-brane 作用

D-brane 上の配位として与えられた $F_{\mu\nu}$ と，閉弦の massless 場 g_{MN}, B_{MN}, Φ は，上の図 の様な graph を通じて相互作用出来る。その相互作用を記述する有効作用を，D-brane 作用（D-brane action）と呼ぶ。これは前節で紹介した $|B(F)\rangle$ を用いて導出することが出来るが，それは [5] に紹介してあるので，ここでは [15] に従って，弦の σ-model からの導出を review しよう。（これら 2つの手法は，同じ有効作用を与える。）

boundary に gauge 場が couple した σ-model の作用は (3-7) で与えられる（一般には η_{MN} でなく $g_{MN}(X)$，また $B_{MN}(X)$ も存在するが，ここでは簡単のためこれらは省略する。）。相互作用項を order by order で見るために，gauge 場 $A_\mu(X)$ を，ある配位 $\bar{X}$ のまわりで展開しよう：

$$X^M = \bar{X}^M + \xi^M. \tag{3-24}$$

$\bar{X}^M$ は運動方程式 (3-8) と境界条件 (3-9) を満足する古典解（例えば $\bar{X}^M = \text{constant.}$）とおいて，作用 (3-7) $S[X]$ を $\bar{X}$ のまわりで見ると，[7]

$$S[X] = -\frac{1}{2\pi}\int_{M} d\tau d\sigma\, \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha(\bar{X}^M+\xi^M)\partial_\beta(\bar{X}^N+\xi^N)\eta_{MN} + \frac{1}{\pi}\oint_{\partial M=\{\tau=0\}} d\sigma\,(\partial_\sigma\bar{X}^\mu+\partial_\sigma\xi^\mu)\,\underbrace{A_\mu(\bar{X}+\xi)}_{\text{展開する.}} \tag{3-25}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{M} d\sigma d\tau\, \partial^{\alpha}\bar{X}^{M}\partial_{\alpha}\bar{X}_{M} + \left(\frac{1}{\pi}\int_{M} d\sigma d\tau\, \eta^{\alpha\beta}(\partial_{\alpha}\partial_{\beta}\bar{X}_{M})\xi^{M} + \frac{1}{\pi}\oint_{\partial M} d\sigma\, \xi^{M}\partial_{\tau}\bar{X}_{M}\right)$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{M} d\sigma d\tau\, \partial^{\alpha}\xi^{M}\partial_{\alpha}\xi_{M}$$

$$+\frac{1}{\pi}\oint_{\partial M} d\sigma \Big[\partial_{\sigma}\bar{X}^{\mu}A_{\mu}(\bar{X}) + \left(\partial_{\sigma}\xi^{\mu}A_{\mu}(\bar{X}) + \cancel{\partial_{\sigma}X^{\mu}\xi^{\nu}\partial_{\nu}A_{\mu}(\bar{X})}\right)$$

$$+\left(\partial_{\sigma}\xi^{\mu}\cdot\xi^{\nu}\partial_{\nu}A_{\mu}(\bar{X}) + \partial_{\sigma}\bar{X}^{\mu}\cdot\frac{1}{2}\xi^{\nu}\xi^{\rho}\partial_{\nu}\partial_{\rho}A_{\mu}(\bar{X})\right) + \cdots\Big]$$

$$= S[\bar{X}] + \frac{1}{\pi}\int d\sigma d\tau\, \xi^{M}\Box\bar{X}_{M} + \frac{1}{\pi}\oint d\sigma\, \xi^{\mu}\left(\partial_{\tau}\bar{X}_{\mu} + \partial_{\sigma}\bar{X}^{\nu}F_{\mu\nu}(\bar{X})\right)$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int d\sigma d\tau\, \partial^{\alpha}\xi^{M}\partial_{\alpha}\xi_{M} + \frac{1}{\pi}\oint d\sigma\left[\partial_{\sigma}\xi^{\mu}\cdot\xi^{\nu}\partial_{\nu}A_{\mu}(\bar{X}) + \partial_{\sigma}\bar{X}^{\mu}\cdot\frac{1}{2}\xi^{\nu}\xi^{\rho}\partial_{\nu}\partial_{\rho}A_{\mu}(\bar{X}) + \cdots\right].$$

この第一項は定数，第二項は $\bar{X}$ に対する運動方程式で 0，第三項は $\bar{X}$ に対する境界条件で 0 になる。従って，fluctuation ξ を記述する作用は

$$S_{\xi} = -\frac{1}{2\pi}\int d\sigma d\tau\, \partial^{\alpha}\xi^{M}\partial_{\alpha}\xi_{M} + \frac{1}{2\pi}\oint d\sigma\, \xi^{\mu}\partial_{\sigma}\xi^{\nu}F_{\mu\nu}(\bar{X})$$
$$+\frac{1}{2\pi}\oint d\sigma\, \partial_{\sigma}\bar{X}^{\mu}\partial_{\lambda}F_{\nu\mu}(\bar{X})\xi^{\lambda}\xi^{\nu} + \cdots. \qquad (3\text{-}26)$$

ここで

$$\oint d\sigma\left[\partial_{\sigma}\xi^{\mu}\cdot\xi^{\nu}\partial_{\nu}A_{\mu}(\bar{X})\right] = \oint d\sigma\Big[\frac{1}{2}\partial_{\sigma}\xi^{\mu}\cdot\xi^{\nu}\partial_{\nu}A_{\mu}(\bar{X}) - \frac{1}{2}\xi^{\mu}\cdot\partial_{\sigma}\xi^{\nu}\partial_{\nu}A_{\mu}(\bar{X})$$
$$-\frac{1}{2}\xi^{\mu}\xi^{\nu}\partial_{\sigma}\bar{X}^{\lambda}\partial_{\lambda}\partial_{\nu}A_{\mu}(\bar{X})\Big] \qquad (3\text{-}27)$$

を用いて，$F_{\mu\nu}(\bar{X})$ で書き直した。… 部分は ξ^3 以上の相互作用項である。

さて，弦理論は共形不変 (conformally invariant) であるので，σ-model の作用に共形不変性を要請すると，この σ-model の coupling が scale に依らない (つまりくりこみ群で flow しない) ということになる。今の場合，見たい相互作用は

$$\frac{1}{\pi}\oint d\sigma\ \partial_{\sigma}X^{\mu}\cdot A_{\mu}(X) \qquad (3\text{-}28)$$

なので，この coupling (というより coupling function) $A_{\mu}(X)$ への loop 補正 (loop 計算による発散)

$$\Delta S = \oint d\sigma \ \partial_\sigma X^\mu \cdot f_\mu(\delta) \qquad (\delta : \text{short distance cut off}) \tag{3-29}$$

を求めることによって、A_μに対する β-汎関数 $\beta_\mu(A)$ を得ることが出来る。共形不変性から、

$$\beta_\mu(A) = 0. \tag{3-30}$$

この式を A_μ の運動方程式として与える様な作用が、gauge 場 A_μ の「有効作用」となる。

1-loop 補正 (3-29) を計算しよう。作用 S_ξ (3-26) では、運動項は第一項に加えて境界で第二項も寄与する。この二つの項で書かれた propagator を用い、また S_ξ の第三項を相互作用と見ると、(3-29) の形の発散を生むgraphは

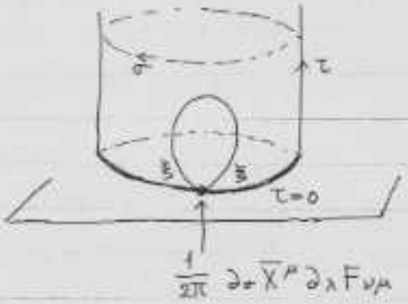


図7

つまり

$$\frac{1}{2\pi}\oint d\sigma \ \partial_\sigma \bar{X}^\mu \partial_\lambda F_{\nu\mu}(\bar{X}) \langle \xi^\lambda \xi^\nu \rangle \tag{3-31}$$

の発散である。ξの二点相関関数の short distance から発散が出る。
(S_ξの第二項を相互作用とみなす場合は、それが任意個 insert されたgraphを全て足し上げないといけない。)

ξの相関は X の相関であり、また境界も考慮することから、これは

$$\langle X^\lambda X^\nu \rangle \tag{3-32}$$

を、境界上で argument を近付けたものに対応する。

閉弦の振動子展開 (1-10) に，境界条件 (3-14, 15) を代入すると，

$$X_\mu = x_\mu + \frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha^{(+)}_{n\nu}\left(z^n\delta_\mu{}^\nu + \bar{z}^{-n}\Theta_\mu{}^\nu\right) \tag{3-33}$$

となる（開弦の形）。ここで $i\tau$ を新たに τ と置き直し（Euclid化），

$$z := e^{\tau + i\sigma} \tag{3-34}$$

という通常の定義により書き換えた。これより相関関数は

$$\langle 0|\,T\left(X_\mu(z,\bar{z})\,X_\nu(\omega,\bar{\omega})\right)|0\rangle$$

$$= \sum_{\substack{n\neq 0\\ m\neq 0}}\frac{-1}{4nm}\left(z^n\delta_\mu{}^\lambda + \bar{z}^{-n}\Theta_\mu{}^\lambda\right)\left(\omega^m\delta_\nu{}^\sigma + \bar{\omega}^{-m}\Theta_\nu{}^\sigma\right)\langle 0|\,\alpha^{(+)}_{n\lambda}\,\alpha^{(+)}_{m\sigma}|0\rangle$$

（ここで $\log|z| =: \tau_z > \tau_\omega := \log|\omega|$ と仮定した。）

$$= \cdots = -\frac{1}{4}\Big\{\eta_{\mu\nu}\left[\log\left(1-\frac{\bar{\omega}}{\bar{z}}\right) + \log\left(1-\frac{z}{\omega}\right)\right]$$

$$+ \Theta_{\mu\nu}\log\left(1-\frac{1}{\bar{z}\omega}\right) + \Theta_{\nu\mu}\log\left(1-z\bar{\omega}\right)\Big\}. \tag{3-35}$$

相互作用は境界上なので $\tau_z, \tau_\omega \to 0$ とし，[8]

short distance　$\sigma_z - \sigma_\omega =: \delta$

を微小とすると

$$\langle \xi(z)_\mu\,\xi(\omega)_\nu\rangle_{\text{境界上}} \sim -\frac{1}{2}\left[\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\Theta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\Theta_{\nu\mu}\right]\log\delta \quad +\text{finite}. \tag{3-36}$$

これを用いて[9]発散は[10]

$$\Delta S_{div} = \frac{i}{2\pi}\oint d\sigma\,\partial_\sigma\bar{X}^\mu\partial_\lambda F_{\nu\mu}(\bar{X})\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\eta^{\lambda\nu} + \frac{1}{2}\Theta^{\lambda\nu} + \frac{1}{2}\Theta^{\nu\lambda}\right]\log\delta$$

$$= \frac{i}{\pi}\oint d\sigma\,\partial_\sigma\bar{X}^\mu\cdot f_\mu(\delta) \tag{3-37}$$

$$\left(f_\mu(\delta) := \frac{1}{2}\partial^\lambda F_{\mu\nu}\left(\delta - F^2\right)^{-1}{}_\lambda{}^\nu\log\delta\right)$$

$f_\mu(\delta)$ は相互作用 $A_\mu(\bar{X})$ へのくりこみである。cut off Λ を

$$\Lambda := \frac{1}{\delta} \tag{3-38}$$

とすると、β-汎関数は[11]

$$\beta_\mu{}^{(A)} = -\frac{\partial}{\partial \log \Lambda} f_\mu(\delta) = -\frac{1}{2}\partial^\lambda F_{\mu\nu}(\delta - F^2)^{-1}{}_\lambda{}^\nu . \qquad (3\text{-}39)$$

故に、共形不変性から要請される，gauge 場 A_μ の従うべき方程式は

$$\partial^\lambda F_{\mu\nu}(\delta - F^2)^{-1}{}_\lambda{}^\nu = 0 \qquad (3\text{-}40)$$

となる。

さて、Fradkin と Tseytlin は constant field strength の時の[12] gauge 場の有効作用を，上とは全く異なる手法で求めた。それは経路積分によるもので，彼らの書き下した作用は [16]，

$$\int d^{p+1}x \sqrt{\det(\eta + F)_{\mu\nu}} . \qquad (3\text{-}41)$$

実は この作用の変分として導かれる運動方程式が (3-40) になるのである。[13]

$$\delta\int d^{p+1}x\sqrt{\det(\eta+F)} = \int d^{p+1}x\, \delta A_\rho (\delta - F^2)^{-1}{}_\kappa{}^\rho \sqrt{\det(\eta+F)}\left[\partial^\rho F^\kappa{}_\sigma (\delta - F^2)^{-1}{}_\mu{}^\sigma\right]. \qquad (3\text{-}42)$$

(詳しい計算は Appendix A にある。)

$F_{\mu\nu}$ は反対称行列なので，F^2 は固有値が全て負であることに注意すると，[14]

$$(\delta - F^2)^{-1} \quad , \quad (\det(\delta + F))^{\frac{1}{2}} = (\det(\delta - F^2))^{\frac{1}{4}} \qquad (3\text{-}43)$$

は non-singular であるから，作用 (3-41) から導かれる運動方程式は (3-40) となる。

結局，σ-model の共形不変性から要請される (3-40) を導く作用(の一つ)は (3-41) であり，これは Fradkin らの経路積分による方法 [16]，また boundary state を用いる方法 [17][15] の結果とも一致する。[16] この作用 (3-41) は Born と Infeld が提唱した作用 [18] で，Born-Infeld (BI) 作用と呼ばれる。

