

CKM 行列フラッシュプログラムによる CP 対称性の破れ入門

石川 健一 林 雅子 両角 卓也

広島大学大学院理学研究科 東広島市鏡山 1-3-1, 739-8526

平成 21 年 1 月 20 日

概要

本稿では石川健一と林雅子が開発した CKM 行列フラッシュプログラムの意味を小林・益川の原論文 [1] にそった形で紹介する。CKM 行列フラッシュプログラムはなぜ 3 世代のクォークが CP の破れに必要なかを実感させるのによい教材である。このプログラムの簡単な説明、プログラムの動作と CP の破れの関係を議論する。他に 2 世代でも CP の破れが起きるマヨラナニュートリノの場合にどのようにプログラムを使うかも説明する。本プログラムは広島大学素粒子論研究室のホームページ [http://theo.phys.sci.hiroshima-u.ac.jp/~soken/Flash_CKMmatrix/CKMmatrix.html] において公開されている。

1 はじめに：石川－林プログラムを使って高校生と遊ぶ

2008 年 11 月 24 日に広島大学千田町キャンパスで高校生フェスタという催しがあった。「南部、小林・益川の描いた素粒子と宇宙」という講演¹ のあと、小教室においた 3 台のノートパソコン上で高校生グループが CKM フラッシュプログラムを使って遊んだ。15 分ほどであったが CP 対称性の破れが 2 世代模型では起きないこと、3 世代以上では起きることを実感した。

プログラムではカビボ・小林・益川 (CKM) 行列要素の偏角 (複素位相) の方向を時計の針の方向に対応させた。(図 1) クォーク 4 つの 2 世代模型だと $4 = 2 \times 2$ 個の行列要素に対応して 4 つの時計が描かれており (図 4) 正午の向きが実軸に対応している。CP 対称性の破れは、CKM 行列要素の複素位相に関係している。小林・益川の論文 [1] においては、CP の破れが実際に起きるかどうかが示す上で、複素位相をクォーク場の位相変換の自由度を使って消すことができるかが重要な点であった。彼らは 4 種類のクォーク (カルテット) を含む 2 世代 4 元模型では位相を消し去ることができ、従って CP の破れが起きないことを示し、6 種類のクォークを含む 3 世代 6 元模型ではどうしても消し去れない位相 (小林・益川位相) が残ることを明らかにした。これによって 6 種以上のクォークの存在を予言した。

石川と林が開発したフラッシュプログラムでは、複素位相を消し去ることができるかどうかを時計の針を正午方向にそろえることができるかどうかということになぞらえた。これによって、遊びながら小林・益川の論文の物理的内容を眼に見える形で体験できる。

画面 (図 1, 2 を参照) に向かって青色のダイヤルを回すと時計の針が連動して回る様になっている。4 つの時計の場合は、ダイヤルの操作ですべての時計の針を正午方向にそろえることがで

¹ 稲垣 知宏氏による。

きる。これは4元クォーク模型では、複素位相を消し去ることができ、CPの破れが起きないことを意味する。6種類のクォークに対応して、9つの時計は、ダイヤルをいくらひねっても正午方向にそろえることができない。すなわちクォークの位相変換の自由度をどの様に使っても消し去ることができない複素位相 (CPの破れ) があることを意味する。

高校生フェスタではフラッシュプログラムで遊んだあと、ベータ崩壊やCKM行列の話を中心に紹介したが、プログラムの物理的な背景は十分理解してもらえなかった様だ。その一方で、このプログラムによりCP対称性の破れに対する興味は湧いたと思う。

本稿の目的はCKMフラッシュプログラムの紹介をし、このプログラムを通じて専門家以外にも小林・益川の原論文の内容やCP対称性の破れの物理のおもしろさを理解してもらうことにある。第2節ではCKMフラッシュプログラムの各部の名称と動かし方、動作環境について説明する。第3節では、特に2世代模型でのCKM行列の位相の自由度についてCKMフラッシュプログラムの時計の針の動きと関連させて、理系大学生レベルの数学の知識で詳しく説明した。第4節では3世代模型では時計の針を正午に合わせることができないことを、原論文 [1] のCKM行列のパラメトリゼーションを例に紹介する。CKMフラッシュプログラムのみでは最後まで消せずに残った位相の間に関係があることはわからないが、具体的なCKM行列のパラメトリゼーションを与えることでこれを理解する。第5節では、CKMフラッシュプログラムの作成に関して、作成環境、数値計算部分、および、Flash化の考え方について概略を述べる。

2 CKMフラッシュプログラムの動作環境、各部の名称および動かし方



図 1: 初期画面.



図 2: 行列の大きさを3にした場合.

本プログラムは、CP対称性の有無と小林・益川模型の世代数の関係をわかりやすく説明するために作成されたフラッシュ(Flash)アプリケーションである。フラッシュ(Flash)とはAdobe社が提供している、Webコンテンツを作成するソフトまたは、コンテンツのことである。これを利用することで、Web上にアニメーションやキーボードマウスによるインタラクティブなコンテンツを提供することができる。

Flashによって作成されたコンテンツを閲覧するためには、Webブラウザに専用のプラグイン「Flash Player」を導入する必要がある [2]. 「Flash Player」はAdobe社より無料で提供されており、Flashコンテンツの閲覧は一般的に広く可能になってきている。このことから、Webページの作成にはFlashを利用したものが広く見られるようになってきている。

今回は, CKM 行列と世代と CP の破れの関係をわかりやすく説明するためのコンテンツとして, Flash を利用したプログラムを作成した. 本プログラムの閲覧には上記の様に Flash Player が必要である. できるだけ最新版の Flash Player を利用することを勧める.

