Vacuum charge Q を持つコンフォーマル理論のN点関数

大阪市立大学大学院理学研究科物理学専攻基礎物理研究室

瀬々　将吏

目次

第 1 章

introduction

超弦理論は、重力理論を含む素粒子の模型としてもっとも有望視されているものである。ある種の超弦理論では、点粒子の場の理論に現れる紫外発散が全く現れないことが予想されている。ところが、許されるタイプの超弦理論は数種類あり、現実世界を記述するモデルを選び出すまでには至っていない。

このような超弦理論の性質を理解するのに必要不可欠なのが、超対称性の入っていない弦理論、すなわち bosonic string の理論である。この模型には虚数の質量を持つ粒子 Tachyon が存在するという病的な性質があるが、このことに目をつむれば、弦理論の構造を理解するための基本的な模型であるといえる。とくに、自由場の理論、ループ振幅、相互作用に関することは bosonic string における内容が本質的である。

この論文で扱う内容はすべて bosonic string の第 1 量子化にもとずいた理論である。すなわち string の「量子力学」を扱っているのであって、string の「場の理論」を展開しているのではない。第 2 量子化された弦理論、すなわち string field theory については、これまでにいくつかの模型が提案されているが、[9, 10, 11] 現時点では超弦および閉弦の理論への拡張が満足のいく形ではなされていない。つまり明確に定式化されているのは、open bosonic string という一番簡単な場合のみである。場の理論を展開せずにどうやって相互作用を取り入れるのかというと、conformal field theory [3, 1] という手法を用いる。string の摂動論は、その string が描く 2 次元面上の場の理論と等価であることが知られている。その 2 次元場の理論が comformal field theory であり、外線の状態（physical state) を記述するのが vertex operator である。

本論文の概要を述べる。2 章は bosonic string の自由場の量子化についての基本的な内容である。comformal field theory を用いた定式化、BRST formalism によるゲージ固定の方法等についても述べてある。

弦理論に限らず、素粒子の理論における最終的な目標は散乱振幅を求めることである。相互作用が弱い場合には摂動論が使えて、ループ振幅というものが摂動展開の次数ごとに求まる。

弦理論におけるループ振幅の計算法は点粒子の場の理論の場合とはかなり様子が異なる。これは第 1 量子化された理論にもとずいているためである。弦が時空中を伝搬すると２次元面 (World sheet) を描く。弦の相互作用は弦同士が切れたり、端をつないだりするようなもののみを考えるので、ファインマン図に対応するものは穴のあいた２次元面になる。ループ振幅は、穴のあいた２次元面上のコンフォーマル場の相関関数から得られる。

このように、第 1 量子化の枠内でループ振幅を計算することはループの数だけ穴のあいた２次元面上の場の理論の相関関数を求めることになるのだが、この方法には大まかに分けて２通りある。

まず第 1 番目は経路積分の方法である。[17] この方法では g-loop の相関関数を穴のあいた面の寄与をを足し挙げることによって直接計算する。穴のあいたリーマン面を記述する moduli 変数の取り方を細かく決めなくてはならず、これは g が大きくなると複雑になる。

２番目の方法はオペレーター形式と呼ばれる方法で、調和振動子を用いて行列要素を計算する方法である。この方法は７０年代の Dual Resonance Model で用いられていたものである。[2] この方法の利点は、tree の相関関数をつなぎ合わせることによって g-loop の相関関数を得ることができる点である。この”sewing procedure” は古くから知られていたが、[18] 近年 Vecchia らが conformal field theory の結果を取り入れ、ゴースト座標部分も含めた共変的な取り扱いを [6] で行った。そこで 3 章では彼らの方法で任意の g に対する g-loop N 点関数の構成法を紹介する。

第 2 章

free bosonic string

2.1　古典論

2.1.1　classical action

ひもを考える前に，D 次元の Minkowski 空間の中の点粒子を考えよう。粒子は D 次元空間内に 1 本の軌跡を描く。その座標を $x^\mu(\tau)$ ($\mu = 0, 1 \cdots D$) で表す。τ は曲線にそったパラメーターである。この曲線上の微小な τ の範囲 $d\tau$ における座標の変位は $dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} d\tau$ であり，この範囲の曲線の長さは $\sqrt{dx^\mu dx_\mu}$ である。曲線全体の長さはこれを τ で積分すれば求まる。action はこの曲線の「長さ」

$$S = \int d\tau \sqrt{\dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}_\mu(\tau)} \tag{2.1}$$

で定義する。この action は，パラメーター τ の選び方によらない。これは τ が D 次元空間内に埋めこまれた曲線のパラメータであることを考えると当然である。つまり，変換

$$x^\mu(\tau) \to x^\mu(\tau')$$

の元で不変である。このようなパラメータ付け替えに対する不変性はストリング理論で重要な役割を演ずる。

さて，ストリングの action を考えよう。ストリングは D 次元空間の中に 2 次元面を描く。この 2 次元面 (worldsheet) を記述するパラメーター σ, τ を用いて，ストリングの座標を $X^\mu(\tau, \sigma)$ とかく。τ は時間，σ は弦に沿ったパラメーターである。τ 方向、σ 方向の微小変位は $\frac{\partial X}{\partial \tau} d\tau$，$\frac{\partial X}{\partial \sigma} d\sigma$ となる。このとき 2 つの変位ベクトルから作られる微小面積は

$$\sqrt{|\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} d\tau \times \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma} d\sigma|^2}$$

である。[*1]ここで T は定数で、長さの -2 乗の次元を持つ。τ ，σ に関して積分すると action が得られる。

$$
\begin{aligned}
S &= T\int d\sigma d\tau\sqrt{-(\frac{\partial X}{\partial\tau})^2(\frac{\partial X}{\partial\sigma})^2+((\frac{\partial X}{\partial\tau})(\frac{\partial X}{\partial\sigma}))^2} \\
&= T\int d\sigma d\tau\sqrt{-\det(\partial_\alpha X\partial_\beta X)}
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

α，β は τ ，σ に対応した添字で 0，1 の値をとる。(2.2) は南部－後藤 action と呼ばれるが，根号があり，線形になっていないので都合が悪い。代わりに次の形の action が使われる。

$$
S = -\frac{T}{2}\int d\sigma d\tau\sqrt{h}h^{\alpha\beta}\partial_\alpha X\partial_\beta X \tag{2.3}
$$

$h^{\alpha\beta}(\sigma,\tau)$ は world sheet 上のメトリック $h_{\alpha\beta}$ の逆行列で，X とは独立な力学変数である。$\sqrt{h}\equiv\sqrt{-det(h_{\alpha\beta})}$ で，$det(h_{\alpha\beta})>0$ にとる。(2.3) のなかには $h^{\alpha\beta}$ の時間微分がふくまれていないので，$h^{\alpha\beta}$ は補助場である。実際 $h^{\alpha\beta}$ に対する変分をとって，$h^{\alpha\beta}$ に対する運動方程式を導き、h を消去することができる。$\sqrt{-det(h)}$ の変分をとる際，

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta\sqrt{-det(h)}}{\delta h^{\alpha\beta}} &= -\frac{1}{2\sqrt{-det(h)}}\frac{\delta - det(h)}{\delta h^{\alpha\beta}} \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{h}}(-det(h)h_{\alpha\beta}) \\
&= -\frac{1}{2}\sqrt{h}h_{\alpha\beta}
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

となる事に注意すれば，

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}} &= -\frac{T}{2}\sqrt{h}T_{\alpha\beta} \\
T_{\alpha\beta} &= \partial_\alpha X\partial_\beta X-\frac{1}{2}h_{\alpha\beta}h^{\alpha'\beta'}\partial_{\alpha'}X\partial_{\beta'}X
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

を得る。$T_{\alpha\beta}$ は２次元のエネルギー・運動量テンソルである。h に対する運動方程式は

$$
T_{\alpha\beta}=0 \tag{2.6}
$$

である。(2.5) から，

$$
h_{\alpha\beta}=\frac{2\partial_\alpha X\partial_\beta X}{h^{\alpha'\beta'}\partial_{\alpha'}X\partial_{\beta'}X} \tag{2.7}
$$

[*1] 以後 D 次元時空の添え字 μ は省く。

これを (2.3) に代入して h を消去すると，

$$
\begin{aligned}
S &= -\frac{T}{2}\int d\sigma d\tau 2\frac{\sqrt{-det(\partial_\alpha X\partial_\beta X)}}{-h^{\alpha'\beta'}\partial_{\alpha'}X\partial_{\beta'}X}h^{\alpha\beta}\partial_\alpha X\partial_\beta X \\
&= T\sqrt{-det(\partial_\alpha X\partial_\beta X)}
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

となり (2.2) と一致する。すなわち，古典的には (2.2) と (2.3) は同等である。

(2.3) には (2.2) に相当する local symmetry があるはずである。実際，

- 一般座標変換　　$\sigma^\alpha \to \hat{\sigma^\alpha}(\sigma)$
- ワイル変換　　$h^{\alpha\beta}(\sigma) \to \rho(\sigma)h^{\alpha\beta}(\sigma)$

に対して不変である。

今まで弦の理論，すなわち 2 時元の world sheet 上の理論を考えてきたが，world sheet の次元を r 次元 ($r = 1, 2\cdots$) の場合に拡張する事が出来る。それには単に (2.3) のなかの α，β 座標を 0 から r まで走らせれば良い。

$$
S = -\frac{T}{2}\int d^r\sigma\sqrt{h}h^{\alpha\beta}\partial_\alpha X\partial_\beta X
$$

この action は一般座標変換で不変であるが，ワイル変換で不変になるのは，$r = 2$ のときだけである。弦の理論はこのような意味で特別である。このような，一般座標変換，ワイル変換で不変で，$T_{\alpha\beta}$=0 となる 2 時元の場の理論は Conformal field theory と呼ばれ、コンフォーマル対称性によりすべての相関関数が求まることが [1] で明らかにされた。

このような local symmetry を持つため，ストリングの量子力学は，ゲージ自由度を持つ理論になる。この自由度を固定するにはどうすれば良いだろうか。まずメトリック $h^{\alpha\beta}$ を，平坦なものに固定する。

$$
h^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\tag{2.9}
$$

こうすると，(2.3),(2.5) はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
S &= -\frac{T}{2}\int d\sigma d\tau\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha X\partial_\beta X \\
&= -\frac{T}{2}\int d\sigma d\tau[-(\partial_\tau X)^2 + (\partial_\sigma X)^2] \\
T_{\alpha\beta} &= \partial_\alpha X\partial_\beta X - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{\alpha'\beta'}\partial_{\alpha'}X\partial_{\beta'}X
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

となる。action の持つ不変性に対する自由度は，一般座標変換が１つ，ワイル変換が２つ，の合計３つある。メトリックを固定したことにより，全てゲージ固定出来たように見える。しかし，(2.10) はまだゲージ自由度を残している。これを見るために，+− coordinate という座標系を導入する。

$$\begin{aligned}\sigma^{+} &= \tau + \sigma \\ \sigma^{-} &= \tau - \sigma\end{aligned} \tag{2.11}$$

この座標を用いると，(2.3) は

$$\begin{aligned}S &= -\frac{T}{2}\int d\tau d\sigma[-(\frac{\partial X}{\partial \tau})^2 + (\frac{\partial X}{\partial \sigma})^2] \\ &= -\frac{T}{2}\int d\sigma^{+} d\sigma^{-}[-2(\frac{\partial X}{\partial \sigma^{+}})(\frac{\partial X}{\partial \sigma^{-}})] \\ &= -\frac{T}{2}\int d\sigma^{+} d\sigma^{-}[\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha X \partial_\beta X]\end{aligned} \tag{2.12}$$

となる。ここで，$\eta^{+-} = \eta^{-+} = -1$ である。この段階でゲージ自由度を全て固定したように見えるが，実はそうではない。

$$\begin{aligned}\sigma^{'+} &= \sigma^{'+}(\sigma^{+}) \\ \sigma^{'-} &= \sigma^{'-}(\sigma^{-})\end{aligned}$$

のような変換を考える。+ と − の変換は独立になるので，+ 成分の変換のみを考えると，

$$\begin{aligned}\partial_{+}X\partial_{-}X &\rightarrow (\frac{\partial \sigma^{+\prime}}{\partial \sigma^{+}})\partial_{'+}X\partial_{-}X \\ d\sigma^{+}d\sigma^{-} &\rightarrow (\frac{\partial \sigma^{'+}}{\partial \sigma^{+}})^{-1} d\sigma^{'+}d\sigma^{-}\end{aligned}$$

となり，((2.12)) は上の変換に対して不変である。この対称性をコンフォーマル対称性と呼ぶ。このようなことが起こるのは不思議に思えるが，理由がある。一般座標変換の中で，((2.13)) ような変換はワイル変換の自由度と重なっている。このことはメトリックを固定しない段階の action (2.3) に ((2.13)) を施して見るとよくわかる。$(\frac{\partial \sigma^{'+}}{\partial \sigma^{+}}) = e$ とかくと，

$$\begin{aligned}S' &= -\frac{T}{2}(\int d^2\sigma)'(\sqrt{h})'(h^{\alpha\beta})'(\partial_\alpha X \partial_\beta X)' \\ &= -\frac{T}{2}\int (e^{-1}d^2\sigma)(e\sqrt{h})(e^{-1}h^{\alpha\beta})(e\partial_\alpha X\partial_\beta X) \\ &= -\frac{T}{2}\int d^2\sigma(e\sqrt{h})(e^{-1}h^{\alpha\beta})\partial_\alpha X\partial_\beta X\end{aligned}$$

このようにワイル変換と一般座標変換の自由度は，独立ではなく，((2.13)) の部分で互いにに重なっているのである。

2.1.2 運動方程式とモード展開

まず，action (2.10) から導かれる運動方程式と，その解について調べる。解は適当な境界条件の下で運動方程式を解くことにより得られる。

自由な弦のトポロジーには 2 種類ある。1 つは端の開いた開弦である。開弦の境界条件は，端が自由端になるようにとる。すなわち，

$$\frac{\partial X}{\partial \sigma}(\tau, \sigma = 0) = \frac{\partial X}{\partial \sigma}(\tau, \sigma = \pi) \tag{2.13}$$

という条件の下で，運動方程式を解く。

閉弦の場合には，周期性境界条件

$$X(\tau, \sigma = 0) = X(\tau, \sigma = 2\pi) \tag{2.14}$$

を課す。このような境界条件のもとでは，(2.10) を変分する際の表面項は

$$\begin{gathered} [X\partial_\sigma X]_{2\pi}^{0} \\ [X\partial_\tau X]_{\tau_i}^{\tau_f} \end{gathered}$$

のようになり，閉弦，開弦の場合ともに効かない。結局得られる運動方程式は，次のような D ケの波動方程式となる。

$$\frac{\partial^2 X^\mu}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 X^\mu}{\partial \sigma^2} = 0 \tag{2.15}$$

この波動方程式の解を，展開係数を用いて書く。まず開弦の場合，

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x^\mu + p^\mu \tau + i \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos n\sigma \tag{2.16}$$

閉弦の場合は，

$$\begin{aligned} X^\mu(\tau, \sigma) &= \frac{1}{2} x^\mu + \frac{1}{2} p^\mu (\tau - \sigma) + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-2in(\tau - \sigma)} \\ &\quad + \frac{1}{2} x^\mu + \frac{1}{2} p^\mu (\tau + \sigma) + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-2in(\tau + \sigma)} \\ &\equiv X_R + X_L \end{aligned} \tag{2.17}$$

閉弦の場合は，閉じたループの中を右回り，左回りの 2 つの独立なモードが伝搬する。この為，独立な展開係数 α_n と $\tilde{\alpha}_n$ で展開する。これに対して，開弦の場合は 1 つのモードしかない。これが閉弦と開弦の大きな違いである。なお以下では話を簡単にするために開弦の場合を取扱って行く。

2.2　量子化

量子化を行う際に，気を付けなくてはならないことがある。先に述べたように，ストリング理論というのは，一般座標変換によるゲージ不変性を持った理論である。その為，(2.10) のように一般座標変換を部分的にゲージ固定した後も，X^μ のすべてが独立ではない。それで，量子化を行う方法にはいろいろな方法がある。

- lightcone gauge quantization

  ゲージ自由度の全てを固定してしまう方法。みかけ上の Lorentz covariance は失われる。QED におけるクーロンゲージに相当する。
- old covariant quantization

  ストリング座標はすべて固定せずに残しておき，かわりにヒルベルト空間を拘束条件を満たす部分空間に限定する。QED における Gupta-Bleuler の方法に相当する。
- BRST quantization

  FP ghost と BRST charge を用いて量子化する方法。

2.3　old-covariant approach

以下では 2 番目に述べた方法、すなわちヒルベルト空間に制限を課し、X^μ 全てを使って共変的に量子化することを考える。さらに $T = \frac{1}{\pi}$ とする。(2.10) から，「運動量」演算子は，

$$\begin{aligned} P^\mu(\tau,\sigma) &= \frac{\delta S}{\delta \dot{X}} \\ &= \frac{\dot{X}^\mu(\tau,\sigma)}{\pi} \end{aligned} \tag{2.18}$$

となり正準交換関係は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
[X^\mu(\tau,\sigma), X^\nu(\tau,\sigma')] &= 0 \\
[X^\mu(\tau,\sigma), P^\nu(\tau,\sigma')] &= i\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma')
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

また，(2.16) を，(2.19) に代入すれば，振動子の交換関係を見る事ができる。

$$
\begin{aligned}
[x^\mu, p^\nu] &= i\eta^{\mu\nu} \\
\left[\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu\right] &= i\eta^{\mu\nu}\delta_{m+n}
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

以上で X 座標の交換関係を設定したので，いろいろなオペレーターの交換関係やヒルベルト空間の性質を振動子表示を用いて調べる事ができる。こういった場合に威力を発揮するのが，Conformal field theory の方法である。free な String 理論は，２時元面に D ケの場 $X^\mu(\tau,\sigma)$ がある２時元場の理論とみなす事ができる。相互作用が入ったときには，切れ目の入った２時元面上の場の理論を考えることになる。２時元面を τ,σ 座標の代わりに，ウィック回転した後の複素平面上で考える事により，複素解析を用いた計算ができる。まず，(τ,σ) という変数を複素変数に書き直す。

開弦の座標も閉弦の座標と同じ様に，X_L と X_R に分けて書く事ができる。(2.16) を書き直すと，

$$
\begin{aligned}
X^\mu(\tau,\sigma) &= \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}p^\mu(\tau+\sigma) + \frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)} \\
&\quad + \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}p^\mu(\tau-\sigma) + \frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)} \\
&\equiv X(\sigma^+) + X(\sigma^-)
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

この座標での action はすでに ((2.12)) として書いてある。さらに，$\tau \to -i\tau$ の置き換えを行い，

$$
\begin{aligned}
e^{\tau+i\sigma} &= e^{\rho} \equiv z \\
e^{\tau-i\sigma} &= e^{\bar\rho} \equiv \bar z
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