より一般に，$g_{MN}(X)$，$B_{MN}(X)$ を couple させた σ-model 作用

$$S=-\frac{1}{2\pi}\int_M d\tau d\sigma\,\left(\partial_\alpha X^M\partial^\alpha X^N g_{MN}(X)-\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^M\partial_\beta X^N B_{MN}(X)\right)+\frac{1}{\pi}\oint_{\partial M}d\sigma\,\partial_\sigma X^\mu A_\mu(X) \qquad (3\text{-}44)$$

から出発し、同様の graph を評価して[17]

$$\Delta S\sim\oint d\sigma\,\partial_\sigma X^\mu\,\beta_\mu^{(A)}\log\delta \qquad (3\text{-}45)$$

を求め、$\beta_\mu^{(A)}=0$ を出す有効作用を書けば（[19]）

$$\int d^{p+1}x\,\sqrt{\det\left(g_{\mu\nu}+B_{\mu\nu}+F_{\mu\nu}\right)}\,. \qquad (3\text{-}46)$$

この作用は開弦の tree level（disk, 1-boundary）を評価したものになっていることから、振幅に dilaton ϕ の寄与（coupling $g_{\text{OPEN}}\sim e^{\phi/2}$）を掛けて[18] 一般化された Born-Infeld 作用

$$S_D=T_p\int d^{p+1}x\;e^{\frac{1}{2}\phi}\sqrt{\det\left(g_{\mu\nu}+B_{\mu\nu}+F_{\mu\nu}\right)} \qquad (3\text{-}47)$$

が求まる。[19] T_p は任意の定数である。この作用は（固定ゲージの）D-brane の有効作用（つまり boundary 上の配位 $F_{\mu\nu}$ と開弦 massless 場 $\phi, g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}$ との相互作用を与える）となっており、「D-brane 作用[20]」と呼ばれる。

T_p は如何に決めうるだろうか？ 勿論、作用を定数倍することは意味が無いが、今は比較対照するべき作用がある：

$$S_{\text{closed}}=\int d^dx\,\sqrt{g}\,e^{\phi}\left[R(g)-\frac{1}{12}H^2-(\partial\phi)^2-2\partial^2\phi\right]. \qquad (3\text{-}48)$$

この作用は、boundary のない σ-model の 1-loop の発散を評価して求めた有効作用 [20] で、bosonic closed string の低エネルギー有効作用と呼ばれる。

Callan ら [19] は、この作用に S_D を加えて全作用を

$$S=S_{\text{closed}}+S_D \qquad (3\text{-}49)$$

と書くと、第二項 S_D は第一項 S_{closed} に対する string loop 補正

であることを示し[21]更に、第二項を与える発散を、開弦場の vertex insertion によるものと同定して T_p を決定した：

$$T_p = -16\pi . \tag{3-50}$$

これらから σ-model の 1-loop での「開弦 + D-brane」を表す有効作用は最終的に

$$S = \int d^dx \sqrt{g}\, e^{\phi}\left[R(g) - \frac{1}{12}H^2 - (\partial\phi)^2 - 2\partial^2\phi\right] - 16\pi\int d^{p+1}x\, e^{\frac{1}{2}\phi}\sqrt{\det(g+B+F)_{\mu\nu}} . \tag{3-51}$$

註1 §1参照。

2 boundary state は [17] で初めて導入された。ここでは図4でなく図5の様に、境界が（普通の開弦の $\sigma = 0$ (or π) ではなく）$\tau = 0$ であるとしている。考え方は同じである。

3 この作用は、開弦に couple する gauge 場の作用

$$\int_{\partial M = \{\sigma = 0\}} d\tau\, \partial_\tau X^\mu A_\mu(X) \tag{3-52}$$

とは異なっている（σとτが逆になっている）。

4 $$\det(\eta_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}) = \det(\eta_{\mu\nu} + F_{\mu\nu})^t = \det(\eta_{\mu\nu} - F_{\mu\nu}) \tag{3-53}$$
と書いてもよい。即ち、

$$\sqrt{\det(\delta + F)_\mu{}^\nu} = \left(\det(\delta - F^2)\right)^{\frac{1}{4}} . \tag{3-54}$$

5 ghost zero mode は無いとする。即ち、

$$n_{FP}(|B\rangle) = 0 . \tag{3-55}$$

6 この $|B(F)\rangle$ は先にも述べた通り、固定された D-brane を表すものであり、D-brane の fluctuation の自由度は入って居ない。また、D-brane 上の gauge 場の自由度も、constant field strength という特殊なものに限っていることに注意しよう。§5ではこれに注目する。

7 註3で触れた様に、境界は $\sigma = 0$ でなく $\tau = 0$ としている。

8 propagator 内の T積は z と w が同時刻 ($\tau_z = \tau_w$) では定義されていないのに、この極限 $\tau_z, \tau_w \to 0$ をとるのは良くないと思われるかもしれな

い。(通常開弦では $\sigma=0$ を boundary とするのでこの問題は無い。) しかし今 Euclid 化しているので τ と σ の区別は無く、これは propagator と言うよりむしろ (T積の無い) 相関関数、つまり単なる 2次元 Poisson 方程式の解である Green 関数、と見ればよい。

9 $\tau_z < \tau_w$, $\tau_z, \tau_w \to 0$, $\sigma_z - \sigma_w$: 微小 (3-56)
としても、式 (3-36) と同じ発散を与える。

10 Euclid 化したために、全体の作用は

$$-\frac{1}{2\pi}\int d\sigma(-i)d\tau\left(\partial_\tau X^M \partial_\tau X_M + \partial_\sigma X^M \partial_\sigma X_M\right) + \frac{1}{\pi}\oint d\sigma\, \partial_\sigma X^\mu A_\mu(X)$$
$$= -i\left[-\frac{1}{2\pi}\int d\sigma d\tau\left(\partial_\tau X^M \partial_\tau X_M + \partial_\sigma X^M \partial_\sigma X_M\right) + \frac{i}{\pi}\oint d\sigma\, \partial_\sigma X^\mu A_\mu(X)\right] \tag{3-57}$$

となり、境界での相互作用 $A_\mu(X)$ の前に i が付く。
($B_{MN}(X)$ を couple させた場合も、Euclid 化でその前に i がつく。)

11 くりこみ点 μ は Λ について Λ/μ の形で入っているので、

$$\beta_\mu = \frac{\partial}{\partial \log\mu} f_\mu(S) = -\frac{\partial}{\partial\log\Lambda} f_\mu\left(\frac{1}{\Lambda}\right). \tag{3-58}$$

12 この時経路積分が Gaussian になり厳密に計算出来る。

13 $(\det(\delta+F))^{1/2}$ でなく $(\det(\delta+F))^k$ $(k\neq\frac{1}{2})$ では、(3-42) 式のようにうまくまとまらない。つまり、例えば $k=-\sum_{n\geq 1} 1$ として与えられたとしても ζ-関数正則化は必要である。

14 この記述は時空が Euclidean (η_{MN} でなく δ_{MN}) の時のみの話なので、正確には誤りである。実際、D-string (D-1-brane) では

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} & a \\ -a & \end{pmatrix} \Rightarrow (F^2)_\mu{}^\nu = F_{\mu\rho}\eta^{\rho\sigma}F_{\sigma\lambda}\eta^{\lambda\nu} = \begin{pmatrix} a^2 & \\ & a^2\end{pmatrix} > 0 \tag{3-59}$$

となってしまう。

15 本質的には $|B(F)\rangle$ の規格化因子が作用へ効く。

16 Tseytlin の手法、boundary state の手法、ともに $F_{\mu\nu}$ が constant の場合であるが、この節で紹介した σ-model の手法では $\partial_\mu F_{\nu\rho}$ まで入っている。(この相互作用の vertex のくりこみを評価している。) この違いは何であろうか? —— ここでの手法は F が constant である部分のみが propagator

DEPARTMENT OF PHYSICS
KYOTO UNIVERSITY.

に入っていること，更に ξ^3 相互作用の coupling も ∂F であるのに無視していることを考慮すると，σ-model の立場でも F = constant で厳密である，と考えるのが自然であろう。

17　評価する graph は，

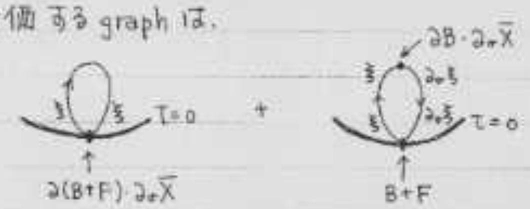


図 8

となる。g, B, F が constant の時の propagator を用いて，これらの graph から発散を求める。

18　dilaton の寄与は，σ-model の作用 (3-44) に，genus (~string loop ~ coupling のべき) と couple した Φ を加えることによっても同じ有効作用を再現出来る。

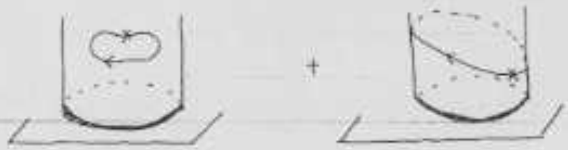
$$S_{\mathrm{dilaton}} = -\frac{1}{8\pi}\int_{M} d\sigma d\tau \sqrt{\gamma}\, R^{(2)}(\gamma)\,\Phi(X) - \frac{1}{4\pi}\oint_{\partial M} d\sigma\; k\cdot\Phi(X) \qquad (3\text{-}60)$$

第一項は genus の数，第二項は boundary の数を数える（k は extrinsic curvature）。

19　この作用も，g, B, F = constant. の propagator を用いているので，この order で厳密な表式と見ることが出来よう。（註16参照。）

20　超対称性の入った D-brane を考えると，D-brane 作用は (3-47) に加えて，R-R sector からの massless 場と $F_{\mu\nu}$ の相互作用項が入る。

21



(S_{closed})　　(S_p)

図 9

§4. 弦の場の理論におけるD-brane[1]

§4-1. ソース項としてのD-brane

前節では、閉弦のmassless場を記述する有効作用と、D-braneの有効作用が σ-model の共形不変性という立場から与えられた：

$$S = S_{\text{closed}} + S_{D}. \qquad (4\text{-}1)$$

この S_{closed} の部分は 純粋に閉弦（world sheet に boundary が無い）のものであり、また 場の作用 なのであるから、弦の場の理論において対応する作用は (2-13)（もしくは (2-31)）であるはずである。これらの対応を見てみよう。

S_{closed} 内の metric g は string metric と呼ばれ、これは 次の rescale で Einstein metric（Lagrangian を $\sqrt{\tilde g}R(\tilde g)$ で与えるもの）に書きかえることが出来る：

$$\hat g_{MN} := e^{\frac{2}{d-2}\phi} g_{MN}. \qquad (4\text{-}2)$$

実際、公式

$$\begin{cases} \sqrt{\tilde g} = e^{\frac{d}{d-2}\phi}\sqrt{g} & (4\text{-}3) \\ R(\tilde g) = e^{\frac{-2}{d-2}\phi}R(g) - 2(d-1)e^{\frac{-3}{d-2}\phi}\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu\left(\sqrt{g}\,g^{\mu\nu}\partial_\nu e^{\frac{1}{d-2}\phi}\right) & \\ \qquad\qquad -(d-1)(d-4)e^{\frac{-4}{d-2}\phi}g^{\mu\nu}\partial_\mu\left(e^{\frac{1}{d-2}\phi}\right)\partial_\nu\left(e^{\frac{1}{d-2}\phi}\right) & (4\text{-}4) \end{cases}$$

を用いると

$$\sqrt{\tilde g}R(\tilde g) \simeq e^{\phi}\left[\sqrt{g}R(g) + g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right] \qquad (4\text{-}5)$$

となる。これから、$\tilde g_{MN}$ を

$$\hat g_{MN} =: \eta_{MN} + h_{MN} \qquad (4\text{-}6)$$

と展開し S_{closed} を場の二次まで評価すれば

$$S_{\text{closed}} = \int\left[\sqrt{\tilde g}\,R(\tilde g)\Big|_{\text{bilinear}} - \frac{1}{d-2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{12}H^2 + O(\text{場の3次})\right]. \qquad (4\text{-}7)$$

これは, 弦の場の理論の作用

$$S = \frac{1}{2}\Phi \cdot Q_B \Phi \qquad (4\text{-}8)$$

を展開した (2-24) に対応している ((4-7) 式の O(場の3次) 部分は, 相互作用 $g\Phi\cdot(\Phi * \Phi)$ をきちんと評価しなくては対応は分からない)。

では, (4-1) の第2項 S_D, すなわち D-brane を表す作用は弦の場の理論において何如に書けるだろうか? D-brane と閉弦場の相互作用が S_D であり, それは図5の形であることに注目しよう。D-brane は閉弦を emit するソースなのである。D-brane を表す閉弦状態は §3-1 で導入した boundary state なので, これを弦の場と naive に couple させて, 作用を書いてみよう:

$$S = \frac{1}{2}\Phi \cdot Q_B \Phi + \frac{g}{3}\Phi\cdot(\Phi * \Phi) + t_p\, B\cdot\Phi \qquad (4\text{-}9)$$

