

Alday-Gaiotto-Tachikawa 予想とその発展

瀧 雅人 taki_at_yukawa.kyoto-u.ac.jp

京都大学 基礎物理学研究所

(2011 年 12 月 8 日受理)

2009 年に Alday、Gaiotto および Tachikawa によって発見された新しいタイプの「双対性」について概論したい。摂動的な計算結果の観察から、彼らは $\mathcal{N} = 2$ 四次元超対称ゲージ理論のインスタントン分配関数が、二次元共形場理論の Virasoro 共形ブロックと解析的に結びついていることを見抜いた。すなわちこれは四次元ゲージ理論の分配関数と二次元共形場理論のカイラル相関関数が等価であることを意味している。つまり少なくともこれらのセクターにおいては、両理論の間に双対性が存在していることが強く示唆されている。

このレビューでは、共形ブロックとインスタントン分配関数の組み合わせ論的計算手法を紹介する。その後で Alday-Gaiotto-Tachikawa の原論文に従い、AGT 対応を発見法的に確認する。さらに、その他の双対的記述や弦理論との関係、あるいは証明の試みなどについても紹介したい。

なお本稿は、2010 年 11 月に東京工業大学素粒子論研究室で行ったセミナーの講義ノートを大幅に加筆したものである。

目次

1	Introduction	2
2	二次元共形場理論と共形ブロック	3
2.1	二次元共形場理論	3
2.2	Virasoro 対称性と相関関数	8
2.3	共形ブロックとその組み合わせ論	9
2.4	物理的相関関数と Liouville 場理論	16
2.5	拡大共形対称性と戸田場理論	18
3	$\mathcal{N} = 2$ 四次元超対称ゲージ理論とインスタントン分配関数	19
3.1	重力光子背景と Nekrasov 分配関数	19
3.2	Nekrasov 分配関数の計算ツールキット	21
4	Alday-Gaiotto-Tachikawa 予想	25
4.1	$\mathcal{N} = 2$ 四次元ゲージ理論に対する Gaiotto プログラム	25
4.2	AGT 予想	34
4.3	$SU(N)$ ゲージ理論と Wyllard 予想	40
4.4	変種たち：Gaiotto 予想	41
5	AGT 予想における非局所演算子	46
5.1	ループ演算子と非自己交差サイクル	47
5.2	基本表面演算子とそのモノドロミー	49

6	その後の発展	58
6.1	Dijkgraaf-Vafa 予想と β -アンサンブル	58
6.2	Zamolodchikov 漸化式による AGT 予想の証明	64
7	まとめと現状	68
A	算術をいくつか	69
A.1	Young 図	69
A.2	Barnes 二重ガンマ関数と DOZZ 三点関数	70

1 Introduction

ここ数十年間の素粒子物理学において、共形場理論は重要な役割を担ってきた。特に二次元共形場理論は、1984 年の Belavin, Polyakov, Zamolodchikov によるミニマル模型系列の発見 [1] を皮切りに、弦理論の進展を背景にして精力的に研究が進められ、非常に大きな発展を見せた。その結果これまでに、弦理論の世界面理論として、あるいは統計系の臨界現象を記述する固定点理論として華々しい応用的結果を与えている。さらには相関関数の解析的構造に関しても、場の理論としては特異的なことに、非常に深い数学的理解を得ることに成功している。

その一方、四次元の $\mathcal{N} = 2$ 超対称ゲージ理論もまた、厳密な解析を遂行することに成功した代表的な場の理論のモデルである。特に Seiberg と Witten により展開されたミラー対称性的な手法により、その低エネルギー有効作用が完全に決定されている [2]。これもまた、場の量子論の驚くべき結果として突出している。さらには 2002 年に入ると、Nekrasov らによって $\mathcal{N} = 2$ 超対称ゲージ理論の経路積分を厳密に実行する処方法が提唱された [3]。インスタントン計算の手法により Nekrasov が得たこの分配関数は Seiberg-Witten プリポテンシャルの母関数に他ならず、永らく期待されていた Seiberg-Witten 理論の微視的導出が与えられたことになる。

このように二次元共形場理論と四次元 $\mathcal{N} = 2$ ゲージ理論はそれぞれ永い研究の歴史をもつ、二つの独立な成熟した研究対象であった。ところが 2009 年になり、Alday, Gaiotto および Tachikawa によって二つの理論の間に驚くべき結びつきが発見された [4]。それが本稿の主題である **AGT 予想**、あるいは **AGT 対応** と呼ばれる双対性である。

本稿の目的の一つは、Zamolodchikov らによって発展させられた共形ブロックの組み合わせ論的計算手法を紹介することにある。共形場理論についてはすでに専門家の手による多くの優れた文献 [5, 6, 7, 8] があるので、筆者が新しい解説を加える意義はあまり無い。しかし共形ブロックの具体的な算出法を詳しく説明したものはあまり見当たらないので、ここでは共形ブロックの計算を目標として共形場理論のごく一部を紹介したい。この内容は 2 章で扱われる。

3 章では Nekrasov 分配関数を手短かに導入した後、いくつかの具体的なゲージ理論の例を上げてこれを計算する。

4 章以降が本稿の主題である AGT 予想の解説である。前章までに導入された共形ブロックと Nekrasov 分配関数を用い、原論文の道筋を辿って AGT 予想を発見法的に確認したい。AGT 対応の発見直後に立て続けに見つかった拡張についても解説する。特に重要なものとして Wyllard により発見された $SU(N)$ ゲージ群への拡張 [9]、Gaiotto らによる漸近自由ゲージ理論と非正則共形ブロックの対応 [10] を議論したい。

以上はゲージ理論の分配関数セクターにたいする対応であったが、オペレータのセクターに対しても二次元共形場理論に対応物があると期待するのは自然である。5 章ではこのような話題について概観してみたい。特にゲージ理論の演算子として、Wilson-'tHooft ループ演算子と表面演算子につい

で議論する。ここで紹介する美しい結果は Alday、Drukker、Gaiotto、Gomiz、Gukov、Morrison、Okuda、Tachikawa、Teschner、Verlinde らの精力的な研究による [11, 12].

最後の章では、その他の話題について手短かに述べる。はじめに Dijkgraaf と Vafa による位相的ストリング理論への埋め込みについて議論したい [13]. 彼らはストリング理論に埋め込むことで、AGT 予想が幾何学的転移（ラージ N 双対性）より説明されることを発見した。その副産物として、Nekrasov 分配関数と β -アンサンブルとの間に対応が発見された。 β -アンサンブルはランダム行列模型の一種であるから、この Dijkgraaf-Vafa 予想は四次元ゲージ理論と 0 次元行列模型の関係を与えており興味深い。

Dijkgraaf と Vafa の論文により、AGT 予想のストリング的な説明が一応は成なされたものの、本質的理解にはまだほど遠い感がある。そこでこの双対性のカラクリを理解するためにも数学的証明の完成が期待されるのであるが、一部の例においてこのような試みに成功がみられる。特に単純なゲージ群と物質場コンテンツを選んだ場合、対応する共形ブロックは比較的シンプルな Zamolodchikov 漸化式により支配されている。したがってこの漸化式をゲージ理論側で証明すれば、等価性の証明となる訳である。簡単な理論を例にとって、この証明のプログラムについても触れたい。

AGT 予想について、提唱者本人による解説 [14] がある。かんにして様を得たレビューであるので、あわせて読まれることをお勧めしたい。

2 二次元共形場理論と共形ブロック

共形場理論の解説として、[5, 6, 7, 8] などの専門家による解説が数多くある。ここでは Polchinski の著名な教科書 [7] の 3 章に従い、共形場理論の要点だけを説明する。その後で共形ブロックの概念を導入し、具体的な計算を行うことで AGT 予想への導入としたい。

2.1 二次元共形場理論

共形場理論とは共形不変性をもつような場の量子論の模型のことである。**共形変換**とは局所的なスケール変換 $ds^2 \rightarrow \Lambda(x)ds^2$ のことである。本稿で扱うのは主に二次元の共形場理論である。この理論を制御している二次元共形対称性とは、正則座標変換 $z \rightarrow f(z)$ の導く変換 $ds^2 = dzd\bar{z} \rightarrow |f'(z)|^2 dzd\bar{z}$ のもとでの不変性にほかならない。このような対称性をもつ二次元場の量子論が共形場理論である。この章では、共形対称性が相関関数を強く制御しており、このことが厳密な解析を可能にしている様子を説明したい。そのために、まずは共形場理論の「公理的」な側面を見てみることにしよう。

状態・演算子対応

共形場理論の一般的性質をみていくため、その基礎となる**状態・演算子対応**の考え方を導入することから始めよう。通常は状態と局所演算子は異なる概念であり、理論のスペクトルを調べる際には状態について調べている。共形場理論の持つ著しい特徴は、この理論においては状態と局所演算子が等価となることである。その鍵となるのが、複素 z -平面とシリンダー $w \in \mathbb{C}^\times$ との共形変換 $z \rightarrow z = e^{iw}$ である。 $w = \sigma - i\tau$ の表すシリンダーにおける同時刻 $\tau = \text{const}$ は、 z -平面においては等動径のスライスにほかならない。そこでシリンダー上では動径を時間と見なした**動径量子化**を考える事にしよう。 z -平面へ写像することで、始状態のある無限の過去 $\tau = -\infty$ を複素平面の原点 $z = 0$ に対応させることが出来る。したがって状態・演算子対応の基本的なアイデアとは、**ある動径同時刻で与えられた状**

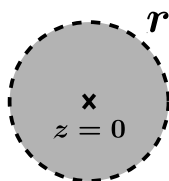


図 1: z -平面上での動径同時刻。

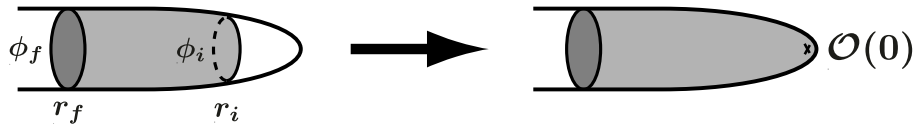


図 2: 状態・演算子対応.

態に対して、原点にある局所演算子をさせることである。なぜこの対応が可能であるのかを、さっそくみてゆくことにしよう。

手始めに量子力学における波動関数 $\psi(x, t)$ を考えよう。Schrödinger 表示で考えることにする。状態 $|\psi(t)\rangle$ から座標表示の波動関数を定めるためには、量子化を行う時刻における位置の固有状態で展開し、その係数 $\psi(x) = \langle x|\psi, t\rangle$ を見ればよい。したがってこの波動関数の表示に座標の完全系を挿入することで、時間発展は

$$\langle x_f|\psi_f, \tau_f\rangle = \int dx_i G(x_f, x_i) \langle x_i|\psi_i, \tau_i\rangle. \quad (2.1)$$

と与えられることがわかる。時間発展を定めているこのグリーン関数は

$$\begin{aligned} G(x_f, x_i) &= \langle x_f|e^{-i(\tau_f-\tau_i)H}|x_i\rangle \\ &= \int_{x(\tau_i)=x_i}^{x(\tau_f)=x_f} \mathcal{D}x e^{iS}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

と経路積分表示される。

場の理論における波動（汎）関数 $\Psi[X(\sigma)]$ も、ある時刻で状態 $|\Psi\rangle$ に場の配位 $X(\sigma)$ を見いだす確率振幅として与えられる。したがってまったく同様の議論により、場の理論での波動関数の公式は次のように与えられる：

$$\langle X_f(\sigma)|\Psi_f, r_f\rangle = \int \mathcal{D}X_i \int_{X(r_i)=X_i}^{X(r_f)=X_f} \mathcal{D}X e^{-S[X]} \langle X_i(\sigma)|\Psi_i, r_i\rangle. \quad (2.3)$$