とおくと，((2.12)) は

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{4\pi}\int dz d\bar z \partial_z X \partial_{\bar z} X \\
T_{zz} &\equiv T(z) \\
&= -\frac{1}{2}\partial_z X \partial_z X \\
T_{\bar z\bar z} &\equiv T(\bar z) \\
&= -\frac{1}{2}\partial_{\bar z} X \partial_{\bar z} X
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

と書ける。ただし，ここでの X は ((2.21)) の 2 倍，つまり

$$
\begin{aligned}
X(z,\bar{z}) &= X(z) + X(\bar{z}) \\
&= x^\mu - ip^\mu \log z + i\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^\mu z^{-n} \\
&+ x^\mu - ip^\mu \log \bar{z} + i\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^\mu \bar{z}^{-n}
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

である。(2.23) の形に書く時に，conformal invariance をつかっていることに注意したい。*2 action は $\sigma^+ \to f(\sigma^+), \sigma^- \to f(\sigma^-)$ のような変換に対して不変である。今の場合 $f(\sigma^+) = e^{(\tau + i\sigma)}$ と思えばよい。

量子化を行なった後の Energy–momentum Tensor T はどうなるであろうか。量子化されたオペレーターとして T が well–difined に求まれば，((2.6)) はヒルベルト空間に対する拘束

$$T|\psi> = 0 \tag{2.25}$$

と解釈される。(2.25) に従う state を physical state と呼ぶ。

$T(z)$ の展開を次のように行う。

$$T(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{L_n}{z^2}z^{-n} \tag{2.26}$$

すると，L_n は留数定理と (2.23) を用いて，次のように表される。

$$
\begin{aligned}
L_n &= \oint_{z=0} T(z) z^{n+1} \\
&= -\frac{1}{2}\oint_{z=0} \partial_z X \partial_z X z^{n+1}
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

振動子表示は，(2.27) に (2.24) を代入すれば得られる。

$$L_n = -\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\alpha_{n-m}\alpha_m \tag{2.28}$$

ここで $\alpha_0 \equiv -p$ である。この L_n の定義は，古典論の範囲では正しいが，量子論を考えると well–difined ではない。$n \neq 0$ のときはこのままでよいのだが，L_0 を考えるときにオペ

*2 まず (2.23) で $z \to \rho$ としたものが得られるが、コンフォーマル変換で (2.23) の形にできる。

レーターの並び方を指定しなくてはならない。

$$L_0 = \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_{-m}\alpha_m \tag{2.29}$$

となるのだが、この中の α_m はすべて交換せず、並べ方を変えると無限大の違いが出てくる。例えば、normal order 、すなわち $\alpha_m(m>0)$ を右に持って来ようとすると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_{-m}\alpha_m &= \frac{1}{2}\sum_{m=<0} \alpha_{-m}\alpha_m + \frac{1}{2}\sum_{m=>0} \alpha_{-m}\alpha_m + \alpha_0\alpha_0 \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m}\alpha_m + \frac{1}{2}p^2 + \sum_{m=1}^{\infty} m\end{aligned}$$

このように，L_0 は定義のしかたによって定数倍だけ異なる。ここでは L_0 を normal ordered product で定義し，定数倍の違いは physical condition に反映させる。(2.25) の条件は L_n で書くと

$$L_n|\psi> = 0 \tag{2.30}$$

であるが，Gupta-Bleuler の条件にならって「正振動数」の部分のみにこの条件を課す。

$$L_n|\psi> = 0 \qquad (n>0) \tag{2.31}$$

さらに L_0 に対しては定数倍の違いを考慮して，

$$(L_n - a)|\psi> = 0 \tag{2.32}$$

を課す。a の値は後にきまるがここでは任意の定数としておく。

さて，ここから様々な Operator のＴ積及びに交換関係を計算してみよう。まず $X(z)X(z')$ のＴ積について考える。$z = e^{\tau+i\sigma}$ なので，$t > t'$ なら $|z| > |z'|$ である。すなわち T 積をとることは複素平面上で動径の大きい順番にならべる事を意味する。この積を Radial ordered product（Ｒ積）と呼ぶ。X の生成，消滅部分を次のように定義する。

$$\begin{aligned}X(z;+) &\equiv -ip\log z + i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\alpha_n z^{-n} \\ X(z;-) &\equiv x - i\sum_{n=\infty}^{1}\frac{1}{n}\alpha_{-n} z^{n}\end{aligned} \tag{2.33}$$

$|z| > |z'|$ のとき

$$\begin{aligned}R(X(z)X(z')) &= [X(z;+)+X(z;-)][X(z';+)+X(z';-)] \\ &= X(z;+)X(z';+) + X(z;-)X(z';+) \\ &+ X(z;-)X(z';-) + X(z;+)X(z';-)\end{aligned} \tag{2.34}$$

(2.34) の第 4 項のみが normal ordering されていないので，この項のなかの振動子の順番をならびかえると

$$
\begin{aligned}
X(z;+)X(z';-) &= [-ip\log z + i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\alpha_n z^{-n}][x + i\sum_{m=-\infty}^{-1}\frac{1}{m}\alpha_n z'^{-m}] \\
&= X(z';-)X(z;+) - \log z + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{z'}{z}^n) \\
&= X(z';-)X(z;+) - \log z - \log(1-\frac{z'}{z}) \\
&= X(z';-)X(z;+) - \log(z-z') \qquad (2.35)
\end{aligned}
$$

(2.34) にこの結果を代入すると，$|z| > |z'|$ のときに

$$
R(X(z)X(z')) \quad = -\log(z-z') + :X(z)X(z'): \qquad (2.36)
$$

である事がわかる。$|z| > |z'|$ のときには，第一項が $-\log(z'-z)$ となる。これは Wick の定理の一番簡単な場合である。(2.36) の第 1 項は $X(z)$ と $X(z')$ の Wick contraction であり，$X(z) - X(z')$ と書く。第 2 項は normal ordered された項だが，この項は $z = z'$ で特異でない関数になる。こうして X どうしの Wick contraction を定義しておけば，X の関数の形で書かれた場の R 積 $R(f(X)g(X))$ が計算出来る。以下にいくつかの例を示す。

まず，α の交換関係 (2.20) を，(2.36) をつかって計算してみよう。α_n は L_n の場合と同じ様に，留数定理を使って

$$
\alpha_n = i\oint_{z=0} dz z^n \partial_z X(z) \qquad (2.37)
$$

と表される。この表式を使って，

$$
\begin{aligned}
&[\alpha_n, \alpha_m] \qquad (2.38) \\
&= i^2\oint_{z=0}\oint_{z'=0} dz dz' z^n z'^m [\partial_z X(z), \partial'_z X(z')] \\
&= i^2\oint_{z=0}\oint_{z'=0} dz dz' z^n z'^m \partial_z X(z)\partial'_z X(z') - \oint_{z=0}\oint_{z'=0} dz dz' z^n z'^m \partial'_z X(z')\partial_z X(z) \qquad (2.39) \\
&= i^2\oint_{z=0}\oint_{z'=0} dz dz' z^n z'^m R(\partial_z X(z)\partial'_z X(z')) - \oint_{z=0}\oint_{z'=0} dz dz' z^n z'^m R(\partial_z X(z)\partial'_z X(z'))
\end{aligned}
$$

ここで，z，z' の積分路は原点を囲んでいる限りどうとってもかまわないので，第一項では $|z| > |z'|$，第二項では $|z'| > |z|$ となるようにとった。こうすると被積分項は両方とも R 積になる。ここで，次の式を使って第一項目の積分範囲を書き直す。

$$
\oint dz \oint_{z>z'} dz' f(z-z') = \oint dz \oint_{z'>z} dz' f(z-z') + \oint_{z'} dz \oint_0 dz' f(z-z')
$$

ここで，$f(z-z')$ は $z=z'$ で pole をもつ関数である。これを使うと，

$$\begin{aligned}
[\alpha_n,\alpha_m] &= i^2\oint_{z'=0}dz'\oint_{z=z'}dz z^n z'^m R(\partial_z X(z)\partial'_z X(z')) \\
&= i^2\oint_{z'=0}dz'\oint_{z=z'}dz z^n z'^m \partial_z\partial'_z[-\log(z-z')+(\text{regular at } z=z')] \\
&= \oint_{z'=0}dz' n z'^{n-1} \\
&= n\delta_{n+m,0}
\end{aligned}$$

となり，(2.20) と一致する。

次の例は，energy momentum tensor $T(z)$ と $X(z)$ の交換関係である。もともと $T_{\alpha\beta}$ は，(2.3) の $h_{\alpha\beta}$ に対する運動方程式から導かれたものであり，一般座標変換の generator になっている。$T_{\alpha\beta}$ を comformal gauge，つまり $\sigma^{+\prime}=f(\sigma^+)$，$\sigma^{-\prime}=g(\sigma^-)$ のような変換のみを残したゲージで固定した物が $T(z)$ である。したがって，

$$[\oint dz'\epsilon(z')T(z'),X(z)]=\epsilon(z)\partial_z X(z) \tag{2.40}$$

がなりたつ筈である。$\epsilon(z)$ は $z=0$ で正則な関数とする。(2.38) と同様な技法を使って，(2.40) の左辺は

$$\oint_z dz' R(T(z')X(z))\epsilon(z')$$

と書ける。さらに (2.23) を使って，

$$\begin{aligned}
R(T(z')X(z)) &= -\frac{1}{2}\partial_z X\partial'_z\partial'_z(-\log(z'-z))\times 2 \\
&= \frac{\partial'_z X}{z'-z}
\end{aligned} \tag{2.41}$$

である。T は normal ordered で定義されているので，T の中の contraction はとらなかった事に注意。交換関係は，

$$\begin{aligned}
[\oint dz'\epsilon(z')T(z'),X(z)] &= \oint_z dz'\frac{\partial'_z X(z')}{z'-z}\epsilon(z') \\
&= \oint_z dz'\frac{\partial_z X(z)}{z'-z}\epsilon(z) \\
&= \epsilon(z)\partial_z X(z)
\end{aligned} \tag{2.42}$$

となる。３行目で，ϵ と ∂X の座標が $z'\to z$ になったのは，これらが $z=z'$ でテーラー展開が出来るからである。特に，$\epsilon(z')=\epsilon(0)+\epsilon'(0)z'+\cdots+\frac{\epsilon^{(n)}(0)}{n!}z'^n$ と展開をし，z'^n の

寄与を考えると，

$$[\oint dz' z'^{n+1} T(z'), X(z)] = [L_n, X(z)]$$
$$= z^{n+1} \partial_z X(z)$$

となっている事がわかる。すなわち、L_n は $\delta z = z^{n+1}$ という変換の generator である。

次は，$[L_n, L_m]$　を計算する。この計算は α の交換関係をやった時と全く同じ流れで、(2.27) の展開式をつかって

$$[L_n, L_m] = \oint_{z'} dz \oint_0 dz' R(T(z)T(z')) \tag{2.43}$$

あとは T のＲ積を計算すればよい。この場合は大きく分けて二種類の contraction が出てくる。まず 2 つの contraction がある項は

$$-\frac{1}{2} \cdot 2\partial_z X \partial_{z'} X = \frac{1}{2} \frac{1}{(z-z')^4} \tag{2.44}$$

となる。1 つの contraction のみの項は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \cdot 4\partial_z X \partial_{z'} X : \partial_z X \partial_{z'} X : &= -\frac{: \partial_z X \partial_{z'} X :}{(z-z')^2} \\
&= -\frac{: (\partial_{z'} X + \partial_{z'}^2 X (z-z') + \cdots) \partial_{z'} X :}{(z-z')^2} \\
&= -\frac{: \partial_z X \partial_{z'} X :}{(z-z')^2} - \frac{: \partial_{z'}^2 \partial_{z'} X :}{(z-z')} \\
&= \frac{2T(z')}{(z-z')^2} + \frac{\partial_{z'} T(z')}{(z-z')}
\end{aligned} \tag{2.45}$$

結局，

$$R(T(z)T(z')) = \frac{\frac{D}{2}}{(z-z')^4} + \frac{2T(z')}{(z-z')^2} + \frac{\partial_{z'} T(z')}{(z-z')} + (\text{regular at} z = z') \tag{2.46}$$

を得る。ここで一般的な comformal 場についてふれておく。場 $\phi(z)$ が,

$$R(T(z)\phi(z')) = \cdots + \frac{h\phi(z')}{(z-z')^2} + \frac{\partial_{z'} \phi(z')}{(z-z')} + (\text{reg}) \tag{2.47}$$

を満たすとき，ϕ は comformal weight h の場であるという。ここで $\cdots$ は $z = z'$ で 3 次以上の極を持つ項である。例えば，$X(z)$ は c.w 0,$T(z)$ は c.w 2 の場である事が，(2.41)

,(2.46) からわかる。(2.42) の様に、無限小変換の式を書いて見ると，上式のＲ積が何を意味しているかがわかる。

$$
\begin{aligned}
[\oint dz'\epsilon(z')T(z'), \phi(z)] &= \oint_z dz'\epsilon(z')R(T(z')\phi(z)) \\
&= \epsilon(z)\partial\phi(z) + h\partial\epsilon(z)\phi(z)
\end{aligned}
\tag{2.48}
$$

この式は $z' = z + \epsilon(z)$　のとき

$$
\phi(z) \to (\frac{\partial z'}{\partial z})^h \phi(z') \tag{2.49}
$$

と変換することを意味している。すなわち，comfomal dimension h の場とは，naive には conformal gauge での h 階テンソルのことである。すでに action を conformal gauge に固定してあるので、理論は confomal 変換、すなわち $z' = z + \epsilon(z)$ に対する不変性しかもっていない。このような変換ではテンソルの足は混ざらず、それぞれの足から出る因子は全て同じものになる。したがって h 階のテンソルは (2.49) のような変換をするのである。又上つきと下つきの足が混ざった混合テンソルは，このゲージでは現れない。混合テンソルはちょうど $f(z, \bar{z})$ のような z と $\bar{z}$ が混ざった場に対応しているのだが、理論は z と $\bar{z}$ の世界に完全に分離しており、そのような”混ざった”場は現れない。これは conformal 理論の特徴である。T どうしのＲ積がわかったので，L_n の交換関係は (2.43) から

$$
[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{D(m^3 - m)}{12}\delta_{m+n,0} \tag{2.50}
$$

この代数は Virasoro 代数と呼ばれる無限次元の Lie 代数で，string 理論では重要な役割を演じる。前にも見たように，L_n は conformal 変換の generator である。(2.50) の第二項は anomaly で，古典論（α_n を poisson braket とした時）には現れない。古典論では T の normal ordering は考えなくてもよいからである。またこの anomaly 項は (2.46) では第一項にあたる。comfomal 理論を使わずに (2.50) を計算するには，正直に交換関係を計算すればよい。その際 anomaly は α の零点振動の寄与から得られる。これは無限大になるのでなんとか正則化すると、(2.50) を得る。ここで行なった計算は，このような計算よりはるかに簡単に行なえる。

2.3.1 free string spectrum と vertex operator

いままで理論の持つ基本的な性質をみてきたので、これから free な弦理論の spectrum をしらべる。まず Hamiltonian は、

$$
\begin{aligned}
H &= \int d\sigma : (\dot{x}P - L) : \\
&= \frac{1}{2}\int d\sigma : (\dot{x}^2 + X'^2) : \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\infty}^{\infty} : \alpha_{-n}\alpha_n : \\
&= \frac{1}{2}p^2 + \sum_{1}^{\infty} \alpha_{-n}\alpha_n \\
&= L_0
\end{aligned} \tag{2.51}
$$

(2.32) で L_0 に対する拘束条件を設定したのでそれに従う事にする。

$$
(\frac{1}{2}p^2 + \sum_{1}^{\infty} \alpha_{-n}\alpha_n - a)|\psi> = 0 \tag{2.52}
$$

ふつうの自由場の相対論においては，$p^2 = -M^2$ なので，いまもこれにしたがって $-p^2$ を mass operator と解釈する。すると L_0 の拘束条件は on–shell 条件

$$
M^2|\psi> = (2a - \sum_{1}^{\infty} \alpha_{-n}\alpha_n)|\psi> \tag{2.53}
$$

である事がわかる。

ヒルベルト空間の真空 $|0;0>$ を次のように定義する。

$$
\begin{aligned}
\alpha_n|0;0> &= 0 \qquad (n > 0) \\
p|0;0> &= 0
\end{aligned}
$$

p の固有状態を $|0;k> = e^{ik\cdot x}|0;0>$ とすると、Hamiltonian の固有状態は，$\alpha_n (n < 0)$ から作られる Fock 空間

$$
(\alpha_{-1}^{\mu_i})^{n^i}(\alpha_{-2}^{\mu_j})^{n^j}\cdots|p;0> \tag{2.54}
$$

のような状態になる。しかしこういう状態全てが許されるわけではない。今 physical state 条件の 1 つ $L_0 - a = 0$ をみたす state を作ったわけであるが、残りの条件 $L_n = 0$ を満たさ

なくてはならない。この条件は (2.54) のような状態全てが満たしている訳ではない。又 (2.54) のなかには負ノルム状態も入っている。このあたりは QED などのゲージ理論とおなじ事情である。D 次元 metric の第 0 成分が負であることが理由で、例えば $\alpha^0_{-n}|0;0>$ は零ノルム状態になる。$L_n = 0$ の条件はこのような負ノルム状態を除くのに十分である。

拘束条件を満たす Physical State のうち、簡単なものを探してみる。まず，α で張られる状態のうち，基底状態は，$|0;k^\mu>$ である。念のためもいう一度 physical state condition を書くと、

$$
\begin{aligned}
(L_0 - a)|\psi> &= 0 \\
L_0 &\equiv \frac{1}{2}p^2 + \sum_1^\infty \alpha_{-n}\cdot\alpha_n \\
L_n|\psi> &= 0 \qquad (n > 0) \\
L_n &\equiv -\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\alpha_{n-m}\cdot\alpha_m
\end{aligned}
\tag{2.55}
$$

である。$k^2 = 2a$ なら $|0;p^\mu>$ は明らかにこの条件を満たしている。したがって一番最初の physical state は $|0;p^\mu> \quad (k^2 = 2a)$ である。

次の励起状態 $\zeta\cdot\alpha_{-1}|0;k>$ を考える。この state に L_0，L_1 を作用させてみると，physical state condition は

$$
\begin{aligned}
k^2 &= 2a - 2 \\
k\cdot\zeta &= 0
\end{aligned}
\tag{2.56}
$$

となることがわかる。もし $a = 1$ なら、これらの条件は ζ を polarization vector にもつ massless のゲージ場が満たす条件と同じになる。この状態のノルムは $\zeta\cdot\zeta$ である。ζ の取り方によってはノルムが負になる事がある。ζ の取り方は $k\cdot\zeta$ という条件によってきまる。また k は k^2 の値によって取り方が異なる。k^2 の値が同じものはローレンツ変換で写りあうので、一つの表示を選んでやればよい。

- $k^2 > 0\ (a > 1)$ のとき　$k^\mu = (0, h, 0, 0\cdots)$
- $k^2 = 0\ (a = 1)$ のとき　$k^\mu = (h, h, 0, 0\cdots)$
- $k^2 < 0\ (a < 1)$ のとき　$k^\mu = (h, 0, 0, 0\cdots)$