ここで $B\cdot\Phi$ は bracket では

$$B\cdot\Phi = \int d\tilde{c}_0 \, \langle B|\Phi\rangle \qquad (4\text{-}10)$$

であり $n_{FP}(B\cdot\Phi) = 0$ である。t_p はソースの強さを表す定数である。

この様に, 自然に書けた D-brane ソース項 $B\cdot\Phi$ が, 実は係数場で見ると丁度 S_D になることを以下で見てみよう。$|B\rangle$ を特に constant field strength の場合の $|B(F)\rangle$ ((3-20), この時のみ $|B\rangle$ が具体的に解けていた) とし, $|\Phi\rangle$ の振動子展開 (2-6) を用いると,

$$B(F)\cdot\Phi = \int d^{p+1}x \langle B(F)| \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{h}_{MN}(x) + B_{MN}(x)\right) \alpha_{-1}^{(+)M} \alpha_{-1}^{(+)N} - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{D}(x)\left(c_{-1}^{(+)}\bar{c}_{-1}^{(-)} + c_{-1}^{(-)}\bar{c}_{-1}^{(+)}\right)\right]|0\rangle$$

$$= \int d^{p+1}x \langle B(F)| \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{h}+B)_{MN}\left\{ \delta^N{}_i\, \alpha_1^{(+)i} \alpha_{-1}^{(-)M} + \delta^N{}_\mu \left(-\Theta^{\mu\nu} \alpha_{1\nu}^{(+)}\right) \alpha_{-1}^{(-)M} \right\} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{D}(x)\left(c_{1}^{(+)}\bar{c}_{-1}^{(-)} + c_{1}^{(-)}\bar{c}_{-1}^{(+)}\right)\right]|0\rangle$$

($|B(F)\rangle$ の上の固有方程式を使った。)

$$= \int d^{p+1}x \langle B(F)| \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{ (\hat{h}+B)_i{}^i - (\hat{h}+B)_{\nu\mu}\Theta^{\mu\nu} \right\} + \sqrt{2}\,\hat{D} \right]|0\rangle$$

$$= \int d^{p+1}x \sqrt{\det(\eta+F)} \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}_M{}^M + \sqrt{2}(\hat{h}+B)_\nu{}^\mu (\delta+F)^{-1}{}_\mu{}^\nu + \sqrt{2}\hat{D} \right]$$

$$= \int d^{p+1}x \sqrt{\det(\eta+F)} \left[\sqrt{2}(h+B)_\nu{}^\mu (\delta+F)^{-1}{}_\mu{}^\nu - \frac{d}{\sqrt{2}} D + \sqrt{2} D + \sqrt{2}(\delta+F)^{-1}{}_\mu{}^\mu D \right]$$

（$\hat{h}_{MN} = h_{MN} + \eta_{MN} D$, $\hat{D} = D + \frac{1}{2} h_M{}^M$ (2-20) の再定義を代入した。）

$$= \int d^{p+1}x \sqrt{\det(\eta+F)} \left[\sqrt{2}\, \mathrm{tr}\,(h+B)(\delta+F)^{-1} + \left(\frac{-d+2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\, \mathrm{tr}\,(\delta+F)^{-1} \right) D \right]. \tag{4-11}$$

第一行目の等号では tachyon と massive mode を考えないことにし，それに補助場 $S(x)$, $b_M(x)$, $e_M(x)$ は ghost の bracket が zero になるので初めから省略した。
一方の D-brane 作用 S_D (3-47) も，対応する部分を見るため 場 h, B, ϕ で展開してみよう。metric を Einstein metric (4-2) に変えてから (4-6) と置くことに注意して，

$$S_D = T_p \int d^{p+1}x \; e^{\frac{1}{2}\phi} \sqrt{\det(g_{\mu\nu} + B_{\mu\nu} + F_{\mu\nu})}$$

$$= T_p \int d^{p+1}x \left(1 + \frac{1}{2}\phi + O(\Phi^2)\right) \sqrt{\det(\eta+F)} \times \sqrt{\det\left(\delta + \left(h + B - \frac{2}{d-2}\phi\right)(\delta+F)^{-1} + O(\Phi^2)\right)}$$

$$= T_p \int d^{p+1}x \sqrt{\det(\eta+F)} \left[1 + \frac{1}{2}\phi + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(h + B - \frac{2}{d-2}\phi\right)(\delta+F)^{-1} + O(\Phi^2) \right]$$

$$= T_p \int d^{p+1}x \sqrt{\det(\eta+F)} \left[1 + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(h+B)(\delta+F)^{-1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{d-2}\mathrm{tr}\,(\delta+F)^{-1} \right)\phi + O(\Phi^2) \right]. \tag{4-12}$$

ここで $O(\Phi^2)$ は，h, B, ϕ について 2次以上の項を示す。この式 (4-12) の $O(\Phi)$ の項 つまり h, B, ϕ について linear な項は，(4-11) と $F_{\mu\nu}$ 依存性が一致している！ 対応は，

$$t_p\, B \cdot \Phi = S_D \Big|_{O(\Phi)\text{のみ}} \tag{4-13}$$

とすると

DEPARTMENT OF PHYSICS
KYOTO UNIVERSITY.

$$\begin{cases} 2\sqrt{2}\, t_p\, h^{(SFT)}_{\mu\nu} = T_p\, h^{(\sigma)}_{\mu\nu} \\ 2\sqrt{2}\, t_p\, B^{(SFT)}_{\mu\nu} = T_p\, B^{(\sigma)}_{\mu\nu} \\ -\sqrt{2}(d-2)\, t_p\, D^{(SFT)} = T_p\, \phi^{(\sigma)} \end{cases} \tag{4-14}$$

となっている。(4-12)の$O(\Phi^2)$項は、(4-7)の$O(\Phi^3)$項と同様、きちんとした$\alpha' \to 0$極限で再現すると思われる。また、(4-12)の$O(\Phi^0)$項、即ち

$$T_p \int d^{p+1}x\, \sqrt{\det(\eta+F)} \cdot 1 \tag{4-15}$$

(BI作用)の、弦の場の理論側での存在の必要性は§4-4で議論する。

以上の様に、B・Φ項はD-brane作用の$O(\Phi)$とF依存性が一致した。従って、全作用(4-9)は、Callanらの導いたstring loop corrected有効作用(3-51)に対応しているわけである。[2] B・Φ項を弦の場の理論に持ち込むことによって、開弦の場の理論にD-braneというboundaryを導入出来た。

§4-2. 弦の場としてのboundary stateの変換(対称性)

B・Φ項を作用に持ち込むことで、D-brane作用を弦の場の理論で捉えることが分かった訳だが、しかし果して勝手に付け加えて良いものだろうか? 弦の場の理論にはΛという汎関数gauge不変性があり、それが作用の構成や$*$積の性質の決定に重要な役割を果していた(§2-2)。B・Φ項の導入によってこのgauge不変性が損なわれないかを本節で見てみよう。

弦の場Φのgauge変換(2-34)

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= Q_B\Lambda + g(\Phi*\Lambda - \Lambda*\Phi) \\ &= Q_B\Lambda + 2g\,\Phi*\Lambda \end{aligned} \tag{4-16}$$

に対して、§2-2で見た様に、作用(4-9)のうちS_{closed}に対応する部分(2-31)は不変であった。ここにB・Φを付け加えた全作用(4-9)の不変

性は、$\delta\Phi$ の形 (4-16) は変えないという前提を置けば[3]

$$
\begin{aligned}
\delta S = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \delta(B\cdot\Phi) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (\delta B)\cdot\Phi + B\cdot\delta\Phi = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (\delta B)\cdot\Phi + B\cdot Q_B\Lambda + 2g\,B\cdot(\Phi * \Lambda) = 0
\end{aligned}
\tag{4-17}
$$

の条件により達成出来る。この最終表式が任意の Φ, Λ について成立すると考えると、Φ を含む部分・含まない部分に分けて

$$
\begin{cases}
B\cdot Q_B\Lambda = 0 & \text{(4-18)} \\
\delta B = 2g(B * \Lambda) & \text{(4-19)}
\end{cases}
$$

を得る。((4-19) を得るために ・,* の順回対称性 (2-49) を用いた。)
条件第二式 (4-19) は、B の gauge 変換 δB を定義する式と見ることが出来る。この式の意味は次節 §4-3 で見ることにしよう。一方、条件第一式は、演算子 Q_B の部分積分を行なえば、任意の Λ についての (4-18) の成立は

$$Q_B B = 0 \tag{4-20}$$

という B に対する条件式となる。つまり (4-20) が、弦の場の理論に $B\cdot\Phi$ 項を入れた時の、対称性成立の条件である。

以上の対称性の議論では、B は boundary state でなくても良く、無限個の座標 x, $\alpha_n^{(\pm)}$, $c_n^{(\pm)}$, … で書かれた (4-20) の関数解であるということだけが要求されている訳だが、ここでは §3-1 で構成した constant field strength における boundary state $|B(F)\rangle$ が実際 (4-20) の解になっていることを見てみよう。

$$Q_B = 2c_0\left(L^{(+)} + L^{(-)}\right) + 2\bar{c}_0\left(M^{(+)} + M^{(-)}\right) + 2\left(\hat{Q}_B^{(+)} + \hat{Q}_B^{(-)}\right) \tag{4-21}$$

の様に ghost zero mode をあらわに書く。ここで

$$
\begin{cases}
L^{(\pm)} := -\dfrac{1}{2}p^2 - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_{-n}^{(\pm)}\cdot\alpha_n^{(\pm)} + n\left(c_{-n}^{(\pm)}\bar{c}_n^{(\pm)} + \bar{c}_{-n}^{(\pm)}c_n^{(\pm)}\right)\right) + 1 & \text{(4-22)} \\
M^{(\pm)} := 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\, c_{-n}^{(\pm)}c_n^{(\pm)} & \text{(4-23)}
\end{cases}
$$

$$\hat{Q}_B^{(\pm)} := -\frac{1}{2}\sum_{n\neq 0}\sum_{m} c^{(\pm)}_{-n}\alpha^{(\pm)}_{m}\alpha^{(\pm)}_{n-m} - \frac{1}{2}\sum_{n\neq 0}\sum_{\substack{m\neq 0\\ m\neq n}}(n+m) : c_{-n}\bar{c}_{n-m}c_m : \qquad (4\text{-}24)$$

である。π_c^0を無視する処法で $c_0 \sim \frac{\partial}{\partial \bar{c}_0}$ であるから、条件 (4-20) は

$$\begin{cases} (M^{(+)} + M^{(-)})\,|B(F)\rangle = 0 & (4\text{-}25)\\ (\hat{Q}_B^{(+)} + \hat{Q}_B^{(-)})\,|B(F)\rangle = 0 & (4\text{-}26)\end{cases}$$

となる。$|B(F)\rangle$ の上の固有方程式 (3-14, 15, 18) を用いてこれらの条件式を証明しよう。まず (4-25) は、(3-18) 第一式を用いると、

$$\begin{aligned} M^{(-)}|B(F)\rangle &= 2\sum_{n>0} n\, c^{(-)}_{-n} c^{(-)}_{n}|B(F)\rangle = 2\sum_{n>0} n\, c^{(-)}_{-n} c^{(+)}_{-n}(-1)|B(F)\rangle \\ &= 2\sum_{n>0} n\, c^{(+)}_{-n} c^{(-)}_{-n}|B(F)\rangle = 2\sum_{n>0} n\, c^{(+)}_{-n} c^{(+)}_{n}(-1)|B(F)\rangle = -M^{(+)}|B(F)\rangle . \end{aligned} \qquad (4\text{-}27)$$

次に (4-26) は、$\hat{Q}_B$ の表式の第二項 (4-24) は c のみで書かれているので (4-27) と同様に出来、また第一項、α を含む項は

$$\begin{aligned} &-\sum_{n\neq 0}\sum_{m}\left(c^{(+)}_{-n}\alpha^{(+)}_{m}\cdot\alpha^{(+)}_{n-m} + c^{(-)}_{-n}\alpha^{(-)}_{m}\cdot\alpha^{(-)}_{n-m}\right)|B(F)\rangle \\ &= -\sum_{n\neq 0}\sum_{\substack{m\neq 0\\ m\neq n}}\left(c^{(+)}_{-n}\alpha^{(+)\mu}_{m}\alpha^{(+)}_{n-m\,\mu} + c^{(-)}_{-n}\alpha^{(-)\mu}_{m}\alpha^{(-)}_{n-m\,\mu}\right)|B(F)\rangle \\ &\quad -\sum_{n\neq 0}\sum_{\substack{m\neq 0\\ m\neq n}}\left(c^{(+)}_{-n}\alpha^{(+)i}_{m}\alpha^{(+)}_{n-m\,i} + c^{(-)}_{-n}\alpha^{(-)i}_{m}\alpha^{(-)}_{n-m\,i}\right)|B(F)\rangle \\ &\quad -2\sum_{n\neq 0}\left(c^{(+)}_{-n}\alpha^{(+)\mu}_{0}\alpha^{(+)}_{n\,\mu} + c^{(-)}_{-n}\alpha^{(-)\mu}_{0}\alpha^{(-)}_{n\,\mu}\right)|B(F)\rangle \\ &\quad -2\sum_{n\neq 0}\left(c^{(+)}_{-n}\alpha^{(+)i}_{0}\alpha^{(+)}_{n\,i} + c^{(-)}_{-n}\alpha^{(-)i}_{0}\alpha^{(-)}_{n\,i}\right)|B(F)\rangle . \end{aligned} \qquad (4\text{-}28)$$

(4-28) 右辺第一項・第二項は、非 zero mode に対する固有方程式 (3-14, 15, 18) と行列 $\mathcal{O}$ の直行性 (3-17) で 0 になる。第四項は加えて

$$\alpha_0^{(+)i} = \alpha_0^{(-)i}, \qquad (4\text{-}29)$$

第三項は固有方程式

$$\alpha_0^{(+)\mu} = \alpha_0^{(-)\mu} = \frac{1}{2}p^\mu = 0 \qquad (4\text{-}30)$$