上記動作環境を導入した上で PC の Web ブラウザで [http://theo.phys.sci.hiroshima-u.ac.jp/~soken/Flash_CKMmatrix/CKMmatrix.html] へアクセスする. アクセスすると図 1 の様な画面が現れる. 初期画面では矢印が 4 つ, 青いダイヤルが 4 つ現れる. 「Reset」と書かれている所をマウスでクリックすると, 矢印の向きが変化する (リセット動作). リセット動作の度に矢印の向きはランダムに変化する. 「行列の大きさ」と書かれている所の下タブをクリックするとプルダウンメニューが現れる. そこで 3 を選択すると図 2 の様な画面に変化する. 青いダイヤルは縦に 3 つ, 横に 3 つ, 矢印は 9 つ現れる. 以下では矢印のことを時計, 時計の針, または単に針と呼ぶことにする. マウスでダイヤルをクリックしながらドラッグするとダイヤルを回すことができる. ダイヤルに連動して針が回転する.

行列の大きさとは, すなわち小林・益川模型の世代数に対応するものである. 時計の針は, CKM 行列の成分の位相角度を表現しているものである. ダイヤルは各世代のアップ型クォーク (縦のダイヤル) とダウン型クォーク (横のダイヤル) の持つ位相の自由度を表している.

高校生フェスタにおいては, まず高校生に各部の動かし方を説明し, 世代数を変えたりして遊んでもらった. しばらくすると, コツを覚えて, 針を正午に合わせるにはどう動かせばよいかわかり始め, 3 世代以上では時計の針を全て正午に合わせるためにはダイヤルの自由度が足りないことに気が付いてくる. しかし理由は定かでないが, 2 世代では正午に針を合わせることができる. よく考えると, 時計の針が最初から完全にランダムであればたとえ 2 世代でも, 針を全て正午に合わせるには自由度が足りないことに気がつく. この点に関して, 高校生には少し考えてもらった.

次節では, 2 世代の場合になぜ正午に合わせることができるのかを理系大学生レベルの数学の知識で説明することを試みたので紹介する.

3 位相の自由度と 2 世代模型

本節ではクォークが 4 種類 (u, d, c, s) ある 2 世代模型のときのプログラムの動作と CKM 行列要素との対応を説明する. まず, 時計の針が正午にそろっていく様子をその操作とともに確認しておく.



図 3-a: 2 世代 4 元クォーク模型のときの初期画面

- ダイヤルは 4 箇所ある. 縦に並んでいる 2 つのダイヤルについて, 上のダイヤルを u ダイヤル, 下を c ダイヤルと呼ぶ. 横に並んでいる 2 つのダイヤルのうち左側を d ダイヤル, 右側を s ダイヤルと呼ぼう. (図 4 も参照)
- まずはじめに, 「Reset」の文字の下にある「行列の大きさ」で「2」を選び時計をリセットをすると 4 つの時計が一見ばらばらな方向を向いて現れる.



図 3-b: u ダイヤルを回して1行1列の針を正午に合わせた所.

- 左上の u ダイヤルを回すと, ダイヤルと水平方向にある時計が一斉にダイヤルの回す向きと同じ向きに回る. これですべて1行1列にある時計を正午にあわせよう. 針がぴたり正午にあうと橙色から白色に変わる.



図 3-c: c ダイヤルを回して2行1列の針を正午に合わせた所.

- 次に左下の c ダイヤルを回して2行1列にある時計も正午にそろえることができる. この段階で1列目にある2つの時計は正午にそろえることができている. 2列目はどうだろう. 2列目の時計は同じ方向を向いていることに注目してほしい.



図 3-d: s ダイヤルを回して全ての針を正午に合わせた所.

- 最後に, 右下の s ダイヤルを回すことで2列目も正午にそろえることができた. CP 対称性が回復しました!

3.1 2世代4種類のクォークでは3回の操作でそろえることができる. 規則性?

リセットボタンを押すと一見ばらばらな方向を向いている時計が現れるが, あとで示す様にある規則性をもっている. 実際, 4つのクォークの場合だと上で示した様に3回の操作でそろえ

ることができる。これをはっきりさせるために、図4には典型的な場合の針の向きを描いた。左上の時計は10時を示している。右上は3時、左下は8時、右下は1時である。よく見ると上の行の2つの時計は、左の時計が7時間進んでいる。下の行の2つの時計も左の時計が7時間進んでいる。このおかげで3回の操作で正午にそろえることができたのである。4つの時計の時刻の間には、

$$\begin{aligned} [\text{右下の時計の時刻}] &= [\text{左下の時計の時刻}] + [\text{右上の時計の時刻}] - [\text{左上の時計の時刻}], \\ 1 \text{時} &= 8 \text{時} + 3 \text{時} - 10 \text{時}. \end{aligned} \quad (1)$$

という関係があることがわかる。図3-cのところの説明した様に1列目の2つの時計を正午にあわせると、2列目の2つの時計は正午とは限らないがある同じ方向を指している。この様に4つの時計の針の指している時刻はでたらめではなく、隠れた規則性を持っている。これは次節で説明するCKM行列のユニタリー性という性質と関係している。