ここではグリーン関数の経路積分表示を挿入した表示を書き下した。今は複素平面の動径方向を時間発展と見なしている。したがって図 2 の左にある二つの動径「時間」 $r_{i,f}$ の間の時間発展を与えているのが式 (2.3) である。そしてこの時間発展を計算するためには、時刻 $r_i \leq r \leq r_f$ の場 X の配位について経路積分を行えば良い。ただし上の公式では、時刻 $r_{i,f}$ における場に関しては境界条件 $X(r_{i,f}) = X_{i,f}$ によって固定して積分しなければならない。つまり経路積分形式で場の境界条件を与えることは状態を指定することを意味しているのである。ここで始状態を与える時刻 r_i をどんどん過去にとってゆくことを考えてみよう。すると十分遠い過去 $r_i \rightarrow 0$ は、原点 $z = 0$ にほかならない。すると $\int \mathcal{D}X_i$ の積分において、始状態の指定に対応して $|z| = r_i$ で挿入されていた重み $e^{-S[X_i]}$ は原点のみに挿入されることになる。つまりこの極限では、始状態を定める境界条件 $X(r_i) = X_i$ の影響を、境界なしの積分における原点への局所演算子の挿入として表現できることになる：

$$\langle X_f(\sigma)|\Psi_f, r_f\rangle = \int_{X(r_f)=X_f} \mathcal{D}X e^{-S[X]} \mathcal{O}(z=0). \quad (2.4)$$

このように始状態を遠い過去 $r_i \rightarrow 0$ で与えたと考えると、ある状態を指定することは原点に局所演算子を挿入することとまったく同じであることが理解できる。

以上の議論が導く結論は、二次元共形場理論においては状態と局所演算子は等価な概念である、というものである。これを状態・演算子対応と呼ぶ。この対応を背景に、以下では主に局所演算子全体の集合を考えることにする。これらのことをしばしば場と呼ぶことになるが、必ずしも基本場ではなく複合場も含めた概念であり、通常用語法と違いがあることに注意したい。

エネルギー運動量テンソルと演算子積展開

共形場理論においては局所演算子すべての集合 $\{\mathcal{O}_i\}$ を考えると述べたが、これらの積の構造が非常に重要な情報となってくる。とくに挿入点同士が近づいたときの特異的な振る舞いに関心があるのだが、これを記述するのが**演算子積展開 (OPE)**である。つまり OPE とは、演算子積を集合 $\{\mathcal{O}_i\}$ を基底として展開し直した関係式のことを言う：

$$\mathcal{O}_i(z, \bar{z})\mathcal{O}_j(w, \bar{w}) = \sum_k C_{ij}^k(z-w, \bar{z}-\bar{w})\mathcal{O}_k(w, \bar{w}). \quad (2.5)$$

ただしこの関係式は、時間順序をとった任意の相関関数の中においてこの書き換えが成立することを意味している。挿入点が近づくとき、この展開係数 C は一般に発散するのであるが、この特異的な振る舞いが非常に重要である。それは **Ward-Takahashi 恒等式を通じて、対称性変換のもとでの場の変換性を反映している**からである。

そこで二次元の Ward-Takahashi 恒等式を考えよう。ある対称変換 $\mathcal{O}_i \rightarrow \mathcal{O}_i + \epsilon\delta\mathcal{O}_i$ に関するカレントを $J_{z,\bar{z}}$ と書くことにする。するとストークスの定理を用いることで、Ward-Takahashi 恒等式は

$$\langle \delta\mathcal{O}(w)\cdots \rangle = \frac{i}{2\pi} \oint dz \langle J_z(z, \bar{z})\mathcal{O}(w)\cdots \rangle - \frac{i}{2\pi} \oint d\bar{z} \langle J_{\bar{z}}(z, \bar{z})\mathcal{O}(w)\cdots \rangle \quad (2.6)$$

と与えられる。ただし $\epsilon(z) \neq 0$ となる領域には演算子 $\mathcal{O}(w)$ だけが挿入されているものとする。二次元上のテンソル算のコンベンションは Polchinski[7] に従ったので、細かい定義などはそちらを参照してください。注目すべきことに、この右辺は J と \mathcal{O} の OPE の留数を与えている。

$$\langle \delta\mathcal{O}(w)\cdots \rangle = -\langle \text{Res}[J_z\mathcal{O}]\cdots \rangle + \langle \text{Res}[J_{\bar{z}}\mathcal{O}]\cdots \rangle \quad (2.7)$$

つまり Ward-Takahashi の恒等式は、場の変換性と、場とカレント間の OPE の極を結びつけている。

そこで共形変換 $\delta z = \epsilon(z), \delta \bar{z} = \bar{\epsilon}(\bar{z})$ に対する Ward-Takahashi の恒等式を考えてみることにしよう。共形変換が与えるカレントはエネルギーストレステンソル T であったことを思い出そう [7]。つまり $J_z = T(z)\epsilon(z), J_{\bar{z}} = \bar{T}(\bar{z})\bar{\epsilon}(\bar{z})$ である。したがって微小共形変換 $\delta z = \epsilon(z)$ に関する場の変換性は、エネルギーストレステンソルとの OPE から読み取ることが出来るのである：

$$\delta\mathcal{O} = -\text{Res}[\epsilon(z)T(z)\mathcal{O}(w)] \quad (2.8)$$

反正則の自由度 $\delta \bar{z} = \bar{\epsilon}(\bar{z})$ についても同様である。このように場の変換性は、エネルギーストレステンソルとの OPE の情報の一部を担っている。どの程度までの情報が読み取れるかについては、場の種類に依存しており、これについては次に述べる。

プライマリー場と OPE

代表的な共形変換として、手始めに**並進** $\delta z = \epsilon$ を考えてみよう。この変換のもとでの場の振る舞いは $\delta\mathcal{O} = \mathcal{O}(z-\epsilon) - \mathcal{O}(z) = -\epsilon\partial\mathcal{O}(z) + \cdots$ と単純である。したがって任意の場にたいし、OPE の一位の極は $T(z)\mathcal{O}(w) = \cdots + \frac{\partial\mathcal{O}(w)}{z-w} + \text{reg.}$ と決まった形をしている（以下ではしばしば反正則の部分 \bar{w} について省略する）。

次に重要な共形変換として、 $\delta z = \epsilon z, \delta \bar{z} = \bar{\epsilon} \bar{z}$ がある。 ϵ の実部・虚部が生成するのはスケールリングと回転にほかならない。動径量子化では、これらに対応するカレントはエネルギーと角運動量の役割を果たすことになる。当然のことながら、Hilbert 空間の中の一般の状態は、ハミルトニアンや角運動量演算子のもとでよく振る舞う保証は無い。そこでこれらの固有状態に対応する概念を導入することにしよう：

擬プライマリー場 quasi-primary operator とは、つぎの変換性をもつ局所演算子である。

$$\delta\mathcal{O} = -\epsilon(\Delta\mathcal{O} + z\partial\mathcal{O}) - \bar{\epsilon}(\tilde{\Delta}\mathcal{O} + \bar{z}\bar{\partial}\mathcal{O}). \quad (2.9)$$

$\Delta, \tilde{\Delta}$ をこの場の**重み**と呼ぶ。

この $\Delta, \tilde{\Delta}$ がエネルギーと角運動量に対応している。これを $\text{Res}[zT(z)\mathcal{O}(w)]$ と比較すると、二次の極の値が固定されていることが分かる。つまり擬プライマリー場とは、OPE

$$T(z)\mathcal{O}(w) = \dots + \Delta \frac{\mathcal{O}(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial\mathcal{O}(w)}{z-w} + \text{reg.}, \quad (2.10)$$

を持つ場のことである。

以上の議論では OPE の 3 次以上の極については制限することが出来なかった。そこで OPE の特異性と共形変換性が同じ情報を担っている状況を考えるため、格段に振る舞いの良い場を考えてみよう：

プライマリー場 primary operator とは、OPE の特異性が二次までの擬プライマリー場

$$T(z)\mathcal{O}(w) = \Delta \frac{\mathcal{O}(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial\mathcal{O}(w)}{z-w} + \text{reg.}, \quad (2.11)$$

のことである。

この式は Ward-Takahashi の恒等式より、 $\delta z = \epsilon(z)$ の下での変換性 $\delta\mathcal{O} = -\Delta\epsilon'\mathcal{O} - \epsilon\partial\mathcal{O}$ と等価であることがすぐに分かる。以下では、このプライマリー場が考察の中心を占めることになる。

Virasoro 代数

一般的な CFT において、エネルギー・ストレストンソルの OPE は次の形をとることが知られている：

$$T(z)T(0) = \frac{c}{2z^4} + \frac{2}{z^2}T(0) + \frac{1}{z}\partial T(0) + \dots \quad (2.12)$$

ここで c は中心電荷とよばれ、共形変換のアノマリーに由来する量である。この OPE 関係式は、具体的な CFT のモデルをとりあげ計算してみると確認できる。

$$L_m L_n - L_n L_m \longleftrightarrow \text{Diagram 1} - \text{Diagram 2}$$

図 3: Virasoro 代数の演算子積による表示。

さてここで、 $T(z)$ は共形変換から生成されるカレントであったことを思い出そう。したがってエネルギー・ストレストンソルのモード展開

$$T(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{L_m}{z^{m+2}},$$

$$L_m = \oint_{C_0} \frac{dz}{2\pi iz} z^{m+2} T(z),$$

は、場の上での共形変換の生成子を与える。したがって OPE(2.12) から、この生成子の交換関係を導くことが出来る：

$$[L_m, L_n] = \oint_{C_0} \frac{dz}{2\pi iz} \oint_{C_0} \frac{dw}{2\pi iw} z^{m+2} w^{n+2} T(z) T(w) - \oint_{C_0} \frac{dz}{2\pi iz} \oint_{C_0} \frac{dw}{2\pi iw} z^{m+2} w^{n+2} T(w) T(z). \quad (2.13)$$

ここで一つ注意すべきことがある。それは相関関数内は演算子は時間順序積をとられていたこと、

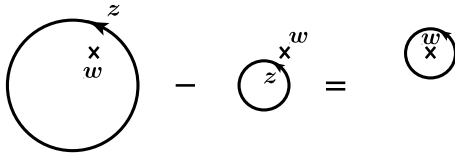


図 4: 積分経路の変形.

つまり動径量子化の場合は演算子は**動径順序積**をとられていることである. したがって相関関数のなかでは演算子はすべて動径順序に並んでいるので, 以下では演算子の積は動径順序積として扱う. すると式 (2.13) 右辺の二項は図 3 のような積分経路に対応していることになる. そこで図 4 のように積分経路を変形してみよう. すると交換関係の右辺は一つの留数積分に書き換えられる:

$$[L_m, L_n] = \oint_{C_0} \frac{dw}{2\pi iw} \oint_{C_w} \frac{dz}{2\pi iz} z^{m+2} w^{n+2} T(z) T(w). \quad (2.14)$$

このようにして OPE(2.12) から, 有名な **Virasoro 代数**を得ることが出来る

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2 - 1)\delta_{m,-n} \quad (2.15)$$

ただし実際にはこの代数 $\text{Vir}(c)$ に加えて, 半正則自由度に由来する生成子 \bar{L}_m もあり, それらは異なる \bar{c} に対する同様の代数 $\overline{\text{Vir}}(\bar{c})$ を形成する. またこれら二つのセクターは交換する $[L_m, \bar{L}_n] = 0$.

プライマリー状態と共形族

次に Virasoro 生成子の状態への作用について調べよう. 状態・演算子対応を用いると, 状態 $|\mathcal{O}\rangle$ への L_n の作用は, T と \mathcal{O} の間の OPE から読み取ることが出来る. したがって状態の共形変換に関しては

$$L_n|\mathcal{O}\rangle \longleftrightarrow \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z) \mathcal{O}(0) = L_n \cdot \mathcal{O}(0), \quad (2.16)$$

という対応が成り立っていることになる.

そこで演算子 \mathcal{O} としてプライマリー場をとってみよう. プライマリー場は, エネルギー運動量テンソルとの OPE に $1/z^2$ 以下の特異性を持たなかったので $L_0|\mathcal{O}\rangle = \Delta|\mathcal{O}\rangle, L_{n \geq 1}|\mathcal{O}\rangle = 0$ という状態を定めることになる. このような状態を $|\Delta\rangle$ と書き, 次元 Δ の**プライマリー状態**, あるいは最高ウェイト状態という.

真空 ($SL(2, \mathbb{C})$ 不変状態) は恒等演算子 1 に対応する: $|1\rangle \longleftrightarrow 1.T$ と 1 の OPE には特異性が無いから, 状態・演算子対応より $L_n|1\rangle = 0, n = -1, 0, 1, \dots$, となる. 注目すべきことに, 真空をすべての Virasoro 生成子で消されるように定義することは出来ず, 最大限でもせいぜい $n = -1, 0, 1, \dots$ に対してしか条件を課すことができない.