を用いれば 0 となることが分かる。これらから、(4-25)(4-26) が成立すること

が確かめられた。即ち、$|B(F)\rangle$ は (4-20) の解

$$Q_B |B(F)\rangle = 0 \tag{4-31}$$

であり、$B = B(F)$ で作用 (4-9) は対称性を持つのである。

§4-3. σ-model の対称性との比較

前節では、作用 (4-9) の対称性として

$$\begin{cases} \delta|\Phi\rangle = Q_B|\Lambda\rangle + 2g|\Phi * \Lambda\rangle & (4\text{-}32) \\ \delta|B\rangle = 2g|B * \Lambda\rangle & (4\text{-}33) \end{cases}$$

を得た。第一式 (4-32)（の特に右辺第一項）は §2-1 で見た様に、一般座標変換と、場 B_{MN} に対する gauge 変換 (2-25) を含んだ変換を意味している。では、$|B\rangle$ に対する変換 $\delta|B\rangle$ (4-33) はどの様な変換を意味しているのだろう？

ここでは特に (2-25) のうち

$$|\Lambda\rangle = -i\bar{c}_0 \zeta_\mu(x) (\bar{c}_{-1} \alpha_{-1}^\mu)^{[+-]} |0\rangle \tag{4-34}$$

を考えてみよう。（$\zeta_M(x)$ は $M=\mu$ (Neumann 方向) のみ値をもち、また argument x も x^ν のみとする。）この $|\Lambda\rangle$ で、massless 係数場 $B_{MN}^{(SFT)}$ は

$$\delta B_{\mu\nu}^{(SFT)} = \partial_\mu \zeta_\nu - \partial_\nu \zeta_\mu \tag{4-35}$$

と変換していた。では boundary state $|B\rangle$ の変換 (4-33) は、この $|\Lambda\rangle$ (4-34) でどの様に変換しているだろうか。

(3-18) を固有方程式とする固有状態 $|B\rangle$ と、(4-34) の $|\Lambda\rangle$ に対して

$$|B * \Lambda\rangle = \frac{i}{2\sqrt{2}\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma \, \frac{dX^\mu}{d\sigma} \zeta_\mu(X) \, |B\rangle \tag{4-36}$$

が（$\alpha_\Lambda \to 0$ で）成立することを用いると（証明は Appendix B. ここでの X は $\tau = 0$ でのものである）

$$\delta|B\rangle = 2g|B+\Lambda\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}\pi}\int_0^{2\pi} d\sigma\ \frac{dX^\mu}{d\sigma}\zeta_\mu(X)|B\rangle. \tag{4-37}$$

($g=1$と置いた。以下、$g=1$である。) 今、$\zeta_\mu(x)$として

$$\zeta_\mu(x) = a_{\mu\nu}x^\nu \tag{4-38}$$

を考えてみる(理由は後述)と、

$$\int_0^{2\pi} d\sigma\ \frac{dX^\mu}{d\sigma}a_{\mu\nu}X^\nu = a_{\mu\nu}\int_0^{2\pi} d\sigma\left(\sum_{n\neq 0}\frac{i}{2n}\left(\alpha_n^{(+)\mu}(in)e^{in\sigma} + \alpha_n^{(-)\mu}(-in)e^{-in\sigma}\right)\right)$$
$$\times\left(x^\nu + \sum_{m\neq 0}\frac{i}{2m}\left(\alpha_m^{(+)\nu}e^{im\sigma} + \alpha_m^{(-)\nu}e^{-im\sigma}\right)\right)$$
$$= -\frac{i\pi}{2}a_{\mu\nu}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\left(-\alpha_n^{(+)\mu}\alpha_{-n}^{(+)\nu} + \alpha_n^{(-)\mu}\alpha_{-n}^{(-)\nu} + \alpha_n^{(+)\mu}\alpha_n^{(-)\nu} - \alpha_n^{(-)\mu}\alpha_n^{(+)\nu}\right) \tag{4-39}$$

から($a_{\mu\nu}$の対称成分は効かない。故に以降$a_{\mu\nu}$は反対称とする。)、

$$\delta|B\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}a_{\mu\nu}\left[\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\left(-\alpha_n^{(+)\mu}\alpha_{-n}^{(+)\nu} + \alpha_n^{(-)\mu}\alpha_{-n}^{(-)\nu} + \alpha_n^{(+)\mu}\alpha_n^{(-)\nu} - \alpha_n^{(-)\mu}\alpha_n^{(+)\nu}\right)\right]|B\rangle. \tag{4-40}$$

更に$|B\rangle = |B(F)\rangle$ (3-20) として、$|B(F)\rangle$の上の固有方程式 (3-14, 15) を用いて
(4-40) を全て生成演算子に書き直してみよう。

$$\delta|B(F)\rangle = \cdots = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n>0}\left\{\frac{1}{n}\alpha_{-n}^{(-)\nu}\left(O_\nu{}^\lambda a_\lambda{}^\mu + a_\nu{}^\lambda O_\lambda{}^\mu + O_\nu{}^\lambda a_\lambda{}^\delta O_\delta{}^\mu + a_\nu{}^\mu\right)\alpha_{-n\mu}^{(+)}\right.$$
$$\left. - a_\nu{}^\mu O_\mu{}^\nu\right\}|B(F)\rangle$$
$$= \sqrt{2}\sum_{n>0}\left\{\frac{1}{2n}\alpha_{-n}^{(-)}\cdot(\delta+O)\cdot a\cdot(\delta+O)\cdot\alpha_{-n}^{(+)} - a_\mu{}^\nu(\delta+F)^{-1}{}_\nu{}^\mu\right\}|B(F)\rangle$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sum_{n>0}\left\{\frac{1}{n}\alpha_{-n}^{(-)}(\delta+O)\,a\,(\delta+O)\alpha_{-n}^{(+)}\right\} + \mathrm{tr}\,a(\delta+F)^{-1}\right]|B(F)\rangle \tag{4-41}$$

ここで二行目へは$a_{\mu\nu}$の反対称性と

$$O_\mu{}^\nu = (\delta+F)^{-1}{}_\mu{}^\lambda(\delta-F)_\lambda{}^\nu = -\delta_\mu{}^\nu + 2(\delta+F)^{-1}{}_\mu{}^\nu \tag{4-42}$$

を用いて変形し、また三行目へは

$$\sum_{n>0}1 = \zeta(0) = -\frac{1}{2} \tag{4-43}$$

のζ-関数正則化を行なっている。

(4-38) の様な $|\Lambda\rangle$ を考えた理由を説明しよう。

弦の massless 場は，背景場として（σ-model で）couple させることができる。特に，今考えている $B_{MN}^{(SFT)}$ に対応する σ-model 背景場 $B_{MN}^{(\sigma)}$ と，boundary に couple している gauge 場 $A_\mu(X)$ を考えると，

$$S^{(\sigma)} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{M}} d\tau d\sigma\, \epsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha X_M \partial_\beta X_N B^{MN(\sigma)}(X) + \frac{1}{\pi}\oint_{\partial\mathcal{M}} d\sigma\, A_\mu(X)\partial_\sigma X^\mu \quad (4\text{-}44)$$

boundary $\partial\mathcal{M}$ は $\tau=0$ であり，ここで開弦が emit される状況となっている。

先の $B_{MN}^{(SFT)}$ に対する gauge 変換 (4-35) と同様な対称性変換

$$\delta_\sigma B_{MN}^{(\sigma)} = \partial_M\Lambda_N - \partial_N\Lambda_M \quad (4\text{-}45)$$

がこの作用 $S^{(\sigma)}$ の対称性として成立するためには，同時に A_μ も動かさねばならない。実際，

$$\begin{aligned}\delta_\sigma(S^{(\sigma)}\text{の第一項}) &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathcal{M}} d\sigma d\tau\, \epsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^M\partial_\beta X^N \partial_M\Lambda_N \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathcal{M}} d\sigma d\tau\, \epsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha\Lambda_N\partial_\beta X^N = \frac{1}{\pi}\int_{\mathcal{M}} d\sigma d\tau\, \epsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha(\Lambda_N\partial_\beta X^N) \\ &= \frac{1}{\pi}\oint_{\partial\mathcal{M}=\{\tau=0\}} d\sigma\, \Lambda_N\partial_\sigma X^N = \frac{1}{\pi}\oint_{\partial\mathcal{M}} d\sigma\, \Lambda_\mu\partial_\sigma X^\mu. \end{aligned} \quad (4\text{-}46)$$

（最後の等号で，D-brane の固定ゲージ $\partial_\sigma X^i = 0$ の条件を使った。）

この boundary の寄与を消すために，

$$\delta_\sigma A_\mu = -\Lambda_\mu \quad (4\text{-}47)$$

が必要である。故にまとめると，弦の σ-model の観点からは，boundary のある world sheet に対して背景場の gauge 変換は

$$\begin{cases} \delta_\sigma B_{MN}^{(\sigma)} = \partial_M\Lambda_N - \partial_N\Lambda_M & (4\text{-}48) \\ \delta_\sigma A_\mu = -\Lambda_\mu & (4\text{-}49) \end{cases}$$

となる。

以前の関係式 (4-14) を用いると，(4-35) と (4-45) から，gauge 変換の parameter ξ_M，Λ_M に対して

$$2\sqrt{2}\, t_p\, \xi_M = T_p\, \Lambda_M \tag{4-50}$$

の対応があることに注意しておこう。

さて boundary state $|B(F)\rangle$ は、constant field strength に対して

$$|B(F)\rangle = \sqrt{\det(\eta+F)}\,\exp\left(\sum_{n>0}\left[\frac{1}{n}\left(\alpha_{-n}^{(+)i}\,\alpha_{-n\,i}^{(+)} - \alpha_{-n}^{(+)\mu}\,\mathcal{O}(F)_\mu{}^\nu\,\alpha_{-n\,\nu}^{(+)} + \text{ghost}\right]\right)|0\rangle \tag{4-51}$$

の様に、規格化因子と行列 $\mathcal{O}$ の中に $F_{\mu\nu}$ 依存性即ち gauge 場 A_μ 依存性が入っている。すると、「先程の $\delta|B\rangle$ が（$|B\rangle = |B(F)\rangle$ の時に）σ-model の観点から予測される A_μ の変化 $\delta_\sigma A_\mu$ によるものと一致するだろうか？」という問題意識が湧く。この一致を見れば、σ-model の対称性を弦の場の理論の形式に書き換えまた拡張出来た（$|\Lambda\rangle$ は無限個の関数自由度を含む）ことになる。

果して、一致するのである。詳しく見てみよう。

σ-model の (4-49) から

$$\delta_\sigma F_{\mu\nu} = \delta_\sigma(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = -\partial_\mu \Lambda_\nu + \partial_\nu \Lambda_\mu . \tag{4-52}$$

故に

$$\Lambda_\mu = \tilde{a}_{\mu\nu} X^\nu \quad (\tilde{a}_{\mu\nu}: \text{反対称}) \tag{4-53}$$

とすると

$$\delta_\sigma F_{\mu\nu} = 2\tilde{a}_{\mu\nu} \tag{4-54}$$

である。(4-50) の対応で、(4-53), (4-38) を見比べると

$$\tilde{a}_{\mu\nu} = 2\sqrt{2}\,\frac{t_p}{T_p}\,a_{\mu\nu} \tag{4-55}$$

と関係している。

（ Λ（とろ）を X（x は χ）の一次式としたのは、これが (4-54) の様に constant field strength を微小 constant ずらす mode になっているからである。boundary state の厳密な表式は constant field strength に対してのみ得られていることに注意しよう。）

(4-51) の $|B(F)\rangle$ に (4-54) を施す。

$$\delta_\sigma\left(\sqrt{\det(\eta+F)}\right) = \frac{1}{2}\left(\det(\eta+F)\right)^{-\frac{1}{2}}\delta_\sigma\left(\det(\eta+F)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\det(\eta+F)\right)^{-\frac{1}{2}}\Big(\det(\eta+F+\delta_\sigma F)-\det(\eta+F)\Big)$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\det(\eta+F)}\Big(\det\left(\delta+(\delta_\sigma F)(\delta+F)^{-1}\right)-\det\delta\Big)$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\det(\eta+F)}\Big(\mathrm{tr}\,(\delta_\sigma F)(\delta+F)^{-1}\Big)+O\left((\delta_\sigma F)^2\right)$$
$$= \sqrt{\det(\eta+F)}\;\tilde{\alpha}_\mu{}^\nu(\delta+F)^{-1}{}_\nu{}^\mu + O(\tilde{\alpha}^2) \qquad (4\text{-}56)$$

$$\delta_\sigma \Theta_\mu{}^\nu = \delta_\sigma\left((\delta+F)^{-1}{}_\mu{}^\lambda(\delta-F)_\lambda{}^\nu\right)$$
$$= \cdots = -(\delta+\Theta)_\mu{}^\lambda\,\tilde{\alpha}_\lambda{}^\delta(\delta+\Theta)_\delta{}^\nu + O(\tilde{\alpha}^2). \qquad (4\text{-}57)$$

これらから、

$$\delta_\sigma|B(F)\rangle = \left[\left(\sum_{n>0}\frac{1}{n}\alpha^{(-)}_{-n}(\delta+\Theta)\tilde{\alpha}(\delta+\Theta)\alpha^{(+)}_{-n}\right)+\mathrm{tr}\,\tilde{\alpha}(\delta+F)^{-1}\right]|B(F)\rangle + O(\tilde{\alpha}^2). \qquad (4\text{-}58)$$

この式(4-58)は、以前の弦の場の理論からの $\delta|B\rangle$ (4-41) と、F依存性が完全に一致している。

特に

$$\underset{\uparrow \mathrm{SFT}}{\delta|B(F)\rangle} = \underset{\uparrow \delta_\sigma F}{\delta_\sigma|B(F)\rangle} \qquad (4\text{-}59)$$