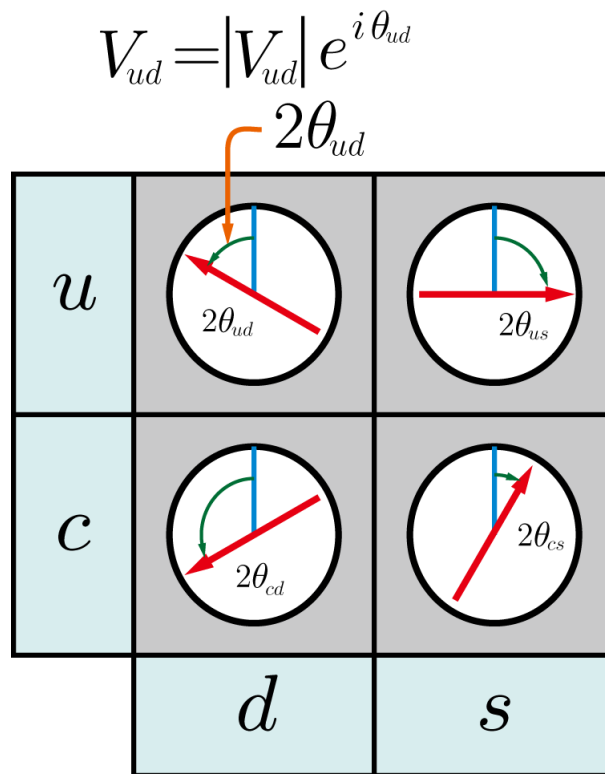


図4: 一見ばらばらにリセットされた4つの時計。時計の針は、正午を基準にして、カビボ・小林・益川 (CKM) 行列要素 V_{ij} の偏角 (複素位相) の2倍の方向を指している。 $2\theta_{ij} = 2 \arg V_{ij}$.

3.2 弱い相互作用とCKM行列

この小節では弱い相互作用とCKM行列を説明する。CKM行列は、弱い相互作用のうち電荷 $Q_u = 2/3$ のアップ型クォークと $Q_d = -1/3$ のダウン型クォークを結びつける荷電カレントと呼ばれる相互作用に関係している。クォークがダウンクォーク (d) からアップクォーク (u) へ転化するときには $Q = -1$ の弱ゲージボソン W^- を伴った以下の相互作用が関与している。

$$d \rightarrow u + W^-. \quad (2)$$

対応する反粒子に対しては, 反ダウンクォーク (\bar{d}) から反アップクォーク (\bar{u}) への転化が起こり,

$$\bar{d} \rightarrow \bar{u} + W^+, \quad (3)$$

の相互作用が関与する. これらの過程に対する確率振幅は, それぞれ, V_{ud} とその複素共役 V_{ud}^* に比例する. CP 対称性の破れは V_{ud} の虚部, すなわち $\text{Im}V_{ud}$ に関係している. ダウン型, アップ型それぞれ 2 種類のクォーク (u, c), (d, s) がある 4 元クォーク模型の場合は, 図 5 の様に弱い相互作用の可能な道筋は $2 \times 2 = 4$ 通りある. それぞれの矢印に対応して 4 つの量子力学的な確率振幅が割り当てられている.

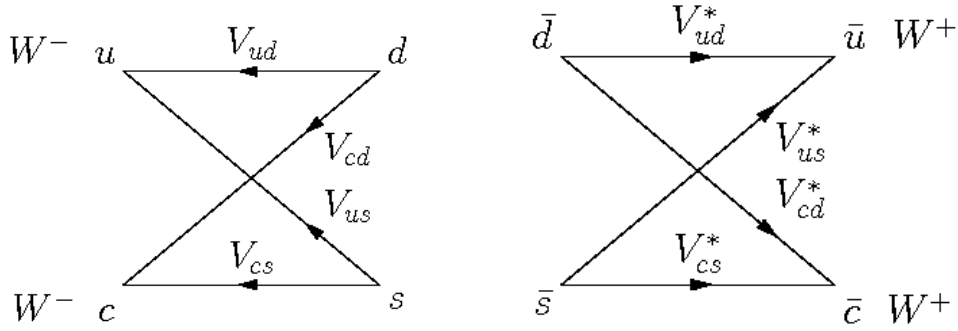


図 5: 左:ダウン型クォーク (j) からアップ型クォーク (i) への遷移振幅が CKM 行列 V_{ij} に比例している. 右:反ダウン型クォーク (j) から反アップ型クォーク (i) への遷移振幅が CKM 行列 V_{ij}^* に比例している.

2 種類ずつのアップ型とダウン型クォークを含む, 4 元クォーク模型の場合の荷電カレント相互作用は,

$$\mathcal{L} = (\bar{u}_L, \bar{c}_L) \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} \\ V_{cd} & V_{cs} \end{pmatrix} \gamma_\mu \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \end{pmatrix} W^{+\mu} + (\bar{d}_L, \bar{s}_L) \begin{pmatrix} V_{ud}^* & V_{cd}^* \\ V_{us}^* & V_{cs}^* \end{pmatrix} \gamma_\mu \begin{pmatrix} u_L \\ c_L \end{pmatrix} W^{-\mu}, \quad (4)$$

の様に表される.

4 つの確率振幅は d から u への遷移に対して V_{ud} という風に矢印の起点のダウン型クォークを列に配置し矢印が入っていく遷移先のアップ型クォークを行に配置した 2×2 の行列で表される. d から u への荷電カレントや W ボゾンの CP 変換は

$$\bar{u}_L \gamma_\mu d_L \rightarrow \bar{d}_L \gamma_\mu u_L, \quad W^{+\mu} \rightarrow W_\mu^- \quad (5)$$

となり, \mathcal{L} で与えられる相互作用を CP 変換すると,

$$\mathcal{L}^{CP} = (\bar{d}_L, \bar{s}_L) \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{cd} \\ V_{us} & V_{cs} \end{pmatrix} \gamma_\mu \begin{pmatrix} u_L \\ c_L \end{pmatrix} W^{-\mu} + (\bar{u}_L, \bar{c}_L) \begin{pmatrix} V_{ud}^* & V_{us}^* \\ V_{cd}^* & V_{cs}^* \end{pmatrix} \gamma_\mu \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \end{pmatrix} W^{+\mu}, \quad (6)$$

となる.