と選ぶ。このとき，k に直行するベクトル ζ の基底が $D - 1$ ケ選べる。

- $a > 1$ のとき nagative norm,positive norm の基底を含む。$(\zeta = (1, 0, \cdots))$
- $a = 1$ のとき zero norm,positive norm の基底を含む。$(\zeta = (1, 1, 0, \cdots))$

- $a < 1$ のとき positive norm の基底を含む。($\zeta = (0, 1, 0\cdots)$)

したがって，negative norm 状態を含まないための条件は，$a \leq 1$ である。しかしながら，物理的に興味深いのは $a = 1$ の場合である。このときは上述したように零ノルム状態が現れるのだが，これはちょうど $\zeta^\mu = ck^\mu$ の場合にあたる。つまり縦波が理論に現われない事を言っている。$a = 1$ ととることによりゲージ粒子がストリング理論に含まれるのである。

また $a = 1$ にとったときは基底状態 $|0; k>$ において　$k^2 = 2 = -M^2$ になる。すなわち，虚数質量の粒子「タキオン」が現れる。これは困った事なのであるが，それでも $a = 1$ を採用する。superstring 理論にはタキオンは現われない事が知られている。

しかし通常の場の理論では $m^2 < 0$ だと因果律が破れ，理論として意味をなさない事が知られている。なぜ string の場合には $m^2 < 0$ の状態を許せるのだろうか？　答えはこのような第一量子化の枠組みでは $X(z)$ を二次元場として捉えているからである。たしかに $m^2 < 0$ にはなるが，実は今扱っている第一量子化の理論は，D ケの２時元面上の 'massless' スカラー場 $X^\mu(\tau, \alpha)$ の場の理論 (conformal field theory) と同等である。したがってこの意味では因果律の破れはおきない。ここで $m^2 < 0$ と言っているのは Targrt spase (D–dim Minkowshki space) での mass のことである。２時元面上の場 $X(z)$ の'mass' は 0 である。

2.3.2　vertex operator

前節でいくつかの physical state を例にあげたが，当然ながらこのほかにも physical state が存在する。実際，無限個の励起状態が存在し，したがって理論の中には無限個の粒子が存在する。このような physical state の一般的性質はどのようなものだろうか。

再び confomal field を考える。confomal weight h の primary fileld とは，(2.47) を満たす場のことである。もう一度かくと，

$$R(T(z)\phi(z')) = \frac{h\phi(z')}{(z-z')^2} + \frac{\partial_{z'}\phi(z')}{(z-z')} + (\mathrm{reg}) \tag{2.57}$$

この式を使って，L_n と $\phi(z)$ の交換関係が計算出来る。(2.42) と同じ様にして，交換関係は，

$$[L_n, \phi(z)] = (n+1)z^n h\phi(z) + z^{n+1}\partial_z\phi(z) \tag{2.58}$$

さて，今 $\phi(z)$ で physical state を作る事を考える。$\phi(z)|0;0>$ が physical state になるには、

$$[L_n, \phi(z)] = 0, \qquad n > 0 \tag{2.59}$$
$$[L_0, \phi(z)] = \phi(z)$$

となればよい。L は normal ordered されているので $L_n|0;0>= 0$ だからである。残念ながら，(2.58) のままではこうならない。しかし，$\phi(0)$ を用いた時に

$$[L_n, \phi(0)] = 0, \qquad n > 0 \tag{2.60}$$
$$[L_0, \phi(0)] = h\phi(0)$$

となる事がわかる。つまり問題の答えは，「comfomal weight 1 の場 $V(z)$ があれば，$V(0)|0;0>$ は physical state である。」という事である。(2.60) で $h = 1$ とした条件を満たす場を vertex operator という。このような $V(z)$ には質量の違うものが無限個ある。これから幾つかの例を示す。まずタキオン状態 $|0;k>$ に対する vertex opreator

$$V_0(k,z) =: e^{ik\cdot X(z)} := e^{ik\cdot X^-(z)} e^{ik\cdot X^+(z)} \tag{2.61}$$

である。T との演算子積を出すには，公式

$$R((X(z))^n : e^{X(z')} :) = [R(X(z)X(z'))]^n : e^{X(z')} : \tag{2.62}$$

を使えばよい。これを使って，

$$R(T(z)V_0(k,z')) = \frac{\frac{k^2}{2}V_0(k,z')}{(z-z')^2} + \frac{\partial_{z'}V_0(k,z')}{(z-z')} \tag{2.63}$$

となる。したがって $k^2 = 2$，すなわちタキオン状態の時 V_0 は comformal weight 1 になり，$V_0(k,0)|0;0>$ は physical state になる。タキオン状態は，$|0;k> = e^{ik\cdot x}|0;0>$ であることは前に見たが，これと $V_0(k,0)$ は一致しているだろうか？ (2.61) より

$$V_0(k,z) = e^{ik\cdot x} e^{k\cdot p \log z} e^{-ik\cdot\sum \frac{\alpha_{-n}}{n} z^n} e^{ik\cdot\sum \frac{\alpha_n}{n} z^{-n}} \tag{2.64}$$

である。n は正の値のみの和をとる。$z = 0$ にして真空 $|0;0>$ にかけると，α の部分は消滅演算子ばかりになり寄与しない事がわかる。p の部分も $z = 0$ では寄与しない。結局残るのは x の部分だけで，

$$V_0(k,0)|0;0>= e^{ik\cdot x}|0;0>= |0;k> \tag{2.65}$$

である。こうしてタキオンの vertex operator で状態 $|0;k>$ が得られることがわかった。

同様にして励起状態の vertex operator を作る事ができる。前にも取り上げたゲージボゾンの vertex operator は

$$V_1(k,z) =: \zeta \cdot \partial_z X(z) e^{ik\cdot X(z)} : \tag{2.66}$$

で与えられる。R積は,

$$R(T(z)V_1(k,z')) = \frac{-ik\cdot\zeta : e^{ik\dot{X}(z)} :}{(z-z')^3} + \frac{\frac{k^2}{2}+1}{(z-z')^2} V_1(k,z') + \frac{\partial_{z'} V_1(k,z')}{(z-z')} \tag{2.67}$$

となる。したがって，$k^2 = 0, k\cdot\zeta = 0$ なら V_1 はゲージボゾンの vertex operator になる。また $V_1(k,0)|0;0>$ を normal ordiring の定義にしたがって計算してみると、今度は $\partial_z X(0)$ から α_{-1} の寄与が出て、$V_1(k,0)|0;0> = \zeta\cdot\alpha_{-1}|0;k>$ となる。

2.4 BRST quantization

2.4.1 b,c ghost system

今までと異なるゲージ固定の方法として、ゴースト座標を用いた共変な方法を考える。まずゲージ固定されていない action は、メトリック h とストリング座標 X^μ の汎関数で次のように書ける。

$$S[h,X] = \int d^2\sigma\sqrt{h}h^{\alpha\beta}\partial_\alpha X\partial_\beta X \tag{2.68}$$

この系の分配関数は、経路積分を用いて

$$Z = \int DhDXe^{iS[h,X]} \tag{2.69}$$

と書ける。ここで h は対称なので、$Dh = Dh_{++}Dh_{--}Dh_{--}$ の意味である。+, − の添え字は ((2.11)) の +− coordinate である。

前にも述べたとおりに、この action は一般座標変換とワイル変換に対して不変である。この系をコンフォーマルゲージ、すなわち、$h_{++} = h_{--} = 0$ となるようなゲージに固定する。

ここで、h の一般座標変換に対する変換性を使う。h は２次元の World sheet 上の無限小座標変換 ξ に対して、

$$\delta h_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha\xi_\beta + \nabla_\beta\xi_\alpha \tag{2.70}$$

のように変換する。特に +, − 成分に関しては

$$\begin{aligned}\delta h_{++} &= 2\nabla_+\xi_+ \\ \delta h_{--} &= 2\nabla_-\xi_-\end{aligned} \tag{2.71}$$

となる。

汎関数積分の変数を $h'_{\alpha\beta} = h_\alpha\beta + \delta h_\alpha\beta$ にとりなおすと、Z は

$$
\begin{aligned}
Z &= \int Dh'DXe^{iS[h',X]} \\
&= \int DXDh'_{++}Dh'_{--}Dh'_{+-}DXe^{iS[h,X]}
\end{aligned}
$$

となる。２行目で S が一般座標変換で不変であることを使った。ここから h_{++}, h_{--} を固定することを考える。局所的に、任意の h_{++}, h_{--} が、ある代表元 h^0_{++}, h^0_{--} から、変換 (2.70) によって得られるのなら、h_{++}, h_{--} の積分は ξ_+, ξ_- の積分に置き換えられるであろう。この積分変数の書き換えは

$$
\begin{aligned}
Dh'_{++} &= det(\frac{\delta h'_{++}}{\delta\xi})D\xi_+ \\
&= det(\frac{\delta\nabla_+\xi_+(\sigma)}{\delta\xi_+(\sigma')})D\xi_+ \\
&= det(2\nabla_+\delta(\sigma-\sigma'))D\xi_+ \\
&\equiv det(\nabla_+)D\xi_+
\end{aligned}
\tag{2.72}
$$

となる。これらを使って Z は

$$
Z = \int DXDh_{+-}D\xi_+D\xi_- det(\nabla_+)det(\nabla_-)e^{iS[h_{+-},h^0_{++},h^0_{--},X]} \tag{2.73}
$$

この段階で被積分項には ξ 依存性がない。したがって、$++, --$ 成分のゲージを固定するには $h^0_{++} = h^0_{--} = 0$ とおき、ξ 積分を除けばよい。さらに $h_{+-} = e^\phi$ とおけば、

$$
\begin{aligned}
Z &= \int DXDh_{+-}det(\nabla_+)det(\nabla_-)e^{iS[h_{+-},X]} \\
&= \int DXD\phi det(\nabla_+)det(\nabla_-)e^{iS[X]}
\end{aligned}
\tag{2.74}
$$

となる。ここで二項目は注意を要する。$S[X]$ は Flat な Worldsheet 上の action (2.10) になる。見かけ上 ϕ 依存性がなくなるのである。このため $D\phi$ 積分が factorize するが、これも取り除く。あとはゴースト場を入れるときの一般的な処方に従って、行列式の部分をフェルミオンのゴースト場の経路積分に置き換える。[5]

$$
\begin{aligned}
det(\nabla_+) &= \int Dc(\sigma^-)Db(\sigma^-)e^{i\int d^2\sigma c(\sigma^-)\nabla_+ b(\sigma^-)} \\
det(\nabla_-) &= \int Dc(\sigma^+)Db(\sigma^+)e^{i\int d^2\sigma c(\sigma^+)\nabla_- b(\sigma^+)}
\end{aligned}
\tag{2.75}
$$

最終的な形は

$$Z = \int DXDcDbe^{iS[X,c,b]} \tag{2.76}$$

$$\begin{aligned} S[X,c,b] &= \int d^2\sigma[\partial_+X\partial_-X + c(\sigma^+)\nabla_-b(\sigma^+) + c(\sigma^-)\nabla_+b(\sigma^-)] \\ &= \int d^2\sigma[\partial_+X\partial_-X + c(\sigma^+)\partial_-b(\sigma^+) + c(\sigma^-)\partial_+b(\sigma^-)] \end{aligned}$$

で与えられる。$+-$coodinate を複素座標 $z, \bar{z}$ に書き換えると、

$$S[X,c,b] = \int d^2z[\frac{1}{2}\partial_z X\partial_{\bar{z}}X + c(z)\partial_{\bar{z}}b(z) + c(\bar{z})\partial_z b(\bar{z})] \tag{2.77}$$

(2.77) の X 部分の係数を 1/2 にしたが、この係数は b, c の normalization によって任意にとれるので勝手に変えてかまわない。ここでは後の都合上 1/2 にした。

ここで、ゴースト場の classical な次元を考える。(2.77) から、S が無次元になるためには c と b の次元の和が 1 であればよいことがわかる。すなわち c が conformal weight λ をもつなら、b は conformal weight $(1-\lambda)$ を持つことがわかる。このように、一般に λ がゼロでないときには b と c の conformal weight は異なる。以上の考察から、c と b のモード展開を次のようにとる。

$$\begin{aligned} c(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n-\lambda} \\ b(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^{-n-1+\lambda} \end{aligned} \tag{2.78}$$

正準交換関係を $\{b(z), c(w)\} = \delta(z-w)$ と設定すると、(2.78) はモード係数では、

$$\{b_n, c_m\} = \delta_{n+m,0} \tag{2.79}$$

となる。次に反交換関係に対応する operator product expansion を定義したい。これは (2) 章で行ったものと同じ意味である。すなわち、

$$R[b(z)c(w)] = c[b(z)c(w)] + :b(z)c(w): \tag{2.80}$$

と書いたときの $c[b(z)c(w)]$ は R 積のうち $z = w$ で特異になる部分で、この部分を決定することが反交換関係を与えたことと等価である。逆に反交換関係と normal ordering の定義を与えておけば、$c[b(z)c(w)]$ は求まる。

今反交換関係は決めてあるので、normal ordering の仕方を考えなくてはならない。normal ordering を考えるというのは、生成消滅演算子をどうとるかということだから、結局真空を決めるということである。b, c の両方を代表して c.w λ の場 ϕ と書いたとき、展開は

$$\phi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n-\lambda} \tag{2.81}$$

ととる。このとき状態 $\lim_{z=0} \phi(z)|0>$ は, 時刻 $t = -\infty$ から入射してくる漸近状態 (in-state) であると解釈したい。

すなわち (2.81) においてこの状態が有限に定義されるように、すなわち $z \to 0$ で発散する部分がちょうど消滅演算子になるようにとればよい。こうして次の条件を得る。

$$a_n|0> = 0, \qquad (n \geq -\lambda + 1) \tag{2.82}$$

次に真空 $|0>$ と同様にエルミート共役な真空 $<0|$ の定義を考える。今度は $\lim_{z=\infty} <0\phi(z)|$ を $t \to \infty$ での終状態 (out-state) であると解釈して、$z \to \infty$ でこの状態が有限になることを要求すると

$$<0|a_n = 0, \qquad (n \leq -\lambda - 1) \tag{2.83}$$

を得る。ところがこのやり方では問題が生じる。このような $<0|$ の取り方では a_λ が、生成、消滅演算子のどちらにも属さないことになる。こういった真空はエネルギーの 0 固有値に対して 2 重に縮対することが知られている。[14] このようなやり方は混乱を招くので、[3] に従い次のようにする。

縮退した真空を避けるには、すべてのモードを生成、消滅演算子のどちらかに属させるとよい。すなわち次のようなモードはないようにすればよい。

- 生成演算子でもあり消滅演算子でもあるモード　$a_n|0> = 0$ かつ　$<0|a_n = 0$
- 生成演算子でも消滅演算子でもないモード　$a_n|0> \neq 0$ かつ　$<0|a_n \neq 0$

具体的には、(2.82) で消滅演算子を定義し、残りのものを全部生成演算子にすればよい。結局真空の取り方は

$$\begin{cases} a_n|0> = 0, & n \geq -\lambda + 1 \\ <0|a_n = 0 & n \leq -\lambda \end{cases} \tag{2.84}$$

となる。この式 (2.84) を b, c に適用すると

$$\begin{cases} c_n|0> = 0, & n \geq -\lambda + 1 \\ <0|c_n = 0 & n \leq -\lambda \end{cases} \tag{2.85}$$

$$\begin{cases} b_n|0> = 0, & n \geq \lambda \\ <0|b_n = 0 & n \leq \lambda - 1 \end{cases}$$

となる。この真空を用いて、normal ordered product を「消滅演算子を右、生成演算子を左」というやり方ではっきり定義することができる。$|z| > |w|$ のとき

$$R(b(z)c(w)) = \sum_n \sum_m b_n z^{-n-(1-\lambda)} c_m w^{-m-\lambda} \tag{2.86}$$

$$= (\text{normal ordered pert}) + \sum_{n\geq\lambda} \sum_{m\leq-\lambda} b_n c_m z^{-n-(1-\lambda)} w^{-m-\lambda} \tag{2.87}$$

$$= : b(z)c(w) : + \sum_{n\geq\lambda} \sum_{m\leq-\lambda} \delta_{n+m,0} z^{-n-(1-\lambda)} w^{-m-\lambda}$$

$$= : b(z)c(w) : + \sum_{n\geq\lambda} z^{-n-(1-\lambda)} w^{n-\lambda}$$

$$= : b(z)c(w) : + \sum_{n\geq\lambda} (\frac{w}{z})^n (\frac{z}{w})^\lambda \frac{1}{z} \tag{2.88}$$

$$= : b(z)c(w) : + \sum_{n\geq 0} (\frac{w}{z})^n \frac{1}{z}$$

$$= : b(z)c(w) : + \frac{1}{z-w}$$

したがって b と c の contraction$c[b(z)c(w)]$ は

$$c[b(z)c(w)] = \frac{1}{z-w} \tag{2.89}$$

で与えられることになる。こうして b, c の OPE(Operator Product Expansion) を与えたので、b, c から作られる local な場の間の相関はすべて (2.89) から得られる。

ゴースト場 b, c に対するエネルギー・運動量テンソル $T_{bc}(z)$ は次のものである。

$$T_{bc}(z) =: (1-\lambda)(\partial_z c(z))b(z) - \lambda c(z)(\partial_z b(z)) : \tag{2.90}$$

(2.90) が本当にエネルギー・運動量テンソルになっているかどうかは T_{bc} を場 b, c に作用させてみればわかる。T_{bc} はコンフォーマル変換の生成子になっているはずである。

(2.89) を用いれば R 積が計算できる。

$$R[T_{bc}(z)b(w)] = \frac{(1-\lambda)b(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w b(w)}{z-w} + \cdots \tag{2.91}$$

$$R[T_{bc}(z)b(w)] = \frac{\lambda c(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w c(w)}{z-w} + \cdots \tag{2.92}$$

(2.47) によれば、(2.91) は b, c がそれぞれ conformal weight $1-\lambda, \lambda$ の primary field として振る舞うことを示している。次に T_{bc} 同士の積は

$$R[T_{bc}(z)T_{bc}(w)] = \frac{A}{(z-w)^4} + \frac{2T_{bc}(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w T(w)}{z-w} + \cdots \tag{2.93}$$

係数 A は

$$A = 6\lambda(1-\lambda) - 1 \tag{2.94}$$

となる。(2.93) の最初の項を見ると X 座標の場合の (2.46) と同様に $T(z)$ はアノマリーを持っていることがわかる。しかしながら系全体のエネルギー・運動量テンソルは X 座標のものと b, c のものの和 $T_X(z) + T_{bc}(z)$ なので、アノマリーが相殺される可能性がある。このアノマリーは量子的に conformal 対称性が成り立たなくなることを意味するので、絶対に消さなくてはならない。

(2.94) で $\lambda = -1$ にとったときには $T_X(z) + T_{bc}(z)$ の 4 次の極の部分の係数 $D/2 + A$ は $D = 26, \quad \lambda = -1$ で 0 になる。$\lambda = -1$ であることは次に BRST 変換を考える時に正当化される。したがってエネルギー・運動量のアノマリーを消すために、bosonic string においては時空の次元は 26 にしなくてはならない。。