さて, 準備が整ったので Virasoro 代数の表現論を紹介しよう. プライマリー状態はスペクトルの下限を与えている. すなわちスペクトルの中の基底状態に対応している. そこでこれに生成演算子を作作用させることでスペクトル全体が生成されるが, 上昇演算子は $L_{n < 0}$ で与えられる. なぜならば, 交換関係より状態 $|\mathcal{O}\rangle$ に Virasoro 演算子が作用すると $L_0 L_n|\mathcal{O}\rangle = (L_n L_0 - n L_n)|\mathcal{O}\rangle = (\Delta(\mathcal{O}) - n)L_n|\mathcal{O}\rangle$ となるので, Virasoro 生成子は昇降演算子の役割を果たすからである. そこでプライマリー状態に上昇演算子 $L_{n < 0}$ を繰り返し作用させることで, 次のようにスペクトルが生成される:

$$\begin{aligned} & \dots\dots\dots \\ & L_{-1}^3|\Delta\rangle \quad L_{-2}L_{-1}|\Delta\rangle \quad L_{-3}|\Delta\rangle \\ & \quad L_{-1}^2|\Delta\rangle \quad L_{-2}|\Delta\rangle \\ & \quad \quad L_{-1}|\Delta\rangle \\ & \quad \quad \quad |\Delta\rangle \end{aligned}$$

この Hilbert 空間 \mathcal{V}_Δ を **共形族** とよぶ. あるいはこれは Virasoro 代数の最高ウェイト表現の空間であり、**Verma 加群** とも呼ばれる. あいまいさを回避するために Virasoro 生成子の作用 $L_{-Y_1}L_{-Y_2}\cdots$ の順序を $Y_1 \geq Y_2 \geq \cdots$ と固定しよう. この表現空間の一般の基底ベクトルは、Young 図でラベルされる. それは今の場合、Verma 加群の任意の基底ベクトルは $L_{-Y}|\Delta\rangle = L_{-Y_1}L_{-Y_2}\cdots L_{-Y_d(Y)}|\Delta\rangle =: |\Delta, Y\rangle$ と Young 図 $Y = [Y_1 \geq Y_2 \geq \cdots \geq 0]$ で指定できるからである. L 演算子に加えて \bar{L} もあり、両者は可換 $[L_m, \bar{L}_n] = 0$ であるので、実際の表現空間はテンソル積 $\mathcal{H} = \mathcal{V}_\Delta \otimes \mathcal{V}_\Delta$ である. このように一般的には共形族の基底ベクトルは $L_{-Y}|\Delta\rangle$ によって張られるが、一つ注意すべきことがある. それは c や Δ が特殊な値をとる時には、この表現空間には退化が起こるためである. これを理解するために

$$|\Phi_{2,1}\rangle = L_{-2}|\Delta\rangle - \frac{3}{2(2\Delta+1)}L_{-1}^2|\Delta\rangle, \quad (2.17)$$

というベクトルを考えてみよう. 中心電荷が $c = 2\Delta(5-8\Delta)/(2\Delta+1)$ という特殊値をとるとき、このベクトルはゼロノルム状態になっていることがすぐに確認できる:

$$\langle \Delta, Y | \Phi_{2,1} \rangle = 0, \quad \text{for any } Y. \quad (2.18)$$

ただしレベル 2 のベクトルとの内積のみ考えれば十分である事に注意. したがってこのベクトルとそのディセグメントは理論から取り除かれ、理論の Hilbert 空間は縮小することになる. このような状態を生成する場 $\Phi_{2,1}(z)$ を **退化場** と呼び、具体的な共形場理論の考察で重要な役割を果たす. その働きの一端については、五章で垣間見ることになる.

さて以上の議論から、プライマリー状態のスペクトラムさえ分かれば共形場理論のすべてのスペクトラムは共形変換によって生成できてしまうことが分かった. つまり共形場理論で調べるべき基本的な対象は、真空からプライマリー状態を励起するプライマリー場ということになる. そこで以下での議論の主眼は、理論の対称性を駆使しプライマリー場の相関関数を計算することに置かれる.

2.2 Virasoro 対称性と相関関数

Ward-Takahashi の恒等式 (2.8) より、共形変換 $z \rightarrow z + \epsilon(z)$ の下でプライマリー場の相関関数は

$$\delta(\mathcal{O}_1(z_1)\mathcal{O}_2(z_2)\cdots) = \sum_i (\epsilon(z_i)\partial_i + \Delta_i\partial\epsilon(z_i))(\mathcal{O}_1(z_1)\mathcal{O}_2(z_2)\cdots), \quad (2.19)$$

を満たす. この方程式を通じて、共形不変性は相関関数に強い制限を与えることになる. そこで共形変換群の重要な部分群 $SL(2, \mathbb{C})$ 、 $z \rightarrow (az+b)/(cz+d)$, $ad-bc=1$ について考察することにしよう. この部分群の無限小変換は

$$z \rightarrow \frac{(1+\epsilon\alpha)z + (\epsilon\beta)}{(\epsilon\gamma)z + (1-\epsilon\alpha)} \simeq z + \epsilon(\beta + 2\alpha z - \gamma z^2), \quad (2.20)$$

で与えられる. そこで無限小 $SL(2, \mathbb{C})$ 変換 $\epsilon(z) = \epsilon(\beta + 2\alpha z - \gamma z^2)$ を考え、そのもとでの不変性を課してみよう. すると Ward-Takahashi の恒等式 (2.19) から、拘束条件

$$0 = \sum_i \partial_i (\mathcal{O}_1(z_1)\mathcal{O}_2(z_2)\cdots), \quad (2.21)$$

$$0 = \sum_i (z_i\partial_i + \Delta_i) (\mathcal{O}_1(z_1)\mathcal{O}_2(z_2)\cdots), \quad (2.22)$$

$$0 = \sum_i (z_i^2\partial_i + 2\Delta_i z_i) (\mathcal{O}_1(z_1)\mathcal{O}_2(z_2)\cdots), \quad (2.23)$$

が得られる. 反正則部分についても同様である.

では、三点関数を与える OPE(2.5) に対して上の $SL(2, \mathbb{C})$ 不変性を用いてみよう。まず並進不変性 (2.21) より、OPE 係数の z_i 依存性に $0 = (\partial_z + \partial_w) C_{ij}^k(z, w; \bar{z}, \bar{w})$ と制限がつく。反正則部分についても同様だ。つまり $C(z, w; \bar{z}, \bar{w})$ は、座標の差 $z - w, \bar{z} - \bar{w}$ のみの関数である。さらにこの関数に、共形不変性 (2.22) を課してみると

$$\left(z \frac{\partial}{\partial z} + w \frac{\partial}{\partial w} \right) C_{ij}^k(z - w, \bar{z} - \bar{w}) = (\Delta_k - \Delta_i - \Delta_j) C_{ij}^k(z - w, \bar{z} - \bar{w}), \quad (2.24)$$

というように、OPE 係数に対して微分方程式が立つ。したがってこれを解くことによって、係数 C の座標依存性が完全に決定される:

$$C_{ij}^k(z - w, \bar{z} - \bar{w}) = \frac{C_{ij}^k}{(z - w)^{\Delta_i + \Delta_j - \Delta_k} (\bar{z} - \bar{w})^{\bar{\Delta}_i + \bar{\Delta}_j - \bar{\Delta}_k}}. \quad (2.25)$$

このように Möbius 変換 $SL(2, \mathbb{C})$ は三点関数の関数形を完全に固定してしまう。係数 C は、具体的な共形場理論としてどのようなものかを考えてるのかによって決まる数である。

残念ながら、この手法だけでは四点以上の相関関数を決められないことはすぐに分かる。そこで威力を発揮するのが、共形対称性の全体が成す無限次元代数である。このノートでは、理論の共形対称性として Virasoro 代数を考えてゆくが、これはプライマリー場の (カイラル) 相関関数を決定するの際にとっても強力な道具となる。そして相関関数を、Virasoro 代数の表現の言葉で書き表すことが出来ることになる。そこで本節では Virasoro 代数の効果的な使い方を考えてゆく。以下では主にプライマリー場に対する相関関数を計算してゆくことに注意しよう。それは Ward-Takahashi の恒等式を用いれば、原理的にはディセダント場の相関関数もプライマリーの言葉で表すことが出来るからである。つまりプライマリー場に対する相関関数を調べれば十分なのである。

まず共形場理論の一般的側面についてまとめよう。通常、場の量子論は、理論の基本場とそれに対するラグランジアンによって定められている。しかしながら共形場理論においては、基本場という考え方は必ずしも有用ではなく、局所演算子 (共形場理論における場) 全体の集合を考える方が自然であった。さらに必ずしもラグランジアンによる記述が必要でもない。では共形場理論のダイナミクスを定めるのにおいて本質的なものは何であったかということ、それは局所演算子の対称性のもとの変換性 (Ward-Takahashi の恒等式)、つまり OPE の振る舞いであった。

プライマリー場の集合と、それらが融合したときどのような場が表れるかを知ることが、共形場理論のダイナミクスを知ることである。そして相関関数は演算子の代数と Riemann 面に由来するモジュラー性を柱にして決定される。一般的な理論では、さらに高い理論の対称性を援用しなくてはならなくなるが、本稿では Virasoro 代数で十分な例について考えてゆこう。

2.3 共形ブロックとその組み合わせ論

この節では、共形ブロックを構成的に定義するために、四点関数を具体例にとって調べることにする。共形ブロックは共形場理論の相関関数のうち、正則なセクターからの寄与のみを取り出したものである。したがって、実際の相関関数は反正則部分もあわせて組み立てられる。この操作については後で解説することにして、この節では理論の正則なセクターに制限して考えてゆくことにしよう。したがって以下ではしばらく、場 \mathcal{O} は正則変数 z のみに依存するものとする。

さて、これから我々が計算してゆくのはプライマリー場の四点関数 $\langle V_4(\infty) V_3(1) V_2(q) V_1(0) \rangle$ である。ここで V_i は次元 Δ_i の頂点演算子 (プライマリー場) を表すものとする。以下では $V(\infty)$ と書いたときは、演算子の変換性から読み取れる特異性をとりのぞいたもの $V(\infty) := \lim_{z \rightarrow \infty} z^{2\Delta} V(z)$ を意味するものとする。この定義は BPZ による状態の共役の定義に対応している。

なおこれからの主題となる共形ブロックは、Belavin、Polyakov、そして Zamolodchikov により導入され [1]、ここで紹介する計算手法もまた彼らによって発展させられた。BPZ 共形ブロックの組み合わせ論的算法については参考文献 [5, 15, 16] 等で扱われている。

共形場理論においては、相関関数を決定するために活躍するのは共形対称性と場の代数構造 (OPE) である。そこで、まず $V_2(q)V_1(0)$ に対して OPE を用いることで、この相関関数を書き換えてみよう。すると

$$\begin{aligned} \langle V_4(\infty) V_3(1) V_2(q) V_1(0) \rangle &= \sum_A \frac{C_{21}^A}{q^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_A}} \langle V_4(\infty) V_3(1) V_A(0) \rangle \\ &= \frac{1}{q^{\Delta_1+\Delta_2}} \sum_A q^{\Delta_A} \Gamma_{34A} C_{21}^A, \end{aligned} \quad (2.26)$$

と三点関数の言葉で書き直すことが出来る。ただし、ここで「頂点関数」 $\Gamma_{12A} := \langle V_2(\infty)V_1(1)V_A(0) \rangle$ を導入した。この A に関する和はプライマリーだけではなくディセダント場全体にわたることに注意する。さらに次の「頂点関数」も導入しよう：

$$\begin{aligned} \Gamma'_{A;12} &:= \langle V_A | V_1(1) V_2(0) \rangle \\ &= \sum_B C_{12}^B \langle V_A | V_B \rangle. \end{aligned} \quad (2.27)$$

するとこの式の二行目の最後の因子は Shapovalov(-Gram) 行列 G_{AB} そのものであるから

$$C_{12}^A = \sum_B (G^{-1})^{AB} \Gamma'_{B;12}, \quad (2.28)$$

となる。ここで、Shapovalov 行列は無次元行列であるが、ブロック対角系をしているために逆を定めることが出来る。したがって四点関数は、次のように頂点関数と Gram 行列で書き表される

$$\langle V_4(\infty) V_3(1) V_2(q) V_1(0) \rangle = \frac{1}{q^{\Delta_1+\Delta_2}} \sum_{A,B} q^{\Delta_A} \Gamma'_{A;21} (G^{-1})^{AB} \Gamma_{34B}. \quad (2.29)$$