とみなすと、

$$\frac{1}{\sqrt{2}}a_{\mu\nu} = \tilde{\alpha}_{\mu\nu} \qquad (4\text{-}60)$$

を得る。D-brane 作用と B-项 の 比較を通じて得られた(4-55)をこの(4-60)に代入すれば、

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\,\frac{t_p}{T_p}. \qquad (4\text{-}61)$$

故に

$$t_p = \frac{1}{4}T_p \quad (= -4\pi) \qquad (4\text{-}62)$$

と決まる。

§4-4. cancelの機構とBI作用の必要性

前節では、弦の場の理論の対称性

$$\delta|B(F)\rangle = 2|B(F)*\Lambda\rangle \tag{4-63}$$

が、(4-34) かつ (4-38) のΛに対しては

$$F \to F + \delta_\sigma F \tag{4-64}$$

で生成される$|B(F)\rangle$の微小変化と一致することを見た。

さて、$B(F)$-Φ項の不変性を考えると、(4-63)の$\delta B(F)$に対してそれをcancelするのは

$$\delta\Phi = Q_B\Lambda + 2\Phi*\Lambda \tag{4-65}$$

の第二項だった。しかし、(4-63)に対応している(4-64)はσ-modelから見ると(4-48)であり、それは(4-65)の右辺第一項になっている。これは不自然に見える。このことは、σ-modelの不変性を詳しく見てみると明瞭になる：σ-modelの対称性

$$\delta_\sigma B^{(\sigma)}_{\mu\nu} = -\delta_\sigma F_{\mu\nu} \tag{4-66}$$

は、D-brane作用の中に$B^{(\sigma)}$が

$$\left(B^{(\sigma)}_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}\right)$$

の形で入って来るということを言っている。つまり、BとFの形に注意するとD-brane作用は（h, ϕを無視して）

$$\begin{aligned}\sqrt{\det(1+B+F)} &= \sqrt{\det(1+F)}\sqrt{\det\left(1+B(1+F)^{-1}\right)} \\ &= \sqrt{\det(1+F)} + \sqrt{\det(1+F)}\,\mathrm{tr}\left[B(1+F)^{-1}\right] + O(B^2).\end{aligned} \tag{4-67}$$

この第二項の$\delta_\sigma B^{(\sigma)}_{\mu\nu}$は第一項の$\delta_\sigma F_{\mu\nu}$とcancelするのである。一方$B(F)$-$\Phi$項は(4-67)第二項のみを表し、この項のみで対称性を持っていた。この違いは何だろう？

問題となっている (4-65) の第一項, $Q_B\Lambda$ の変換が 弦の場の理論の作用 B·亜項に どの様に係っていたか思い出そう。この変化分

$$B\cdot Q_B\Lambda \tag{4-68}$$

は部分積分をして

$$Q_B\,B = 0 \tag{4-69}$$

とし, $B = B(F)$ についてこれが成立していることを見た (§4-2)。しかし前節で σ-model との対応を見た $\xi_\mu(x)$ は (4-38) であって, 無限遠で収束せず, 部分積分は表面項を残してしまうのである。つまり, (4-38) の $\xi_\mu(x)$ に対しては (4-68) は zero では無い。

この zero で無い寄与は, σ-model で言えば (4-67) 第二項の $\delta_\sigma B^{(\sigma)}_{\mu\nu}$ に対応しているはずである。従って, $B\cdot Q_B\Lambda$ の表面項は (4-67) 第一項

$$\sqrt{\det(1+F)} \tag{4-70}$$

という BI 作用 (gauge kinetic term) の $\delta_\sigma F$ で cancel していると思われる。この consistency を, 具体的な計算で見てみよう。

この議論では Q_B の zero mode ($Q_B^{(0)}$ と書く) のみが効くので特にここを見ると

$$Q_B^{(0)} = -2\left(\sum_{n\neq 0}\left[c^{(+)}_{-n}\,\alpha^{(+)\mu}_0\,\alpha^{(+)}_{n\,\mu} + c^{(-)}_{-n}\,\alpha^{(-)\mu}_0\,\alpha^{(-)}_{n\,\mu}\right]\right). \tag{4-71}$$

運動量 zero mode $\alpha_0^{(\pm)\mu}$ は

$$\alpha^{(+)}_{0\,\mu} = \alpha^{(-)}_{0\,\mu} = \frac{1}{2}p_\mu = -\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{4-72}$$

であることから, $|B\rangle = |B(F)\rangle$ の時に表面項は

$$\begin{aligned}
&B(F)\cdot Q_B\Lambda \\
&= \int d^dx\, d\bar{c}_0\; \delta^{(d-p-1)}(x)\,\langle B(F)|\left(-2\sum_{n\neq 0}\left[c^{(+)}_{-n}\alpha^{(+)\mu}_0\alpha^{(+)\mu}_n + c^{(-)}_{-n}\alpha^{(-)\mu}_0\alpha^{(-)\mu}_n\right]\right) \\
&\qquad\qquad \times\left(-\bar{c}_0\, i\,\xi_\nu(x)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\bar{c}^{(+)}_{-1}\alpha^{(-)\nu}_{-1} - \bar{c}^{(-)}_{-1}\alpha^{(+)\nu}_{-1}\right)\right)|0\rangle
\end{aligned} \tag{4-73}$$

$$= \int d^{p+1}x\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\partial_\mu\xi_\nu(x)\,\langle B(F)|\sum_{n\neq 0}\left(c^{(+)}_{-n}\alpha^{(+)\mu}_n + c^{(-)}_{-n}\alpha^{(-)\mu}_n\right)\left(\bar{c}^{(+)}_{-1}\alpha^{(-)\nu}_{-1} - \bar{c}^{(-)}_{-1}\alpha^{(+)\nu}_{-1}\right)|0\rangle$$

$$= \int d^{p+1}x \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \partial_\mu \xi_\nu(x) \langle B(F)| \left(\alpha_{-1}^{(+)\mu} \alpha_{-1}^{(-)\nu} - \eta^{\mu\nu} c_{-1}^{(+)} \bar{c}_{-1}^{(-)} + \eta^{\mu\nu} c_{-1}^{(-)} \bar{c}_{-1}^{(+)} - \alpha_{-1}^{(-)\mu} \alpha_{-1}^{(+)\nu} \right) |0\rangle$$

$$= \int d^{p+1}x \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \partial_\mu \xi_\nu(x) \langle B(F)| \left(-\Theta^{\nu\rho} \alpha_{1\rho}^{(+)} \alpha_{-1}^{(+)\mu} + \eta^{\mu\nu} c_{1}^{(-)} \bar{c}_{-1}^{(-)} - \eta^{\mu\nu} c_{1}^{(+)} \bar{c}_{-1}^{(+)} + \Theta^{\mu\rho} \alpha_{1\rho}^{(+)} \alpha_{-1}^{(+)\nu} \right) |0\rangle$$

（$|B(F)\rangle$ の上の固有方程式を使った。）

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \partial_\mu \xi_\nu \langle B(F)| \left(-\Theta^{\nu\mu} + \Theta^{\mu\nu} \right) |0\rangle \, d^{p+1}x$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \partial_\mu (a_{\nu\rho} x^\rho) \sqrt{\det(\eta+F)} \left(-\Theta^{\nu\mu} + \Theta^{\mu\nu} \right) d^{p+1}x$$

$$= \sqrt{2} \int a_{\mu\nu} \Theta^{\mu\nu} \sqrt{\det(\eta+F)} \, d^{p+1}x$$

← (4-42) を使う。

$$= -2\sqrt{2} \int d^{p+1}x \; \mathrm{tr}\left(a (\delta+F)^{-1} \right) \cdot \sqrt{\det(\eta+F)}$$

← (4-55) を使う。

$$= \frac{T_p}{t_p} \int d^{p+1}x \sqrt{\det(\eta+F)} \; \mathrm{tr}\left(\hat{a} (\delta+F)^{-1} \right) \times (-1). \qquad (4\text{-}74)$$

(4-56) の関係式に注意すれば、表面項 (4-74) を cancel するためには作用に更に

$$\frac{T_p}{t_p} \int d^{p+1}x \sqrt{\det(\eta+F)} \qquad (4\text{-}75)$$

が必要であることが分かる。 $\delta_\xi F_{\mu\nu} = 2\hat{a}_{\mu\nu}$ ((4-54) 式) を用いれば (4-75) は (4-74) の逆符号を生むからである。

つまり、良い関数でない $\xi_\mu(x)$ では部分積分の表面項を消す extra term が必要であり、σ-model の対称性を見るために用いた $\xi_\mu = a_{\mu\nu} x^\nu$ は実際その場合であって、表面項を cancel するために BI 作用 (4-75) が必要になるのである。これが、以前に対応が何かなかった項 (4-15) の存在の必要性を説明している。D-brane 作用の、開弦 massless 場に依らない部分 (4-15) (BI 作用) は、弦の場の理論では、無限遠で消えない表面項を cancel するためのものとして導入される。[5]

$\xi_\mu = a_{\mu\nu} x^\nu$ 型の対称性で不変な作用は結局

$$B(F)\cdot\Phi + \frac{T_p}{t_p}\int d^{p+1}x\,\sqrt{\det(\eta+F)} \qquad (4\text{-}76)$$

の形となる。全作用は

$$S = \frac{1}{2}\Phi\cdot Q_B\Phi + \frac{1}{3}\Phi(\Phi*\Phi) + T_p\int d^{p+1}x\,\sqrt{\det(\eta+F)} + t_p B(F)\cdot\Phi \qquad (4\text{-}77)$$

これの第三項部分は、D-brane 作用の $O(\Phi^0)$ 項 (4-15) と、係数も正確に一致することが分かる。

§4-5. D-brane 作用への補正の計算

§4-5-1. 仮定

前節・前々節では、σ-model の gauge 不変性と、その弦の場の理論での捉え方について、対応を見た。

σ-model の対称性の特徴は、(4-49)

$$\delta_\sigma A_\mu = -\Lambda_\mu \qquad (4\text{-}78)$$

から分かる様に、gauge 場の全ての関数自由度を動かす対称性になっているということである。§4-3, 4-4 では特に $\Lambda_\mu(X) = \hat{\alpha}_{\mu\nu}X^\nu$ と置いて、field strength を constant ずらす mode を見た。この mode を選んだ理由は、boundary state $|B\rangle$ が constant field strength の時にのみ厳密に書き下せる、ということであった訳だが、それでは、この全ての mode を(微小だが)生成出来る σ-model の対称性 (4-78) を使って、boundary state を一般の $F_{\mu\nu}$ について構成出来ないだろうか。

つまり、constant $F_{\mu\nu}$ についてのみ §4-3 で見た (4-59)

$$[\sigma\text{-model の対称性 } \delta_\sigma] = [\text{弦の場の理論の対称性 } \delta] \qquad (4\text{-}79)$$

が、更に一般の $|\Lambda\rangle$ についても成立していると仮定すると

$$\delta|B\rangle = 2|B*\Lambda\rangle \qquad (4\text{-}80)$$

に一般の $\xi_\mu(X)$ を代入することで、constant でない field strength に対応

DEPARTMENT OF PHYSICS
KYOTO UNIVERSITY.

するboundary state を構成出来るのである:

$$|B(\text{一般の}F)\rangle = |B(\text{constant }F)\rangle + 2|B * \underbrace{\Lambda}\rangle + O(\xi^2). \tag{4-81}$$

（$\xi_\mu \sim -A_\mu$ として, non-constant F を生成する ξ_μ を代入する。）

これにより, 例えば弦の場 $\langle\Phi|$ と bracket をとれば, $\langle\Phi|B(F)\rangle$ は D-brane 作用の $O(\Phi)$ の項を再現していたので

$$\langle\Phi|\delta|B\rangle = \langle\Phi|2|B*\Lambda\rangle \tag{4-82}$$

が D-brane 作用への non-constant F 補正を与えることになる。

§4-5-2 ∂F 型補正

実際に計算してみよう。まず

$$A_\mu(X) = \tilde{a}_{\mu\nu\rho}X^\nu X^\rho \tag{4-83}$$

と置くと, これは ∂F の形の補正を与えるはずであり, つまり D-brane 作用へのこの形の一次補正は

$$(h + B + c\phi)\cdot\partial F\cdot(F\text{の関数}) \tag{4-84}$$

の係数を与えると期待される。しかしこの (4-84) の形をよく見ると, Lorentz 添字の足が奇数個なので完全に縮約は出来ない。即ちこの形の補正は無く, ∂F 型補正は入るとすれば $(\partial F)^2$ から始まることになる。

この事を弦の場の理論で見てみよう。補正項は, 公式 (4-36) を用いて[6]

$$\begin{aligned}
2\langle\Phi|B(F)*\Lambda\rangle &= \langle\Phi|\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}d\sigma\,\frac{dX^\mu}{d\sigma}\,\xi_\mu(X)\,|B(F)\rangle \\
&= \langle\Phi| -\frac{i}{4\pi}\left(\frac{T_p}{\tau_p}\right)\tilde{a}_{\mu\nu\rho}\int_0^{2\pi}d\sigma\,\frac{dX^\mu}{d\sigma}X^\nu X^\rho\,|B(F)\rangle.
\end{aligned} \tag{4-85}$$

第二行に移る際に, (4-83) に対応する

$$\Lambda_\mu(X) = -\tilde{a}_{\mu\nu\rho}X^\nu X^\rho \tag{4-86}$$

と(4-50)を用いて

$$\xi_\mu(x) = \frac{T_p}{2\sqrt{2}\,t_p}\Lambda_\mu(x) = -\frac{T_p}{2\sqrt{2}\,t_p}\tilde{a}_{\mu\nu\rho}\,x^\nu x^\rho \tag{4-87}$$