2.4.2 BRST symmetry

2.4.1 節のようにフェルミオンゴーストを用いてゲージ固定を行った場合、元々あった局所的なゲージ対称性はなくなるが、大局的な BRST 対称性があることが知られている。まず action (2.77) が BRST 変換の元で不変であることを示す。この変換の構成の仕方は [5] に従う。

まず元々あった場 $X(z)$ の BRST 変換は、ゲージ変換のパラメーターを $c(z)$ で置き換えたものである。

$$\delta' X(z,\bar{z}) = \eta c(z)\partial_z X + \eta c(\bar{z})\partial_{\bar{z}} X \tag{2.95}$$

η はグラスマン数のパラメーターであるが、以降は (2.95) からパラメーターを除いた変換

δ を用いる。

$$\delta X(z,\bar{z}) = c(z)\partial_z X + c(\bar{z})\partial_{\bar{z}} X \tag{2.96}$$

δ は Grassman Odd な演算になることに注意する。c の変換性は、$delta$ に条件 $\delta^2 = 0$ を課すことにより得られる。$\delta^2 X = 0$ という要求から、

$$\delta c(z) = c(z)\partial_z c(z) \tag{2.97}$$

が導かれる。$c(\bar{z})$ に対する式も同様に得られて、(2.97) で $z \to \bar{z}$ とすればよいことがわかる。最後の $b(z)$ であるが、これは $\delta S[X,b,c] = 0$ を満たすようにとればよい。(2.77) の BRST 変換を部分積分を使って計算すると、

$$\begin{aligned}\delta S[X,b,c] = (\partial_{\bar{z}} c(z))&\left[\frac{1}{2}\partial_z X \partial_z X - (c(z)\partial_z b(z) + 2\partial_z c(z) b(z)) + \delta b(z)\right] \\ + (\partial_z c(\bar{z}))&\left[\frac{1}{2}\partial_{\bar{z}} X \partial_{\bar{z}} X - (c(\bar{z})\partial_{\bar{z}} b(\bar{z}) + 2\partial_{\bar{z}} c(\bar{z}) b(\bar{z})) + \delta b(\bar{z})\right]\end{aligned} \tag{2.98}$$

したがって action が BRST 不変になるには次のように選べばよい。

$$\begin{aligned}\delta b(z) &= T_X(z) + T_{bc}(z) \equiv T(z) \\ \delta b(\bar{z}) &= T_X(\bar{z}) + T_{bc}(\bar{z}) \equiv T(\bar{z})\end{aligned} \tag{2.99}$$

(2.99) で $T_X(z)$ は (2.23) の T_{zz} であり、T_{bc} は (2.90) で $\lambda = -1$ としたものである。(2.96) から、c はコンフォーマル変換 $z \to z + \epsilon(z)$ で $\epsilon(z) = \eta c(z)$ としたものであるので z とおなじ conformal weight -1 を持つと予想される。従って $\lambda = -1$ である。

BEST 変換は大局的な連続変換なので、ネーターカレントが存在し、それに付随した保存量がある。このカレントがが BRST current J_B である。変換 (2.96),(2.97),(2.99) から、次のようなものが J_B の候補である。

$$J_B(z) = :c(z)[T_X(z) + \frac{1}{2}T_{bc}(z)]: \tag{2.100}$$

$J_B(\bar{z})$ は (2.100) で $z \to \bar{z}$ としたものである。このカレン トが本当に BRST 変換を生成するかどうか R 積を計算して調べることができる。(2.100) は振動子表示で書かれていないが、normal oreder することにより量子 場として定義されている。場の基本的な演算子積は (2.86),(2.36) で定義されているのでこれらを使って

$$\begin{aligned}R[J_B(z)X(w)] &= \frac{c(w)\partial_w X(w)}{z-w} + \cdots \\ R[J_B(z)c(w)] &= \frac{c(w)\partial_w c(w)}{z-w} + \cdots \\ R[J_B(z)b(w)] &= \frac{T(w)}{z-w} + \frac{c(w)b(w)}{(z-w)^2} + \cdots\end{aligned} \tag{2.101}$$

(2.101) の最後の項は予想されるものとは少し違う。しかし BRST 変換は大局的なので、J_B を積分した BRST charge Q_B を次式で定義する。

$$Q_B\phi(w) \equiv \oint_{|z|>|w|} \oint_{|\bar{z}|>|\bar{w}|} d^2z(J(z)+J(\bar{z})) \tag{2.102}$$

ここで $\phi(w)$ は $X, c.b$ のうちのどれかを表す。(2.101) から容易に

$$Q_B\phi(w) = \delta\phi(w) \tag{2.103}$$

が示せる。

BRST 変換を作るときに $\delta^2 = 0$ を要求した。しかしこの要求はあくまでも古典的なレベルの話である。いま量子場によって BRST 変換を生成できることを (2.103) に見た。はたして $\delta^2 = 0$ は量子的に許されるのであろうか？ (2.103) によれば $\delta^2 = 0$ は $Q_B^2 = 0$ に相当する。そこで $J_B(z)$ 同士の R 積を計算してみると、このときは $D = 26$ のときに限って $Q_B^2 = 0$ が成り立つことがわかる。[14] さらに、ゴースト場も含めた物理的状態は $Q_B|phys> = 0$ をみたす、BRST 不変な状態である。

2.4.3 bosonization

2.4.1 で現れたゴースト場 $b(z), c(z)$ はフェルミオン場であったが、２次元の場の理論では bosonization という技法によってフェルミオン場をボソン場であらわすことができる。[15] ボソン場 $\phi(z)$ を次のように展開する。

$$\phi(z) = x + N\log z + \sum_{n\neq 0}\frac{\alpha_n}{n}z^{-n} \tag{2.104}$$

交換関係は次のようにとる。

$$[\alpha_n, \alpha_m] = n\delta_{n+m,0}, \qquad [x, N] = -1 \tag{2.105}$$

この $\phi(z)$ を使って $b(z), c(z)$ を構成することができる。

$$c(z) =: e^{\phi(z)} :, \quad b(z) =: e^{-\phi(z)} : \tag{2.106}$$

(2.106) の $b(z), c(z)$ が本当にフェルミオンの交換関係 $[b(z), c(w)] = \delta(z-w)$ を満たしているのだろうか？このことを確かめるには２つの場の R 積をとって、(2.86) を満たすことを確かめればよい。(2.106) はタキオンの vertex operator (2.61) と似た形をしているので、このとき使った公式 (2.62) を用いて、

$$R[b(z)c(w)] = R[: e^{-\phi(z)} :: e^{\phi(w)} :] = \frac{1}{z-w} + \cdots \tag{2.107}$$

を得ることができる。

次にこのボソン場でゴースト系の量を書き直してみる。まずエネルギー・運動量テンソル　T_{bc} (2.90) で $\lambda = -1$ としたものを書いてみる。

$$T_{bc}(z) =: c(z)(\partial_z b(z)) + 2(\partial_z c(z))b(z) : \tag{2.108}$$

(2.108) に (2.106) を代入すればよいのだが、そのまま計算するのではなくつぎのような技法を使う。(2.108) の第一項目を次のように書く

$$\begin{aligned} : c(z)(\partial_z b(z)) : &= \lim_{w\to z} : c(w)(\partial_z b(z)) : \\ &= \lim_{w\to z} [R[c(w)\partial_z b(z)] - C[c(w)][\partial_z b(z)]] \end{aligned} \tag{2.109}$$

２行目の $C[c(w)][\partial_z b(z)]$ は $c(w)$ と $\partial_z b(z)$ の contraction である。また $|w| > |z|$ となるように極限をとれば R 積は単なる積である。(2.108) の２項目に対しても (2.109) と同様の操作を行い、(2.106) を代入して計算すると、

$$T_{bc} =: \frac{1}{2}(\partial_z\phi)(\partial_z\phi) + \frac{3}{2}\partial_z^2\phi : \tag{2.110}$$

となる。いまは $\lambda = -1$ として計算したが λ を残した表式では

$$T_{bc} =: \frac{1}{2}(\partial_z\phi)(\partial_z\phi) + \frac{1-2\lambda}{2}\partial_z^2\phi : \tag{2.111}$$

となる。次にゴースト数カレント $j(z) =: b(z)c(z) :$ のボソン表示を計算してみる。この計算は T_{bc} の計算と同様に $j(z) = \lim_{z\to w} b(w)c(z)$ としてやればよく、結果は

$$j(z) = -\partial_z\phi(z) \tag{2.112}$$

となる。これからゴースト数演算子は

$$\oint_{z=0} dz j(z) = -\oint_{z=0} dz\partial\phi(z) = -N \tag{2.113}$$

となる。ここで N は (2.104) の中のものである。すなわち $\phi(z)$ の「運動量」部分が fermion ghost のゴースト数を表しているのである。ゴースト数の対応は２つの表式 (2.90) と (2.111) を次のように書き直してみるとよくわかる。

$$\begin{aligned} T_{bc}^{fermion} &= : -\frac{1}{2}c(\partial b) + \frac{1}{2}(\partial c)b + \frac{1-2\lambda}{2}\partial(-bc) : \\ T_{bc}^{boson} &= : \frac{1}{2}(\partial\phi)(\partial\phi) + \frac{1-2\lambda}{2}\partial(\partial\phi) : \end{aligned} \tag{2.114}$$

(2.114) の 2 番目の全微分項を比較してみると、$\partial\phi \to -bc$ の対応がわかる。またそれぞれの式の第一項目はゴーストの入れ替え $b(z) \to c(z)$（ボソン表示では $\phi(z) \to -\phi(z)$）で不変であり、全微分項がその対称性を破っていることがわかる。このゴースト数の破れは非常に重要な事実であり、のちに 3 章で詳細にふれることにする。

さて、最後にゴーストの action $S[b,c]$ をボソン表示にするとどうなるであろうか。

$$S[b,c] \equiv \int d^2z\,[c(z)\partial_{\bar{z}}b(z) + c(\bar{z})\partial_z b(\bar{z})] \tag{2.115}$$

残念ながら (2.106) を直接 (2.115) に代入して求めることはできない。しかしエネルギー・運動量テンソル (2.111) が得られるようなボソン場の action を書くことは可能である。次のようなものを考える。

$$S[\phi] = \int d^2\sigma\sqrt{h}\left[h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + \frac{1-2\lambda}{4}R^{(2)}\phi\right] \tag{2.116}$$

action (2.116) で h についての変分をとった後、コンフォーマルゲージに固定すると (2.111) を得る。

第 3 章

g-loop amplitude

この章では [6] の手法で、g-loop 散乱振幅がどのようにして得られるかを解説する。彼らの手法の特徴は、古くから知られている調和振動子の方法で、リーマン面上の幾何学的な object を自動的に得ることができる点である。これに対して経路積分による方法ではこのような幾何学的情報は既知であるとして話を進める。このような意味で彼らの方法は非常に価値のあるものである。

彼らの手法は boson 場 ϕ が vacuum charge Q を持つ場合を取り扱っており、これはゴースト場 b, c を bosonization した状況である。したがって b, c に関する g-loop amplitudes を求めることができる。もちろん $Q = 0$ としたときは、弦座標 X の loop 振幅が得られる。この定式化の基本となるのが vacuum charge Q のあるときの operator product expansion である。Q の存在によって代数は (2) 章のものから若干の変更を受ける。特に真空の fermion number に関することはこの方法で見ると理解しやすい。最初の節ではこの内容を取り扱う。

g-loop amplitude を構成するのに決定的な役割を果たすのが、tree vertex である。[8, 7] これはちょうど tree amplitude から外線の状態を取り外したようなもので、任意の physical state の情報を含んでいる。

g-loop amplitude の構成は tree vertex のうち何本かの足を「つなぎ合わせる」ことによって得られる。この操作は調和振動子のトレースをとることに相当する。計算の結果、prime form,g abelian differential,vector Riemann constant,period matrix 等のリーマン面上の幾何学量が Schottky 表示という形で得られる。

3.1 free bosonic field with vacuum charge Q

vacuum charge Q をもつ系の作用

$$S[\phi] = \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma} d^2\sigma\sqrt{h}[h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - \frac{1}{4}QR^{(2)}\phi] \tag{3.1}$$

から出発する。h は二次元面の metric の行列式、$R^(2)$ は 2 次元世界面上のスカラー曲率である。

$$R^{(2)} = \frac{h^{\alpha\mu}h^{\beta\nu}}{2}(h_{\alpha\nu,\beta\mu} - h_{\alpha\mu,\beta\nu} + h_{\beta\mu,\alpha\nu} - h_{\beta\nu,\alpha\mu}) \tag{3.2}$$

ここで Σ を球面にとる。球面は複素平面と「無限遠点」に立体射影できるが、この作用は「無限遠点」のみで曲率 R^2 を持つ。従って場 ϕ はもう一つの局所座標である複素平面上の自由場としてよい。理論の Q 依存性はエネルギー・運動量テンソルに現れる。(2.10) と同様にエネルギー・運動量テンソル T を定義し、コンフォーマル・ゲージに固定したときの zz 成分 (++ 成分) は

$$T(z) =: \frac{1}{2}[\partial_z\phi(z)\partial_z\phi(z) - Q\partial_z\partial_z\phi(z)] : \tag{3.3}$$

となる。また、ghost number current

$$j(z) = \partial_z\phi(z) \tag{3.4}$$

をもっている。p の R 積は、

$$R[\phi(z)\phi(w)] = \log(z-w) + :\phi(z)\phi(w): \tag{3.5}$$

ととっている。(3.5) から以下の OPE が得られる。

$$\begin{aligned} T(z)T(w) &= \frac{[1-3Q^2]/2}{(z-w)^4} + 2\frac{T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w T(w)}{z-w} + \text{(nomal ordered)} \\ T(z)j(w) &= \frac{Q}{(z-w)^3} + \frac{j(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w j(w)}{z-w} + \text{(nomal ordered)} \\ j(z)j(w) &= \frac{1}{(z-w)^2} + \text{(nomal ordered)} \end{aligned} \tag{3.6}$$

０でない Q に対して、T の central charge は 1/2 から $[1-3Q^2]/2$ になっていることがわかる。また j は３次の項が存在するため primary field にはならない。

ϕ のモード展開は次のようにとる。

$$\phi(z) = x + N\log z + \sum_{n\neq 0}\frac{\alpha_n}{n}z^{-n} \tag{3.7}$$

交換関係は bosonic string の場合に準じて以下のようにとる。

$$[\alpha_n, \alpha_m] = n\delta_{n+m,0}, \qquad [x, N] = -1 \tag{3.8}$$

式 (3.6),(3.7),(3.8) を用いて L_n に対する表式と、j_n の表式、及びそれらの代数を得る。L_n,j_n はそれぞれ $T(z)$,$j(z)$ のモード展開の係数である。（それぞれの場の conformal weight に応じて z のべきをずらして展開する。(2) 参照）

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{2}\sum_m :\alpha_m\alpha_{n-m}: -\frac{1}{2}Q(n+1)\alpha_n \\ j_n &= -\alpha_n \\ [L_n, L_m] &= (n-m)L_{n+m} + \frac{1}{12}(1-3Q^2)n(n^2-1)\delta_{n+m,0} \\ [L_n, j_m] &= -mj_{n+m} - \frac{1}{2}Qn(n+1)\delta_{n+m,0} \\ [j_n, j_m] &= nj_{n+m}\delta_{n+m,0} \end{aligned} \tag{3.9}$$

上の代数は $Q = 2\lambda - 1$ としたとき、ゴースト場 $b(z)$(conformal weight $1-\lambda$) 及び $c(z)$ の系に対する代数と同じである。このときの ϕ と b, c の関係はもちろん (2.106) で与えられる。$j(z)$ はゴースト数のカレントに当たる。

$$j(z) = -:b(z)c(z): \tag{3.10}$$

そしてゴースト数は (3.7) の N になることがわかる。

$$N = \oint dz j(z) = j_0 \tag{3.11}$$

もし boson 場 ϕ がゴースト場 b, c を boson 化したものであれば、当然 N は整数の固有値を持たなくてはならない。また、(2.85) のゴーストの真空に対する条件はこの N を使うと次のように理解できる。この系に「エルミート共役」の定義をすることを考える。系の「エネルギー」である L_0 がエルミートになるための条件を考える。(3.9) から、

$$L_0 = \sum_{m\neq 0}\alpha_{-m}\alpha_m + \frac{1}{2}\alpha_0(\alpha_0 - Q) \tag{3.12}$$

となる。$L_0{}^\dagger = L_0$ とするには、$\alpha_0^\dagger = \alpha_0$ とするか、$\alpha_0^\dagger = -\alpha_0 + Q$ とすればよい。ここで、$\alpha_0 = -N$ であること、すなわち N がフェルミオン数であることを思い出すと、

$$\alpha_0^\dagger = -\alpha_0 + Q \tag{3.13}$$

もしくは、

$$N + N^\dagger + Q = 0 \tag{3.14}$$

が正しい関係であることがわかる。これから、N と N' の固有状態をそれぞれ $|q>$、$|q'>$ とすると

$$< q|q' >= \delta(q + q' + Q) \tag{3.15}$$

が成り立つ。

この固有状態 $|q>$ とはどのようなものであろうか？じつはこの状態は vertex oparator を用いて作ることができる。

$$|q> = \lim_{z\to 0} : e^{q\phi(z)} : |0> \tag{3.16}$$

この状態が N の固有値 q を持つ固有状態であることは容易に確かめられる。さらに $T(z)$ との OPE を計算してみると、

$$T(z) : e^{q\phi(w)} := \frac{1}{2}q(q+Q)\frac{: e^{q\phi(w)} :}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w : e^{q\phi(w)} :}{(z-w)} + \cdots \tag{3.17}$$

となり、$: e^{q\phi(z)} :$ は conformal weight$\frac{1}{2}q(q+Q)$ の primary field であることがわかる。さらに (3.3) から

$$\begin{aligned} L_0|q> &= \frac{1}{2}q(q+Q)|q> \\ L_n|q> &= 0 \qquad n > 0 \end{aligned} \tag{3.18}$$

が成り立つ。

3.2 $V_{N;0}$ for free bosonic theory

(3.1) 節における内容ですでに tree level での (すなわち、world-sheet が球面のときの）N 点関数は計算できる。$V_{q_i}(z_i) \equiv : e^{q_i\phi(z_i)}:$ とすると

$$T(z_1; q_1 \cdots z_N; q_N) = <q = 0|R[\prod_{i=1}^{N} V_{q_i}(z_i)]|q = 0> \tag{3.19}$$

が N 点関数を与える。しかしこの表式は外線状態の情報をを含んだ形になっているので、g-loop における N 点関数を考えるときには都合が悪い。そこで (3.19) から外線の状態を取り除いた、vertex function なるものを考える。vertex function を構成する主発点は DS vertex とよばれるもので、[7, 8] 次のものである。

$$W_i = \sum_{n_i} <n_i, O_a| : \exp[\oint_0 dz\phi(1-z)\partial_z\phi_i(z)] : \tag{3.20}$$