「物理法則が CP 変換に対して対称である (または不変である)」ということは, $\mathcal{L}^{CP} = \mathcal{L}$ であることを意味する. このためには CKM 行列要素 V_{ij} が実数であることが必要だ. 逆に CKM

行列要素が複素数ならば CP 対称性が破れている。しかし実際には, u, d, c, s クォークが持つ位相の自由度のため, CKM 行列要素の持つ位相をクォークが吸収することができる。従って, 見掛け上 CKM 行列要素が複素数になっているからといって, CP 対称性が破れているとは限らない。正しく CP 対称性の有無を判断するにはクォークが持つ位相の自由度を用いて最大限 CKM 行列要素を実数にしてからでないと判断ができない。

CKM 行列要素は複素数であるから, 大きさと複素位相で表現できる。各 CKM 行列要素を表に示したのが表 1 である。CKM 行列フラッシュプログラムの時計はこの CKM 行列要素を表 1 や図 4 の様に対応させて描いてある。時計の針の角度は CKM 行列成分の複素位相の 2 倍に対応しており, 正午の方向が複素位相が 0 と π に (または実軸に) 相当している。ダイヤルによる操作は, クォークが持つ位相の自由度による CKM 行列要素の位相の変化を表現したものである。

上で述べた様に, 「物理法則が CP 変換に対して対称である (または不変である)」ということを示すためには, この CKM 行列要素を全て実数に取れるかどうかを確かめることが必要である。次小節から, 具体的に CKM 行列の性質とクォークが持つ位相の自由度について CKM 行列フラッシュプログラムと対応付けて説明していく。

u	V_{ud}	V_{us}	u	$ V_{ud} e^{i\theta_{ud}}$	$ V_{us} e^{i\theta_{us}}$
c	V_{cd}	V_{cs}	c	$ V_{cd} e^{i\theta_{cd}}$	$ V_{cs} e^{i\theta_{cs}}$
	d	s		d	s

表 1: CKM 行列要素をフラッシュプログラムの時計と同じ位置に配置した図。ダウン型クォーク (d, s) は下のダイヤル, アップ型クォーク (u, c) は左のダイヤルに対応している。

3.3 ユニタリー性

量子力学の遷移確率の保存に対応して, CKM 行列はユニタリー行列であるという特徴を持っている。ユニタリー性のために d クォークや s クォークの u クォークや c クォークへの結合の強さはそれぞれ,

$$\begin{aligned} |V_{ud}|^2 + |V_{cd}|^2 &= 1, \\ |V_{us}|^2 + |V_{cs}|^2 &= 1, \end{aligned} \quad (7)$$

を満たす。これから 4 つの成分は

$$\begin{aligned} V_{ud} &= \cos \theta e^{i\theta_{ud}}, & V_{us} &= \sin \theta' e^{i\theta_{us}}, \\ V_{cd} &= \sin \theta e^{i\theta_{cd}}, & V_{cs} &= \cos \theta' e^{i\theta_{cs}}, \end{aligned} \quad (8)$$

と表すことができる。さらに 1 列目と 2 列目のベクトルを次の様に $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ で定義すると,

$$V \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} \\ V_{cd} & V_{cs} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

直交関係,

$$\mathbf{v}_1^\dagger \cdot \mathbf{v}_2 = 0, \quad (10)$$

を満たす. 条件式 (10) は式 (8) を用いて, 以下の様に見える.

$$\tan \theta' e^{i(\theta_{us}-\theta_{ud})} = -\tan \theta e^{i(\theta_{cs}-\theta_{cd})}. \quad (11)$$

式 (11) から角度 θ と θ' は等しく ($\theta' = \theta$), 4 つの偏角 (位相) に関しては次の関係がある.

$$\theta_{cs} = \theta_{cd} + \pi + \theta_{us} - \theta_{ud}. \quad (12)$$

式 (8) から θ' と θ_{us} を消去すると一般に 2×2 のユニタリー行列は, 1 つの角度と 3 つの独立な位相を用いて次の様になる.

$$V = \begin{pmatrix} \cos \theta e^{i\theta_{ud}} & -\sin \theta e^{i(\theta_{cs}+\theta_{ud}-\theta_{cd})} \\ \sin \theta e^{i\theta_{cd}} & \cos \theta e^{i\theta_{cs}} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

3.4 フラッシュの時計の意味

図 4 に示した様に 4 つの時計は CKM 行列要素の位相の 2 倍を書いている.

$$2\theta_{ij} = 2 \arg(V_{ij}). \quad (14)$$

式 (1) の 4 つ時計の針の関係は CKM 行列要素の位相の関係で表すと,

$$2\theta_{cs} \equiv 2\theta_{cd} + 2\theta_{us} - 2\theta_{ud} \pmod{2\pi}, \quad (15)$$

を意味している. これはまさにユニタリー性から導いた関係 (12) の下で成り立つ式である. 以上で示した様に, 時計の針の向きはランダムな方向を向いているのではなく, CKM 行列のユニタリー性から関係があることがわかった.

3.5 ダイアル操作の意味:クォークの位相の自由度.