となることを使った。

(4-85) の bracket は、Φ, B(F) 共に、振動子 $\alpha^{(\pm)}$ を偶数個持っているので、はさまれている $\left(\frac{d}{d\sigma}X^\mu\right)X^\nu X^\rho$ にも振動子が偶数個でないと 0 になってしまう。従って X^ν もしくは X^ρ は zero mode のみが効くことになるので（$\frac{d}{d\sigma}X^\mu$ に zero mode は無い）

$$\begin{aligned}(4\text{-}85) &= \langle\Phi| -\frac{i}{4\pi}\frac{T_p}{t_p}\tilde{a}_{\mu\nu\rho}\int_0^{2\pi}d\sigma\,\frac{dX^\mu}{d\sigma}\left(x^\nu X^\rho + X^\nu x^\rho\right)|B(F)\rangle \\ &= \langle\Phi| -\frac{i}{2\pi}\frac{T_p}{t_p}\tilde{a}_{\mu\nu\rho}\int_0^{2\pi}d\sigma\,\frac{dX^\mu}{d\sigma}X^\nu x^\rho|B(F)\rangle \qquad (4\text{-}88) \\ &= \langle\Phi|\left(\frac{i}{\sqrt{2}\pi}\int_0^{2\pi}d\sigma\,\frac{dX^\mu}{d\sigma}\left(-\frac{T_p}{t_p}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{a}_{\mu\nu\rho}x^\rho\right)X^\nu|B(F)\rangle\right.\end{aligned}$$

第二行目へは $\tilde{a}_{\mu\nu\rho} = \tilde{a}_{\mu\rho\nu}$ を仮定した。この最終行をよく見ると、これは (4-37, 38) で $a_{\mu\nu}$ の所に

$$-\frac{T_p}{t_p}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{a}_{\mu\nu\rho}x^\rho \tag{4-89}$$

が入った計算となっているので、§4-3 の計算を用いると、

$$(4\text{-}85) = \langle\Phi|\,\delta_\sigma|B(F)\rangle\Big|_{\delta_\sigma F_{\mu\nu} = -2(\tilde{a}_{\mu\nu\rho}-\tilde{a}_{\nu\mu\rho})x^\rho} . \tag{4-90}$$

この対応する $\delta_\sigma F_{\mu\nu}$ は、(4-54, 55) から

$$\begin{aligned}\delta_\sigma F_{\mu\nu} &= 4\sqrt{2}\,\frac{t_p}{T_p}\left(a_{\mu\nu}\text{に対応する部分で}\ \mu\leftrightarrow\nu\ \text{反対称化}\right) \\ &= 4\sqrt{2}\,\frac{t_p}{T_p}\cdot\left(-\frac{T_p}{t_p}\tilde{a}_{[\mu\nu]\rho}x^\rho\right) \qquad (4\text{-}91) \\ &= -2\left(\tilde{a}_{\mu\nu\rho}-\tilde{a}_{\nu\mu\rho}\right)x^\rho\end{aligned}$$

として求めた。

以上の様に求まった補正 (4-90) は、$|B(F)\rangle$ の F の所に、次の F(x)

$$F_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu} - 2\left(\tilde{a}_{\mu\nu\rho}-\tilde{a}_{\nu\mu\rho}\right)x^\rho \tag{4-92}$$

を代入したものになっていることが (4-90) から見てとれる訳だが、これはきっちり、gauge 場 (4-83) から作った field strength

$$A_\mu(x) = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}x^\nu + \tilde{\alpha}_{\mu\nu\rho}x^\nu x^\rho$$

$$\Rightarrow F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \qquad (4\text{-}93)$$

$$= F_{\mu\nu} - 2(\hat{\alpha}_{\mu\nu\rho} - \tilde{\alpha}_{\nu\mu\rho})x^\rho$$

に一致する。

故に D-brane 作用の $O(\Phi)$ の部分は、この $F(x)$ に一般化しても、F が $F(x)$ となるだけで新しい項を生まない。

§4-5-3. $\partial\partial F$ 型補正

次に、x の三次

$$A_\mu(x) = \tilde{\alpha}_{\mu\nu\rho\sigma}x^\nu x^\rho x^\sigma \qquad (4\text{-}94)$$

を考えてみよう。($\hat{\alpha}_{\mu\nu\rho\sigma}$ は ν, ρ, σ について対称であるとおく。)
補正項は、前小節と全く同じ様にして、((4-85) 参照)

$$\langle\Phi|\left(-\frac{i}{4\pi}\right)\frac{T_p}{t_p}\tilde{\alpha}_{\mu\nu\rho\sigma}\int_0^{2\pi}d\sigma\frac{dX^\mu}{d\sigma}X^\nu X^\rho X^\sigma|B(F)\rangle \qquad (4\text{-}95)$$

である。まず X の zero mode を考えよう。$X = x + \tilde{X}$ と書くと、

$$x^\nu x^\rho \tilde{X}^\sigma,\quad \tilde{X}^\nu x^\rho x^\sigma,\quad x^\nu \tilde{X}^\rho x^\sigma$$

のみが値をもつ。先と同様の計算をすれば、この寄与は、boundary state $|B(F)\rangle$ の中の F を (A を変えた分だけ) ずらすことになるのが分かる。よって、∂F mode と同じく、D-brane 作用への新しい補正項をもたらさない。non-zero mode 部分は、

$$\int_0^{2\pi}d\sigma\frac{dX^\mu}{d\sigma}\tilde{X}^\nu\tilde{X}^\rho\tilde{X}^\sigma \qquad (4\text{-}96)$$

$$= \frac{i\pi}{4}\sum_{\substack{m\neq0\\k\neq0\\l\neq0\\m+k+l\neq0}}\frac{1}{mkl}\left(\alpha^{(+)\mu}_{-m-k-l} - \alpha^{(-)\mu}_{m+k+l}\right)\left(\alpha^{(+)\nu}_{m} - \alpha^{(-)\nu}_{-m}\right)\left(\alpha^{(+)\rho}_{k} - \alpha^{(-)\rho}_{-k}\right)\left(\alpha^{(+)\sigma}_{l} - \alpha^{(-)\sigma}_{-l}\right).$$

$|B(F)\rangle$ の上の固有方程式を用いて計算すると，次式を得る：

$$\begin{cases} \langle 0|\,\alpha_1^{(+)p}\alpha_1^{(-)q}\displaystyle\int_0^{2\pi} d\sigma \frac{dX^\mu}{d\sigma}\tilde{X}^\nu\tilde{X}^\rho\tilde{X}^\sigma\,|B(F)\rangle\,\tilde{a}_{\mu\nu\rho\sigma} \\ \quad = \dfrac{i\pi}{8}\zeta(0)\sqrt{\det(\eta+F)}\,(\eta+\Theta)^{q\mu}(\eta+\Theta)^{\nu p}(\eta+\Theta)^{\sigma\rho}\left(\tilde{a}_{\rho\sigma\nu\mu}-\tilde{a}_{\sigma\rho\nu\mu}\right), \\ \langle 0|\displaystyle\int_0^{2\pi} d\sigma\frac{dX^\mu}{d\sigma}\tilde{X}^\nu\tilde{X}^\rho\tilde{X}^\sigma\,|B(F)\rangle\,\tilde{a}_{\mu\nu\rho\sigma} = 0. \end{cases} \tag{4-97}$$

$|\Phi\rangle$ に (2-6) 式を用いれば，(4-97) とから，

$$(4\text{-}95) = \frac{i}{4\sqrt{2}\pi}\frac{T_p}{t_p}\left(\hat{h}_{pq}+B_{pq}\right)\cdot\frac{i\pi}{8}\zeta(0)\sqrt{\det(\eta+F)} \times(\eta+\Theta)^{q\mu}(\eta+\Theta)^{\nu p}(\eta+\Theta)^{\sigma\rho}\left(\tilde{a}_{\rho\sigma\nu\mu}-\tilde{a}_{\sigma\rho\nu\mu}\right). \tag{4-98}$$

更に，

再定義：$\hat{h}_{pq} = h_{pq} + \eta_{pq} D \quad (2\text{-}20)$，

σ-model へ (4-14)：
$$\begin{cases} h_{pq}^{(SFT)} = \dfrac{T_p}{t_p}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2}}h_{pq}^{(\sigma)}, \quad B_{pq}^{(SFT)} = \dfrac{T_p}{t_p}\dfrac{1}{2\sqrt{2}}B_{pq}^{(\sigma)}, \\ D = \dfrac{T_p}{t_p}\cdot\dfrac{-1}{\sqrt{2}(d-2)}\phi^{(\sigma)}, \end{cases}$$

正則化：$\zeta(0) = -\dfrac{1}{2}$，$\partial_\mu\partial_\nu F_{\rho\sigma} = 6\left(\tilde{a}_{\sigma\rho\nu\mu}-\tilde{a}_{\rho\sigma\nu\mu}\right)$， (4-99)

$(4\text{-}42)$：$(\eta+\Theta)_{\mu\nu} = 2(\eta+F)^{-1}{}_{\mu\nu}$，

$(4\text{-}62)$：$t_p = \dfrac{1}{4}T_p$

を用いると，

$$(4\text{-}95) = -\frac{1}{48}\frac{T_p}{t_p}\left(h_{pq}^{(\sigma)}+\eta_{pq}\frac{-2}{d-2}\phi^{(\sigma)}+B_{pq}^{(\sigma)}\right)\sqrt{\det(\eta+F)} \times(\delta+F)^{-1\,q}{}_\mu(\delta+F)^{-1}{}_\nu{}^p(\delta+F)^{-1}{}_\sigma{}^\rho\,\partial^\mu\partial^\nu F_\rho{}^\sigma. \tag{4-100}$$

故に，D-brane 作用 S_D (3-47) への補正は，

$$t_p \times (4\text{-}100) \tag{4-101}$$

で与えられる。以上の様に，妥当な仮定 (4-79) の下で，弦の場の理論の立場から D-brane 作用への補正 (4-101) を求めることが出来た。

DEPARTMENT OF PHYSICS
KYOTO UNIVERSITY.

§4-6. 他論文の計算との比較の試み

前節で計算したD-brane作用への補正(4-101)は、純粋に弦の場の理論の対称性と妥当な仮定(conjecture)(4-79)に由るものである。一方で、§3-2で紹介した様に、boundary上の外場とgauge場を記述する有効作用はσ-model[ ]もしくは経路積分[ ]から求めることが出来る。特に、外場 $g^{(\sigma)}_{MN}$, $B^{(\sigma)}_{MN}$, $\phi^{(\sigma)}$ が入ったσ-modelでの、$\partial\partial F$ まで考慮して計算した有効作用があれば、前節の結果(4-101)と比較出来るのであるが、残念ながらそれは未だ行なわれていない。

Andreev と Tseytlin [21] は、閉弦の外場が入っていない場合(つまりgauge場のみ)の、有効作用に対する $(\partial F)^2$ 補正・$(\partial\partial F)$ 補正を与えた。この補正結果と比較を行なう方法を模作してみよう。

前節で得た結果は、$B^{(\sigma)}_{\mu\nu}$ の一次の項である。しかしσ-modelの観点からは、$B^{(\sigma)}_{\mu\nu}$ のgauge不変性から、$B^{(\sigma)}_{\mu\nu}$ は必ず

$$B^{(\sigma)}_{\mu\nu} + F_{\mu\nu} \tag{4-102}$$

の形で入っていなければいけない。((4-66)参照。) よって、補正が、ある関数 $\mathcal{F}(B^{(\sigma)}_{\mu\nu} + F_{\mu\nu})$ で書かれているとすると、(4-101)は この展開

$$\mathcal{F}(B + F) = \mathcal{F}(F) + \mathcal{F}'(F)\,B + \frac{1}{2}\mathcal{F}''B^2 + \cdots \tag{4-103}$$

の右辺第二項に相当するはずである。即ち、(4-101)とから、

$$\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta F^{\mu\nu}} = -\frac{T_p}{48}\sqrt{\det(\eta+F)}\,(\delta+F)^{-1\,\sigma}{}_{\mu}\,(\delta+F)^{-1}{}_{\nu}{}^{\rho}\,(\delta+F)^{-1}{}_{\sigma}{}^{\rho}\,\partial^{\mu}\partial^{\nu}F_{\rho}{}^{\sigma}. \tag{4-104}$$

[21]で求められたのは関数 $\mathcal{F}$ の $B^{(\sigma)}_{\mu\nu}=0$ の場合、即ち(4-103)の右辺第一項であるから、(4-104)を解けば、比較が行なえる。しかし、(4-104)の右辺をテイラー展開しても、この方程式を解くのは困難で、未だ満足な結果は得ていない：

$$(4\text{-}104) \Rightarrow \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta F^{\mu\nu}} = -\frac{T_p}{24}\left(F_{\sigma\rho}F_{\nu\mu}\,\partial^{\rho}\partial_{\rho}F_{\rho\sigma}\right)\Big|_{\mu\nu\,反対称} + O(F^5). \tag{4-105}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F} = ?$$

　では他の手法で、[21] と比較出来る結果を出せないだろうか。§4-4 を思い出してみよう。ここでは、BI作用は弦の場の理論では

$$\langle B|Q_B|\Lambda\rangle \text{ で } \xi_\mu = a_{\mu\nu}x^\nu \longrightarrow \text{表面項相殺のために } \sqrt{\det(\eta+F)} \tag{4-106}$$

として得られていた。そこで、∂F, $\partial\partial F$ を表す

$$\xi_\mu = a_{\mu\nu\rho}x^\nu x^\rho\ ,\ a_{\mu\nu\rho\sigma}x^\nu x^\rho x^\sigma \tag{4-107}$$

