重力場の量子論と一般相対論

中西　襄 *1

最近、堀尚一氏は「重力場の量子化」というタイトルで、一般相対論を量子化するに当たっていろいろ困難があるというような意見を述べている。まず素研 2007 年 4 月号の論説 1) で、重力場を量子化したら必然的に x^μ を q 数にしなければならないというような主張がなされた。そのとき私は私信でそうではないことを指摘し、さらに重力場の量子論の考え方について簡単に説明した。だがその後、堀氏は素研 2008 年 12 月号 2) にその続編 II, III を書き、「量子重力場 $g_{\mu\nu}$ は c 数時空計量と重力定数の平方根に比例する部分との和で書ける」という誤った前提に基づく議論を展開した。そしてまた、重力場の量子論に関する拙著 3) がかなり不適切な仕方で引用されているように思えた。*2　そこで彼の論説へのコメントを書くことを考えたが、しかしこの種の誤解はなにも堀氏に限ったことではなく、残念ながらいまだに多くの人が素朴に信じているようである。それで、たんに堀氏の論説にコメントするのではなく、もう少し一般的な立場から重力場の量子論と一般相対論との関係について論ずることにした。以下、重力場の量子論の概要と私の考え方について述べてみたい。

一般相対論

一般相対論は次の 3 つの原理に基づいて構成されている。

1. 時空計量 $g^{(\mathrm{m})}_{\mu\nu}$ は、擬リーマン幾何学の計量である。
2. 重力場 $g^{(\mathrm{c})}_{\mu\nu}$ は、アインシュタイン方程式に従う。
3. $g^{(\mathrm{m})}_{\mu\nu}$ と $g^{(\mathrm{c})}_{\mu\nu}$ は一致する。

第 1 の原理は、時空が平坦ではなく、一般に曲がっていることを主張したもので、$ds^2 = g^{(\mathrm{m})}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ および測地線の方程式から成る。ここでは、$g^{(\mathrm{m})}_{\mu\nu}$ はローレンツ的であることが、最初から前提となっていることを注意しておこう。

第 2 の原理は、古典重力場の理論である。この部分はゲージ理論と同様な構成をもっており、重力という一つの力の「古典場」を記述するものである。ここでは、$g^{(\mathrm{c})}_{\mu\nu}$ がローレンツ的であるというような前提は一切なされていない。時空計量とは関係ないのである。(ただし、作用積分を書くときには、$\det g^{(\mathrm{c})}_{\mu\nu}$ の平方根が要るので、その符号を決めなければならない。)

---

*1 京大 (数理解析研究所) 名誉教授　e-mail:　nbr-nak@trio.plala.or.jp

*2 たとえば論説の II で、「自由場を考えるとき、$h_{\mu\nu}$ は重力子を 1 個増やすか減らすかだから、物理的状態で挟んだものはゼロ、この結果は相互作用がある場合にも示せる」として拙著が引用されているが、とんでもない話である。まず、自由場の場合であっても、一般に物理的状態は重力子数の異なる状態の**重ね合わせ**であるから、命題は成立しない。また拙著の理論ではすべてハイゼンベルク描像で定式化しているので、自由場に相互作用を付け加えるというような議論は一切ない。

第３の原理は等価原理であり、アインシュタインの天才的着想である。これにより重力理論という物理学が擬リーマン幾何学という幾何学に帰着された。この成功をふまえて、その後物理学をすべて幾何学に帰着させようという野望が、アインシュタイン、ワイル、カルーツァらをはじめ多くの人たちによって試みられ、すべて失敗した。そして現在に至ってもまだこの夢を捨てきれない人たちがいる。失敗の原因は明らかである。物理学の基本はすべて量子論である。一方、幾何学（もう少し正確にいうと微分幾何学）は「近傍」の概念に立脚しており、それは古典的概念だからである。最近は、幾何学の方をひん曲げて「非可換幾何学」なるものがはやっているが、これは本末転倒であろう。