この表示から、Virasoro 代数の表現論に関する因子を抜き出すことで共形ブロックが定義される。

Virasoro 対称性と相関関数の構造

Verma 加群の構造を思い出そう。ディセダント状態は元になるプライマリーの次元 $\Delta(\alpha)$ とヤング図で指定されていたので、ディセダント場は $V_{(\alpha,Y)}(z) = L_{-Y} V_\alpha(z)$ と $A = (\alpha, Y)$ でラベルされる。ただしこのノートでは、Young 図 $Y = [Y_1 Y_2 \cdots Y_d]$ に対し、 $L_{-Y} := L_{-Y_1} L_{-Y_2} \cdots L_{-Y_d}$ という記法を用いている。この場は L_0 の固有値 $\Delta_{(\alpha,Y)} = \Delta(\alpha) + |Y|$ を持つことは簡単にチェックできる ($|Y| := \sum_i Y_i$)。

ここで理論のユニタリティーの要請から、Virasoro 演算子はエルミートであったことを思い出そう。つまり内積との整合性 $\langle L_{-n} V_A | V_B \rangle = \langle V_A | L_n V_B \rangle$ が保たれているべきである。このような内積の取り方として、 $\langle V_A | V_B \rangle = \langle V_A(\infty) V_B(0) \rangle$ がある。この条件を用いることで、頂点関数の満たすべき漸化式を導くことが出来る。そこでディセダントのラベルが下がるき、頂点関数 Γ' はどのくらい変

化するのを見積もってみよう. そのために次のような計算を行ってみる:

$$\begin{aligned}
\langle L_{-n} V_A | V_1(1) V_2(0) \rangle &= \langle V_A | L_n (V_1(1) V_2(0)) \rangle \\
&= \langle V_A | \oint_{C_0+C_1} \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z) V_1(1) V_2(0) \rangle \\
&= \oint_{C_0} \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} \sum_k \frac{1}{z^{k+2}} \langle V_A | V_1(1) (L_k V_2)(0) \rangle \\
&\quad + \oint_{C_1} \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} \sum_k \frac{1}{(z-1)^{k+2}} \langle V_A | (L_k V_1)(1) V_2(0) \rangle. \quad (2.30)
\end{aligned}$$

したがってこれを用いると, $z^{n+1} = \sum_{l=0}^{n+1} n_{+1} C_l (z-1)^l$ に注意して

$$\langle L_{-n} V_A | V_1(1) V_2(0) \rangle = \langle V_A | V_1(1) (L_n V_2)(0) \rangle + \sum_{l=0}^{n+1} n_{+1} C_l \langle V_A | (L_{l-1} V_1)(1) V_2(0) \rangle. \quad (2.31)$$

を得る. ではここで $V_{1,2}$ がプライマリーの時を考えてみよう. すると右辺第一項は $L_{n \geq 1}$ により消滅させられるから, 次のようにシンプルな関係式に書き換えることが出来る:

$$\langle L_{-n} V_A | V_1(1) V_2(0) \rangle = ((n+1)\Delta_1 + \delta_{n,0}\Delta_2) \Gamma'_{A;12} + \langle V_A | (L_{-1} V_1)(1) V_2(0) \rangle. \quad (2.32)$$

この式を解くために第三項を Γ' で表すことが出来ると良いが, そのためには $n=0$ を考えればよい:

$$\langle V_A | (L_{-1} V_1)(1) V_2(0) \rangle = (\Delta_A - \Delta_1 - \Delta_2) \Gamma'_{A;12}. \quad (2.33)$$

したがってこれを (2.32) に代入すれば

$$\Gamma'_{(\alpha, [nY]);12} = (\Delta_{(\alpha, Y)} + n\Delta_1 + \Delta_2) \Gamma'_{(\alpha, Y);12}. \quad (2.34)$$

という漸化式を得ることが出来る. ここで $[nY]$ はヤング図 Y に長さ n の列を加えたものの意味である. したがって再帰的にこの式を用いれば, ラベルのヤング図の長さをどんどん短くしてゆくことが出来る. つまり頂点関数は, Virasoro 代数の表現論で決まっている部分 \mathcal{R}' と共形場理論のモデルに依存する因子 C に分離する:

$$\boxed{\Gamma'_{(\alpha, Y);12} = \mathcal{R}'_{\alpha;12}(Y) C_{\alpha;12}}, \quad \boxed{\mathcal{R}'_{\alpha;12}(Y) = \prod_{i=1}^{d(Y)} (\Delta_{\alpha} + Y_i \Delta_1 - \Delta_2 + \sum_{j<i} Y_j)}. \quad (2.35)$$

ただしモデル依存因子は $C_{\alpha;12} = \Gamma'_{(\alpha, \emptyset);12}$ であり, この具体形を知るためには, 共形模型における計算を行わなければならない. 後で Liouville 理論の場合に具体的にみることにする.

さて, 次に頂点関数 Γ について考えてみることにしよう. この場合もディセグメントのラベルを下げてゆく際の振る舞いをみれば良いが, 今回は内積の性質を用いること無く調べることが出来る:

$$\begin{aligned}
\langle V_2(\infty) V_1(1) (L_n V_A)(0) \rangle &= \oint_{C_0} \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{z^{n-1}} \langle T(z) V_2(\infty) V_1(1) V_A(0) \rangle \\
&= - \oint_{C_1} \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{z^{n-1}} \sum_k \frac{1}{(z-1)^{k+2}} \langle V_2(\infty) (L_k V_1)(1) V_A(0) \rangle \\
&\quad - \oint_{C_\infty} \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{z^{n-1}} \sum_k z^{k-2} \langle (L_k V_2)(\infty) V_1(1) V_A(0) \rangle. \quad (2.36)
\end{aligned}$$

ただし積分経路の変形 $C_0 = -C_1 - C_\infty$ を行い、 $z = 1/\zeta$ のもとでのエネルギーストレステンソルの変換性 $T(z) = \zeta^4 T(\zeta)$ を用いて $z = \infty$ 周りでのローラン展開を行った。この留数積分を行うことで

$$\langle V_2(\infty) V_1(1) (L_n V_A)(0) \rangle = - \sum_{k=-1}^{\infty} -_{n+1} C_{k+1} \langle V_2(\infty) (L_k V_1)(1) V_A(0) \rangle + \langle (L_1 V_2)(\infty) V_1(1) V_A(0) \rangle,$$

が得られる。ただし負の引数に対する二項係数は

$$-_n C_k := (-1)^k \frac{(k+n-1)(k+n-2)\cdots(k+1)}{(n-1)!}, \quad (2.37)$$

で定めている。再び $V_{1,2}$ をプライマリーにとろう:

$$\langle V_2(\infty) V_1(1) (L_n V_A)(0) \rangle = - \langle V_2(\infty) (L_{-1} V_1)(1) V_A(0) \rangle + ((n-1) \Delta_1 + \delta_{n,0} \Delta_2) \Gamma_{12A}. \quad (2.38)$$

この式もまた $n = 0$ に対する式を用いることで漸化式の形で表すことが出来る。

$$\Gamma_{12(\alpha, [nY])} = (\Delta_{(\alpha, Y)} + n\Delta_1 - \Delta_2) \Gamma_{12(\alpha, Y)}. \quad (2.39)$$

したがってこの頂点関数もまた次のような普遍的な表示を持つ:

$$\boxed{\Gamma_{12(\alpha, Y)} = \mathcal{R}_{12\alpha}(Y) C_{12\alpha}}, \quad \boxed{\mathcal{R}_{12\alpha}(Y) = \prod_{i=1}^{d(Y)} (\Delta_\alpha + Y_i \Delta_1 - \Delta_2 + \sum_{j<i} Y_j)}. \quad (2.40)$$

そこで四点関数の計算に戻ることにしよう。OPE を用いた評価から、この相関関数の計算には二種類の頂点関数 Γ と Γ' があらわれていた。相関関数を組み立てるためのこれらブロックは、共形対称性により制御されているために、だいたいの構造を知ることが出来る。特に理論の対称性が Virasoro 代数の場合には、頂点関数の表現論的因子は完全に決定されてしまい、一種類しか無いことがわかった:

$$\boxed{\mathcal{R}'_{\alpha;12}(Y) = \mathcal{R}_{21\alpha}(Y)}. \quad (2.41)$$

この関係式自体は、 \mathcal{W}_3 代数などの他の拡大共形対称性の場合には保たれない。しかし表現論的な部分とモデル依存な因子に分離する現象はユニバーサルなものである。

簡単な計算から、共形族に対する計量もまた二つの部分に分離することが分かる。

$$G_{(\alpha, Y)(\alpha', Y')} := \langle L_{-Y} V_\alpha | L_{-Y'} V_{\alpha'} \rangle = \langle V_\alpha | L_Y L_{-Y'} V_{\alpha'} \rangle = \delta_{|Y|, |Y'|} \mathcal{G}_{\Delta_\alpha}(Y, Y') G_{\alpha\alpha'} \quad (2.42)$$

ここで \mathcal{G} の部分は **Shapovalov 行列** と呼ばれ、Virasoro 代数の表現論で与えられてしまう部分である:

$$\mathcal{G}_\Delta(Y, Y') = \langle \Delta | L_Y L_{-Y'} | \Delta \rangle. \quad (2.43)$$

つまりこれは Verma 加群の基底ベクトルから作られる Gramm 行列にほかならない。共形模型の選び方に依存している部分については、 $G_{\alpha\alpha'} = \delta_{\alpha, \alpha'}$ と規格化される様にプライマリー場の集合の基底をとることが出来る。

以上の準備から、いよいよ共形ブロックを定義できる。頂点関数と計量部分に表現論的因子とモデル依存因子の分離表示を適用することで、四点関数は次のような形をとることがわかる:

$$\langle V_4(\infty) V_3(1) V_2(q) V_1(0) \rangle = \frac{1}{q^{\Delta_1 + \Delta_2}} \sum_{\alpha, \alpha'} q^{\Delta_\alpha} (C_{43\alpha} (G^{-1})^{\alpha\alpha'} C_{21}) \mathcal{F} \left[\begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{matrix} \right] (\Delta(\alpha); q). \quad (2.44)$$

この四点関数のうち、 \mathcal{F} の部分は Virasoro 代数の表現論だけから決まっている量で、**共形ブロック conformal block** と呼ばれる:

$$\mathcal{F} \left[\begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{matrix} \right] (\Delta; q) = \sum_{|Y|=|Y'|} q^{|Y|} \mathcal{R}_{12\alpha}(Y) \mathcal{G}_{\Delta}^{-1}(Y, Y') \mathcal{R}_{34\alpha}(Y'). \quad (2.45)$$

ただし今の場合、 $G_{\alpha\alpha'} \propto \delta_{\alpha,\alpha'}$ であることに注意する.

この共形ブロック部分は共形代数に対する表現論的な量であり、共形場理論のモデルの取り方に依存しない. すなわち中心電荷 c の具体的な値などを代入すれば、どのような模型にでも適用できる表式である. 後に AGT 対応において Nekrasov 分配関数のインスタントン部分に対応することになるのは、このユニバーサルな部分である.

その一方相関関数 (2.44) においては、模型の詳細に依存して決まる部分もある. 三点関数から決まる係数 $CG^{-1}C$ の部分は、模型によっては非常に複雑な形をとる. Alday、Gaiotto および Tachikawa がまず始めに気がついたことは、三点関数のうち模型を Liouville 理論にとった場合に現れる因子が、Nekrasov 分配関数の摂動補正部分と完全に一致しているということである. 彼らはこの観察をヒントに AGT 予想を発見したわけであるが、この詳細については後の章でみることにする.

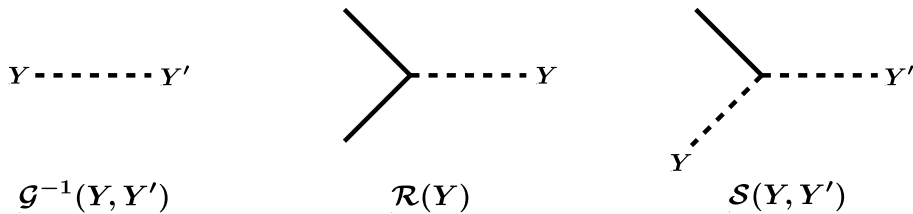


図 5: 共形ブロックを組み立てるのに用いるブロックの例. 左はプロパゲータで、残りは三点頂点関数. 点線はディセendant場が走る内線をあわらす. それらは Young 図 Y でラベルされている.