ここで ϕ_i は外線状態に作用する場で、ϕ は補助的な場 (auxilialy field) である。この二つの場は独立で、それぞれ別のヒルベルト空間に属している。$<n_i, O_a|$ は N_i の固有値 n_i をもち、ゼロモード以外の励起を持たない状態である。つまり (3.16) で $q = n_i$ としたものである。n_i の和は整数値についてとる。

W_i の右側に primary field から作られる状態 $|\alpha>_i$ を作用させると、auxilialy field の空間で同じ演算子を再生する。ただし再生された演算子は $z = 1$ におけるものである。式で書くと

$$W_i \times \lim_{z\to 0} V_i(z)|0>_i = V(1) \tag{3.21}$$

ここで $V_i(z) = V[\phi_i(z)], V(z) = V[\phi(z)]$ の意味である。すなわち (3.21) の左辺は i の場の空間で期待値をとる操作になっていて、その結果右辺には auxilialy space での同じ形の vertex operator が現れる。以下の議論はゴースト数の固有状態 $|q_i>$ を基底にとって行うので、この状態に対して (3.21) が成り立ってることを確かめてみる。すなわち次式を示す。

$$\begin{aligned} W_i|q_i>_i &= W_i \lim_{z\to 0} : e^{q_i\phi(z)_i} : |0>_i \\ &= : e^{q_i\phi(1)} : \end{aligned} \tag{3.22}$$

まず W_i の指数の肩の部分を計算してみると、

$$\begin{aligned} \oint_0 dz\phi(1-z)\partial_z\phi_i(z) : &= \oint_0 dz(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\partial^n\phi(1)z^n)(-\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\alpha_m^i z^{-m-1}) \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\partial^n\phi(1)\alpha_n^i \end{aligned} \tag{3.23}$$

したがって、$|q_i>$ が $N_i = -\alpha_0^i$ の固有状態であることと、$n > 0$ のとき $\alpha_n^i|q_i> = 0$ である

ことを使えば、

$$W_i|q_i> = \sum_{n_i} <n_i, O_a| : e^{-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\partial^n \phi(1)} : |q_i> \tag{3.24}$$
$$= \sum_{n_i} <n_i, O_a| : e^{q_i\phi(1)} : |q_i>$$
$$= : e^{q_i\phi(1)} :$$

となり、たしかに primary field : $e^{q\phi(z)}$: の形を再生している。$Q = 0$ の場合はゲージ粒子に対する vertex operetor や、さらに高次の vertex operator があるのだが、このような状態に対しても (3.21) が成り立つことは同様にして確かめられる。Q がゼロでないときにはこのような状態は primary field にならない。

W_i は $z = 1$ での primary field を再生するのだが、これを少し改良して、$z = z_i$ での primary field が得られるようにしたい。そのために conformal 変換 $V_i(z)$ を用意する。これは $V_i(0) = z_i$ を満たすような conformal mapping(すなわち $V_i(z)$ は $z = 0$ を含むある領域で正則）である。このような写像に対して、conformal weight λ の場 Φ は次のように変換する。

$$\Phi(V_i(z)) = (\frac{\partial V_i}{\partial z})^{-\lambda}\Phi(z) \tag{3.25}$$

V_i の逆写像 V_i^{-1} を用い、$z' = V_i(z)$ とすると次のようにも書ける。

$$\Phi(z') = (\frac{\partial V_i^{-1}(z')}{\partial z'})^{\lambda}\Phi(V_i^{-1}(z')) \tag{3.26}$$

いま、式 (3.24) を

$$W_i|q_i> = \Phi(1), \qquad |q_i> = \lim_{z\to 0}\Phi(z)|0> \tag{3.27}$$

とかく。補助場の空間において conformal 変換 $z \to \gamma_i(z)$ の変換を生成するユニタリー演算子を同じ記号で γ_i とかく。今の場合 $1 \to z_i$ となる変換を考えたい。こうすうるには $\gamma_i(z) = V_i(1 - z)$ とすればよいことがわかる。γ_i, γ_i^{-1} を (3.27) の左右から作用させると、

$$\gamma_i W_i \gamma_i^{-1}|q_i> = (\frac{\partial V_i^{-1}(z_i)}{\partial z'})^{-\lambda}\Phi(z_i) \tag{3.28}$$
$$\gamma_i W_i \gamma_i^{-1}(\frac{\partial V_i^{-1}}{\partial z'})^{\lambda}|q_i> = \Phi(z_i)$$
$$\widetilde{W_i}(\frac{\partial V_i^{-1}}{\partial z'})^{\lambda}|q_i> = \Phi(z_i)$$

となる。V_i を $SL(2,C)$ 変換、すなわち

$$V_i(z) = \frac{A_i z + B_i}{C_i z + D_i}, \qquad A_i D_i - B_i C_i = 1, \qquad A_i, B_i, C_i, D_i \in C \tag{3.29}$$

のようなものに限ったとき、この $\widetilde{W_i}$ は次式で定義される。

$$\begin{aligned}\widetilde{W_i} = \sum_{n_i} <n_i, O_a| \exp\left[-\frac{1}{2}\oint_0 dz\partial\phi_i(z)(\alpha_0^i - Q)\log[V_i{}'(z)]\right] \\ \times : \exp\left[\oint_0 \phi[V_i(z)]\phi_i{}'(z)\right] :\end{aligned} \tag{3.30}$$

1 行目の因子は conformal 変換の際にあらわれる $(\frac{\partial V^{-1}}{\partial z})$ の因子を正しく生み出すために必要である。実際 (3.28) が成り立つことは (3.30) の表式を $|q_i>$ に作用させて確かめることができる。$|q_i>$ はゼロモードの励起しか含んでないので、$\widetilde{W_i}$ のなかのゼロモード部分のみを取り出せばよい。

$$\begin{aligned}\widetilde{W_i}|q_i> &= \sum_{n_i} <n_i; O_a| \exp\left[\frac{1}{2}N_i(N_i + Q)\log[V_i{}'(0)]\right] \times : \exp[N_i\phi(z_i)] : |q_i> \\ &= \exp\left[\frac{1}{2}q_i(q_i + Q)\log[V_i{}'(0)]\right] \times : \exp[q_i\phi(z_i)] : \\ &= \left(\frac{\partial V^{-1}(z_i)}{\partial z_i}\right)^{-\frac{1}{2}q_i(q_i+Q)} : \exp[q_i\phi(z_i)] :\end{aligned} \tag{3.31}$$

このようにして用意した $\widetilde{W_i}$ から N 点の tree vertex function を作ることができる。

$$V_{N;0} = <q = 0| \prod_{i=1}^{N} \widetilde{W_i}|q = 0> \tag{3.32}$$

$|q = 0>, <q = 0|$ は auxiliary field のほうの真空である。この行列要素を計算した結果 $VN; 0$ は外線の振動子の空間 $(i = 1 \cdots N)$ における「ブラ」演算子になる。行列要素を計算する手順は normal orderd された演算子に関する次の性質を使えばよい。

$$\begin{aligned}<q = 0| \prod_{i=1}^{N} : e^{A_i} : |q = 0> = \prod_{i<j}^{N} <q = 0| : e^{A_i} :: e^{A_j} : |q = 0> \\ <q = 0| : e^{A_i} :: e^{A_j} : |q = 0> = e^{<q=0|A_i A_j|q=0>}\end{aligned} \tag{3.33}$$

すると (3.32) が計算できて次のようになる。

$$V_{N;0} = [\prod_{i=1}^{N}[<n_i, O_a|]] \exp\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\oint dz\partial\phi^i(z)(\alpha_0^i - Q)\log[V_i'(z)]\right] \tag{3.34}$$
$$\times \prod_{i<j}^{N} <q=0| : e^{\oint dz\phi[V_i(z)]\phi_i'(z)} :: e^{\oint dy\phi[V_j(y)]\phi_j'(y)} : |q=0>$$

ここで、auxilialy field を含んでいるのは 2 番目の指数部分なので、(3.33) を使って計算すると

$$= \prod_{i<j}^{N} <q=0| : e^{\oint dz\phi[V_i(z)]\phi_i'(z)} :: e^{\oint dy\phi[V_j(y)]\phi_j'(y)} : |q=0> \tag{3.35}$$
$$= \exp\left[\sum_{i<j}\oint dz \oint dy \log[V_i(z) - V_j(y)]\phi_i'(z)\phi_j'(y)\right]\delta(\sum_{i=1}^{N} N_i + Q)$$

積分は 0 の周りの一周積分で、$|z| > |y|$ として計算した。最後の行では auxilialy field の真空期待値をとった結果デルタ関数が現れる。このデルタ関数の中の N_i はまだ期待値をとっておらず、α_i の空間のオペレーターである。よって vertex は

$$V_{N;0} = [\prod_{i=1}^{N}<n_i, O_a|]e^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\oint dz\partial\phi^i(z)(\alpha_0^i - Q)\log[V_i'(z)]} \tag{3.36}$$
$$\times \exp\left[\sum_{i<j}\oint dz \oint dy \log[V_i(z) - V_j(y)]\phi_i'(z)\phi_j'(y)\right]\delta(\sum_{i=1}^{N} N_i + Q)$$

となる。さらに (3.29) を考慮すると、(3.36) は次の形に書き換えられる。

$$[\prod_{i=1}^{N}<n_i, O_a|] \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1, i\neq j}^{N}\sum_{n,m=0}^{\infty} a_n^i D_{nm}(U_i V_j) a_m^j\right]\delta(\sum_{i=1}^{N} N_i + Q) \tag{3.37}$$

式 (3.37) のなかの記号について説明する。まず a_n は α_n の normalization を変えたものであり、

$$a_0 = \alpha_0 \equiv -N, \qquad \alpha_n = \sqrt{n}a_n, \qquad n > 0 \tag{3.38}$$

である。$U_i(z)$ は $V_i(z)$ と「反転」写像 $\Gamma(z) = \frac{1}{z}$ から作られ、$U_i(z) \equiv \Gamma \cdot V_i^{-1}(z)$ である。

最後に $D_{nm}(V(z))$ は次のように与えられる。

$$D_{nm}(V) = \lim_{z=0} \frac{1}{m!} \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}} \partial_z^m [V(z)]^n \qquad n \neq m \tag{3.39}$$
$$D_{n0}(V) = \lim_{z=0} \frac{1}{\sqrt{n}} [V(z)]^n \qquad n \neq 0$$
$$D_{0m}(V) = \lim_{z=0} \frac{\sqrt{m}}{2m!} \partial_z^m \log[V'(z)] \qquad m \neq 0$$
$$D_{00}(V) = \lim_{z=0} \frac{1}{2} \log[V'(z)]$$

(3.36) と (3.37) が一致することを示すのは簡単ではないが、次の公式を使えばよい。

$$D_{nm}(V_1V_2) = \sum_{l=1}^{\infty} D_{nl}(V_1)D_{lm}(V_2) + D_{n0}(V_1)\delta_{mo} + D_{0m}(V_2)\delta_{no} \tag{3.40}$$
$$D_{nm}(\Gamma V^{-1}\Gamma) = D_{mn}(V) \tag{3.41}$$

(3.37) の中の $D_{nm}(U_iV_j)$ を ((3.40)) を用いて $D(\Gamma V_i)$ と $D(V_j)$ とに分解した後、D の定義を使えば (3.36) が得られる。式 ((3.40)) は非常に重要で、$n, m \neq 0$ のときには $D_{nm}(V)$ が $SL(2, C)$ の無限次元表現になっていることがわかる。

tree-level の N 点関数を得るには次のようにする。$V_{N;0}$ は $\alpha_1 \cdots \alpha_N$ の空間における「ブラ」状態になっているので、外線の状態に対応するケットを右から作用させてやると N 点関数が得られるはずである。すなわち、

$$<q = 0| \prod_{i=1}^{N} : e^{q_i\phi(z_i)} : |q = 0> = V_{N;0} \prod_{i=1}^{N} |q_i>_i \tag{3.42}$$

が成り立ってほしい。左辺については簡単に計算できて、結果は

$$\delta(\sum_{i=1}^{N} q_i + Q) \prod_{i<j} (z_i - z_j)^{q_iq_j} \tag{3.43}$$

となる。右辺の計算は (3.31) と同様に行う。$|q_i>_i$ は $z = z_i$ における primary field で

$$|q_i>_i \equiv \lim_{z\to z_i} [\partial V_i^{-1}(z)]^{q_i(q_i+Q)} : \exp q_i\phi_i[V_i^{-1}(z)] : |0>_i \tag{3.44}$$
$$= \lim_{z\to z_i} [\partial V_i^{-1}(z)]^{q_i(q_i+Q)} : \exp[q_i\phi_i(0)] : |0>_i$$

である。exp の前についている因子は (3.36) の Q を含んだ項とキャンセルする。あとは $: \exp[\phi(0)] : |0>_i$ が N_i の固有状態で, $\alpha_n : \exp[\phi(0)] : |0>_i = 0$ であることを使えば容易に (3.43) を得る。

3.3 $V_{N;g}$ for free bosonic theory

この節では 3.2 節の N 点 vertex$V_{n;0}$ を用いて、g-loop N 点 vertex$V_{n;g}$ を構成する。基本となる考え方は、tree vertex の「足を縫い合わせる」ことでジーナス（種数）の高い vertex を作るという方法である。

$(N+2g)$ 個の穴があいたリーマン面で、g 組の穴を同一視することによって種数 g（すなわち g 個の取っ手を持つ）で N 個の穴のあいたリーマン面を得ることができる。この事実を $V_{N;g}$ の計算に適用するのである。

従ってまず最初に tree vertex V_{N+2g} を用意する。N 個の外線はそのまま外線として残しておいて、それ以外の $2g$ 個の足をつなげてループを作る。わかりやすいように添え字 $i=1\cdots N$ がついたものが外線を表し、$2g$ 個の足のうち偶数のものは 2μ、奇数のものは $2\mu-1$ で表す。ただし $\mu=1\cdots g$ とする。

つぎに $2g$ 個の足をつなぎ合わせることを考える。$V_{N+2g;0}$ は偶数 (2μ) の足と奇数 $2\mu-1$ の足を同じ立場で扱っているので、偶数の部分に関して次のように変更する。

$$<n_{2\mu}| \to |n_{2\mu}>, \qquad N_{2\mu} \to N^{\dagger}_{2\mu}, \qquad a^{2\mu}_n \to a^{\dagger 2\mu}_n \tag{3.45}$$

この変更を行った vertex を $V^{\dagger}_{N+2g;0}$ とかく。添え字 2μ の足と $2\mu-1$ の足をつなげるには sewing operator$P(x_\mu);(\mu=1\cdots g)$ を用いる。x_u はあるパラメーターである。$P(x_\mu)$ は添え字 2μ の振動子 $a^{2\mu}_n$ の空間で座標変換 $z\to P(x^\mu)[z]$ を生成する演算子で、次の式で与えられる。

$$P(x^\mu) =: \exp\left[-\sum_{n,m=0}^{\infty} a^{\dagger 2\mu}_n D_{nm}(P(x^\mu))a^{2\mu}_m + \sum_{n=1}^{\infty} a^{\dagger 2\mu}_n a^{2\mu}_n\right]: \tag{3.46}$$

この演算子を $V_{N+2g;0}$ に作用させても V の形は変わらず、座標が $V_i\to V_iP$ となるだけであることが示せる。最後に偶数の足と奇数の足同士でトレースをとることにより、g-loop N 点関数が得られる。

$$V_{N;g} \equiv \prod_{\mu=1}^{g} Tr_{(2\mu-1,2\mu)}\left[V^{\dagger}_{N+2g;0}\prod_{\mu=1}^{g}P(x_\mu)\right] \tag{3.47}$$

(3.47) を計算した結果を得ることが最終的な目標である。トレースは振動子のゼロモード、非ゼロモードの両方についてとる。

まず非ゼロモード $(\alpha_n, n\neq 0)$ のトレースはコヒーレント状態を用いて行う。$[a,a^\dagger]=1$

をみたす振動子に対するコヒーレント状態 $|\psi>$ とは

$$|\psi> \equiv \exp(\psi a^\dagger|0>) \qquad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}|n> \tag{3.48}$$

で定義される。ψ は任意の複素定数で、$|n>$ は粒子数 $a^\dagger a$ の固有状態である。$|\psi>$ は a の固有状態になっていることが (3.48) から示せる。さらに、次の演算子が粒子数基底に関する単位演算子になっている。

$$I = \int d^2z|\psi>e^{-|\psi|^2}<\psi| \tag{3.49}$$

このことから、演算子 O のトレースは

$$Tr(O) = \int d^2\psi<\psi|O|\psi>e^{-|\psi|^2} \tag{3.50}$$

で計算できることがわかる。従ってゼロモードを除いた部分のトレースは

$$Tr'_{(2\mu-1,2\mu)}(O) = \int \prod_{n=1}^{\infty} d^2\psi_n \prod_{n=1}^{\infty}<-\psi_n|O|\psi_n>e^{-\sum_{n=1}^{\infty}|\psi_n|^2} \tag{3.51}$$

となる。

ゼロモードに関するトレースはゴースト数の固有状態 $|r_\mu>$ を用いて次のように書ける。

$$Tr^0_{2\mu,2\mu-1}(O) = \sum_{r_\mu}<-r_\mu - Q|O|r_\mu> \tag{3.52}$$

(3.15) から、状態は $< -r_\mu - Q|r_\mu >= 1$ となるように規格化されている。r_μ についての和はすべての整数についてとる。

公式 (3.51),(3.52) を用いて具体的に $V_{N;g}$ を計算することができる。まず $V^\dagger_{N+2g;0}$ の表

式を書き下すと次のようになる。

$$
\begin{aligned}
V^{\dagger}_{N+2g;0} = & \prod_{i=1}^{N}[\sum_{n_i} <n_i, O_a|] \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1,i\neq j}^{N}\sum_{n,m=0}^{\infty} a^i_n D_{nm}(U_iV_j)a^j_m\right] \\
& \times \prod_{\mu=1}^{g}[\sum_{n_{2\mu-1}} <n_{2\mu-1}, O_a|]\delta\left(\sum_{i=1}^{N} N_i + \sum_{\mu=1}^{g}[N_{2\mu-1} + N^{\dagger}_{2\mu}] + Q\right) \\
& \times \exp\left[-\sum_{i=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{g}\sum_{n,m=0}^{\infty} a^i_n[D_{nm}(U_iV_{2\mu-1})a^{2\mu-1}_m + D_{nm}(U_iV_{2\mu})a^{\dagger 2\mu}_m]\right] \\
& \times \exp\left[-\sum_{\mu,\nu=1}^{g}\sum_{n,m=0}^{\infty} a^{2\mu-1}_n D_{nm}(U_{2\mu-1}V_{2\nu-1})a^{2\nu-1}_m + a^{\dagger 2\mu-1}_n D_{nm}(U_{2\mu}V_{2\nu})a^{\dagger 2\nu}_m\right] \\
& \times \exp\left[-\sum_{\mu,\nu=1}^{g}\sum_{n,m=0}^{\infty} a^{\dagger 2\mu}_n D_{nm}(U_{2\mu}V_{2\nu-1})a^{2\nu-1}_m\right]\prod_{\mu=1}^{g}[\sum_{n_{2\mu}} |n_{2\mu}, O_a>]
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