重力場の量子化

まず最初に断っておかなければならないが、「量子化」というのは人間サイドの考え方であって、「自然」が自分自身を律するやりかたではないことである。つまり論理的に先行するのは量子論であって、古典論が先にあってそれを量子化という手続きで量子論にもっていくという考え方は論理的に正当ではない。このことを了解した上で、重力場の量子化について考察する。

重要な論点は、量子化されるのは $g^{(\mathrm{c})}_{\mu\nu}$ であって、$g^{(\mathrm{m})}_{\mu\nu}$ ではないということである。前者を量子化したものを量子重力場と呼び、$g_{\mu\nu}$ と書く。後者の方は量子化できない。したがって、$g_{\mu\nu}$ に対して等価原理は成立しない。このところをはっきり認識しておかないと、ds^2 や dx^μ が q 数になるなどというおかしな主張がなされることになる。あとで詳しく述べるが、重力場の量子論では $g^{(\mathrm{m})}_{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ の真空期待値によって与えられるのである。

重力場の量子化について簡単に復習しておこう。[3)]　ここに述べる量子化法は、素粒子の標準理論であるゲージ場の量子論を最も素直に拡張したものである。重力場の量子化を他の素粒子の場の量子化とまったく異なる方法で行う考え方もあるが、基礎理論全体の整合性という観点からそのような立場は好ましくないと思う。

量子重力場は $g_{\mu\nu}$ であるが、ラグランジァン形式で定式化するので、前述したように $\det g_{\mu\nu}$ の符号の問題がある。すなわち、これの平方根がエルミート演算子でないと困る。この問題を解決する方法は、基本場として「四脚場」h_μ^a を採用し、$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h_\mu^a h_\nu^b$ と置くことである。ただし、η_{ab} はミンコフスキー計量ではなく、二次形式に対するシルヴェスターの定理で現れる符号因子である。h_μ^a も量子場であるから、もちろん四脚場の幾何学的意味はない。4 次元積分の不変測度は $h \equiv \det h_\mu^a$ で書けるので、そのエルミート性は自動的に保証される。また四脚場の導入により、ディラック場もしくはワイル場の一般共変化が可能となる。

作用積分は

$$S = \int d^4x \left(\mathcal{L}_{\mathrm{E}} + \mathcal{L}_{\mathrm{GF+FP}} + \mathcal{L}_{\mathrm{LGF+LFP}} + \mathcal{L}_{\mathrm{M}} \right)$$

で与えられる。ここに $\mathcal{L}_{\mathrm{E}}$ はアインシュタイン・ヒルベルトのラグランジァン密度 $\frac{1}{2\kappa} hR$ から全微分項を引いて 2 階微分をなくしたもの、$\mathcal{L}_{\mathrm{M}}$ は重力以外の素粒子の場のラグランジァン密度、他の 2 項については後述する。S において、アインシュタインの重力定数 κ [*3]は $\mathcal{L}_{\mathrm{E}}$ の分母の

[*3] 堀氏はこれを κ^2 としている。したがって、論説 III のアインシュタイン方程式はミスプリントである。

みに現れる。そして、$\sqrt{\kappa}$ という形ではどこにもでてこないことに注意しよう。量子場は 4 個の実変数 x^μ の（一般化された）関数値演算子である。この段階では x^μ に時空座標という意味はない。

中間の 2 項がないと、S は 4 自由度をもつ一般座標変換と 6 自由度をもつ内部局所ローレンツ変換に対して不変である。ゲージ理論と同様、作用積分にこういう局所変換に対する不変性があると量子化できない。[*4]　そこで、ゲージ理論でやったように、ゲージ固定項を導入する。しかしこれだけでは、局所変換不変性があったことの情報は失われてしまう。そこで、FP ゴーストと FP 反ゴーストというゴースト場を導入する。これらはフェルミ統計に従う整数スピンの場[*5]であって、スピンと統計の関係に違反しているので、理論は必然的に不定計量の状態ベクトル空間の導入を要求していることを強調しておこう。そして S は BRS 不変性という新たな不変性をもつものとする。BRS 不変性に関する詳細は省略するが、BRS 変換は、古典的対応物をもつ量に対しては、局所変換の定義に現れる x^μ の任意関数を FP ゴーストに置き換えることによって定義される。FP ゴーストも量子場なので、BRS 変換は局所変換ではなく、全域的変換である。このことは、基礎理論が人間に選択の自由を与えている任意関数などという概念を必要としないことを意味している。局所対称性を基本的概念と考えるのは、古典論を論理的に量子論に先行させる人間サイドの考え方である。BRS 変換は、超対称性変換のように統計性を変えるが、スピンの整数・半奇数を変えない。そして外微分と同じく、2 回行うとゼロになるという性質がある (BRS 変換の冪零性)。