さて球面上の四点共形ブロック (2.45) であるが、この量は図 5 にあるプロパゲータ G^{-1} と頂点関数 \mathcal{R} によって組み立てられていると見なすことが出来る. したがって図式的には図 6 のように表すことが出来る.

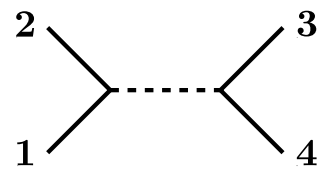


図 6: 球面上の四点共形ブロック $\mathcal{F} \left[\begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{matrix} \right]$.

Feynman 図形には内線を中間状態が走るが、この場合は内線を「運動量」 Y でラベルされるディセendant場が走る. このような Feynman ルールを用いることで、もっと複雑な Riemann 面上の共形ブロックも計算される. しかし一般には \mathcal{R} 以外のパーツも必要になってくる. 例えば図 5 における S は、三点頂点のうち、二つがディセendant場に対応しているものである:

$$\langle L_{-Y'} V_3 | V_2(1) L_{-Y} V_1(0) \rangle = \mathcal{S}_{123}(Y, Y') \langle V_3 | V_2(1) V_1(0) \rangle.$$

後でこれをトーラスの共形ブロックを計算する際に用いることになる. ちなみに Feynman グラフに三点頂点しかあらわれないのは、Riemann 面は常に三点付き球面、すなわちパンツに分解することが出来るからである.

共形ブロック

これまで議論して来た四点関数の例から、一般的な共形ブロックの定義は明らかであろう。一般の Riemann 面 $C_{n,g}$ 上で正則な相関関数を計算する際にも、どのような順番で場の OPE をとるのかを指定しなくてはならない。つまり、共形ブロックを考える際のチャンネル Γ をあらかじめ定めておくのである。

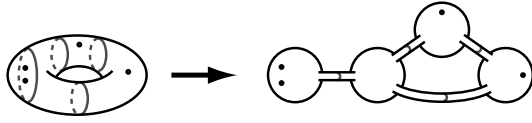


図 7: $C_{4,1}$ に関するパンツ分解の例.

先の四点関数の計算は、図 6 のように「s-チャンネル」で計算されていたことになる。そこで図 7 のように、考えるチャンネル Γ に対応して、Riemann 面をパンツ分解しておこう。これは点付き Riemann 面のモジュライが極限値に近い際の、面の退化パターンを表している。このパンツ分解の図式をもとに、共形ブロックを組み立て

ることが出来る。というのも、この退化した Riemann 面は図 8 のように、直ちにグラフを与えるからである。したがってあとはこの「Feynman グラフ」をもとに、共形ブロックを計算すればよい。そ

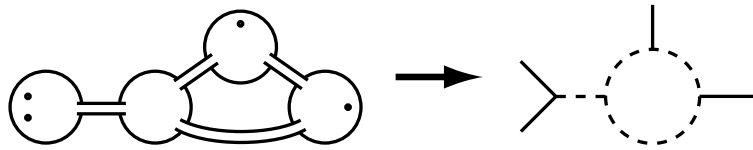


図 8: パンツ分解から共形ブロックへ.

の詳細はもう少し後に行うとして、以下ではまず基本的な構成ブロックの具体形を計算しておくことにしよう。

Shapovalov 行列

まずはプロパゲータを与える Shapovalov 行列 (2.43) についてみてゆこう。この行列の著しい特徴は、添字となっている Young 図のサイズが同じ成分以外では、値が 0 となってしまうことである：

$$\mathcal{G}_\Delta(Y, Y') \propto \delta_{|Y|, |Y'|}. \quad (2.46)$$

この事実は Virasoro 代数の交換関係を用いることで容易に示すことが出来るが、この性質のため Shapovalov 行列はブロック対角形をしている。したがって無限次元行列にも関わらず、問題なく逆をとる操作が行えることに注意しよう。そこでサイズ n の引数に対するブロックから、レベル n での Shapovalov 部分行列を定義しよう： $\mathcal{G}_\Delta^{(n)} = \{ \langle \Delta | L_Y L_{-Y'} | \Delta \rangle \mid |Y| = |Y'| = n \}$ 。すると Shapovalov 行列の逆をとる操作は、各ブロックごとに行えば良いので、共形ブロックを計算するためにあられるのはレベル n 部分行列の逆 $(\mathcal{G}_\Delta^{(n)})^{-1}$ である。

この部分行列の計算は Virasoro 代数を用いることで計算できる。レベル 1 については、この行列は $Y = Y' = [1]$ に対応した一成分しか無く

$$\langle \Delta | L_1 L_{-1} | \Delta \rangle = \langle \Delta | (2L_0 + L_{-1} L_1) | \Delta \rangle = 2\Delta, \quad (2.47)$$

である。したがって逆行列も $(\mathcal{G}_\Delta^{(1)})^{-1} = \frac{1}{2\Delta}$ と簡単に求まる。

レベル 2 についても難しくない。添字は Young 図 $[1^2] = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$ 、 $[2] = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$ をとれ、これは対称行列で

あるから次の三つの成分を計算すれば良い:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\Delta(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}) &= \langle \Delta | L_1^2 L_{-1}^2 | \Delta \rangle = \langle \Delta | L_1(L_{-1}L_1 + 2L_0)L_{-1} | \Delta \rangle \\ &= \langle \Delta | (L_1L_{-1}(L_{-1}L_1 + 2L_0) + 2(L_0L_1 + 2L_1)L_{-1}) | \Delta \rangle \\ &= \langle \Delta | ((L_{-1}L_1 + 2L_0)2L_0 + 2(L_0 + 1)(L_{-1}L_1 + 2L_0)) | \Delta \rangle = 4\Delta^2 + 4(\Delta + 1)\Delta, \\ \mathcal{G}_\Delta(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}) &= \langle \Delta | L_1^2 L_{-2} | \Delta \rangle = \langle \Delta | L_1(L_{-2}L_1 + 3L_{-1}) | \Delta \rangle = \langle \Delta | 6L_0 | \Delta \rangle = 6\Delta, \\ \mathcal{G}_\Delta(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}) &= \langle \Delta | L_2 L_{-2} | \Delta \rangle = \langle \Delta | (4L_0 + c/2 + L_{-2} L_2) | \Delta \rangle = 4\Delta + c/2. \end{aligned}$$

したがって、レベル 2 における Shapovalov 行列は

$$\mathcal{G}_\Delta^{(2)} = \begin{pmatrix} 4\Delta + c/2 & 6\Delta \\ 6\Delta & 4(2\Delta + 1)\Delta \end{pmatrix}, \quad (\mathcal{G}_\Delta^{(2)})^{-1} = \frac{1}{K^{(2)}} \begin{pmatrix} 4(2\Delta + 1)\Delta & -6\Delta \\ -6\Delta & 4\Delta + c/2 \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

で与えられる. ここで $K^{(2)}$ はレベル 2 での Kac 行列式である:

$$K^{(2)} = \det \mathcal{G}_\Delta^{(2)} = 2\Delta(c + 2c\Delta - 10\Delta + 16\Delta^2). \quad (2.49)$$

これらの具体的結果を後で計算に用いることにしよう.

頂点関数 \mathcal{R}

頂点関数についてはすでに一般的公式

$$\mathcal{R}_{12\alpha}(Y) = \prod_{i=1}^{d(Y)} (\Delta_\alpha + Y_i \Delta_1 - \Delta_2 + \sum_{j<i} Y_j), \quad (2.50)$$

を導いた. これを具体的に計算してみよう. レベル 1 においては、 $Y = \square$ について計算すればよく、 $\mathcal{R}_{12\alpha}(\square) = (\Delta_\alpha + \Delta_1 - \Delta_2)$ となる. レベル 2 については二つの Young 図 $Y = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$, $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$ が寄与し、頂点関数の値は

$$\vec{\mathcal{R}}_{12\alpha}^{(2)} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{12\alpha}(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}) \\ \mathcal{R}_{12\alpha}(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Delta_\alpha + 2\Delta_1 - \Delta_2) \\ (\Delta_\alpha + \Delta_1 - \Delta_2 + 1)(\Delta_\alpha + \Delta_1 - \Delta_2) \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

である. これ以上のレベルについても、計算法は明らかであろう.

頂点関数 \mathcal{S}

二つの場がディセンダントとなった場合の頂点関数 \mathcal{S} については、残念ながら (今のところ) 一般的な表示は与えられていない. しかしながらその計算自体は、頂点関数 \mathcal{R} の場合と全く同様に、漸化式 (2.31) を用いて計算することが出来る. 下のレベルからいくつか計算してゆくと

$$\mathcal{S}_{123}(\square, \Phi) = \mathcal{R}'_{3;2(1,\square)} = \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3, \quad (2.52)$$

$$\mathcal{S}_{123}(\Phi, \square) = \mathcal{R}'_{(3,\square);21} = \Delta_3 + \Delta_2 - \Delta_1, \quad (2.53)$$

$$\mathcal{S}_{123}(\square, \square) = (\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3)(\Delta_3 + \Delta_2 - \Delta_1 - 1) + 2\Delta_1, \quad (2.54)$$

がすぐに得られる. 以上でこの解説で必要になるブロックは出そろったので具体的計算に移ることにしよう.

4 点付き球面

四点付き球面には共形キリング変換の自由度があるので、四点のうち三点が固定でき、残る一点を動かす自由度 $q \in \mathbb{CP}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ がモジュライである。したがって四点を、 $(0, q, 1, \infty)$ にとったと思うことができる。あるいは四点の交差比

$$q = \frac{(z_2 - z_1)(z_4 - z_3)}{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}, \quad (2.55)$$

をモジュライとみなすこともできる。

共形ブロックは図6により与えられるから、次の中間状態にわたる和を計算すれば良いことになる:

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} \text{2} \quad \text{3} \\ \text{1} \text{---} \text{---} \text{---} \text{4} \end{array} &= 1 + q \frac{\mathcal{R}_{12\alpha}(\square)\mathcal{R}_{34\alpha}(\square)}{\mathcal{G}_{\Delta}^{(1)}} + q^2 (\vec{\mathcal{R}}_{12\alpha}^{(2)})^T \cdot \mathcal{G}_{\Delta}^{(2)-1} \cdot \vec{\mathcal{R}}_{34\alpha}^{(2)} + \dots \\ &= 1 + q \frac{(\Delta + \Delta_1 - \Delta_2)(\Delta + \Delta_3 - \Delta_4)}{2\Delta} \\ &\quad + q^2 \left(\frac{(\Delta + \Delta_1 - \Delta_2)(1 + \Delta + \Delta_1 - \Delta_2)(\Delta + \Delta_3 - \Delta_4)(1 + \Delta + \Delta_3 - \Delta_4)}{4\Delta(2\Delta + 1)} + \right. \\ &\quad \left. \frac{(\Delta(\Delta - 1) + (2\Delta + 1)(\Delta_1 + \Delta_2) - 3(\Delta_1 - \Delta_2)^2)(\Delta(\Delta - 1) + (2\Delta + 1)(\Delta_3 + \Delta_4) - 3(\Delta_3 - \Delta_4)^2)}{2\Delta(2\Delta + 1)(c + 2c\Delta - 10\Delta + 16\Delta^2)} \right) \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (2.56)$$

1 点付きトーラス

一点付きトーラスにおいて、この付加点の位置はトーラス上の平行移動に対応するキリングの自由度により固定できる。したがってモジュライは、シリンダー（トーラス）の長さを決めるモジュライ q 一つだけである。では、早速トーラス上の一点関数 $\langle V_m(1) \rangle_{T^2} = \text{Tr}_{\mathcal{V}_{\Delta}} q^{L_0} V_m(1)$ を計算してみよう。Verma 加群における 1 の分割 $1 = \sum_{Y, Y'} |\Delta, Y\rangle \mathcal{G}^{-1}(Y, Y') \langle \Delta, Y'|$ を用いると

$$\begin{aligned} \alpha \text{---} m &= \frac{q^{-|\Delta|}}{\langle \Delta | V_m(1) | \Delta \rangle} \sum_{Y, Y'} \langle \Delta, Y | q^{L_0} V_m(1) | \Delta, Y' \rangle \mathcal{G}_{\Delta}^{-1}(Y, Y'), \\ &= \sum_{Y, Y'} q^{-|Y|} \mathcal{S}_{\alpha m \alpha}(Y, Y') \mathcal{G}_{\Delta}^{-1}(Y, Y'), \end{aligned} \quad (2.57)$$