この式 (3.53) に関して注意すべきことがいくつかある。まず 3 行目は D_{nm} の性質

$$D_{nm}(U_IV_J) = D_{mn}(U_JV_I) \tag{3.54}$$

を使って対称化してある。さらに、(3.53) には μ, ν に関する和について $\mu = \nu$ となる部分も含まれているが、元々の tree vertex の表式 (3.37) にはこのような項は含まれない。ここでは $\mu = \nu$ の項を書いておいて

$$D_{nm}(U_{2\mu-1}V_{2\mu-1}) = D_{nm}(U_{2\mu}V_{2\mu}) \equiv 0 \tag{3.55}$$

という約束にする。

「プロパゲーター」$P(x_\mu)$ の効果はこの $V_{N;g}$ の中では非常に簡単な形で取り入れられる。ただ単に次のように奇数番の足の座標を変えるだけである。[*1]

$$
\begin{aligned}
V_{2\mu-1} \rightarrow & \quad \tilde{V}_{2\mu-1} \equiv V_{2\mu-1}P(x_\mu) \\
U_{2\mu-1} \rightarrow & \tilde{U}_{2\mu-1} \equiv \Gamma[V_{2\mu-1}P(x_\mu)]^{-1}
\end{aligned}
\tag{3.56}
$$

したがって我々は次のものを計算すればよい。(3.47) より、

$$V_{N;g} \equiv \prod_{\mu=1}^{g} Tr_{(2\mu-1,2\mu)}\left[V^{\dagger}_{N+2g;0}\prod_{\mu=1}^{g}P(x_\mu)\right] = \prod_{\mu=1}^{g} Tr_{(2\mu-1,2\mu)}\left[\tilde{V}^{\dagger}_{N+2g;0}\right] \tag{3.57}$$

[*1] C 章参照

ここで $\tilde{V}^\dagger_{N+2g;0}$ は $V^\dagger_{N+2g;0}$ において (3.56) の置き換えを行ったものである。

これで準備が整ったので、トレース計算が実行できる。トレース計算は前に説明したコヒーレント状態を用いて行う。具体的には (3.51),(3.52) を用いてコヒーレント状態で期待値をとるのだが、コヒーレント状態 $<-\psi^\mu|_{2\mu}$, $|\psi^\mu>_{2\mu-1}$, $<-r_\mu - Q|_{2\mu}$, $|r_\mu>_{2\mu-1}$ はそれぞれ振動子 $a_n^{2\mu-1}, a_n^{\dagger 2\mu}, a_0^{2\mu-1}, a_0^{\dagger 2\mu}$ の固有状態になるので話は簡単である。$\tilde{V}^\dagger_{N+2g;0}$ の中で次の置き換えをすればよい。

$$\begin{aligned} a_n^{2\mu-1} &\to \psi_n^\mu \\ a_n^{\dagger 2\mu} &\to \psi_n^{*\mu} \\ a_0^{2\mu-1} &\to -r_\mu \\ a_0^{\dagger 2\mu} &\to r_\mu + Q \end{aligned} \tag{3.58}$$

以上の置き換えを行い、ψ_n を含む部分と含まない部分に分け、コヒーレント状態に関する期待値をとると次の表式を得る。

$$\begin{aligned} V_{N;g} &= [\prod_{i=1}^{N} <n_i, O_a|]\delta(\sum_{i=1}^{N} N_i + Q) \sum_{r_\mu} \exp(A) \\ &\times \int \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{\mu=1}^{g} [d^2\psi_n^\mu] \exp\left[(B_1, B_2)\begin{pmatrix}\psi \\ \psi^*\end{pmatrix} - \frac{1}{2}(\psi^*, \psi)(1-H)\begin{pmatrix}\psi \\ \psi^*\end{pmatrix}\right] \end{aligned} \tag{3.59}$$

この (3.59) の中の行列記法は次のように定義されている。

$$(X_1, X_2)\begin{pmatrix}Y_1 \\ Y_2\end{pmatrix} \equiv \sum_{\mu=1}^{g} \sum_{n=1}^{\infty} \left((X_1)_n^\mu (Y_1)_n^\mu + (X_2)_n^\mu (Y_2)_n^\mu \right) \tag{3.60}$$

行列 H は非ゼロモード部分のみに関する行列で、次のようなものである。

$$H_{nm}^{\mu\nu} = -\begin{pmatrix} -D_{nm}(U_{2\mu}\tilde{V}_{2\nu-1}) & D_{nm}(U_{2\mu}V_{2\nu}) \\ D_{nm}(\tilde{U}_{2\mu-1}\tilde{V}_{2\nu-1}) & -D_{nm}(\tilde{U}_{2\mu-1}V_{2\nu}) \end{pmatrix} \tag{3.61}$$

A はゼロモードのみによる部分で、次のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
A \;=\; & -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1,i\neq j}^{N}\sum_{n,m=0}^{\infty} a_n^i D_{nm}(U_iV_j)a_m^j && (3.62)\\
& + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{g}\sum_{n=0}^{\infty} a_n^i[D_{n0}(U_i\tilde{V}_{2\nu-1})r_\nu - D_{n0}(U_iV_{2\nu})(r_\nu+Q)]\\
& -\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1,\mu\neq\nu}^{g} r_\mu D_{00}(\tilde{U}_{2\mu-1}\tilde{V}_{2\nu-1})r_\nu + \sum_{\mu,\nu=1}^{g} r_\mu D_{00}(\tilde{U}_{2\mu-1}V_{2\nu})(r_\nu+Q)\\
& -\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1,\mu\neq\nu}^{g}(r_\mu+Q)D_{00}(U_{2\mu}V_{2\nu})(r_\nu+Q)
\end{aligned}
$$

(3.63)

つぎに B は r_μ について 1 次の項を含み、次のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
(B_I)_m^\nu \quad & = -(-1)^I\sum_{\nu=1}^{g} r_\nu[D_{0m}(\tilde{U}_{2\nu-1}V_I) - D_{0m}(U_{2\nu}V_I)]\\
& + (-1)^I\sum_{i=1}^{N}\sum_{n=0}^{\infty} a_n^i D_{nm}(U_iV_I) + (-1)^I Q\sum_{\nu=1}^{g} D_{0m}(U_{2\nu}V_I) && (3.64)
\end{aligned}
$$

ここで $I=1,2$ で $V_1=\tilde{V}_{2\mu-1}, V_2=V_{2\mu}$ である。

(3.59) において ψ_n の積分はガウス型であるので実行できる。2 行 2 列の行列は次のように平方完成できる。

$$
\begin{aligned}
& (B_1,B_2)\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}(\psi_2,\psi_1)K\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} && (3.65)\\
= & \frac{1}{2}[[(\psi_2',\psi_1') + (B_1,B_2)K^{-1/2}][\begin{pmatrix}\psi_1'\\ \psi_2'\end{pmatrix} + K^{-1/2}\begin{pmatrix}B_1\\ B_2\end{pmatrix}]\\
& -(B_1,B_2)K^{-1}\begin{pmatrix}B_1\\ B_2\end{pmatrix}]
\end{aligned}
$$

(3.66)

ただし $\binom{\psi_1'}{\psi_2'} = K^{1/2}\binom{\psi_1}{\psi_2}, K = 1-H$ である。あとは積分変数を ψ から ψ' に変えるときに行列式 $[\det(K)]^{-1/2}$ がでることに注意すればよい。こうして (3.59) の積分を実行すると次の

表式を得る。

$$V_{N;g} = [\det(1-H)]^{-1/2} \prod_{i=1}^{N} [\sum_{n_i} < n_i, O_a|] \delta[\sum_{i=1}^{N} N_i - (g-1)Q] \tag{3.67}$$
$$\times \sum_{r_\mu} \exp\left[A + \frac{1}{2}(B_1, B_2)(1-H)^{-1}\begin{pmatrix} B_2 \\ B_1 \end{pmatrix}\right]$$

(3.67) の中で $(1-H)^{-1}$ は H のべき展開で定義する。

$$\frac{1}{1-H} \equiv \sum_{l=0}^{\infty} H^l \tag{3.68}$$

(3.68) を使うと (3.67) のなかの指数因子は次のように書ける。

$$\exp\left[A + \frac{1}{2}(B_1, B_2) \sum_{l=0}^{\infty} H^l \begin{pmatrix} B_2 \\ B_1 \end{pmatrix}\right] \tag{3.69}$$

さらに計算を進めるためいくつか準備をする。まず H^l の表式であるが、これはショットキー表示（付録 (A)）を用いることによって簡潔に書ける。

$$(H^l)^{\mu\nu}_{nm} = -\begin{pmatrix} -D_{nm}(U_{2\mu}\Sigma^{l-1}_{(-,-)}\tilde{V}_{2\nu-1}) & D_{nm}(U_{2\mu}\Sigma^{l-1}_{(-,+)}V_{2\nu}) \\ D_{nm}(\tilde{U}_{2\mu-1}\Sigma^{l-1}_{(+,-)}\tilde{V}_{2\nu-1}) & -D_{nm}(\tilde{U}_{2\mu-1}\Sigma^{l-1}_{(+,+)}V_{2\nu}) \end{pmatrix} \tag{3.70}$$

ここで、Σ の表記について説明する。

$$D_{nm}(\cdots \Sigma^{l}_{(+,-)} \cdots) = \sum_{\alpha : n_\alpha = l}^{(+,-)} D_{nm}(\cdots T_\alpha \cdots) \tag{3.71}$$

T_α は $S_\mu = \tilde{V}_{2\mu-1}U_{2\mu}, (\mu = 1 \cdots g)$ から作られるショットキー群の元を表す。（付録 A 参照）(3.71) の和の意味は、「order 1 の元のうち、一番左に S_μ、一番右に S_ν^{-1} を含まないもの」についてとるということである。このような和の制約があるのは (3.55) のためである。

さらに計算の見通しをよくするため、(3.64) の B を次のように２通りに書き換える。

$$(B_I)^{\mu}_{m} = -(-1)^I \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{g} r_\nu [D_{0s}(\tilde{U}_{2\nu-1}) - D_{0s}(U_{2\nu})] D_{sm}(V_I) - r_\mu D_{0m}(V_I) \tag{3.72}$$
$$(-1)^I \sum_{l,s=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{N} a^i_l D_{ls}(U_i) D_{sm}(V_I) + (-1)^I Q \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{g} D_{0s}(U_{2\nu}) D_{sm}(V_I)$$
$$-\delta_{I,1} Q D_{0m}(V_I)$$

$$
\begin{aligned}
(B_I)^\mu_m = -(-1)^I \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{g} D_{ms}(U_I)[D_{s0}(\tilde{V}_{2\nu-1}) - D_{0s}(V_{2\nu})]r_\nu - r_\mu D_{m0}(U_I) \\
(-1)^I \sum_{l,s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{N} D_{ms}(U_i)D_{sl}(V_I)a^j_l + (-1)^I Q \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{g} D_{ms}(U_I)D_{s0}(V_{2\nu}) \\
-\delta_{I,1} Q D_{m0}(U_I)
\end{aligned}
\tag{3.73}
$$

ここで、I は 1 か 2 の値をとり、$V_1 = \tilde{V}_{2\mu-1}, V_2 = V_{2\mu}, U_1 = \tilde{U}_{2\mu-1}, U_2 = U_{2\mu}$ である。(3.72),(3.73) の表式は規則 (3.55) を考慮していることに注意したい。(3.59) において、左側の B_1B_2 には (3.72) を、右側の B_1B_2 には (3.73) を用いる。

これで準備が整ったので、(3.59) の計算を進める。(3.59) 指数部分に (3.70),(3.72),(3.73) を代入し、r_μ の次数についてまとめると、$V_{N;g}$ は次のような形に書ける。

$$
\begin{aligned}
V_{N;g} &= \prod_{i=1}^{N}[\sum_{n_i} < n_i, O_a|]\delta[\sum_{i=1}^{N} N_i - (g-1)Q] \\
&= \times \mathcal{N} \sum_{r_\mu} \exp[\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{g} r_\mu C^{(1)}_{\mu\nu} r_\nu + \sum_{\mu=1}^{g} r_\mu C^{(2)}_\mu + C^{(3)}]
\end{aligned}
\tag{3.74}
$$

偶数の足についてトレースをとったので、(3.74) は外線の足についてのブラ演算子になっている。デルタ関数の部分はゼロモードの行列要素をとる際に現れる。$\mathcal{N}, C^{(1)}_{\mu\nu}, C^{(2)}_\mu, C^{(3)}$ はショットキー表示*2によって簡潔に表せる。$C^{(1)}_{\mu\nu}, C^{(2)}_\mu, C^{(3)}, \mathcal{N}$ の計算は付録 B で述べ

*2 付録 A 参照

る。結果は次の通りである。

$$C^{(1)}_{\mu\nu} = 2\pi i \tau_{\mu\nu} \tag{3.75}$$
$$C^{(2)}_{\mu} = 2\pi i[\frac{1}{2\pi i}\oint_0 dz \sum_{i=1}^{N} \partial\phi^{(i)}(z)[\int_{z_0}^{V_i(z)} \omega_\mu] - Q(\Delta_\mu^{z_0} + \frac{1}{2})$$
$$\begin{aligned} C^{(3)} &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\oint_0 dz\partial\phi^{(i)}(z)\log[V_i'(z)]\alpha^{(i)_0} \\ &+ \sum_{i,j=1,i<j}^{N}\oint_0 dz\oint_0 dy\partial\phi^{(i)}(z)\log[V_i(z)-V_j(y)]\partial\phi^{(j)}(y) \\ &+ -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\oint_0 dz\oint_0 dy\partial\phi^{(i)}(z)\log\frac{E(V_i(z),V_j(y))}{V_i(z)-V_j(y)}\partial\phi^{(j)}(y) \\ &+ -\frac{1}{2}Q\sum_{i=1}^{N}\oint_0 dz\partial\phi^{(i)}(z)(\log[V_i'(z)] + 2\log\sigma[V_i(z)]) \end{aligned}$$

$$\mathcal{N} = (\det(1-H))^{-1/2} = \prod_\alpha{}' \prod_{n=1}^{\infty}(1-k_\alpha^n)^2 \tag{3.76}$$

(3.75) のなかの $\tau_{\mu\nu}, \omega_\mu, \Delta_\mu^{z_0}, E(z,y), \sigma(z)$ はリーマン面 Σ_g 上の関数で、その定義は付録 A でとりあげる。(3.75) を (3.74) に代入すると次の $V_{N;g}$ の表式を得る。

$$\begin{aligned} V_{N;g} &= \mathcal{N}\prod_{i=1}^{N}[\sum_{n_i} \langle n_i, O_a|]\delta[\sum_{i=1}^{N} N_i - (g-1)Q] \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\oint_0 dz\partial\phi^{(i)}(z)[\alpha_0^i - Q]\log[V_i'(z)]\right) \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\oint_0 dz\oint_0 dy\partial\phi^{(i)}(z)\log\frac{E(V_i(z),V_j(y))}{V_i(z)-V_j(y)}\partial\phi^{(j)}(y)\right) \\ &\times \exp\left(\sum_{i,j=1,i<j}^{N}\oint_0 dz\oint_0 dy\partial\phi^{(i)}(z)\log[V_i(z)-V_j(y)]\partial\phi^{(j)}(y)\right) \\ &\times \Theta\left([\frac{1}{2\pi i}\oint_0 dz\sum_{i=1}^{N}\partial\phi^{(i)}(z)[\int_{z_0}^{V_i(z)}\omega_\mu] - Q(\Delta_\mu^{z_0}+\frac{1}{2})]|\tau\right) \\ &\times \exp\left(Q\sum_{i=1}^{N}\oint_0 dz\partial\phi^{(i)}(z)\log\sigma[V_i(z)]\right) \end{aligned} \tag{3.77}$$

ここで Θ の定義は

$$\Theta(z|\tau) = \sum_{n_\mu} \exp 2\pi n i \left(\sum_{\mu,\nu=1}^{g} \frac{1}{2} n_\mu \tau_{\mu\nu} n_\nu + \sum_{\mu=1}^{g} n_\mu z_\mu \right) \tag{3.78}$$

である。もちろん n_μ の和は整数についてとる。また、tree vertex $V_{N;0}$ を用いて (3.77) を書き直すことができる。

$$\begin{aligned} V_{N;g} &= \mathcal{N}\hat{V}_{N;0}\delta[\sum_{i=1}^{N} N_i - (g-1)Q] \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \oint_0 dz \oint_0 dy \partial\phi^{(i)}(z) \log \frac{E(V_i(z), V_j(y))}{V_i(z) - V_j(y)} \partial\phi^{(j)}(y) \right) \\ &\times \Theta\left([\frac{1}{2\pi i} \oint_0 dz \sum_{i=1}^{N} \partial\phi^{(i)}(z)[\int_{z_0}^{V_i(z)} \omega_\mu] - Q(\Delta_\mu^{z_0} + \frac{1}{2})]|\tau \right) \\ &\times \exp\left(Q \sum_{i=1}^{N} \oint_0 dz \partial\phi^{(i)}(z) \log \sigma[V_i(z)] \right) \end{aligned} \tag{3.79}$$

ここで $\hat{V}_{N;0}$ は (3.36) の $V_{N;0}$ からデルタ関数を取り除いたものである。

以上が g-loop vertex の表式である。これらの表式から primary field の N 点関数が得られる。tree vertex のときの表式 (3.42) と同様にして

$$\begin{aligned} <q=0| \prod_{i=1}^{N} : e^{q_i \phi(z_i)} : |q=0>_g \equiv V_{N;g} \prod_{i=1}^{N} |q_i>_i \\ = \delta[\sum_{i=1}^{N} N_i - (g-1)Q]\mathcal{N} \prod_{i<j} [E(z_i, z_j)]^{q_i q_j} \prod_{i=1}^{N} [\sigma(z_i)]^{q_i Q} \\ \times \left[\Theta\left([\frac{1}{2\pi i} \oint_0 dz \sum_{i=1}^{N} \partial\phi^{(i)}(z)[\int_{z_0}^{V_i(z)} \omega_\mu] - Q(\Delta_\mu^{z_0} + \frac{1}{2})]|\tau \right) \right] \end{aligned} \tag{3.80}$$

を得る。

これまで行った計算は任意の Q に対して行ってきたが、ストリング理論に関係にある量を得るには Q の値を決めてやればよい。まずゴースト場 b, c については $Q = 3$ である。c は $N = 1$ の状態 $|q = 1>$、b は $N = -1$ の状態 $|q = -1>$ に対応する。したがって N_1 ケ

の b と N_2 ヶの c についての相関関数は

$$V_{N_1+N_2;g}\prod_{i=1}^{N_1}\prod_{j=1}^{N_2}|q_i=-1>|q_j=1> \tag{3.81}$$
$$=\mathcal{N}\frac{\prod_{i,j=1;i<j}^{N_1}E(z_i,z_j)\prod_{h,k=1;h<k}^{N_1}E(y_h,y_k)}{\prod_{i=1}^{N_1}\prod_{h=1}^{N_2}E(z_i,y_h)}\frac{\prod_{h=1}^{N_2}\sigma(y_h)^3}{\prod_{i=1}^{N_1}\sigma(z_i)^3}$$
$$\times\,\delta(N_1-N_2+3(g-1))\Theta\left(-\Omega_1+\Omega_2-3(\Delta_\mu^{z_0})|\tau\right)$$