クォークの質量を $m_q (q = u, d, c, s, \dots)$ とすると, 質量項 $\mathcal{L}_{\text{mass}} = -\sum_q m_q \bar{q}q$ において m_q を実数に保ったままでクォークの位相は次の様に再定義できる.

$$\begin{aligned} u &\rightarrow ue^{-i\theta_u}, & c &\rightarrow ce^{-i\theta_c}, \\ d &\rightarrow de^{+i\theta_d}, & s &\rightarrow se^{+i\theta_s}. \end{aligned} \quad (16)$$

再定義されたクォークの場でみた CKM 行列要素はその大きさは変わらないが, 位相は次の様に変化する.

$$\begin{aligned} V_{ij} &\rightarrow V_{ij} e^{i(\theta_i+\theta_j)}, \\ \theta_{ij} &\rightarrow \theta_{ij} + \theta_i + \theta_j. \end{aligned} \quad (17)$$

ダイアル操作はこの位相の再定義に対応する.

2 世代 4 元クォーク模型の CKM 行列が, クォークの位相の再定義によってどの様になるかを見てみよう.

$$V = \begin{pmatrix} \cos \theta e^{i\theta_{ud}} & -\sin \theta e^{i(\theta_{cs}+\theta_{ud}-\theta_{cd})} \\ \sin \theta e^{i\theta_{cd}} & \cos \theta e^{i\theta_{cs}} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta e^{i(\theta_{ud}+\theta_u+\theta_d)} & -\sin \theta e^{i(\theta_{cs}+\theta_{ud}-\theta_{cd}+\theta_u+\theta_s)} \\ \sin \theta e^{i(\theta_{cd}+\theta_c+\theta_d)} & \cos \theta e^{i(\theta_{cs}+\theta_c+\theta_s)} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

2 世代 4 元クォーク模型の場合に位相の再定義とダイアル操作の対応をまとめると次の様になる.

(操作 U) u クォークの位相の再定義は u ダイアルを回すことに対応する.

(操作 C) c クォークの位相の再定義は c ダイアルを回すことに対応する.

(操作 D) d クォークの位相の再定義は d ダイアルを回すことに対応する.

(操作 S) s クォークの位相の再定義は s ダイアルを回すことに対応する.

ダイアル操作の意味がわかったので, なぜ 2 世代模型では CP 対称性が破れないのかを考えよう.

4 つのダイアル操作があるので, 初めの時計の向きが完全にでたらめでも十分正午の方向にそろえる自由度はありそうに思うかもしれない. しかしそれは正しくない. 実際にこの節の始めに図で説明した操作と対応させると, 上の (操作 U)[図 3-b] と (操作 C) で 1 列目の時計は正午にできる [図 3-c]. (操作 D) は既にそろった 1 列目の時計をずらしてしまうのもう行なうことはできない. 次に (操作 S) これだけで 2 列目の 2 つの時計の針を一発で正午に持っていかなければならない [図 3-d]. もし (操作 C) の後に 2 列目の時計がばらばらな方向を向いていたらこれは不可能である.

3.6 ユニタリーなら OK

ここで式 (13) でできた 2×2 のユニタリー行列なら (操作 U), (操作 C) と (操作 S) の 3 回のダイアル操作で全ての時計を正午にできることを示そう. これは式 (17) を使って, θ_u, θ_c と θ_s をそれぞれつぎの式を満たす様にするに対応する.

$$\begin{aligned}\theta_{ud} + \theta_u &= 0, \\ \theta_{cd} + \theta_c &= 0, \\ \theta_{cs} + \theta_c + \theta_s &= 0.\end{aligned}\tag{19}$$

θ_u は (操作 U), θ_c は (操作 C), θ_s は (操作 S) によって加えられた. (操作 D) は行なわないので $\theta_d = 0$ である. ここで 1 行 2 列成分 (V_{us}) が自動的に実数になっていることに注意しよう. なぜなら, 位相変換する前には, 式 (13) で $V_{us} = -\sin \theta e^{i(\theta_{cs} + \theta_{ud} - \theta_{cd})}$ のように複素数であった行列要素の位相が (操作 U, C, S) のあと,

$$\theta_{cs} + \theta_{ud} - \theta_{cd} + \theta_u + \theta_s,$$

となる. これは, 式 (19) より,

$$\theta_{cs} + \theta_{ud} - \theta_{cd} + \theta_u + \theta_s = (\theta_{cs} + \theta_c + \theta_s) + (\theta_{ud} + \theta_u) - (\theta_{cd} + \theta_c) = 0 + 0 - 0 = 0,\tag{20}$$

となる. 結局, 位相変換した後, CKM 行列は次の実直交行列で表される.

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.\tag{21}$$

以上の様に 2 世代 4 元クォーク模型ではクォークの位相の取り替えにより全ての CKM 行列要素を実数に取ることができ, CP 対称性は破れないことがわかる.

1 列目の時計が正午を向いたとき 2 列目の時計が同じ方向を向いているわけは次の様にして理解できる。

2×2 の CKM 行列を構成する 1 列目のベクトル \mathbf{v}_1 が $\mathbf{v}_1^T = (\cos \theta, \sin \theta)$ の様に実数になったとき \mathbf{v}_2 が位相を除いて決まることに対応する。これを次に示す。

\mathbf{v}_2 は複素ベクトルだがその実数部も虚数部も同じ \mathbf{v}_1 に直交する実数の単位ベクトルに比例しなければならない。

$$\mathbf{v}_1^T \cdot \text{Re} \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1^T \cdot \text{Im} \mathbf{v}_2 = 0. \quad (22)$$