と表すことが出来る。ただし中間状態の次元を $\Delta = \Delta(\alpha)$ と書くことにする。したがってトーラス一点の共形ブロックは

$$\mathcal{F}_m(\Delta; q) = 1 + q \mathcal{S}_{\alpha m \alpha}(\square, \square) \mathcal{G}_{\Delta}^{-1}(\square, \square) + \dots = 1 + q \frac{\Delta(m)(\Delta(m) - 1) + 2\Delta}{2\Delta} + \dots \quad (2.58)$$

と計算することが出来る。

2.4 物理的相関関数と Liouville 場理論

これまで、共形場理論の正則セクターに議論的を絞って来た。実際の共形場理論には反正則セクターもあるため、実際の相関関数を計算するためには、正則共形ブロックと反正則共形ブロックを適

切な仕方で張り合わせなくてはならない. そこでまず、共形対称性は正則と反正則の Virasoro 対称性のテンソル積であることを思い出そう $\text{Conf} = \text{Vir} \otimes \overline{\text{Vir}}$. したがって固定した共形族に関して、場のスペクトルは Verma 加群のテンソル積 $\mathcal{H} = \mathcal{V}_\Delta \otimes \mathcal{V}_{\bar{\Delta}}$ で与えられる: $|\Delta, \bar{\Delta}\rangle = |\Delta\rangle \otimes |\bar{\Delta}\rangle$. ただし $|\Delta, \bar{\Delta}\rangle$ は次元 $\Delta, \bar{\Delta}$ のプライマリー場 $\mathcal{O}_{\Delta, \bar{\Delta}}(z, \bar{z})$ が与える状態である. したがって共形対称性は、正則と反正則の Virasoro 対称性がそれぞれ独立に作用している. つまり共形対称性の課す拘束条件は、前節までの議論を L_n と \bar{L}_m の二つのセクターについて独立に課せば良い. このように相関関数の表現論的構造を調べる際には、正則セクターに制限して行って来た議論の結果をそのまま用いることが出来る.

そこでまず、二点関数を考えてみよう. 現在用いているプライマリー場の規格化では $\langle \Delta, \bar{\Delta} | \Delta', \bar{\Delta}' \rangle = \delta_{\Delta, \Delta'} \delta_{\bar{\Delta}, \bar{\Delta}'}$ となっている. デイセンダントは、プライマリー状態に L_n と \bar{L}_m を作用させていったものである. したがってその Gram 行列も、Vir と $\overline{\text{Vir}}$ の Shapovalov 行列から得られることになる:

$$\langle \Delta, Y; \bar{\Delta}, \bar{Y} | \Delta', Y'; \bar{\Delta}', \bar{Y}' \rangle = \delta_{\Delta, \Delta'} \delta_{\bar{\Delta}, \bar{\Delta}'} \mathcal{G}_\Delta(Y, Y') \bar{\mathcal{G}}_{\bar{\Delta}}(\bar{Y}, \bar{Y}'). \quad (2.59)$$

つぎに三点関数 $\Gamma_{(\alpha, Y, \bar{Y}); 12} = \langle V_{(\alpha, Y, \bar{Y})} | V_1(1, 1) V_2(0, 0) \rangle$ を考えてみよう. すると前節で見たように、共形対称性はこの相関関数に対して漸化式を与えるので、この議論を Vir と $\overline{\text{Vir}}$ に適用することで

$$\Gamma_{(\alpha, Y, \bar{Y}); 12} = C_{12}^\alpha \mathcal{R}'_{\alpha; 12}(Y) \bar{\mathcal{R}}'_{\alpha; 12}(\bar{Y}), \quad (2.60)$$

を得る. ここで $\bar{\mathcal{R}}'$ は、 $\mathcal{R}'(\Delta, \dots)$ の変数を $\bar{\Delta}$ 等の「共役量」に置き換えたものである. したがって以上の議論から、

$$\mathcal{O}_1(q, \bar{q}) \mathcal{O}_2(0, 0) = \sum_{\text{primary } \alpha} C_{12}^\alpha q^{\Delta - \Delta_1 - \Delta_2} \bar{q}^{\bar{\Delta} - \bar{\Delta}_1 - \bar{\Delta}_2} \Psi_{12}^\alpha(q, \bar{q}), \quad (2.61)$$

という構造を持っていることが分かる. ただし Ψ は、次のような場である:

$$\Psi_{12}^\alpha = \mathcal{O}_R \otimes \mathcal{O}_L \quad (2.62)$$

$$\mathcal{O}_R = \sum_Y \beta_{12}^\alpha(Y) q^{|Y|} L_{-Y} V_{\Delta(\alpha)}, \quad \mathcal{O}_L = \sum_{\bar{Y}} \bar{\beta}_{12}^\alpha(\bar{Y}) \bar{q}^{|\bar{Y}|} \bar{L}_{-\bar{Y}} V_{\bar{\Delta}(\alpha)}. \quad (2.63)$$

ここで係数 β は、次のように三点関数から与えられる:

$$\beta_{12}^\alpha(Y) = \sum_{Y'} (\mathcal{G})^{-1}(Y, Y') \mathcal{R}'_{\alpha; 12}(Y'), \quad \bar{\beta}_{12}^\alpha(\bar{Y}) = \sum_{\bar{Y}'} (\bar{\mathcal{G}})^{-1}(\bar{Y}, \bar{Y}') \bar{\mathcal{R}}'_{\alpha; 12}(\bar{Y}'). \quad (2.64)$$

このように演算子 $\mathcal{O}(q, \bar{q})$ の OPE 構造は、Vir と $\overline{\text{Vir}}$ の表現論的因子でほとんど決定されている. したがって相関関数もまた、 \mathcal{G} や \mathcal{R} などによって書き下されることになる. その結果、相関関数は共形ブロックを用いて表示できることになる. このことを理解するために、四点球面の相関関数を具体例にとってみよう. (2.61) を用いると、この相関関数は直ちに計算される:

$$\langle \prod_{i=1}^4 \mathcal{O}_{\alpha_i, Y_i, \bar{Y}_i}(z_i, \bar{z}_i) \rangle = \sum_{\text{primary } \alpha} C_{12}^\alpha C_{34}^\alpha |\mathcal{B}^{(s)}(q)|^2. \quad (2.65)$$

ただし $z_i = 0, q, 1, \infty$ ととり、 $\mathcal{B}^{(s)}$ は s -チャンネルでの共形ブロックである.

$$\mathcal{B}^{(s)}(q, \Delta, c) = q^{\Delta - \Delta_1 - \Delta_2} \mathcal{F}(q, \Delta, c), \quad \bar{\mathcal{B}}^{(s)}(\bar{q}, \bar{\Delta}, \bar{c}) = \bar{q}^{\bar{\Delta} - \bar{\Delta}_1 - \bar{\Delta}_2} \bar{\mathcal{F}}(\bar{q}, \bar{\Delta}, \bar{c}). \quad (2.66)$$

このように正則・反正則セクターそれぞれの共形ブロックを組み合わせて、最後に中間状態を走るプライマリーすべてについての和をとることで相関関数は得られる. この事情は一般の相関関数についてもまったく同様に成り立つ.

ここで紹介した操作では、三点関数 C を用いて共形ブロックを張り合わせている。表現論的な量である共形ブロックとは異なり、この関数 C は具体的な共形場理論の取り方を指定しないと決まらない量である。したがって相関関数については、どのような模型で計算するかという選択に大きく依存した振る舞いをするようになる。またプライマリー場のスペクトルも、理論によって様々な構造を持っている。したがって中間状態に関する足し上げもまた、それぞれの模型ごとに考察しなければならない。

このように相関関数を組み上げる手法の詳細は理論の選び方によっているため、ここでは Liouville 場の理論を用いて、簡単に議論することにしよう。Liouville 場の理論は作用

$$S = \int d^2z \sqrt{g} \left(\frac{1}{4\pi} g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi + \mu e^{2b\phi} + \frac{Q}{4\pi} R \phi \right) \quad (2.67)$$

で与えられる相互作用のある 2次元共形場理論である。正則セクターの中心電荷は $c = 1 + 6Q^2$ で与えられる。また頂点演算子は $V_\alpha(z, \bar{z}) \sim e^{2\alpha\phi(z, \bar{z})}$ である。

この理論の相関関数を計算する場合にも、三点関数が基本的なブロックとなる：

$$C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \lim_{z \rightarrow \infty} |z|^{4\Delta(\alpha_3)} \langle 0 | V_{\alpha_3}(z, \bar{z}) V_{\alpha_2}(1, 1) V_{\alpha_1}(0, 0) | 0 \rangle. \quad (2.68)$$

一般には、三点関数を係数込みで決定することは簡単な問題ではない。しかし Liouville 場の理論に関しては、Dorn-Otto-Zamolodchikov-Zamolodchikov によりこの三点関数の厳密な公式が提唱されている。彼らが自由場計算に基づいて導いた、いわゆる DOZZ 公式の具体形は、Appendix A.2 に与えてある。したがって共形ブロックが与えられると、DOZZ の三点関数公式を用いて物理的相関関数を組み上げられる。例として球面上の四点関数を考えると

$$\begin{aligned} & \langle V_{\alpha_4}(\infty, \infty) V_{\alpha_3}(q, \bar{q}) V_{\alpha_2}(1, 1) V_{\alpha_1}(0, 0) \rangle \\ &= \int_0^\infty dP C_{\text{DOZZ}}(\alpha_4, \alpha_3, Q/2 - iP) C_{\text{DOZZ}}(Q/2 + iP, \alpha_2, \alpha_1) |\mathcal{B}(\Delta(\alpha_i), \Delta(P); q)|^2. \end{aligned} \quad (2.69)$$

ただしここでは s-チャンネルで計算している。中間状態を足し上げる際には、Liouville 理論のスペクトルが $\alpha \in Q/2 + i\mathbb{R}_+$ 上にあるという知識を用いた。この結果は Liouville 理論の正準量子化から得られる。Liouville 理論の詳細については、専門家による総合報告 [17, 18] を参照されたい。

2.5 拡大共形対称性と戸田場理論

A_{N-1} 型の Toda 場の理論は、 $N-1$ 個のスカラー場からなる二次元共形場理論の一つである [19, 20]。その作用は

$$S = \int d^2z \sqrt{g} \left(\frac{1}{8\pi} g^{ab} \langle \partial_a \vec{\phi}, \partial_b \vec{\phi} \rangle + \mu \sum_{i=1}^{N-1} e^{b\langle \vec{e}_i, \vec{\phi} \rangle} + R \frac{\langle \vec{Q}, \vec{\phi} \rangle}{4\pi} \right), \quad (2.70)$$

と書き表される。ここで Toda 場は $\vec{\phi} = \sum_i \phi_i \vec{e}_i$ で与えられ、 \vec{e}_i は A_{N-1} Lie 代数の単純根である。また \vec{Q} は Weyl ベクトルにより $(b+1/b)\vec{\rho}$ と与えられる。 $N=2$ の場合は、 $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle = 2$ より、これは Liouville 場の理論に他ならない。

ここでは具体例として、 A_2 型の Toda 場の理論を取り上げてみよう。共形場理論の基本的な対称性は Virasoro 代数であった。実は Toda 場の理論には、スピン-2 のカレントである $T(z) \sim (\partial\vec{\phi})^2$ に加えて、スピン-3 の保存カレント $W(z) \sim (\partial\phi_1)^3 - 3\partial\phi_1(\partial\phi_2)^2$ も存在している。したがってこの理論

の対称性は L_n だけではなく、 $W(z)$ の Laurent 係数 W_n によっても生成される. このような拡大された共形対称性は \mathcal{W}_3 代数と呼ばれる [21]. これら Laurent 係数の満たす交換関係は

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n,-m}, \quad (2.71)$$

$$[L_n, W_m] = (2n - m)W_{n+m}, \quad (2.72)$$

$$[W_n, W_m] = \frac{9}{2} \left[\frac{c}{3 \cdot 5!}(n^2 - 1)(n^2 - 4)n\delta_{n,-m} + \frac{16}{22 + 5c}(n - m)\Lambda_{n+m} + (n - m) \left(\frac{(n + m + 2)(n + m + 3)}{15} - \frac{(n + 2)(m + 2)}{6} \right) L_{n+m} \right]. \quad (2.73)$$

で与えられる. Λ_n は次のような複合演算子である:

$$\Lambda_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} : L_m L_{n-m} : + \frac{x_n}{5} L_n, \quad x_{2l} = (1 - l)(1 + l), \quad x_{2l+1} = (1 - l)(12 + l), \quad (2.74)$$

中心電荷は $c = N - 1 + 12\langle \vec{Q}, \vec{Q} \rangle = 2(1 - 12Q^2)$ と表される.