ここで

$$\Omega_k\equiv\frac{1}{2\pi i}\oint_0 dz\sum_{i=1}^{N_k}\partial\phi^{(i)}(z)[\int_{z_0}^{z_i}\omega_\mu] \tag{3.82}$$

とした。デルタ関数の部分から、(3.81) が値を持つのは $N_1=N_2-3(g-1)$ の場合だけであることがわかる。

つぎに弦座標 $X^\mu(z)\quad(\mu=0,\cdots,25)$ に対する vertex を求めてみる。この場合は $Q=0$ とし、さらに N に当たる部分に連続固有値をとらせればよい。ここでは開弦の場合の表式を記す。弦座標のモード展開を (2.24) と同じにとる。

$$X^\mu(z)=x^\mu-i\alpha_0^\mu\log z+i\sum_{n\neq0}^{\infty}\frac{\alpha_n^\mu}{n}z^{-n} \tag{3.83}$$

すると X にたいする g-loop vertex は

$$V_{N;g}^X=O^{26}\prod_{i=1}^{N}\left[\int d^Dp_i<p_i;O_a|\right]\delta\left(\sum_N^{i=1}p_i\right)\quad \hat{V_{N;0}} \tag{3.84}$$
$$\times\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_N^{i,j=1}\oint_0 dz\oint_0 dy\partial X^i(z)\log\frac{E(V_i(z),V_j(y))}{V_i(z)-V_j(y)}\partial X^j(y)\right]$$
$$\times\int\prod_g^{\mu=1}[d^Dk_\mu]\exp\left[\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{g}k_\mu(2\pi i\tau)_{\mu\nu}k_\nu+i\sum_{i=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{g}\oint dz\partial X^i(z)\left(\int_{z_0}^{V_i(z)}\omega^\mu\right)k_\mu\right]$$

ここで $\hat{V}_{N;0}$ は tree vertex で、

$$\hat{V_{N;0}}=\exp\left[\sum_{i,j=1,i<j}^{N}\oint_0 dz\oint_0 dy\partial X^i(z)\log[V_i(z)-V_j(y)]\partial X^j(y)\right] \tag{3.85}$$
$$\times\exp\left[\frac{1}{2}i\oint dz\partial X^i(z)\alpha_0^i\log V_i'(z)\right]$$

である。

3.4 まとめと展望

まず 2 章では bosonic string の量子力学についての基礎的な内容を取り上げた。弦の量子力学は conformal field theory という 2 次元の場の理論で記述できることを知った。conformal 対称性は 2 次元の一般座標変換の一部分であるが、無限次元の代数をもつ非常に強力な対称性である。この対称性のおかげで常に局所的に平坦な座標の上で量子化を行うことができる。物理的な状態は vertex operator で作ることができる。さらに conformal 対称性をフェルミオンゴーストによってゲージ固定する事ができることを取り上げた。このゴースト場はじつはボソン場で書くことができ、２次元面の曲率と couple する理論になることも重要な結果である。この曲率項によってゴースト場の破れが起こる。

Di Vecchia らの仕事 [6] の内容を紹介した 3 章では、2 章の内容をもとに Vacuum charge Q を持つ系の g-loop vertex なるものを構成した。tree vertex をつなぎ合わせる方法で g-loop vertex を計算することができ、Schottky 表示による具体的な表式を得た。この方法の利点は tree vertex のみから g-loop vertex を機械的に構成できる点である。ループの形状を記述する moduli 変数は自動的に g-loop vertex の表式に含まれる。

今回紹介した結果はもちろん弦理論の散乱振幅の一部であるが、すべての情報を含んではいない。弦理論の散乱振幅を得るには N 点関数に現れる変数について適当な重みで積分を行わなくてはならない。さらにゴースト部分と X 座標に関する部分を組み合わせなくてはならない。今回はここまでは触れなかったが、弦理論の散乱振幅については超弦の場合も含めて [16] に詳しく紹介されている。また散乱振幅の物理的性質についても触れられなかった。この点に関しては 1-loop の段階ではあるが [2] に取り上げられている。

今後の展望であるが、弦理論の散乱振幅の点粒子極限をとることにより点粒子の理論の散乱振幅を計算できることが知られている。[13, 12] 非可換ゲージ理論においてはゲージ群の自由度のためファインマン図の数が非常に多くなるが、弦理論において対応する散乱振幅の数は前者に比べ遙かに少ない。そのため technical に弦理論を用いる方法が提案された。[12] この方法は時空の次元を２６次元から４次元に解析接続して行うので、次元のコンパクト化が正常に行われたと仮定して行う。しかしながらこの過程は正当化されているとはとてもいえず、今後の課題である。そしてこの方法は技術的に有用であるのみならず、点粒子の場の理論に現れる発散の問題について新たな解釈を与えることができるかもしれない。本質的に弦理論の散乱振幅は有限であるから、点粒子極限をとるときに発散が現れる。このあたりのことをより深く理解するのことが今後の課題である。

謝辞

この論文の内容について全面的に指導してくださった内藤清一先生に心から感謝します。また安井先生、基礎物理研究室、素粒子論研究室の学生のみなさんと貴重な議論ができたことに感謝します。

付録 A

ショットキー表示

g-loop vertex の最終的な表式 (3.79) はショットキー表示という形で表されるので、ショットキー群、ショットキー表示について説明する。

ショットキー群について説明するまえに、$S(2,C)$ 変換 $S_\mu(z)$ の性質をみる。この座標は μ 番目のループに関係して $V_{N;g}$ の中に現れるものである。

$$S_\mu(z) = \frac{a_\mu z + b_\mu}{c_\mu z + d_\mu}, \qquad a_\mu d_\mu - b_\mu c_\mu = 1, \qquad a,b,c,d \in C \tag{A.1}$$

または次のような書き方もできる。

$$\frac{S_\mu(z) - \eta_\mu}{S_\mu(z) - \xi_\mu} = k_\mu \frac{z - \eta_\mu}{z - \xi_\mu}, \qquad |k_\mu| < 1 \tag{A.2}$$

ここで (A.1) と (A.2) の関係は次式で与えられる。

$$\begin{array}{llll} a_\mu = \frac{\eta_\mu - k_\mu \xi_\mu}{\sqrt{|k_\mu|}|\eta_\mu - \xi_\mu|} & b_\mu = -\frac{\eta_\mu \xi_\mu (1-k_\mu)}{\sqrt{|k_\mu|}|\eta_\mu - \xi_\mu|} \\ c_\mu = \frac{1-k_\mu}{\sqrt{|k_\mu|}|\eta_\mu - \xi_\mu|} & d_\mu = \frac{k_\mu \eta_\mu - \xi_\mu}{\sqrt{|k_\mu|}|\eta_\mu - \xi_\mu|} \end{array} \tag{A.3}$$

(A.2) から、次の式が任意の z に対して成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty} S_\mu^n(z) = \eta_\mu; \qquad \lim_{n\to\infty} S_\mu^{-n}(z) = \xi_\mu \tag{A.4}$$

したがって η_μ, ξ_μ はそれぞれ S_μ, S_μ^{-1} の不動点である。さらに、この S_μ に対して z 平面上に 2 つの円 B_μ, B'_μ が定義できる。B_μ, B'_μ はそれぞれ

$$\left|\frac{dS_\mu}{dz}\right|^{1/2} = |c_\mu z + d_\mu| = 1; \qquad \left|\frac{dS_\mu^{-1}}{dz}\right|^{1/2} = |c_\mu z - a_\mu| = 1 \tag{A.5}$$

をみたす z の集合で、円の半径 R_μ, R'_μ と中心 J_μ, J'_μ はそれぞれ

$$R_\mu = R'_\mu = \sqrt{|k_\mu|}\frac{|\xi_\mu - \eta_\mu|}{|1-k_\mu|} \tag{A.6}$$

$$J_\mu = -\frac{d_\mu}{c_\mu} = \frac{\xi_\mu - k_\mu\eta_\mu}{1-k_\mu}; \qquad J'_\mu = -\frac{a_\mu}{c_\mu} = \frac{\eta_\mu - k_\mu\xi_\mu}{1-k_\mu}; \tag{A.7}$$

で与えられる。(A.6),(A.7),(A.4) から次のことが示せる。

- S_μ は B_μ の外側の点を B'_μ の内側に移す。
- S_μ^{-1} は B'_μ の外側の点を B_μ の内側に移す。
- η_μ は B' の内側、ξ は B_μ の内側にある。

これらのことから、複素平面全体から B_μ, B'_μ の内側を除いた領域 F は S_μ, S_μ^{-1} によって B_μ, B'_μ の内側の領域 $B\cup B'$ へ 1 対 1 に移される。したがって S_μ, S_μ^{-1} で同等ではない点の集合は $F, B\cup B'$ のどちらかである。ここでは F をとり、F を S の基本領域と呼ぶことにする。

次にショットキー群の定義を述べる。g 個のループに対応した $S_\mu \quad (\mu = 1\cdots g)$ の任意の合成変換を考える。すなわち、

$$T_\alpha = S_{\mu_1}^{n_1} S_{\mu_2}^{n_2} \cdots S_{\mu_r}^{n_r}, \quad r = 1,2,\cdots \quad \mu_i = 1,2,\cdots g \tag{A.8}$$

のようなものを考える。ここで $n_i \quad (i = 1,\cdots r)$ は正または負の整数である。T_α のような元の全体をショットキー群 G_g と呼ぶ。ある元 T_α に含まれる S と S^{-1} の数の合計を T_α のオーダー n_α という。

$$n_\alpha = \sum_r^{i=1} |n_i| \tag{A.9}$$

G_g の元 T_α はすべて $SL(2,C)$ の元になっているので (A.2) で説明した η, ξ, k を持つ。ある変換 A を用意し $T' = ATA^{-1}$ とすると T' の全体は新たなショットキー群 G'_g をなす。しかし G_g と G'_g の違いは単に η, ξ が $A(\eta), A(\xi)$ に移っているだけである（乗数 k は変わらない)。したがって G_g と G'_g はほぼ同じものといってもよい。A を決めるのに必要なパラメーターは３つなので、$2g$ ヶある S_μ の不動点 η_μ, ξ_μ のうち、３つはこの自由度で動く。従って $2g-3$ ヶのパラメータを指定すれば本質的に不動点の組が得られる訳である。

先に S_μ に対する基本領域 F は円 B と B' の外側の領域で与えられることをみたが、T_α に対する基本領域も同様にして得られることは自明であろう。T_α の基本領域は $B_1, B_2, \cdots, B_g$ 及び $B'_1, B'_2, \cdots, B'_g$ の外側の領域 H である。

以前に述べたことから明らかであるが、S_μ は B_μ 上の点を B'_μ 上に移す。B_μ と B'_μ とを同一視することにより、領域 F と無限遠点を合わせたものをトーラスと同一視することができる。[*1]同様に、H の中の g ヶのペア $B\mu, B'_\mu$ を同一視し、無限遠点を付け加えたものは、g ヶのハンドルを持つリーマン面とみなせる。g ヶのハンドルのうち 1 つに注目する。B_μ もしくは B'_μ を一周する経路を a_μ サイクル、B_μ 上の点 z から B'_μ 上の点 $S_\mu(z)$ への経路を B_μ サイクルという。[*2]

ショットキー群の元を用いてリーマン面 $F+\infty$ 上の幾何学量が定義できる。まず (3.75) の中の C^2_μ に現れた ω_μ は次のように定義される。

$$\omega_\mu = \sum_{T_\alpha}^{(,\mu)} \left(\frac{1}{z - T_\alpha(\eta_\mu)} - \frac{1}{z - T_\alpha(\xi_\mu)} \right) \tag{A.10}$$

ここで $\sum_{T_\alpha}^{(,\mu)}$ は右端に S_μ を含まないようなショットキー群の元についての和を意味する。(A.10) で定義された ω_μ は次のような周期性を持っている。まず、a_μ サイクルにそって 1 周させたときに

$$\oint_{a_\nu} \omega_\mu = \oint_{B_\nu} \omega_\mu = 2\pi i \delta_{\mu\nu} \tag{A.11}$$

のように振る舞う。$\mu \neq \nu$ のとき (A.10) が値をもつのは T_α が左端に $S_\nu^{-n} \quad (n > 0)$ を持つような元のときだけである。このような元に対しては $T_\alpha(\eta_\mu), T_\alpha(\xi_\mu)$ は a_μ の内側にあるからである。しかしこのとき (A.10) の前後の項は同じ値をもつのでキャンセルする。結局 (A.10) が値を持つのは $\mu = \nu$ かつ T_α が単位元のときだけある。こうして (A.11) を得る。

つぎに ω_μ を b_ν サイクルに沿って一周させた場合を調べる。これは (3.75) の $C^1_{\mu\nu}$ の表式である $\tau_{\mu\nu}$ に他ならない。

$$(2\pi i)\tau_{\mu\nu} = \oint_{b_\nu} \omega_\mu \tag{A.12}$$

b_μ サイクルの周りの一周積分は、B_μ 上の点 z_0 から B'_μ 上の点 $S_\mu(z_0)$ までの線積分で与

[*1] 複素平面 C に無限遠点を付け加えたものは球面と同一視できる。

[*2] b_μ サイクルは F 上では線分に見えるが両端を同一視しているのでやはり「サイクル」である。

えられる。

$$(2\pi i)\tau_{\mu\nu} = \oint_{b_\nu} \omega_\mu = \int_{z_0}^{S_\nu(z_0)} \omega_\mu \tag{A.13}$$

$$= \sum_{T_\alpha}^{(,\mu)} \log \frac{S_\nu(z_0) - T_\alpha(\eta_\mu)}{S_\nu(z_0) - T_\alpha(\xi_\mu)} \frac{z_0 - T_\alpha(\xi_\mu)}{z_0 - T_\alpha(\eta_\mu)} \tag{A.14}$$

$$= \delta_{\mu\nu} - \sum_{T_\alpha}^{(\nu,\mu)'} \log \frac{\eta_\nu - T_\alpha(\eta_\mu)}{\eta_\nu - T_\alpha(\eta_\mu)} \frac{\xi_\nu - T_\alpha(\eta_\mu)}{\xi_\nu - T_\alpha(\xi_\mu)}$$

(A.13) の中の $\sum_{T_\alpha}^{(\nu,\mu)'}$ は、左端に $S_\nu^{\pm 1}$ を、右端に $S_\mu^{\pm 1}$ を含まないような元に関する和をあらわす。さらに $\mu = \nu$ のときには単位元は含まない。(A.13) を見てわかるように、$\tau_{\mu\nu}$ は z_0 の取り方にはよらない。

次に C^3 の中にあらわれる $E(z,w)$ は prime form と呼ばれ、次式で定義される。

$$E(z,w) = (z-w)\prod_\alpha{}' \frac{z - T_\alpha(w)}{z - T_\alpha(z)} \frac{w - T_\alpha(z)}{w - T_\alpha(w)} \tag{A.15}$$

$\prod'_\alpha$ は T_α, T_α^{-1} のうち片方だけについての積をあらわす。[*3]なおかつ単位元は入れない。

(A.15) は a_μ サイクルを一周しても値を変えないことはすぐにわかる。また b_μ サイクルを一周したときは次のようになる。

$$E(S_\mu(z),w) = -\exp\left[-2\pi i(\frac{1}{2}\tau_{\mu\mu} + \int_z^w \omega_\mu)\right] E(z,w) \tag{A.16}$$

最後に $\Delta_\mu^{z_0}$ と $\sigma(z)$ の表式は次のようになる。

$$\Delta_\mu^{z_0} = \frac{1}{2\pi i}\left[-\frac{1}{2}\log K_\mu - \pi i + \sum_{\nu=1}^{g}\sum_{\alpha}^{(\mu,\nu)'} \log \frac{\xi_\nu - T_\alpha(\eta_\mu)}{\eta_\nu - T_\alpha(\eta_\mu)} \frac{z_0 - T_\alpha(\xi_\mu)}{z_0 - T_\alpha(\eta_\mu)}\right] \tag{A.17}$$

$g > 1$ のとき

$$\log\sigma(z) = \frac{1}{2(g-1)}\left[+\sum_{\mu,\nu=1}^{g}\sum_{\alpha\neq I}^{(\mu,\nu)} \log \frac{\xi_\mu - T_\alpha(\xi_\nu)}{z - T_\alpha(\xi_\nu)} \frac{z - T_\alpha(z)}{\xi_\mu - T_\alpha(a)} + \sum_{\mu\neq\nu} \log \frac{\xi_\mu - \xi_\nu}{(z-\xi_\nu)(\xi_\mu - z)}\right] \tag{A.18}$$

$g = 1$ のとき

$$\log\sigma(z) = -\frac{1}{2}\log[(z-\xi)(\xi - z)] \tag{A.19}$$

[*3] $T_\alpha \to T_\alpha^{-1}$ としても元と同じものになる。

付録 B

$C^1_{\mu\nu}, C^2_{\mu}, C^3, N$ の計算

ここでは (3.74) の中の係数 $C^1_{\mu\nu}, C^2_{\mu}, C^3$ 及び N の計算を行う。結果は (3.75) に挙げた通りで、(3.75) の表式を得るまでの過程をこの章で説明する。

B.1　$C^1_{\mu\nu}$

まず $C^1_{\mu\nu}$ の計算をとりあげる。この係数は (3.59) の指数部分の r_μ について二次の項の係数である。(3.72),(3.73),(3.68) を用いて r_μ の二次の項を書き出した後、D 行列の結合則 (3.40) を使ってできるだけ U と V の積があるところを S_μ, S_μ^{-1} で書くようにすると次式を

得る。

$$
\begin{aligned}
C^1_{\mu\nu} &= (D_{00}(S_\mu) + D_{00}(S_\mu^{-1}))\delta_{\mu\nu} \\
&+ (D_{0n}(S_\mu) - D_{0n}(S_\mu^{-1}))\left[\sum_{l=1}^{\infty} D_{nm}(\Sigma^{l-1})\right](D_{m0}(S_\nu) - D_{m0}(S_\nu^{-1})) \\
&- (D_{0n}(\tilde{U}_{2\mu-1}) - D_{0n}(U_{2\mu})) \\
&\times \left[-\delta_{nm} + D_{nm}(\Sigma) + \sum_{l=1}^{\infty}[D_{nm}(\Sigma^{l+1}) - 2D_{nm}(\Sigma^l) + D_{nm}(\Sigma^{l-1})]\right] \\
&\times (D_{m0}(\tilde{V}_{2\nu-1}) - D_{m0}(V_{2\mu})) \\
&- (D_{0n}(\tilde{U}_{2\mu-1}) - D_{0n}(U_{2\mu})) \\
&\times \left[-\delta_{nm} + \sum_{l=1}^{\infty}[D_{nm}(\Sigma^l) - D_{nm}(\Sigma^{l-1})]\right] \\
&\times (D_{m0}(S_\nu) - D_{m0}(S_\nu^{-1})) \\
&+ (D_{0n}(S_\mu) - D_{0n}(S_\mu^{-1})) \\
&\times \left[-\delta_{nm} + \sum_{l=1}^{\infty}[D_{nm}(\Sigma^l) - D_{nm}(\Sigma^{l-1})]\right] \\
&\times (D_{m0}(\tilde{V}_{2\nu-1}) - D_{m0}(V_{2\mu}))
\end{aligned} \tag{B.1}
$$