2次元で \mathbf{v}_1 に直交する実ベクトルは唯一 $\mathbf{e}_2^T = (-\sin \theta, \cos \theta)$ であるから、 \mathbf{v}_2 は \mathbf{e}_2 の線形結合である

$$\mathbf{v}_2 = c \mathbf{e}_2 + i d \mathbf{e}_2 = (c + id) \mathbf{e}_2, \quad (23)$$

の形を取る (c, d は任意実定数)。 $|\mathbf{v}_2| = 1$ の条件から c, d は一つの位相で書けて、これから、

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} e^{i\alpha}, \quad (24)$$

となる。 α は任意実定数である。 2 列目の時計の針は同じ方向 2α を向いている。(操作 S) はこの α を消去する操作に対応する。

3.7 2世代レプトンの混合行列の CP の破れ

CKM フラッシュプログラムを使って理解できる現象のひとつとしてニュートリノがマヨラナニュートリノの場合のレプトンの混合行列 (牧・中川・坂田 (MNS) 行列) を考察しよう。ここでは 2 世代模型, レプトンが 4 個の場合を考える。ニュートリノがマヨラナ粒子の場合はクォークや荷電レプトンの場合と違って質量を実数に保ったままマヨラナ粒子の位相の再定義はできない。もはや (操作 S) に対応するダイヤルの回転はできないのである。よってクォークの場合では消すことができた位相が 1 個残ってしまう。この CP の破れの位相はマヨラナ位相として知られている。マヨラナニュートリノの場合は図 3-c の様に 2 列目が正午からずれたままでこれ以上回転することはできない (表 2 右参照)。

u	$\cos \theta$	$-\sin \theta e^{i\alpha}$	e	$\cos \theta$	$-\sin \theta e^{i\alpha}$
c	$\sin \theta$	$\cos \theta e^{i\alpha}$	μ	$\sin \theta$	$\cos \theta e^{i\alpha}$
	d	s		ν_1	ν_2

表 2: 左:1 列目を実数にした後の CKM 行列要素。2 列目は共通の位相 α でそろっている。この位相は s クォークの位相の再定義で消去できる。右:ニュートリノがマヨラナニュートリノであった場合の 2 世代模型の牧・中川・坂田 (MNS) 行列。マヨラナニュートリノの位相は動かせないため 2 世代でも位相は除去できない。この様にレプトンの場合 4 個のレプトンでも CP の破れが起きる場合がある。

4 3世代:クォークが6つならなぜそろえることができないか



図 7: 3 世代のクォーク模型では 9 つの時計が 3×3 の CKM 行列の位相を表す. ダイアルは縦に上から u, c, t ダイアル, 横に左から d, s, b ダイアルと名付ける. 左:リセットした直後. 右:1 行目と 1 列目を正午にそろえる. 4 箇所そろえることができないところが残った.

3 世代模型の場合,CKM 行列フラッシュプログラムではどうしても針を正午に向けることができない時計が 4 つ残る (図 7). 遊んでいるうちに感覚的にわかっていくことであるが,これはダイアルを回して針をそろえる自由度が最初に与えられる針の方向の乱雑さよりずっと小さいためである. とここで, 実際の 3 世代 CKM 行列の場合にはユニタリー性の条件があり, 正午にそろわずに残った時計の針の向きにも一定の相関がある. この相関は CP の破れを特徴付けるひとつのパラメータからきている. なぜひとつのパラメータで CP の破れが表されるのか, どのような相関になっているのかを理解するには, フラッシュプログラムの時計の針をいくら眺めてもわからない. そこで本節では, 具体的に数式で正午にそろわない時計の針を特徴付けるパラメータがどのようなになっているか考え, 原論文 [1] に現れる CKM 行列の具体形を導出してみる.

3 世代模型はアップ型クォーク (u, c, t) とダウン型のクォーク (d, s, b) をそれぞれ 3 個ずつ含むので CKM 行列は図 6 に対応して 3×3 のユニタリー行列となる.

$$V = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

ここで三つの単位ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ を導入した. 更に, V のユニタリー性を用いて $\mathbf{v}_i (i = 1, 2, 3)$ 間の関係をつけていく.

まずフラッシュプログラムの操作からわかる様に, いつでも一列目を実数にする自由度がある (縦の u, c, t ダイアルを回す). そこで, 1 列目のベクトル \mathbf{v}_1 は実数に取ることができる. また, V のユニタリー性からベクトルの長さに $|\mathbf{v}_1| = 1$ の条件がある. 以上の条件から, \mathbf{v}_1 は次

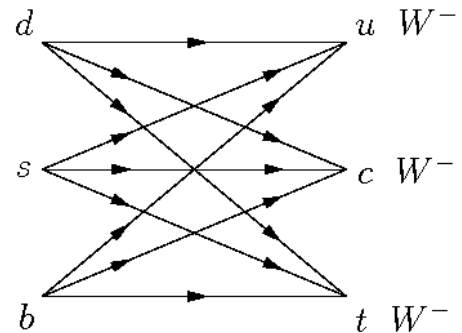


図 6: 3 つのダウン型クォークと 3 つのアップ型クォークの間には 9 通りの相互作用がある.