このような代数に対しても、プライマリーから生成されるディセダント達により Verma 加群を与えることが出来る. ただし \mathcal{W}_3 代数の場合、 L_{-n} だけでなく W_{-m} もまた上昇演算子としてあらわれる. この Verma 加群の中で相関関数を展開し、共形ブロックを定義する操作も、本質的には Virasoro 代数の場合と同じである. 詳細については、文献 [22] を参考にされたい.

さらに高いランクの A_{N-1} Toda 場の理論を考えると、さらに高いスピンのカレントが加わり、対称性の代数はどんどん拡大される. このように現れる非線形な代数を \mathcal{W}_N 代数と呼ぶ. 一般の N では、残念なことにその構造の複雑性から、これらを生成子の交換関係としてあらわに表示することは困難を極める. しかしながら自由場表示や Drinfeld-Sokolov リダクションといった手法を用いることで、これら代数を構成することが出来る.

3 $\mathcal{N} = 2$ 四次元超対称ゲージ理論とインスタントン分配関数

Nekrasov 分配関数は、 $\mathcal{N} = 2$ ゲージ理論の分配関数に正則化因子 $\epsilon_{1,2}$ を導入して計算することで与えられる. 3.1 節では、Nekrasov 分配関数の由来を簡単に解説した. この部分は本論を理解するのに必ずしも必要は無いので、興味の無い読者には 3.2 節から読み始めることをお勧めする. この章の後半では、Nekrasov 分配関数の計算方法を具体例を用いて説明する.

3.1 重力光子背景と Nekrasov 分配関数

Nekrasov のインスタントン分配関数は四次元の $\mathcal{N} = 2$ 超対称ゲージ理論に対して定義されるものである. しかしこれを五次元 $\mathbb{R}^4 \times S^1 = \mathbb{C}^2 \times S^1$ 上の $\mathcal{N} = 1$ ゲージ理論へ持ち上げたものを考えると便利である. 特にツイストされた境界条件 $(z_1, z_2, x_4) \sim (e^{i\epsilon_1 R} z_1, e^{i\epsilon_2 R} z_2, x_4 + R)$ によりコンパクト化した理論を考えることがポイントとなる. ここで R は五次元 S^1 の半径である. このような理論の変更を、 Ω -背景による変形と呼ぶ. Ω -背景と結合させた理論を考えることで、理論を同変局所化というフレムワークで扱うことが可能になる [23]. 同変形式での Nekrasov 分配関数の扱いについては、日本語の解説 [24] があるのでここではあまり詳しく述べない. このテクニックのエッセンスは、空間回転に付随した Ω -変形を加えることで、経路積分への寄与が、原点に局在するインスタントン配位のみで制限される性質を用いることにある. 以下では、このような議論を用いて得られる分配関数の数学的定義からスタートしよう.

なおこの Ω -背景は、理論を $\mathcal{N} = 2$ 超重力多重項の**重力光子背景場 graviphoton background** と結合させることと対応している. したがってこれは重力・ストリング的起源を持つものと見なせるの

であるが、実際に Ω -変形された理論は、ある系でのトポロジカルストリング理論の全種数補正を計算している。このように Ω -背景を導入することでゲージ理論の計算から弦理論的な分配関数があらわれたり、トポロジカルストリング理論の双対性（や強力な数学的ツール）を援用しながらゲージ理論のダイナミクスを解析することが可能になる。このような発展については [25] を参照してください。

局所化の方法

弱結合において、五次元 pure super Yang-Mills 理論の k -インスタントン計算は、インスタントンモジュライ空間 \mathcal{M}_k 上の超対称量子力学の計算に落ちることが知られている。このとき分配関数は量子力学模型の Witten 指数であたえられ、これはモジュライ空間上の Dirac 演算子 \mathcal{D} のインデックスである。有名な Atiyah-Singer の指数定理をつかうと、このインデックスは次のように評価できる：

$$\begin{aligned} Z_{\text{pure}, k}^{5D} &= \text{Ind } \mathcal{D} \\ &= \int_{\mathcal{M}_k} \hat{A}(T\mathcal{M}_k). \end{aligned} \quad (3.1)$$

ここで \hat{A} は A-roof Dirac 種数 $\hat{A}(TM) = \prod_{i=1}^r \frac{Rx_i}{e^{Rx_i/2} - e^{-Rx_i/2}}$ である。Chern roots は $ch(TM) = \sum_i e^{x_i}$ で定義されている。ちなみにこの表式より、 k -インスタントン分配関数は、モジュライ空間の算術的 (Todd) 種数にほかならないことが分かる

$$Z_{\text{pure}, k}^{5D} = \sum_n (-1)^n \dim_{\mathbb{C}} H^{0,n}(\mathcal{M}_k). \quad (3.2)$$

このように我々は、インスタントンモジュライ空間上の積分

$$Z_{\text{pure}, k}^{5D} = \int_{\mathcal{M}_k} \prod_i \frac{Rx_i}{1 - e^{-Rx_i}}. \quad (3.3)$$

を計算すれば良いのであるが、 Ω -変形を導入することで**同変局所化 equivariant localization** の方法が適用できる。インスタントンモジュライ空間には、ゲージ対称性と空間回転の極大トーラスとして $U(1)^{N_c-1} \times U(1)^2$ の作用が働いている。モジュライ空間の接空間に対する、それらの作用の重みを $a_i, \epsilon_{1,2}$ としよう。この $U(1)$ -作用に関して局所化の方法を用いると、Duistermaat-Heckman の公式 [24] より、積分表式が

$$Z_{\text{pure}, k}^{5D} = \sum_{p:\text{fixed point}} \prod_i \frac{1}{1 - e^{-Rw_{i,p}}}, \quad (3.4)$$

と和の公式にまで単純化する。四次元の表式とするためには $R \rightarrow 0$ として主要項をとればよい：

$$Z_{\text{pure}, k} = \sum_{p:\text{fixed point}} \prod_i \frac{1}{w_{i,p}}. \quad (3.5)$$

ここで p はトーラス作用の固定点をあらわし、 $w_{i,p}$ はその点におけるトーラス作用の重みをあらわす。重要な数学的結果として、 $U(1)^{N_c-1} \times U(1)^2$ 作用の固定点は $|Y_1| + \dots + |Y_{N_c}| = k$ なるヤング図の列 $\vec{Y} = (Y_1, \dots, Y_{N_c})$ で分類されることが知られている。固定点 \vec{Y} にたいし、重みは Nakajima と Nekrasov によって計算された [26, 3]：

$$\sum_i e^{-Rw_{i,p}(\vec{Y})} = \sum_{a,b=1}^{N_c} e^{-R(a_a - a_b)} \left(\sum_{(i,j) \in Y_a} q^{-Y_{bj}^T + i} t^{-Y_{ai} + j - 1} + \sum_{(i,j) \in Y_b} q^{Y_{aj}^T - i + 1} t^{Y_{bi} - j} \right). \quad (3.6)$$

ここで $q = e^{-R\epsilon_1}$, $t = e^{R\epsilon_2}$ である. この結果をもちいると、直ちに $\mathcal{N} = 2$ pure super Yang-Mills 理論の Nekrasov 分配関数 $Z = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^k Z_k$ が得られる [3]:

$$Z_{\text{pure}} = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^k \sum_{|\vec{Y}|=k} \prod_{a,b=1}^{N_c} \prod_{(i,j) \in Y_a} \frac{1}{a_a - b_b + \epsilon_1(-Y_{bj}^T + i) + \epsilon_2(Y_{ai} - j + 1)} \\ \times \prod_{(i,j) \in Y_b} \frac{1}{a_a - b_b + \epsilon_1(Y_{aj}^T - i + 1) + \epsilon_2(-Y_{bi} + j)}. \quad (3.7)$$

ハイパー多重項

物質場 (ハイパー多重項) も含んだ理論を考えるためには、インスタントン背景中の Dirac ゼロモードをファイバーとするような \mathcal{M}_k 上の物質バンドル (matter bundle) E を考えれば良い. すると分配関数は、このツイストされた複体のインデックスとして与えられる:

$$Z_k^{5D} = \text{Ind } \mathcal{D}_E \\ = \int_{\mathcal{M}_k} \hat{A}(T\mathcal{M}_k) \text{ch}(E). \quad (3.8)$$

ハイパー多重項が随伴表現で変換するときは、物質バンドルは単に \mathcal{M}_k の接バンドルとなる. したがってこの場合に対応する $\mathcal{N} = 2^*$ 理論の分配関数は

$$Z_{\text{adj}}^{5D} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \int_{\mathcal{M}_k} \prod_i (1 - e^{-Rm} e^{-Rx_i}) \frac{Rx_i}{1 - e^{-Rx_i}} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \chi_y(\mathcal{M}_k) \\ = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \sum_{p \in \text{fixed points}} \prod_i (1 - e^{-Rm} e^{-Rw_{i,p}}) \frac{1}{1 - e^{-Rw_{i,p}}}, \quad (3.9)$$

と与えられる ($y = e^{-Rm}$). これは Hirzebruch の χ_y 種数となっている. 特に $\mathcal{N} = 4$ 理論 ($m = 0$) のとき、 χ_y は Euler 特性類 $\sum (-1)^{n,m} \dim_{\mathbb{C}} H^{n,m}(\mathcal{M}_k)$ になるので、 $\mathcal{N} = 4$ Yang-Mills 理論の五次元分配関数は $Z_{\mathcal{N}=4}^{5D} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \chi(\mathcal{M}_k)$ という形をしていることになる.

さてこのように、随伴表現のハイパー多重項の寄与も、上の結果から読み取ることが出来る.

$$z_{\text{adj}}^{5D}(\vec{a}, m, \vec{Y}; q, t) = \prod_{a,b=1}^{N_c} \prod_{(i,j) \in Y_a} \left(1 - e^{-R(a_a - a_b - m)} q^{-Y_{bj}^T + i} t^{-Y_{ai} + j - 1} \right) \\ \times \prod_{(i,j) \in Y_b} \left(1 - e^{-R(a_a - a_b - m)} q^{Y_{aj}^T - i + 1} t^{Y_{bi} - j} \right). \quad (3.10)$$

これを四次元ゲージ理論の因子に置き換える操作も、先ほどとまったく同様に行える:

$$1 - e^{-Ra} q^m t^{-n} = 1 - e^{-R(a + m\epsilon_1 + n\epsilon_2)} \rightarrow a + m\epsilon_1 + n\epsilon_2. \quad (3.11)$$

ほかの表現の場についても原理的には同じように計算することが出来る.