重力場の共変的正準量子論

$\mathcal{L}_{\mathrm{GF+FP}}$ と $\mathcal{L}_{\mathrm{LGF+LFP}}$ とは、それぞれ一般座標変換のゲージ固定項 $\mathcal{L}_{\mathrm{GF}}$ と内部局所ローレンツ変換のゲージ固定項 $\mathcal{L}_{\mathrm{LGF}}$ を BRS 不変化したものである。これらはそれぞれの変換のゲージ固定の役割を果たすべきなのはもちろんだが、さらに次の要請によってその形が決められる：前者は並進と一般**線形**変換及び内部局所ローレンツ変換に対して不変、後者は一般座標変換及び内部大域的ローレンツ変換に対して不変。ここで特筆すべきは、$\mathcal{L}_{\mathrm{GF}}$ の一般線形変換不変性と、$\mathcal{L}_{\mathrm{LGF}}$ の一般座標変換不変性である。その具体的な式は次の通りである。[*6]

$$\mathcal{L}_{\mathrm{GF}} = b_\mu \partial_\nu (h g^{\mu\nu})$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{LGF}} = -\partial_\nu s_{ab} \cdot h g^{\mu\nu} \omega_\mu^{ab}$$

ここに、b_μ は一般座標変換に対する B 場、$s_{ab} = -s_{ba}$ は内部局所ローレンツ変換の B 場、ω_μ^{ab} はスピン接続である。

---

*4 拘束系に対するディラック量子化法を用いれば、第 1 類拘束 Φ が現れる。これを、補助条件 $\Phi|\mathrm{phys}\rangle = 0$ を課して、物理的状態に対してはゼロとみなせるようにしたとする。真空 $|0\rangle$ は物理的状態でないと困るので、$\Phi|0\rangle = 0$ となるが、このとき局所場の理論では必然的に $\Phi = 0$ が導かれ、Φ が第 1 類拘束だったことと矛盾してしまう。なお、$\langle\mathrm{phys}|\Phi|\mathrm{phys}\rangle = 0$ で物理的状態を定義した場合は、物理的状態の全体が線形空間をなさない。

*5 厳密にいえば、量子重力理論の場合、まだこの段階ではスピンという概念はない。分かりやすくするため、ゲージ場の量子論の場合の状況を流用した言葉を使っている。

*6 拙著では、不幸にして、$\mathcal{L}_{\mathrm{GF}}$ の式に κ^{-1} を書いているが、この因子は b_μ の定義に含めておくべきである。

B 場は通常 FP 反ゴーストの BRS 変換として定義されるが、一般座標変換の場合にかぎり、b_μ を FP 反ゴースト $\bar{c}_\mu$ の「本質的 BRS 変換」として定義する方が、理論の見通しが非常によくなる。ここに本質的 BRS 変換というのは、BRS 変換の式から x^μ の変換により生ずるどの場にも共通な項を差し引いたものである。[*7] x^μ は c 数なので、その BRS 変換はもちろんゼロだが、その本質的 BRS 変換はゼロではなく、FP ゴースト c^μ である。したがって、冪零性から FP ゴーストの本質的 BRS 変換はゼロになる。このことは、一般座標変換の大域版である並進が可換代数を作ることに対応している。このため、量子重力理論は非可換ゲージ理論よりもむしろ可換ゲージ理論に似てくる。通常の BRS 変換だけを考えていたのではこのことは分からず、非可換ゲージ理論よりも複雑な理論のように見えてしまうのである。