(B.1) では n, m についての 1 から ∞ の和をとるものとする。(3.70) にあった和の制限は当然残っているのだが、ここではその表記は省略し後にあらわに書くことにする。また l についての和は次のように理解する。

$$
\sum_{l=1}^{\infty} \equiv \lim_{N\to\infty} \sum_{l=1}^{N} \tag{B.2}
$$

(B.2) を考えると、(B.1) のうち U, V をあらわに含んでいる項は消えてしまい、S, S^{-1} のコンビネーションで書かれた項のみが残ることがわかる。(3.70) にあった和の制限を復活させて書くと、

$$
\begin{aligned}
C^1_{\mu\nu} &= (D_{00}(S_\mu) + D_{00}(S_\mu^{-1}))\delta_{\mu\nu} \\
&+ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\alpha; n_\alpha = l}^{(\pm\mu, \pm\nu)} [(D_{0n}(S_\mu) - D_{0n}(S_\mu^{-1}))D_{nm}(T_\alpha)(D_{m0}(S_\nu) - D_{m0}(S_\nu^{-1}))]
\end{aligned} \tag{B.3}
$$

ここで $\sum_{\alpha; n_\alpha = l}^{(\pm\mu, \pm\nu)}$ の意味は、「合成則 (3.40) を使って両端の $D(S)$ と $D(T_\alpha)$ をまとめたときに、できた元 $S_\mu^{\pm 1} T_\alpha S_\nu^{\pm 1}$ の次数が減らないような T_α について和をとる。」という意味であ

る。たとえば (B.3) のなかの

$$D_{0n}(S_\mu)D_{nm}(T_\alpha)D_{m0}(S_\nu^{-1}) \tag{B.4}$$

という項を考える。この項の T_α についての和には、$T_\alpha = S_\mu^{-1}\cdots S_\nu$ の形をしたものは含まない。

(B.2) をつかってさらに (B.3) を書き換える。いま (B.4) の項を例に取って考える。(B.4) のなかの T_α は一番左に S_μ, 一番右に S_ν^{-1} を含まない order 1 のショットキー群の元である。このような元を $T_\alpha^{(-\mu,+\nu)(l)}$ とかくと、次のように書き換えられる。

$$T_\alpha^{(-\mu,+\nu)(l)} = \sum_{(n,m);n+m\le l;n,m\ge 0} (S_\mu)^n T_\alpha^{(\pm\mu,\pm\nu)(l-n-m)}(S_\nu^{-1})^m \tag{B.5}$$

ここで $T_\alpha^{(\pm\mu,\pm\nu)(l-n-m)}$ は左端に S_μ, S_μ^{-1}, 右端に S_ν, S_ν^{-1} を含まない order $(l-n-m)$ の元である。(3.40),(B.5),(B.2) を用いて (B.3) を計算すると、S の一番高いべきの項だけが残ることがわかる。すなわち次式を得る。

$$\begin{aligned} C^1_{\mu\nu} = \lim_{N\to\infty}\sum_\alpha^{(\mu,\nu)'} &(D_{0n}(S_\mu^N) - D_{0n}(S_\mu^{-N}))D_{nm}(T_\alpha)(D_{m0}(S_\nu^N) - D_{m0}(S_\nu^{-N})) \\ &+ [(D_{00}(S_\nu^N) - D_{00}(S_\nu^{-N})) - (D_{00}(S_\nu^{N-1}) - D_{00}(S_\nu^{-N-1}))]\delta_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{B.6}$$

ここで T_α に関する和は、左端に $S_\mu^{\pm n}$、右端に $S_\nu^{\pm m}$ を含まないショットキー群の元についてとる。

次に $D_{nm}(S)$ の表示 (3.39) と不動点 η_μ, ξ_μ、乗数 k_μ を用いて、

$$\begin{aligned} &\lim_{N\to\infty} D_{0n}(S_\mu^N) = \frac{1}{\sqrt{n}}(\frac{1}{\xi_\mu})^n,\ \lim_{N\to\infty} D_{0n}(S_\mu^{-N}) = \frac{1}{\sqrt{n}}(\frac{1}{\eta_\mu})^n, \\ &\lim_{N\to\infty} D_{m0}(S_\nu^N) = \frac{1}{\sqrt{m}}(\eta_\mu)^m,\ \lim_{N\to\infty} D_{m0}(S_\nu^{-N}) = \frac{1}{\sqrt{m}}(\xi_\mu)^m, \end{aligned} \tag{B.7}$$

$$\lim_{N\to\infty}(D_{00}(S_\nu^{N-1}) - D_{00}(S_\nu^{-N-1})) = -\frac{1}{2}\log k_\mu \tag{B.8}$$

を得る。

(B.7) と (B.8) を (B.6) に代入すると最終的な表式を得る。

$$\begin{aligned} C^1_{\mu\nu} &= -\sum_\alpha^{(\mu,\nu)'} \log\frac{\eta_\mu - T_\alpha(\xi_\mu)}{\eta_\mu - T_\alpha(\eta_\nu)}\frac{\xi_\mu - T_\alpha(\eta_\nu)}{\xi_\mu - T_\alpha(\xi_\nu)} \\ &= 2\pi i\tau_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{B.9}$$

$C^1_{\mu\nu}$ は係数を除いて周期行列 $\tau_{\mu\nu}$*1になることがわかった。

B.2 C^2_μ

C^2_μ の計算も B.1 章と同様のステップで行える。計算途中の要点だけを抜き出してかくと次のようになる。

$$\begin{aligned}
C^2_\mu =& -\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{\alpha;n_\alpha=l}\sum_{n,k=1}^{\infty}[(D_{0n}(S_\mu)-D_{0n}(S_\mu^{-1}))D_{nk}(T_\alpha)] \\
&\times\left[-\sum_{i=1}^{N}\sum_{m=0}^{\infty}D_{km}(V_i)a^i_m - Q\sum_{\nu=1}^{g}D_{k0}(S_\nu^{-1})\right]+QD_{00}(S_\mu^{-1}) \\
=& -\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha}^{\mu}\sum_{n,k=1}^{\infty}(D_{0n}(S_\mu^N)-D_{0n}(S_\mu^{-N}))D_{nk}(T_\alpha)D_{km}(V_i)a^i_m \\
&- -\lim_{N\to\infty}Q\left[\sum_{\nu=1}^{g}\sum_{\alpha}^{\mu,\mu}\sum_{n,k=1}^{\infty}(D_{0n}(S_\mu^N)-D_{0n}(S_\mu^{-N}))D_{nk}(T_\alpha)D_{k0}(S_\nu^{-N})\right] \\
&+ -\lim_{N\to\infty}Q[D_{00}(S_\mu^{-N-1})-D_{00}(S_\mu^{-N}) \\
=& \sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha}^{\mu}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha^i_m}{m!}\partial_z^m\left(\log\frac{\xi_\mu-T_\alpha(V_i(z))}{\eta_\mu-T_\alpha(V_i(z))}\frac{\eta_\mu-T_\alpha(z_0)}{\xi_\mu-T_\alpha(z_0)}\right)|_{z=0} \\
&+Q[\sum_{\nu}^{(\mu)}\sum_{\alpha}^{\prime(\mu)}\log\frac{\xi_\mu-T_\alpha(\xi_\mu)}{\eta_\mu-T_\alpha(\eta_\mu)}\frac{\eta_\mu-T_\alpha(z_0)}{\xi_\mu-T_\alpha(z_0)}]
\end{aligned} \tag{B.10}$$

(B.10) は付録 A の内容より (3.75) になることがわかる。

B.3 C^3

C^3 の場合も B.2 と同様に書くと、

*1 （付録 A 参照）

$$C^3 = -\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{\alpha;n_\alpha=l}\sum_{i,j=1}^{N}\sum_{n,m=0}^{\infty}\sum_{k,h=0}^{\infty} a_n^i D_{nk}(U_i)D_{kh}(T_\alpha)D_{hm}(V_j)a_m^j \tag{B.11}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{m=0}^{\infty}[(a_0^i - Q)D_{0m}(V_i)a_m^i + a_m^i D_{0m}(U_i)(a_0^i - Q)]$$

$$-\frac{1}{2}Q\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{\alpha;n_\alpha=l}\sum_{i=1}^{N}\sum_{n,k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}[D_{0n}(S_\nu)D_{nk}(T_\alpha)D_{km}(V_i)a_m^i$$

$$+ a_m^i D_{mk}(V_i)D_{kn}(T_\alpha)D_{n0}(S_\nu^{-1})]$$

$$-\frac{1}{2}Q^2\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{\alpha;n_\alpha=l}\sum_{\mu,\nu=1}^{g}\sum_{n,m=1}^{\infty}[D_{0n}(S_\mu)D_{nk}(T_\alpha)D_{km}(S_\nu^{-1})]$$

となる。後は (B.10) と同様に $D_{nm}(S)$ が現れている部分を $\lim_{N\to\infty} D_{nm}(S^N)$ の形に変えて変形していけばよい。その結果 C^3 は (3.75) の形になることがわかる。

B.4 $\mathcal{N}$

ここでは g-loop vertex (3.77) に現れる行列式 $\mathcal{N} = (\det(1-H))^{-1/2}$ の計算を行う。まず次のようなものを考える。

$$-\log\det(1-H) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}Tr[H^n] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{\alpha:n_\alpha=n} D_{mm}(T_\alpha) \tag{B.12}$$

ショットキー群の任意の元 T_α は一般に $T_\alpha = U_\alpha D_\alpha U_\alpha^{-1}$ の形に対角化できる。D_α は

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} k_\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{B.13}$$

K_α は T_α の乗数で、0 から 1 までの値をとる。$D_{mm}(T_\alpha)$ において $m > 0$ なので、行列 D はショットキー群に対する準同型になっている。従ってトレースをとるときには U_α, U_α^{-1} は効かず、

$$\sum_{m=1}^{\infty} D_{mm}(T_\alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} D_{mm}(D_\alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} k_\alpha^m = \frac{k_\alpha}{1-k_\alpha} \tag{B.14}$$

となる。ここで、ショットキー群の各オーダーで同じ k_α をもつ元の集合を order n の conjugacy class と呼ぶことにすると、(B.12) は次のように書き換えられる。

$$-\log\det(1-H) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{\alpha;n_\alpha=n}\frac{k_\alpha}{1-k_\alpha}r_\alpha \tag{B.15}$$

ここで α の和は conjugacy class についてとり、r_α はその class に属する元の数である。

condjugacy class の元の中で、他の conjugacy class の元のべきで書けない元の集合を primary class と呼ぶ。T_α^p が primary class の元なら、$(T_\alpha^p)^m$ は primary class にはいらず、別の conjugacy class の元である。これらから次のような関係が示せる。

$$k_{(T_\alpha^p)^m} = k_{T_\alpha^p}^{|m|}, \qquad n_{(T_\alpha^p)^m} = |m| n_{T_\alpha^p}, \qquad r_{(T_\alpha^p)^m} = r_{T_\alpha^p} =, n_{T_\alpha^p} \tag{B.16}$$

(B.16) を (B.15) に代入すると

$$-\log\det(1-H) = \sum_\alpha{}' \sum_{m\neq 0} \frac{k_{(T_\alpha^p)^m}}{1-k_{(T_\alpha^p)^m}} \frac{r_{(T_\alpha^p)^m}}{n_{(T_\alpha^p)^m}} \tag{B.17}$$

を得る。和 $\sum'$ は primary class についての和を表す。最後に (B.16),(B.17) から次式をえる。

$$\det(1-H) = \prod_\alpha{}' \prod_{n=1}^{\infty} (1-k_\alpha^n)^2 \tag{B.18}$$

ここで $\prod_\alpha{}'$ は primary class の中で T_α とその逆元のうちの片方だけを選び、単位元は入れないような積を意味する。

以上から $\mathcal{N}$ の表式は

$$\mathcal{N} = \prod_\alpha{}' \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-k_\alpha^n)} \tag{B.19}$$

となる。

付録 C

Canonical form

(3.47) でループを作る際に使われる「プロパゲーター」$P(x_\mu)$ は (3.56) のように、座標変換を起こすだけであることを示す。

そのためには canonical form という手法を用いる。まず canonical form O とは次のような形をしたフォック空間上の演算子である。

$$O \equiv \exp(-a^\dagger, A) : \exp(-a^\dagger, (C-1)a) : \exp(-B, a) \exp(-\phi) \tag{C.1}$$

ここで ϕ は振動子 $a, a^\dagger$ によらない因子であり、他のものは

$$(a^\dagger, A) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^\dagger A_n, \qquad (B, a) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n a_n,$$

$$(a^\dagger, (C-1)a) = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_n^\dagger (C_{nm} - \delta_{nm}) a_m \tag{C.2}$$

と定義する。

canonical form (C.1) の積はまた canonical form になる。

$$O_1 O_2 = O_3 \tag{C.3}$$

ただし係数の関係は

$$\begin{gathered} A_3 = A_1 + C_1 A_2, \quad B_3 = B_2 + B_1 C_2 \\ C_3 = C_1 C_2 \phi_3 = \phi_1 + \phi_2 + B_1 A_2 \end{gathered} \tag{C.4}$$

となる。

vertex に現れる量は canonical form で書ける。たとえば (3.46) は

$$P(x^{\mu}) =: \exp\left[-\sum_{n,m=0}^{\infty} a_n^{\dagger 2\mu-1} D_{nm}(P(x^{\mu}))a_m^{2\mu-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\dagger 2\mu-1} a_n^{2\mu-1}\right]: \tag{C.5}$$

次のような係数を持つ canonical form である。

$$\begin{aligned} C_{nm} &= D_{nm}(P(x_{\mu})),\ \phi = a_0^{\dagger} D_{00}(P(x_{\mu})), \\ A_n &= D_{n0}(P(x_{\mu}))a_0, B_n = a_0^{\dagger} D_{0n}(P(x_{\mu})), \end{aligned} \tag{C.6}$$

さらに、(3.37) の $V_{N;0}$ において一つの足 $2\mu-1$ に注目すると、$a^{2\mu-1}$ についての canonical form になっていることがわかる。

$$V_{N;0} = V^{*} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{k=1,k\neq 2\mu-1}^{N} \sum_{m=0}^{\infty} a_n^k [D_{nm}(U_k V_{2\mu-1}) + D_{mn}(U_{2\mu-1} V_k)] a_m^{2\mu-1}\right] \tag{C.7}$$

ここで (C.7) を公式 (C.1) に当てはめたときの係数は次の通りである。

$$\begin{aligned} B_m &= \frac{1}{2} a_n^k [D_{nm}(U_k V_{2\mu-1}) + D_{mn}(U_{2\mu-1} V_k)] \\ \phi &= \frac{1}{2} a_n^k [D_{n0}(U_k V_{2\mu-1}) + D_{0n}(U_{2\mu-1} V_k)] a_0^{2\mu-1} \end{aligned} \tag{C.8}$$

C, A はゼロである。(C.5) と (C.7) を書けると再び canonical form になる。$P(x_{\mu})$ の係数を $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{\phi}$、$V_{N;0}$ の係数を B, ϕ と書くと、

$$\begin{aligned} V_{N;0} P(x_{\mu}) = V^{*} \exp(-a^{\dagger 2\mu}, \tilde{A}) : \exp(-a^{\dagger 2\mu-1}, (\tilde{C}-1)a^{2\mu-1}) : \\ \times \exp(-(\tilde{B} + B\tilde{C}, a^{2\mu-1}) \exp(-(\tilde{\phi} + \phi + (B, \tilde{A}))) \end{aligned} \tag{C.9}$$

(C.9) の 1 行目の前 2 つの exp 因子は、vertex に含まれるブラ演算子 $<n_{2\mu-1}, O_a|$ のため効かない。(C.8),(C.6) を使って (C.9) を計算すると次式を得る。

$$V_{N;0} P(x_{\mu}) = V^{*} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{k=1,k\neq 2\mu-1}^{N} \sum_{m=0}^{\infty} a_n^k [D_{nm}(U_k \tilde{V}_{2\mu-1}) + D_{mn}(\tilde{U}_{2\mu-1} V_k)] a_m^{2\mu-1}\right] \tag{C.10}$$

ここで $\tilde{V}_{2\mu-1} = V_{2\mu-1} P(x_{\mu}), \tilde{U}_{2\mu-1} = \Gamma P(x_{\mu})^{-1} \Gamma U_{2\mu-1}$ である。(C.10) は望み通り (C.7) で座標の置き換え $U_{2\mu-1} \to \tilde{U}_{2\mu-1}, V_{2\mu-1} \to \tilde{V}_{2\mu-1}$ をしたものになっている。

参考文献

[1] A.A.Belavin,A.M.Polyakov and A.B.Zamolodchikov,*Nucl.phys.* **B241** (1984) 333

[2] M.B.Green,J.H.Schwarz and E.Witten, “Superstring Theory”,Cambridge University Press (1987)

[3] D.Freidan,E.Martinec and S.Shenker,*Nucl.phys.***B271** (1986) 93

[4] Michio Kaku,“超弦理論”, シュプリンガー・フェアラーク東京 (1989)

[5] 九後　汰一郎,“ゲージ場の量子論　I ”, 培風館 (1989)

[6] P.D.Vecchia,F.Pezzella,M.Frau,K,Hornfeck,A.Lerda and S.Sciuto,*Nucl.phys.* **B322** (1989) 317

[7] S.Sciuto,*Nuovo Cimento Lett.* **2** (1969) 411

[8] A.Della Selva and S.saito,*Nuovo Cimento Lett.* **4** (1970) 689

[9] Michio Kaku and K.Kikkawa,*Phys.Rev.* **D10** (1974) 1111;**D10** (1974) 1823

[10] E.Witten,*Nucl.phys.* **B268** (1986) 253

[11] H.Hata,K.Itoh,T.Kugo,H.Kunitomo and K.Ogawa ,*Phys.Rev.* **D34** (1986) 34

[12] P.D.Vecchia,L.Magnea,A.Leada,R.Russo and R.Marotta ,hep-th/9602055,9601143

[13] Z.Bern and D.A.Kosower,*Nucl.phys.* **B379** (1992) 451

[14] M.Kato and K.Ogawa,*Nucl.phys.* **B212** (1983) 443

[15] S.Mandelatam,*Phys.Rev.* **D11** (1975) 3026

[16] P.D.Vecchia,”Multiloop amplitudes in string theory" in “String quantum gravity and physics at the planck energy scale” ,World Scientific (1993) **D11** (1975) 3026

[17] E.D’Hoker and D.H.Phong,*Rev.Mod.Phys.* **60** (1975) 4

[18] C.Lovelace,*Phys.Lett.* **B32** (1975) 703