に対して同様の操作をしてみれば、BI作用への補正項を表面項相殺のためのものとして算出出来るかもしれない。

　しかし、これは新たな項を生まないということが判明する：

$$\langle B|Q_B|\Lambda(\xi_\mu = a_{\mu\nu\rho}x^\nu x^\rho)\rangle$$

$$= \cdots = -2\sqrt{2}\int d^{p+1}x\,(a_{\mu\nu\rho}x^\rho - a_{\nu\mu\rho}x^\rho)(\delta+F)^{-1\,\nu\mu}\sqrt{\det(\eta+F)} \tag{4-108}$$

このズレは、§4-5-2 での zero mode の時と同様に、F の自明なズレ

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow F_{\mu\nu}(x) := F_{\mu\nu} + 2(a_{\mu\nu\rho} - a_{\nu\mu\rho})x^\rho \tag{4-109}$$

の分を代入した BI作用

$$T_p\sqrt{\det(\eta + F(x))_{\mu\nu}} \tag{4-110}$$

で cancel 出来るのである。$\xi_\mu = a_{\mu\nu\rho\sigma}x^\nu x^\rho x^\sigma$ でも全く同じ結果となる。

　この様に、既存の補正計算 [21] との比較は少々困難であるようだ。これ以上の可能性については、次章で論ずることにしよう。

註 1　§4 の内容は大半が 畑さんとの共同研究 [22] に由るものである。

　 2　$B\cdot\Phi$ と S_D の比較から得た (4-14) を、作用 (4-8) に代入して、(4-7) と比較すると、残念なことに $\sqrt{g}\,R(g)$ の前の係数が 2倍だけ合わない。何故だろう？

3 変えるという可能性もある。

4 因子 g は、$*$ 積の定義を変えると吸収出来る（開弦の結合定数）。
また、

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\Phi\cdot Q_B\Phi + \frac{1}{3}g\,\Phi\cdot(\Phi*\Phi) \\
&= \frac{1}{g^2}\left(\frac{1}{2}\tilde{\Phi}\cdot Q_B\tilde{\Phi} + \frac{1}{3}\tilde{\Phi}\cdot(\tilde{\Phi}*\tilde{\Phi})\right) \qquad \tilde{\Phi} := g\Phi
\end{aligned}
\tag{4-111}
$$

の様にくくり出すことが出来る。$B\cdot\Phi$ 項がある場合も、

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\Phi\, Q_B\Phi + \frac{1}{3}g\,\Phi\cdot(\Phi*\Phi) + t_p B\cdot\Phi \\
&= \frac{1}{g^2}\left(\frac{1}{2}\tilde{\Phi}\cdot Q_B\tilde{\Phi} + \frac{1}{3}\tilde{\Phi}\cdot(\tilde{\Phi}*\tilde{\Phi})\right) + \frac{1}{g}t_p B\cdot\tilde{\Phi}
\end{aligned}
\tag{4-112}
$$

であり、これは (3-51) の e^{ϕ} 依存性と対応する。

$$
e^{-\frac{1}{2}\phi} \sim g. \tag{4-113}
$$

5 BI 作用自体を弦の場で書くのは困難であろう。例えば

$$
\sqrt{\det(\eta+F)} = \langle B(F)|0\rangle \tag{4-114}
$$

と書けなくはないが、これは $\langle B(F)|\Phi\rangle$ と見比べれば Tachyon condensation とでも呼ぶべきものであり、解釈しにくい。（そもそも、constant field strength を少しずらすという操作自体が、物理的には無限遠に charge を置くという妙な操作に対応している。）

6 $\xi_\mu(x)$ が x の2次以上の場合の公式 (4-36) には、未だ証明に不備がある。Appendix B 参照。

7 註 6 を見よ。

§5. 結論と展望

本論文では、HIKKO の開弦の場の理論[6]の形式においての D-brane の取扱いと現れ方を、主に弦の σ-model との比較を通じて、詳しく見て来た。その中で、

- B・Φ 項と D-brane 作用 S_D の一致 (§4-1)
- boundary state の変換と対称性の保持 (§4-2)
- σ-model の対称性との一致 (§4-3)
- BI 作用の自然な生成と対応 (§4-4)

等の美しい性質が現れた。これらの種々の一致から、固定された boundary としての D-brane と、その弦の場の理論での(対称性という観点での)取扱い方が明確になったと言えよう。

これらの一致を更に確認するためには(本論文では取り上げなかったが)

- 一般座標変換((2-25)第一式)を起こす $|A\rangle$ で $\delta|B\rangle$ を計算し、それが $|B(F)\rangle$ の
$$\delta F_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\lambda}F^{\lambda}{}_{\nu} + F_{\mu}{}^{\lambda}\epsilon_{\lambda\nu} \tag{5-1}$$
で再現されるか? $(\epsilon_{\mu\nu}x^{\nu} = \epsilon_{\mu}(x))$
- $\alpha' \to 0$ 極限で D-brane 作用の $O(\Phi^2)$ が再現されるか?

等が挙げられるが、これらは目下計算中である。

§4-5 では、上の美しい一致から更に進んで、ゲージ変換の全 mode が σ-model と弦の場の理論で一致していると仮定し、D-brane 作用への補正の計算を行なった。[1] これから更に、例えば、本論文で取扱わなかった D-brane fluctuation mode A^i ((3-6)参照)を生成する $|A\rangle$ を用いてこの mode を有効作用に導入し、[23] に見られる mode A^i の有効作用と比較するということも出来る($O(A^2)$ 以上の変換も必要になることであろう[2])。

本論文の中心になっているのは§4-1で導入された

$$B\cdot\Phi \tag{5-2}$$

という項である。この項の存在意義を考えてみよう。全作用

$$S = \frac{1}{2}\Phi\cdot Q_B\Phi + \frac{1}{3}g\,\Phi\cdot(\Phi*\Phi) + t_\varphi B\cdot\Phi \tag{5-3}$$

を見れば、B・Φ項は明らかにソース項である。これは「D-brane = 弦を放出するboundary」の見地から明らかな事ではある。ソースという意味を重要視して、(5-3)を通常の場の理論で行なう様にLegendre変換してみよう。

$g=0$の場合

$$S \sim \frac{1}{2}\frac{1}{t_\varphi^2}\langle B|\frac{1}{Q_B}|B\rangle. \tag{5-4}$$

これは「膜の理論」の有効作用になっているのではないだろうか。

それはともかく、本論文で閉弦の枠組にこだわった(例えば§3-1では図4でなく図5を用いた)理由は、§1で紹介したPolchinskiのconjecture「閉弦の理論にD-braneのsectorがある」を追究するためである。今、D-braneとその対称性はB・Φ項でうまく記述出来ることが分かったので、即ち次の一歩は、「B・Φ項が何故出て来るか」を調べることである。

弦の場の理論の枠組みでこの問題を調べる、ということの魅力は、この理論の"上"に「前幾何学的な弦の場の理論」(Pregeometrical String Field Theory)があり、この真空の一つとして閉弦の場の理論の作用(2-31)が与えられているという事実にある。この観点から、上の(5-2)項もしくは作用(5-3)を与えられないだろうか?

このことを調べる際には、対称性$|\Lambda\rangle$が重要な役割を果すに違いない。この対称性は全てのgauge場A_μのmode、(ひいては全open string mode,) D-brane fluctuation modeを生成することから、結局$|B\rangle$は全てAuxiliary modeなのだろうか?(Higgs mechanismを想起させる。)

これらは「夢」ではあるが、本稿がその夢への一歩となれば…

註 1 公式の使用に不備がある。Appendix B を参照。

2 $O(\Lambda^2)$ の gauge 変換について。

通常の gauge 場 の 有限変換は

$$A'_\mu = U\partial_\mu U^{-1} + UA_\mu U^{-1} \qquad U = e^\lambda \tag{5-5}$$

これより $\delta A_\mu = \partial_\mu\lambda + \frac{1}{2}(\partial_\mu\lambda\cdot\lambda - \lambda\cdot\partial_\mu\lambda) - \lambda A_\mu + A_\mu\lambda - \lambda A_\mu\lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 A_\mu + \frac{1}{2}A_\mu\lambda^2.$ (5-6)

微分形式で書けば

$$\delta A = d\lambda + [A,\lambda] + \frac{1}{2}[d\lambda,\lambda] + \frac{1}{2}[\lambda,[\lambda,A]]. \tag{5-7}$$

この変換で CS作用 (2-33) (で $g=1$ としたもの) は不変である。この analogy で

$$\delta\Phi = Q_B\Lambda + 2\Phi*\Lambda + Q_B\Lambda*\Lambda + 2\Lambda*(\Lambda*\Phi). \tag{5-8}$$

とすると、これが作用 (2-31) (で $g=1$ としたもの) を不変にすることが確認される。

B・Φ 項を入った場合、§4-2 と同様にすれば

$$\delta B = 2B*\Lambda + 2\Lambda*(\Lambda*B) \tag{5-9}$$

で作用 (4-9) が不変になることが分かる。

謝辞

本論文を書くきっかけとなったのは，高橋さんのお話でした。高橋さんは，弦の場の理論の事を何も知らない僕に，重要な資料や基本的なテキストを教えて下さいました。このテキストに[14]も含まれますが，§2-1の内容は殆どそれに添っています。質問に応じて下さった九後さん・高橋さんに感謝します。

§4の内容は畑さんとの共同研究に拠るものです。体を悪くして家で療養している僕と電子メールで根気よく議論して下さったり，また Appendix B の内容（これは畑さんに由るものです）を僕に分かり易く TEX で教えて下さったり，… 心から感謝しています。

そして，合宿やゼミを通じて本論文の idea に耳を傾けて下さった研究室の皆様，伊藤さん，国友さん，また学校に来ない僕を励まして下さった方々，[21]等の資料を提供してくれ議論をした明石君，本当に有難うございました。

Appendix A　BI作用の変分

$$\delta\left(\sqrt{\det(1+F)_\mu{}^\nu}\right) = \delta\left(\exp\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\log(1+F)\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\delta F\cdot(1+F)^{-1}\right]\sqrt{\det(1+F)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\delta A^\nu - \partial^\nu\delta A_\mu\right)(1+F)^{-1}{}_\nu{}^\mu\sqrt{\det(1+F)}$$

$$\cong \frac{1}{2}\,\delta A_\rho\,\partial^\mu\left[\left\{(1+F)^{-1}{}_\mu{}^\rho - (1-F)^{-1}{}_\mu{}^\rho\right\}\sqrt{\det(1+F)}\right] \qquad \text{(A-1)}$$

$$= \frac{1}{2}\,\delta A_\rho\sqrt{\det(1+F)}\left[\partial^\mu\left\{-2F(1-F^2)^{-1}\right\}_\mu{}^\rho + \left\{-2F(1-F^2)^{-1}\right\}_\mu{}^\rho\cdot\frac{1}{2}\,\partial^\mu F_\nu{}^\sigma(1+F)^{-1}{}_\sigma{}^\nu\right].$$

$$[\quad]\text{内} = \cdots = -2\,(1-F^2)^{-1}{}_\mu{}^\sigma\,\partial^\mu F_\sigma{}^\kappa\,(1-F^2)^{-1}{}_\kappa{}^\rho. \qquad \text{(A-2)}$$

ここで使う公式は，

$$\begin{cases} \partial^\mu F_\nu{}^\sigma(1+F)^{-1}{}_\sigma{}^\nu = \partial^\mu F_\nu{}^\sigma\cdot\frac{1}{2}\left[(1+F)^{-1} - (1-F)^{-1}\right]_\sigma{}^\nu, \\ F(1-F^2)^{-1} = (1-F^2)^{-1}F, \\ \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 \quad \text{(Bianchi identity)} \end{cases} \qquad \text{(A-3)}$$

等である。

Appendix B　公式 (4-36) の導出

まず §4-3 で用いた，$\xi_\mu = a_{\mu\nu}X^\nu$ に対する公式 (4-36)

$$|B * \Lambda\rangle = \frac{i}{2\sqrt{2}\pi}\,a_{\mu\nu}\int_0^{2\pi}d\sigma\,\frac{dX^\mu}{d\sigma}X^\nu|B\rangle \qquad \text{(B-1)}$$

を導出しよう。

$$\begin{cases} |B * \Lambda\rangle_3 = -|\underset{1}{\Lambda} * \underset{2}{B}\rangle_3 = -{}_1\langle\Lambda|\,{}_2\langle B|V_{123}\rangle & \text{(B-2)} \\ |\Lambda\rangle_{p\text{表示}} = \bar{C}_0\,a_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial p_\nu}\delta^d(p)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\bar{C}_{-1}^{(+)}\alpha_{-1}^{(-)\mu} - \bar{C}_{-1}^{(-)}\alpha_{-1}^{(+)\mu}\right)|0\rangle\cdot\delta(\alpha_\Lambda)\cdot(2\pi)^{d+1} & \text{(B-3)} \end{cases}$$

計算すべき量は，

$$\int d\bar{C}_0\,\frac{d^dp\,d\alpha_\Lambda}{(2\pi)^{d+1}}\,{}_1\langle\Lambda|V_{123}\rangle = {}_2\phi^{(2)}\phi^{(3)}\lim_{\epsilon\to0}\lim_{p_1\to0}a_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial p_{1\nu}}|A^\mu\rangle_{2,3} \qquad \text{(B-4)}$$

where $\epsilon := \alpha_1 = \alpha_\Lambda$

$$|A^\mu\rangle_{2,3} := \left[\mu(1,2,3)\right]^2(2\pi)^{d+1}\delta^d\Big(p_1 + \sum_{s=2,3}p_s\Big)\,\delta\Big(\epsilon + \sum_{s=2,3}\alpha_s\Big)$$
$$\times\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}_1\langle0|\left(\alpha_1^{(+)\mu}\bar{C}_1^{(-)} - \alpha_1^{(-)\mu}\bar{C}_1^{(+)}\right)\prod_{r=2,3}\left(1 - \bar{C}_0^{(r)}\frac{\omega_{\mathrm{int}}^{(r)}}{\sqrt{2}}\right)\exp\left(F(1,2,3)\right)|0\rangle_{1,2,3} \qquad \text{(B-5)}$$