作用積分が定義されたので、通常の手続きに従って場の方程式が導かれる。簡単のため、内部ローレンツの自由度に関連した式は省略する。h_μ^a のオイラー方程式の対称部分は、

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa(E_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}E - T_{\mu\nu})$$

となる。[*8] これを「量子アインシュタイン方程式」と呼ぶ。ただし、

$$E_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu b_\nu + i\partial_\mu \bar{c}_\rho \cdot \partial_\nu c^\rho + (\mu \leftrightarrow \nu), \qquad E \equiv g^{\mu\nu}E_{\mu\nu}$$

と書いた。$b_\nu, \bar{c}_\sigma, c^\tau$ に対するオイラー方程式は、

$$\partial_\mu(hg^{\mu\nu}) = 0, \qquad \partial_\mu(hg^{\mu\nu}\partial_\nu c^\sigma) = 0, \qquad \partial_\mu(hg^{\mu\nu}\partial_\nu \bar{c}_\tau) = 0$$

となる。この第 1 式がド・ドンデア条件に他ならない。さらに量子アインシュタイン方程式の共変微分をとると、

$$\partial_\nu(hg^{\mu\nu}\partial_\nu b_\rho) = 0$$

を得る。$\partial_\nu x^\mu = \delta_\nu^\mu$ であることに注意すれば、$x^\mu, b_\rho, c^\sigma, \bar{c}_\tau$ の各成分がすべて同じ形の方程式（共変ダランベール方程式）を満たしていることがわかる。このことから、この理論が、144 個の生成子から成る 16 次元の超ポアンカレ的対称性をもつことが導かれる。これは極めて著しい結果で、アインシュタイン重力とは異なるもろもろの亜流重力理論の量子論では、このような美しい結果は得られない。

量子化はディラックの量子化法に従う。作用積分が b_μ の時間を含まないので第 2 類拘束が現れるが、ラグランジュ括弧を用いた議論により、ディラック量子化は b_μ を正準変数に採用しないで通常の正準量子化をすることに帰着することが示せる。[4)] 他方、s_{ab} は正準変数として正準量子化できる。正準交換関係[*9]から、すべての場の「同時刻」交換関係[*10]をあらわに計算することができる。量子重力理論の同時刻交換関係がすべて閉じた形で求まるということは、非常に

[*7] スピン角運動量が総角運動量マイナス軌道角運動量であることを思い出していただきたい。場のローレンツ変換性を見るには、スピン角運動量だけを考えた方が分かりよい。

[*8] $\mathcal{L}_{\mathrm{LGF}}$ を一般座標変換不変にとったおかげで、$\mathcal{L}_{\mathrm{LGF+LFP}}$ がここでワルサをしないことに注意してほしい。

[*9] もちろんフェルミ統計に従う場については反交換関係を使う。このことは以下いちいち断らない。

[*10] ここで断っておかなければならないが、「同時刻」といってもこれは物理的な時間について言っているのではなく、正準形式に必要な時間パラメーターのことである。理論は一般線形変換不変なので、それは x^μ の任意の一次結合でよい。

驚くべきことであろう。そしてそれを用いて、すべての対称性の生成子に関する交換関係をあらわに計算することができる。

16 次元超ポアンカレ的対称性の中には、並進生成子 P_μ、一般線形変換生成子、BRS 変換生成子 Q_b その他いろいろな生成子が含まれる。理論の表現空間は不定計量のヒルベルト空間であり、P_μ のゼロ固有状態として定義される真空 $|0\rangle$ に、場の演算子を作用させることにより生成される。物理的部分空間は九後・小嶋の補助条件

$$Q_b|\mathrm{phys}\rangle = 0, \qquad Q_s|\mathrm{phys}\rangle = 0$$

によって定義される。ここに Q_s は内部局所ローレンツ変換の BRS 生成子である。これによって、重力場の縦波 4 成分と四脚場がもつ余分の 6 成分が非物理的となる。詳しい議論は省略する。