の様に表すことができる.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_1 \sin \theta_2 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

V のユニタリー性から $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ の実部, 虚部はそれぞれ 1 列目の作る \mathbf{v}_1 に直交する.

$$\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_2 = 0, \quad \mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_3 = 0. \quad (27)$$

実三次元空間で \mathbf{v}_1 に直交する単位ベクトルとして次の 2 つのベクトル $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$,

$$\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} -\sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ \cos \theta_1 \sin \theta_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \theta_2 \\ \cos \theta_2 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

を選ぶ. ここで $\mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ である. このとき式 (27) の直交条件から $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ は, 実ベクトル $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ の次の様な線形結合で書けるはずである.

$$\mathbf{v}_2 = U_{22}\mathbf{e}_2 + U_{32}\mathbf{e}_3, \quad (29)$$

$$\mathbf{v}_3 = U_{23}\mathbf{e}_2 + U_{33}\mathbf{e}_3. \quad (30)$$

$U_{ij}, (i = 2, 3, j = 2, 3)$ は任意複素数である. さらに, V のユニタリー性から $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ は長さ 1 である条件と, 互いに直交する $\mathbf{v}_2^\dagger \cdot \mathbf{v}_3 = 0$ の条件を課す必要がある. これらの条件からは,

$$|U_{22}|^2 + |U_{32}|^2 = 1, \quad |U_{23}|^2 + |U_{33}|^2 = 1, \quad U_{22}^* U_{23} + U_{32}^* U_{33} = 0, \quad (31)$$

の条件が出てくる. 結局条件 (31) は, U_{ij} を成分に持つ以下の 2×2 小行列 $U_{2 \times 2}$

$$U_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} U_{22} & U_{23} \\ U_{32} & U_{33} \end{pmatrix}, \quad (32)$$

がユニタリー行列であることを意味している.

以上の議論をまとめると, V は次の様に書けたことになる.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & U_{32} & U_{33} \end{pmatrix}, \quad (33)$$

小行列 $U_{2 \times 2}$ はユニタリー行列であるので, 前節で求めた一般式 (13) を用いることができる. ここでは式 (13) を少し変形した次のものを用いる.

$$U_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & \sin \theta_3 \\ \sin \theta_3 & -\cos \theta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix}. \quad (34)$$

以上まとめると, V は以下の様に分解できたことになる.

$$V = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 & \cos \theta_1 \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_1 \sin \theta_2 & \cos \theta_1 \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_3 & \sin \theta_3 \\ 0 & \sin \theta_3 & -\cos \theta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix}.$$

(35)

最後に、全ての行列の積の計算を行なうと以下の式が得られる。

$$V = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \cos \theta_3 e^{i\alpha} & -\sin \theta_1 \sin \theta_3 e^{i\beta} \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 & (\cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 - \sin \theta_2 \sin \theta_3 e^{i\delta}) e^{i\alpha} & (\cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 + \sin \theta_2 \cos \theta_3 e^{i\delta}) e^{i\beta} \\ \sin \theta_1 \sin \theta_2 & (\cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 + \cos \theta_2 \sin \theta_3 e^{i\delta}) e^{i\alpha} & (\cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 - \cos \theta_2 \cos \theta_3 e^{i\delta}) e^{i\beta} \end{pmatrix}. \quad (36)$$

フラッシュプログラムの操作からわかる様に、まだ s クォークと b クォークの位相の再定義の自由度が残っている。これらを用いて 2 列めと 3 列めの一番上にある位相 α と β を消し 1 行目を全て実数に取ることができる。しかし、 V のユニタリー性からそれ以上のことが式 (36) からわかる。具体的には、位相 α は 2 列目全体に、位相 β は 3 列目全体にそれぞれ共通して掛かっている。従って、 s クォークと b クォークの位相の再定義より、完全に位相 α と β を V から取り去ることができるのである。

これらの位相を消した後、残った行列成分を表示すると、原論文 [1] の式 (13) になる (調べてみよう)。

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \cos \theta_3 & -\sin \theta_1 \sin \theta_3 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 & \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 - \sin \theta_2 \sin \theta_3 e^{i\delta} & \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 + \sin \theta_2 \cos \theta_3 e^{i\delta} \\ \sin \theta_1 \sin \theta_2 & \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 + \cos \theta_2 \sin \theta_3 e^{i\delta} & \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 - \cos \theta_2 \cos \theta_3 e^{i\delta} \end{pmatrix}. \quad (37)$$

式 (37) からわかる様に、原論文のパラメトリゼーションでは、右下すみの 4 つの行列要素が複素数になっている。これらが、フラッシュプログラムで正午に合わせることができなかった残り 4 つの時計に対応している (図 7 の右図)。これらの時計の角度は式 (37) の右下すみの 4 つの行列要素から導出することができ、時計の角度は $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \delta$ の 4 つのパラメータで書けている。これは 2 世代のときと異なり複雑なものである。しかし、これら全てのパラメータが CP 対称性の破れに関与しているわけではない。CP 対称性の破れは V が実行列に取れないことに起因するので、これに関係しているパラメータは δ のみであることが式 (37) から読み取れる。結局、式 (37) の形に帰着するまでに、 u, c, t, s, b の 5 つダイアルの操作で 5 つの位相を消してきた。3 × 3 のユニタリー行列は一般には 6 個の位相を含むがクォークの位相の再定義では 5 つまでしか消せない。消せずに残った位相は式 (35) の位相 δ である。前後 2 つの行列との積の順番は可換でないため、クォークの位相の再定義では消すことができない位相が残った。これが 3 世代 6 元模型では CP 対称性の破れが起こる理由である。以上の様に CP 対称性の破れは 3 世代模型の場合、たった一つのパラメータ δ で表されていることになる。

5 CKM 行列フラッシュプログラム作成の概略

本 CKM Flash コンテンツの作成には、Adobe 社の Flash CS3 を使用した [3]。また、ボタンや矢印などの画像材料の作成には、同社の Illustrator 等を利用した。Flash CS3 において、Flash のアニメーション機能及び Action Script 3.0 言語を利用し、ユニタリー行列を生成するための数値計算プログラムや、ダイヤルやプルダウンメニュー等のインタラクティブ機能を作成した。