(B-4) 右辺は「$|A^\mu\rangle_{2,3}$ の p_1^ν について一次の項の $\epsilon\to 0$ 極限を求めよ」と言っていることに注意する。

諸量の ϵ/α_2 展開は（[24] の Appendix A を参照.）

$$\tau_0 = \epsilon\left\{\log\left|\frac{\epsilon}{e\alpha_2}\right| - \frac{\epsilon}{2\alpha_2} + O(\epsilon^2)\right\},\quad [\mu(1,2,3)]^2 = \left|\frac{e\alpha_2}{\epsilon}\right|^2\left(1+\frac{\epsilon}{\alpha_2}+O(\epsilon^2)\right),$$

$$\sum_{r=1}^{3}\frac{1}{\alpha_r}\frac{p_r^2}{4} = \frac{1}{4\epsilon}\left(p_1^2 - p_1\cdot(p_1+2p_2)\frac{\epsilon}{\alpha_2} + O(\epsilon^2)\right),$$

$$\bar{N}^1_1 = \frac{\mathrm{sgn}(\epsilon\alpha_2)}{e\alpha_2}\left(1-\frac{\epsilon}{2\alpha_2}+O(\epsilon^2)\right),\quad \bar{N}^s_m = \frac{1}{m\alpha_2}\cdot(-1)^{ms}+\cdots\ (s=2,3),$$

$$\bar{N}^{1s}_{1m} = \left|\frac{\epsilon}{e\alpha_2}\right|\cdot(-1)^{s(m+1)}+\cdots\ (s=2,3), \tag{B-6}$$

$$\bar{N}^{23}_{nm} = -\frac{(-)^n}{n}\delta_{n,m}(1+O(\epsilon^2)) - (1-\delta_{n,m})\frac{(-1)^n}{n-m}\frac{\epsilon}{\alpha_2}+\cdots,$$

$$\omega^{(r)}_{11} = (-)^{r-1}\frac{1}{\epsilon}\left|\frac{\epsilon}{e\alpha_2}\right|\left(1-\frac{\epsilon}{2\alpha_2}+O(\epsilon^2)\right)\quad (r=2,3).$$

これより.

$$F(1,2,3)\Big|_{\substack{\alpha^{(\pm)(1)}_{-n}=0\\(n\neq 0)}} = -\sum_{\pm}\sum_{n>0}(-1)^n\left(\frac{1}{n}\alpha^{(\pm)(2)}_{-n}\cdot\alpha^{(\pm)(3)}_{-n} - c^{(\pm)(2)}_{-n}\bar{c}^{(\pm)(3)}_{-n} + \bar{c}^{(\pm)(2)}_{-n}c^{(\pm)(3)}_{-n}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{\pm}\sum_{n>0}\frac{1}{n}\left(\alpha^{(\pm)(2)}_{-n}+(-1)^n\alpha^{(\pm)(3)}_{-n}\right)\cdot p_1 + O(\epsilon) + F_{p^2} \tag{B-7}$$

where $F_{p^2} := -\frac{1}{4}(p_1)^2\log|e\alpha_2/\epsilon| + O(\epsilon p_1\log|e\alpha_2/\epsilon|) + O(\epsilon(p_1)^2) + O(\epsilon^2)$. (B-8)

故に，$|A^\mu\rangle$ で $\alpha^{(1)}$ の縮約計算に関係しない部分は.

$$\left|\frac{e\alpha_2}{\epsilon}\right|^2\left(1+\frac{\epsilon}{\alpha_2}\right)e^{F_{p^2}}\cdot\exp\left\{-ip_1^\mu\left[i\frac{\partial}{\partial p_2^\mu} - \frac{i}{2}\sum_{n>0}\frac{1}{n}\left(\alpha^{(\pm)(2)\mu}_{-n}+(-1)^n\alpha^{(\pm)(3)\mu}_{-n}\right)\right]\right\}\left(1+\epsilon\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right)|r\rangle_{2,3}$$

where $|r\rangle_{2,3} := \exp\{\text{(B-7)式右辺第一行}\}\cdot(2\pi)^{d+1}\delta^d(p_2+p_3)\delta(\alpha_2+\alpha_3)$. (B-9)

この $|r\rangle_{2,3}$ の固有方程式を使えば (B-9) の [ ] 内は $X^{(2)\mu}(\sigma=0)$ となることに注意。

$$\text{(B-9)} = \left|\frac{e\alpha_2}{\epsilon}\right|^2\left(1+\frac{\epsilon}{\alpha_2}\right)e^{F_{p^2}}:e^{-ip_1^\mu X^{(2)}_\mu(\sigma=0)}:\left(1+\epsilon\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right)|r\rangle_{2,3} \tag{B-10}$$

一方，$\alpha^{(1)}$ の縮約計算は根気よく行なうと

$$-\left(\bar{c}_0^{(2)}-\bar{c}_0^{(3)}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon}{e\alpha_2}\right)^2\sum_{\pm}(\pm)\sum_{n>0}\left[\alpha^{(\pm)(2)\mu}_{-n} - (-1)^n\alpha^{(\pm)(3)\mu}_{-n}\right]$$
$$+O(\epsilon^2)\cdot p_1^\mu\cdot(\text{ghost } c^{(2,3)}_{-n} \text{ の一次項})$$
$$+\frac{1}{4}p_1^\mu\left|\frac{\epsilon}{e\alpha_2}\right|^2\left(\bar{c}_0^{(2)}-\bar{c}_0^{(3)}\right)\left[\sum_{\pm}(\pm)\sum_{m>0}\left(\bar{c}^{(\pm)(2)}_{-m}+(-1)^m\bar{c}^{(\pm)(3)}_{-m}\right)\right]\cdot\left[\sum_{\pm}\sum_{n>0}\left(c^{(\pm)(2)}_{-n}-(-1)^n c^{(\pm)(3)}_{-n}\right)\right]. \tag{B-11}$$

これも、$|r\rangle_{2,3}$ の上の固有方程式を使えば

$$
\begin{aligned}
-(\bar{c}_0^{(2)}-\bar{c}_0^{(3)})\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon}{e\alpha_2}\right)^2(-2)\,\frac{dX^{(2)\mu}}{d\sigma}\bigg|_{\sigma=0} &+ O(\epsilon^2)\cdot p_1^\mu\ \text{ghost 1次項} \\
+\frac{1}{4}\left(\frac{\epsilon}{e\alpha_2}\right)^2(\bar{c}_0^{(2)}-\bar{c}_0^{(3)})\,(-2\sqrt{\pi}i)\,\pi_c^{(2)}\Big|_{\substack{\sigma=0\\ \text{非zero mode}}} &\cdot(2\sqrt{\pi}i)\,\pi_{\bar{c}}^{(2)}\Big|_{\substack{\sigma=0\\ \text{非zero mode}}}.
\end{aligned}
\tag{B-12}
$$

故に、

$$
\begin{aligned}
\int d\bar{c}_0\frac{d^dp\,d\alpha_1}{(2\pi)^{d+1}}\,{}_1\langle\Delta|V_{123}\rangle &= p^{(2)}p^{(3)}a_{\mu\nu}\lim_{\epsilon\to0}\lim_{p_1\to0}\frac{\partial}{\partial p_{1\nu}}\left[(B\text{-}12)\times(B\text{-}10)\right]\frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{a_{\mu\nu}}{\sqrt{2}}p^{(2)}p^{(3)}\left(-i:\frac{dX^\mu}{d\sigma}X^\nu:-\pi\eta^{\mu\nu}:i\pi_c\Big|_{\text{非zero mode}}\cdot i\pi_{\bar{c}}\Big|_{\text{非zero mode}}\right)^{(2)}\bigg|_{\sigma=0}|r\rangle_{2,3}(\bar{c}_0^{(2)}-\bar{c}_0^{(3)}) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}a_{\mu\nu}\left(\frac{-i}{\pi}\int_0^{2\pi}d\sigma\,\frac{dX^\mu}{d\sigma}X^\nu-\eta^{\mu\nu}\int_0^{2\pi}d\sigma\,i\pi_c\Big|_{\text{非zero}}\cdot i\pi_{\bar{c}}\Big|_{\text{非zero}}\right)^{(2)} \\
&\quad\times p^{(2)}|r\rangle_{2,3}(\bar{c}_0^{(2)}-\bar{c}_0^{(3)})
\end{aligned}
\tag{B-13}
$$

この時、(B-10) の e^{Fp^2} は効かない。また (B-11) の ghost 1次項は $p^{(2)}p^{(3)}$ の射影で zero である。
(B-13) と ${}_2\langle B|$ の bracket をとると、(B-2) から

$$
|B*\Lambda\rangle = \frac{i}{2\sqrt{2}\,\pi}\,a_{\mu\nu}\int_0^{2\pi}d\sigma\,\frac{dX^\mu}{d\sigma}X^\nu\,|B\rangle. \tag{B-14}
$$

((B-13) の ( ) 内第2項は $|B\rangle$ にかかると消える。)

さて、$\xi_\mu = a_{\mu\nu\rho}x^\nu x^\rho$, $\xi_\mu = a_{\mu\nu\rho\sigma}x^\nu x^\rho x^\sigma$ に関して (§4-5) であるが、これはそれぞれ p_1^ν の二次項、三次項 部分を評価することに対応している。この場合、上では効かなかった e^{Fp^2} 項が問題になる。p_1 で 2回微分すると (B-8) の第一項が $\log\epsilon$ の発散を出す。

この発散は (B-13) の様に X 部分の normal order を外す際に丁度 cancel すると思われるのだが、この評価は未だうまくいっていない(定数部 $\log|e\alpha_2|$ の評価が更に困難である)。

従って §4-5 の計算は、これがうまくいったと仮定した結果となっている。

参考文献

[1] J. Polchinski, 'Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges', Phys. Rev. Lett. 75, 4724-4727 (1995), hep-th 9510017

[2] E. Witten, 'String Theory Dynamics in Various Dimensions', Nucl. Phys. B443, 85-126 (1995), hep-th 9503124
J. H. Schwarz, 'The Power of M Theory', Phys. Lett. B367, 97-103 (1996), hep-th 9510086

[3] P. K. Townsend, 'D-branes from M-branes', Phys. Lett. B373, 68-75 (1996), hep-th 9512062

[4] C. Vafa, 'Evidence for F-Theory', Nucl. Phys. B469, 403-418 (1996), hep-th 9602022

[5] K. H, 'D-brane, 特にその Effective Action と Duality', 素粒子論研究 1997年2月号

[6] H. Hata, K. Itoh, T. Kugo, H. Kunitomo and K. Ogawa, 'Covariant String Field Theory. II', Phys. Rev. D35, Num. 4, 1318-1355 (1987)

[7] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, 'Superstring Theory' vol. I and II, Cambridge University Press, 1987

[8] P. K. Townsend, 'Three Lectures on Supermembranes', Superstrings '88, World Scientific, 1989

[9] M. Kaku, 'Strings, Conformal Fields, and Topology', Springer-Verlag, 1991

[10] 吉川圭二, 『弦の量子論』, 朝倉書店, 1991

[11] J. Polchinski, 'Notes on D-Branes', hep-th 9602052

[12] M. Kato and K. Ogawa, 'Covariant Quantization of String Based on BRS Invariance', Nucl. Phys. B212, 443-460 (1983)

[13] E. Witten, 'Non-Commutative Geometry and String Field Theory', Nucl. Phys. B268, 253-294 (1986)

[14] T. Kugo, 'String Field Theory', published in 'The Superworld II', Plenum Press (1990)

[15] A. Abouelsaood, C. G. Callan, C. R. Nappi and S. A. Yost, 'Open Strings

in Background Gauge Fields', Nucl. Phys. B280, 599-624 (1987)
[16] E. S. Fradkin and A. A. Tseytlin, 'Non-linear Electrodynamics from Quantized Strings', Phys. Lett. 163B, 123-130 (1985)
[17] C. G. Callan, C. Lovelace, C. R. Nappi and S. A. Yost, 'Loop Corrections to Superstring Equations of Motion', Nucl. Phys. B308, 221-284 (1988)
[18] M. Born and L. Infeld, Proc. Royal Soc. 144, 425 (1934)
[19] C. G. Callan, C. Lovelace, C. R. Nappi and S. A. Yost, 'String Loop Corrections to Beta Functions', Nucl. Phys. B288, 525-550 (1987)
[20] C. G. Callan, D. Friedan, E. J. Martinec and M. J. Perry, 'Strings in Background Fields', Nucl. Phys. B262, 593 (1985)
[21] O. D. Andreev and A. A. Tseytlin, 'Partition-Function Representation for the Open Superstring Effective Action', Nucl. Phys. B311, 205-252 (1988/89)
[22] K. H. and H. Hata, 準備中
[23] E. Witten, 'Bound States of Strings and p-Branes', Nucl. Phys. B460, 335-350 (1996)
[24] H. Hata and Y. Nagoshi, 'Dilaton and Classical Solutions in Pregeometrical String Field Theory', Prog. Theor. Phys. Vol. 80, #6, 1088-1108 (1988)