量子重力場と時空計量の関係

重力場の量子論の構成を概観したので、本題に戻ろう。

昔から「共変的量子重力理論」というと、そのファインマン・ダイソン摂動論もしくはファインマン経路積分のことと短絡的に同一視してしまう人が多い。そして、それはくりこみ不可能だから、量子アインシュタイン重力は矛盾を含み、有効理論でしかありえないなどと勝手な結論をする。そしてこのキャッチフレーズは、アインシュタイン重力以外の量子重力をやりたい人の錦の御旗として利用されてきた。全くとんでもない濡れ衣である。量子重力に摂動論を適用するのが間違っているだけである。

量子アインシュタイン重力の作用積分は、自由場プラス相互作用などという単純な形をしていない。作用積分は時空計量を含んでいないのだから、そのことは当然である。そこで彼らは、強引に背景時空を導入することを考えた。すなわち、$g_{\mu\nu} = g^{(m)}_{\mu\nu} + \sqrt{\kappa}h_{\mu\nu}$ とおいて、アインシュタイン・ヒルベルトのラグランジアン密度を $\sqrt{\kappa}$ の冪級数に展開したのである（κ でなく、$\sqrt{\kappa}$ であることに注意)。$g^{(\mathrm{m})}_{\mu\nu}$ は c 数なので、第 0 項は変分原理にきかないから捨てる。第 1 項は、$g^{(\mathrm{m})}_{\mu\nu}$ がアインシュタイン方程式の真空解であるとすると消える。第 2 項は κ について 1 次だから、係数の $1/\kappa$ とキャンセルして κ の 0 次となるが、これは $h_{\mu\nu}$ について 2 次式であり、スピン 2 の自由場のラグランジアン密度を与える。残りの項はすべて相互作用と見なせば、めでたくファインマン・ダイソンの摂動論が適用できる。通常はローレンツ不変性を要求するので、背景計量としてミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ が採用される。そして、ディラック場もしくはワイル場は、もともとスカラーの変換をしていたのに、勝手に内部ローレンツ変換と連動させて、スピノルにすり替えるのである。

この議論がおかしいことは、たとえ背景時空が平坦だということを認めたとしても、$\eta_{\mu\nu}$ という特定のものが選ばれる根拠はないことからも分かるだろう。平坦時空の計量テンソルは $\eta_{\mu\nu}$ に一般座標変換をほどこして得られるどんなものでもよいはずだが、量子重力場 $g_{\mu\nu}$ は一般座標変換できるものではないので、それらは互いに異なる理論になってしまう。表現レベルでなら非同値の表現がでても構わないが、オペレーターレベルで非同値になることは許されない。すなわ

ち、$g_{\mu\nu}$ の $\kappa \to 0$ の極限が c 数であるというアンザッツをおくことは誤りである。[5)]　実際、量子重力理論は一般座標変換に対応する BRS 変換（κ に無関係なように定義される）に対して不変になるように作られているので、$\lim_{\kappa\to 0} g_{\mu\nu}$ は q 数であって、c 数ではない。摂動論の展開というのは、関数 $f(\kappa)$ を展開するのに、第 0 項として $f(0)$ と異なるものを勝手に仮定し、κ での冪展開ができなくなったものだから、$\sqrt{\kappa}$ などというもので無理やりの展開をしているのである。したがって、見かけは $\sqrt{\kappa}$ の冪級数でも、本当はその係数は $(\sqrt{\kappa})^{-1}$ を含んでいるわけである。そして、それは 0^{-1} のように見えるはずだから、摂動論で処置なしの発散が次々現れるのは少しも不思議ではない。

重力場の量子論は、まったく根拠のない勝手な仮定を持ち込んで、無理やりに摂動論を適用するのは正しくない。そんなことをしなくても、素直にハイゼンベルク描像で解けばよいのである。場の量子論をハイゼンベルク描像で解く一般的方法はすでに開発した。[6)]　次にそれを簡単に復習しておこう。