5.1 数値的な部分の概略

本プログラムでは一見、矢印がランダムな角度で生成される様に見えるが、実際にはユニタリー性が課されている。この様に、ユニタリー性を課した状態で角度部分だけを生成することは、一般の世代を考えると難しいため、本プログラムでは、実際にユニタリー行列を数値的にランダムに生成しそこから角度を取り出している。

N 世代ユニタリー行列の生成は以下の様に行なう。まず、正規分布からランダムに取り出した実数値を複素数に組み、それを $N \times N$ 行列として変数に保持する。次に、その行列をグラムシュミット法で正規直交化する。ここから各成分の偏角を取り出し角度テーブル ($N \times N$) 行列を作成する。リセットボタンを押す度に、このユニタリー行列は再度ランダムに生成される様にした。

針の動きに関する位相の取り直しは、角度テーブルの対応する行、または列の位相角度に数値を足し引きすることで表現する。ただし、角度の数値は $0-2\pi$ の間に収まる様に 2π の剰余をとっている。

5.2 Flash 化について

CP 対称性が破れているか破れていないかは、ランダムにユニタリー行列が生成された時点で既に決まっているのであるが、クォークの位相の取り直しによって全ての偏角を 0 または π に回すことができるかを実際に確かめることで、CP 対称性の破れの有無を認識させる様にした。行列の大きさ (世代数) については、2 から 8 まで選択できる様にした。

画面上で偏角を表現する場合、偏角が 0 か π の位置で CKM 行列成分が実になることをわかりやすく表現する必要がある。本プログラムでは、時計の正午の方向が偏角が 0 と π に相当する様に、角度テーブルの角度の 2 倍を表示する時計の針の角度に対応させた。この表現方法により、CKM 行列成分が実になることと、時計の針を正午に合わせることを対応させることができた。

全ての時計の針を正午に合わせることができたら、CP 対称性が回復したと画面上でわからせる様にした。この点については、最初に行列が生成された時点で CP 対称性の有無は決まっているのであるが、表現のわかりやすさを優先したため、物理的には正しくないこの様な表現になってしまった。今後の改良が必要である。

時計の針が正午に合っているかどうかの当たり判定は、あまり厳しく判定するとマウスの操作上困難が生じるため、多少余裕を持たせて判断している。そのため非常に小さい確率で、3 世代以上でもランダムに生成したユニタリー行列の位相時計の矢印を全て上に (当たり判定の範囲で) 揃えることができる場合が生じる。CKM 行列と CP 対称性の関係を説明しているときに、このような状態が発生した場合はリセットを押してやり直してもらう必要がある。この点に関しては実数値で保持している角度データを有理化及び整数化して、微妙なマウス操作を避ける様な工夫が必要である。

Action Script はオブジェクト指向型の言語で画面の各パーツに対応するオブジェクトの属するクラスを用意する必要がある。時計の針やダイヤルに対応するクラスを作成しそれぞれに、必要な機能を持たせることで動きを表現することができる様になっている。数値は実数を扱うことはできるが複素数を扱うクラスはないので、ベクトル型のクラスを継承して複素数型のクラスを作成した。

6 謝辞

大川正典氏, 加藤明菜さん, 坪山透氏 (KEK : Belle) には草稿を読んで貴重な御意見をいただきました. CKM フラッシュプログラムの作成にあたっては, 広島大学情報メディア教育研究センターの隅谷孝洋氏, 稲垣知宏氏に貴重な御意見や御助言をいただきました. 林 青司氏 (神戸大) や広島大学素粒子論研究室とゲージ場 II の学生諸君との議論を通じて解説を書く上での貴重なヒントを得ました. ここに心からの感謝の念を表して謝辞とさせていただきます. 最後に素粒子論研究・電子版に投稿を勧めてくれた笹倉直樹氏に感謝します.

参考文献

本論文で述べたクォークの位相のとり方の自由度に関しては原論文 [1], およびノーベル賞講演 [4] にある. CP 対称性の入門書として [5], 大学院生向けの教科書として [6] がある. 原論文をレビューしたものとして [7] がある.

- [1] M. Kobayashi and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys., Vol. 49 No. 2 (1973), pp. 652-657.
- [2] [<http://www.adobe.com/jp/products/flashplayer/>] からダウンロードできる.
- [3] 大重美幸, 「Adobe Flash CS3 詳細! ActionScript 3.0 入門ノート」, ソーテック社 (2007).
- [4] M. Kobayashi, Nobel Lecture (2008) [http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2008/kobayashi-lecture.html]; T. Maskawa, Nobel Lecture (2008) [http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2008/maskawa-lecture.html]; 益川 敏英, 「CP 対称性の破れが我々に語ったこと」, 素粒子論研究, Vol. 116 No. 5 (2008), pp. 151.
- [5] 三田一郎, 「CP 非保存と時間反転—失われた反世界」岩波講座 物理の世界 素粒子と時空 〈 2 〉, 岩波書店, 2001.
- [6] T. Morii, C. S. Lim, and S. N. Mukherjee, “The Physics of the Standard Model and Beyond”, World Scientific Publishing Company, 2004; I. I. Bigi and A. I. Sanda, “CP violation” (Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology), Cambridge University Press, 1999; G. C. Branco, L. Lavoura, and J. P. Silva, “CP violation” (International Series of Monographs on Physics), Oxford University Press, 1999.
- [7] 高木崇志, “小林-益川理論レビュー”, 大阪大学素粒子論研究室, 2007 年度卒業論文 (2008), [<http://www-het.phys.sci.osaka-u.ac.jp/paper.html>].