出発点は、場の方程式と同時刻交換関係の全体である。まず場の方程式を 4 次元交換子に対する方程式に書き改める。そして、これと同時刻交換関係をあわせて、4 次元交換子に対する q 数コーシー問題とし、これを解く。これを用いて多重交換子を計算する。次にこれをワイトマン関数、すなわち場の演算子の単純積の真空期待値でもって表現する。多重交換子の真空期待値はトランケイテッド（真空の中間状態からの寄与を除いたもの）ワイトマン関数の一次結合で書けるので、後者は連立一次方程式の解と考えられる。未知数の数は方程式の数より多いので、付加条件としてエネルギー正値性の条件を課す。

簡単なモデルでは、実際この方法ですべてのワイトマン関数を求めることができる。しかし本物の理論では無理なので、パラメーターに関する展開を用いる。重力場の量子論では、κ に関する冪展開を用いる。これは摂動展開とは異なり、$\sqrt{\kappa}$ は用いないし、κ の各冪で BRS 不変である。具体的に計算できたのは第 0 次のみであるが、$g_{\mu\nu}$ の第 0 次近似 $g_{\mu\nu}^{[0]}$ はもちろん q 数である。実際、$b_\rho^{[0]}$ の真空期待値はゼロなのに、$g_{\mu\nu}^{[0]}$ と $b_\rho^{[0]}$ の積の真空期待値はゼロにはならない。ただ、$g_{\mu\nu}^{[0]}$ のみから作られる n 点ワイトマン関数は、$g_{\mu\nu}^{[0]}$ の真空期待値（1 点ワイトマン関数）の積になるので、c 数とよく似た振る舞いをする。第 1 近似以上を具体的に求めることは非常に複雑であって、まだなされていない。ただ、もしアインシュタイン方程式を線形近似することが許されると仮定すると、問題は本質的に量子電磁力学と同じになる。そして、量子電磁力学については、この方法で解いても、次数のカウンティング[*11]を除き、本質的にファインマン・ダイソンの結果を再生する。

さて、重力場の量子論において基本場は四脚場 h_μ^a であったが、これの真空期待値は一般にゼロにはならないと考える。実際、われわれの住む 4 次元時空が存在するためには、$\det\langle 0|h_\mu^a|0\rangle \neq 0$ でないと困る。それゆえ以下そのような場合について考えるものとする。このとき、一般線形変換不変性と内部大域的ローレンツ不変性は、いずれも自発的に破れることがわかる。

しかし、もし並進不変性が自発的に破れていないものとすると、$\langle 0|h_\nu^a|0\rangle \equiv u_\nu^a$ は x^μ に依存し

[*11] この方法では e^2 の冪展開になるが、その次数を N とすると、$2N = n + k$ となる。ただし、n は摂動の次数、k は外線光子の数。

ない数行列となる。この場合は、一般線形変換の生成子の反対称部分と内部大域的ローレンツ変換の生成子の、u^a_ν を係数に用いた適当な一次結合で定義される生成子は、自発的に破れていないローレンツ変換を与える。このローレンツ変換は物理的時空 $\tilde{x}^\alpha \equiv u^\alpha_\mu x^\mu$ に対するローレンツ変換を与えることが示される。実際、このローレンツ変換に対し、ディラック場もしくはワイル場は、正しくスピノルの変換性を示す。これと並進とを合わせて、素粒子物理学におけるポアンカレ不変性が導かれる。なお、一般線形変換の生成子の対称部分の自発的破れに対応する南部・ゴールドストーン粒子は重力子であり、重力子の質量が正確にゼロであることが保証される。[7)]

並進不変性が自発的に破れている場合は、真空をどう定義するのかという問題が生ずるが、とにかく基底状態 $|0\rangle$ が存在するものとすると、u^a_ν は x^μ の関数になる。$g^{(\mathrm{m})}_{\mu\nu} \equiv \eta_{ab} u^a_\mu u^b_\nu$ とおくと、これが擬リーマン時空の計量テンソルに他ならない。つまり、曲がった時空というのは、P_μ が自発的に破れた結果である。この場合、量子場をすべてその真空期待値に置き換えると、量子アインシュタイン方程式は古典アインシュタイン方程式に帰着する。しかし、それ以上の両者の結びつきは、あまりはっきりしない。実際、前者の物理的状態での期待値が後者になるというような関係は成立しない。量子場に対する方程式は、期待値をとる前に量子場を乗ずるなどの操作をすることにより結果が変わるからである。量子マックスウェル方程式は、物理的状態での期待値をとると古典マックスウェル方程式になるようにみえるが、これはたんなる僥倖で、前者に $A_\mu(y)$ を乗じてから期待値をとると、もはや後者を生成しないのである。

万有引力

四脚場 h^a_μ の 16 成分のうち、反対称部分 6 成分は補助条件 $Q_s|\mathrm{phys}\rangle = 0$ により、非物理的になる。また対称部分 10 成分のうち 4 成分は、補助条件 $Q_b|\mathrm{phys}\rangle = 0$ により、非物理的になる。残りの 6 成分のうち 4 成分は $Q_b|*\rangle$ のように書ける、いわゆるゲージ自由度であり、BRS 変換の冪零性から従う $(Q_b)^2 = 0$ によりゼロノルム状態であって、物理的だがその量子が観測にかかることはない。残る 2 成分が、古典的には重力波、量子論的には横波重力子として観測にかかるはずのものである。ちなみにこの可観測自由度は、n 次元時空では $\frac{1}{2}n(n-3)$ になる。

ゼロノルム状態を生成するのは、b_μ の量子である。これが縦波重力子の協力を得て、ニュートンの万有引力（ソースは相対論化されて、質量ではなくエネルギー・運動量である）を生む。この力が遠隔作用のように書けるのは、それを伝達する量子がゼロノルムだからである。万有引力の量子とクーロン力の量子は、ブラックホールでも引き止めることができない。もしもわれわれの住む時空が n 次元時空に浮かぶ 3 ブレインだったとしたら、これらの量子はその中に引き止めることはできないはずで、これらの力のポテンシャルは $1/r^{n-3}$ のように振舞わねばならぬはずである。

一般相対論は時空を曲げるため、万有引力の式は補正を受ける。その効果は水星の近日点移動として現実に観測にかかっている。この効果が量子重力の非線形性から導かれるのかどうかは、興味ある問題である。これに関し、岩崎氏[8)]は 2 粒子散乱の 4 次のファインマングラフを計算し、肯定的な結論を得ている。しかしながら、ここでの 2 粒子は太陽と水星そのものでなければならない。なぜなら、この補正項は、2 次の項とは異なり、それぞれの粒子の質量について線形

にはなっていないので、たんに足し合わせて粒子の塊について同じ形の式を導くというわけにはいかないからである。はたして天体のような巨大なものを素粒子と同様に扱って、その創生・消滅演算子を考えてもよいものであろうか。少なくとも通常の量子論の考え方からは著しく逸脱しているように思う。

量子重力と古典重力の関係は、なかなか一筋縄ではいかない問題である。もっと多くの人が興味をもって研究すべき課題であると思う。

参考文献

1) 堀尚一、素粒子論研究 **115** (2007), 35.

2) 堀尚一、素粒子論研究 **116** (2008), 143; 146.

3) N. Nakanishi and I. Ojima, *Covariant Operator Formalism of Gauge Theories and Quantum Gravity* (World Scientific, 1990), Chap. 5.
中西襄、重力場の量子論（物理学最前線 3、大槻義彦編、共立出版、1983)

4) 九後汰一郎、素粒子論研究 **71** (1985), 49.　中西襄、数理科学 2007 年 4 月号 50

5) N. Nakanishi, Gen. Rel. Grav. **27** (1995), 65.

6) N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. **111** (2004), 301.

7) N. Nakanishi and I. Ojima, Phys. Rev. Lett. **43** (1979), 91.

8) 岩崎洋一、日本物理学会誌　**26** (1971), 915.