3.2 Nekrasov 分配関数の計算ツールキット

Nekrasov 分配関数についてまとめよう. $\prod_i U(N_i)$ クイバーゲージ理論に対し、公式を与えることにする. Nekrasov 分配関数は、各ゲージ群因子 $U(N_i)$ に付随する N_i 個のヤング図の集まり $\vec{Y}^{(i)} = (Y_1^{(i)}, Y_2^{(i)}, \dots, Y_{N_i}^{(i)})$ に対する和として書き下される:

$$Z_{\text{Nek}} = \sum_{\vec{Y}^{(1)}, \vec{Y}^{(2)}, \dots, \vec{Y}^{(n)}} \prod_i q_i^{|\vec{Y}^{(i)}|} z(\vec{Y}; \vec{a}, \vec{m}). \quad (3.12)$$

ここでインスタントン因子は $q^{|\vec{Y}|} = q^{\sum |Y_n|}$ で定義しており、 q_i は i 番目のゲージ群因子のインスタントン因子 $q_i = e^{2\pi i \tau_i}$ である。そして重み因子 z は、各多重項からの寄与の積で与えられる:

$$z(\vec{Y}; \vec{a}, \vec{m}) = \prod_i z_{\text{vect}}(\vec{a}^{(i)}, \vec{Y}^{(i)}) \prod_{\text{rep. } \mathcal{R}} z_{\text{hyper}} \mathcal{R}(\vec{Y}^{(1)}, \dots; \vec{a}^{(1)}, \dots, m^{\mathcal{R}}). \quad (3.13)$$

これを与えるベクトル多重項とハイパー多重項の重み因子は、具体的には

$$z_{\text{vect}}(a, \vec{Y}) = \prod_{\alpha, \beta=1, \dots, N} \prod_{(i,j) \in Y_\alpha} (a_\alpha - a_\beta - \ell_{Y_\beta}(i,j)\epsilon_1 + (a_{Y_\alpha}(i,j) + 1)\epsilon_2)^{-1} \\ \times \prod_{(i,j) \in Y_\beta} (a_\alpha - a_\beta + (\ell_{Y_\alpha}(i,j) + 1)\epsilon_1 - a_{Y_\beta}(i,j)\epsilon_2)^{-1}, \quad (3.14)$$

$$z_{\text{bifund}}(a, \vec{Y}; b, \vec{W}; m) = \prod_{\alpha, \beta=1, \dots, N} \prod_{(i,j) \in Y_\alpha} (a_\alpha - b_\beta - m - \ell_{W_\beta}(i,j)\epsilon_1 + (a_{Y_\alpha}(i,j) + 1)\epsilon_2) \\ \times \prod_{(i,j) \in W_\beta} (a_\alpha - b_\beta - m + (\ell_{Y_\alpha}(i,j) + 1)\epsilon_1 - a_{W_\beta}(i,j)\epsilon_2), \quad (3.15)$$

$$z_{\text{adj}}(a, \vec{Y}; m) = z_{\text{bifund}}(a, \vec{Y}; a, \vec{Y}; m), \quad (3.16)$$

$$z_{\text{fund}}(a, \vec{Y}; m) = \prod_{\alpha=1}^N \prod_{(i,j) \in Y_\alpha} (a_\alpha + \epsilon_1 i + \epsilon_2 j - m), \quad (3.17)$$

$$z_{\text{antifund}}(a, \vec{Y}; m) = z_{\text{fund}}(a, \vec{Y}; \epsilon_1 + \epsilon_2 - m) \quad (3.18)$$

と与えられる。ここではハイパーとして、双基本表現、随伴表現、そして基本表現のもののみを考えた。これら因子の表示を見やすくするために、Young 図の箱 $s = (i, j) \in Y$ に対して**腕の長さ (arm length)** $a_Y(s)$ と**脚の長さ (leg length)** $\ell_Y(s)$ という概念を導入した:

$$a_Y(s) = Y_i - j, \quad \ell_Y(s) = (Y^T)_j - i \quad \text{for } s = (i, j). \quad (3.19)$$

この図形的な意味については、Appendix A を参照してください。

ではこの公式から、具体的な分配関数を書き下してみよう。例として $SU(N)_1 \times SU(N)_2 \times SU(N)_3$ ゲージ理論で、 $SU(N)_1 \times SU(N)_2$ 双基本表現と $SU(N)_1$ 基本表現の物質場がそれぞれ一つある場合を考えてみる。上に与えた構成法から、その分配関数は、次のように与えられる

$$Z_{\text{Nek}} = \sum_{\vec{Y}^{(1)}, \vec{Y}^{(2)}, \vec{Y}^{(3)}} q_1^{|\vec{Y}^{(1)}|} q_2^{|\vec{Y}^{(2)}|} q_3^{|\vec{Y}^{(3)}|} z_{\text{vect}}(a^{(1)}, \vec{Y}^{(1)}) z_{\text{vect}}(a^{(2)}, \vec{Y}^{(2)}) z_{\text{vect}}(a^{(3)}, \vec{Y}^{(3)}) \\ \times z_{\text{bifund}}(a^{(1)}, \vec{Y}^{(1)}; a^{(2)}, \vec{Y}^{(2)}; m) z_{\text{fund}}(a^{(1)}, \vec{Y}^{(1)}; m').$$

$SU(2)$ pure Yang-Mills 理論

手始めに、 $SU(2)$ pure Yang-Mills 理論について計算しよう。この理論にはベクトル多重項からの寄与 z_{vect} しかないので、Nekrasov 分配関数は

$$Z_{\text{pure } SU(2)}(\vec{a}, \Lambda, \epsilon_1, \epsilon_2) = \sum_k \Lambda^{4k} Z_k(\vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2) \\ = \sum_{\vec{Y}} \frac{\Lambda^{4|\vec{Y}|}}{\prod_{\alpha, \beta=1}^2 n_{\alpha, \beta}^{\vec{Y}}(\vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2)}. \quad (3.20)$$

と書き下すことが出来る. 今は $SU(2)$ ゲージ群を考えているので, Nekrasov 分配関数は二つの Young 図 $\vec{Y} = (Y_1, Y_2)$ に関する和として与えられる. ここで分子にあらわれているのは, ベクトル多重項の重み因子から来た

$$n_{\alpha, \beta}^{\vec{Y}}(\vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2) = \prod_{(i, j) \in Y_\alpha} (a_\alpha - a_\beta - \ell_{Y_\beta}(i, j)\epsilon_1 + (a_{Y_\alpha}(i, j) + 1)\epsilon_2) \\ \times \prod_{(i, j) \in Y_\beta} (a_\alpha - a_\beta + (\ell_{Y_\alpha}(i, j) + 1)\epsilon_1 - a_{Y_\beta}(i, j)\epsilon_2). \quad (3.21)$$

という関数である. $\vec{a} = (a_1, a_2)$ は, ベクトル多重項スカラーの期待の対角成分 $\text{diag}(a_1, a_2)$ に対応したクーロンランチャパラメータであり, $SU(2)$ ゲージ群ではトレースゼロ条件から $a_1 = -a_2 = a$ である. では, この分配関数を 1-, 2-インスタントレベルで計算してみよう.

Young 図ベクトルのうち, $k = |\vec{Y}| = 1$ を満たすものが 1-インスタント分配関数に寄与する. このような Young 図列は, 全体のはこの数が 1 個の Young 図たちなので, $\vec{Y} = (\square, \emptyset), (\emptyset, \square)$ の二つである. ただし \emptyset は, 箱の無い空の Young 図を表す. そこでまず, $\vec{Y} = (\square, \emptyset)$ について (3.21) を計算してみよう:

$$\prod_{\alpha, \beta=1}^2 n_{\alpha, \beta}^{(\square, \emptyset)}(\vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2) = n_{1,1}^{\vec{Y}} \cdot n_{1,2}^{\vec{Y}} \cdot n_{2,1}^{\vec{Y}} = \epsilon_1 \epsilon_2 a_{21} (a_{12} + \epsilon). \quad (3.22)$$

ここで $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$ と $a_{\alpha\beta} = a_\alpha - a_\beta$ を定義した. (\emptyset, \square) についても全く同様に求まるので, 1-インスタント分配関数は結局次のような形で与えられる:

$$Z_{k=1}(\vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2) = \frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_2 a_{12} (a_{21} + \epsilon)} + \frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_2 a_{21} (a_{12} + \epsilon)}. \quad (3.23)$$

2-インスタント $k = |\vec{Y}| = 2$ に寄与する Young 図の列は, 全体のはこの数が 2 となっている組み合わせである. したがって次のような形を持ったものが寄与を与える: $\vec{Y} = (\square, \square), (\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}, \emptyset), (\square, \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}), \dots$. そこでまず $\vec{Y} = (\square, \square)$ について計算しよう. 分母の因子は

$$\prod_{\alpha, \beta=1}^2 n_{\alpha, \beta}^{(\square, \square)}(\vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2) = n_{1,1}^{\vec{Y}} \cdot n_{1,2}^{\vec{Y}} \cdot n_{2,1}^{\vec{Y}} \cdot n_{2,2}^{\vec{Y}} \\ = (\epsilon_1 \epsilon_2)^2 (a_{1,2} + \epsilon_1)(a_{1,2} - \epsilon_1)(a_{1,2} + \epsilon_2)(a_{1,2} - \epsilon_2), \quad (3.24)$$

と与えられる. 次に $\vec{Y} = (\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}, \emptyset)$ からは

$$\prod_{\alpha, \beta=1}^2 n_{\alpha, \beta}^{(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}, \emptyset)}(\vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2) = n_{1,1}^{\vec{Y}} \cdot n_{1,2}^{\vec{Y}} \cdot n_{2,1}^{\vec{Y}} \\ = (2\epsilon_1 \epsilon_2^2 (\epsilon_1 - \epsilon_2)) a_{12} (a_{12} + \epsilon) (a_{12} + \epsilon_2) (a_{12} + \epsilon + \epsilon_2), \quad (3.25)$$

が得られ, $\vec{Y} = (\emptyset, \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix})$ についても全く同様に計算される. 最後に $\vec{Y} = (\square, \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix})$ の形の Young 図達からは

$$\prod_{\alpha, \beta=1}^2 n_{\alpha, \beta}^{(\square, \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix})}(\vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2) = n_{1,1}^{\vec{Y}} \cdot n_{1,2}^{\vec{Y}} \cdot n_{2,1}^{\vec{Y}} \\ = (2\epsilon_1^2 \epsilon_2 (\epsilon_2 - \epsilon_1)) a_{1,\alpha} (a_{12} + \epsilon) (a_{12} + \epsilon_1) (a_{12} + \epsilon + \epsilon_1), \quad (3.26)$$

という寄与があることが分かる。 $\vec{Y} = (\emptyset, \square)$ についても同様である。したがって以上をまとめると、2-インスタントン分配関数は

$$\begin{aligned} Z_{k=2}(\vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2) &= \frac{1}{(\epsilon_1 \epsilon_2)^2 (a_{12} + \epsilon_1)(a_{12} - \epsilon_1)(a_{12} + \epsilon_2)(a_{12} - \epsilon_2)} \\ &+ \sum_{\alpha=1,2} \frac{1}{(2\epsilon_1 \epsilon_2^2 (\epsilon_1 - \epsilon_2)) \prod_{\beta \neq \alpha}^2 a_{\alpha,\beta} (a_{\alpha,\beta} + \epsilon)(a_{\alpha,\beta} + \epsilon_2)(a_{\alpha,\beta} + \epsilon + \epsilon_2)} \\ &+ \sum_{\alpha=1,2} \frac{1}{(2\epsilon_1^2 \epsilon_2 (\epsilon_2 - \epsilon_1)) \prod_{\beta \neq \alpha}^2 a_{\alpha,\alpha} (a_{\alpha,\alpha} + \epsilon)(a_{\alpha,\alpha} + \epsilon_1)(a_{\alpha,\alpha} + \epsilon + \epsilon_1)}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

という形で与えられる。

各次数 k で得られた有理式を通分することで、分配関数をインスタントン展開のかたちで書き下すことが出来る。そこで以上で得られた計算結果から、 $a_{12} = -a_{21} = 2a$ であることに注意すると

$$\begin{aligned} Z_{\text{pure SU}(2)}(\vec{a}, \Lambda, \epsilon_1, \epsilon_2) &= 1 + q \frac{2}{\epsilon_1 \epsilon_2 (\epsilon^2 - 4a^2)} \\ &+ q^2 \frac{8\epsilon^2 + \epsilon_1 \epsilon_2 - 8a^2}{(\epsilon_1 \epsilon_2)^2 (\epsilon^2 - 4a^2) ((2\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 - 4a^2) ((\epsilon_1 + 2\epsilon_2)^2 - 4a^2)} + \dots, \end{aligned} \quad (3.28)$$

という表示を得る。ただし 1-インスタントン因子を $q = \Lambda^4$ とおいた。次章ではこの分配関数が、Verma 加群の中のコヒーレント状態から再現されることを見る。

$SU(2) N_f = 4$ 超共形ゲージ理論

次に $SU(2) N_f = 4$ SQCD について考えてみよう。この理論にはハイパー多重項として、(反) 基本表現のものが四つ含まれているので、分配関数は

$$\begin{aligned} Z_{SU(2) N_f=4 \text{SQCD}}(\vec{a}, \vec{\mu}, q, \epsilon_1, \epsilon_2) &= \sum_{Y_1, Y_2} q^{|Y_1|+|Y_2|} z_{\text{vect}}(\vec{a}, \vec{Y}) \\ &\times z_{\text{antifund}}(\vec{a}, \vec{Y}, \mu_1) z_{\text{antifund}}(\vec{a}, \vec{Y}, \mu_2) z_{\text{fund}}(\vec{a}, \vec{Y}, \mu_3) z_{\text{fund}}(\vec{a}, \vec{Y}, \mu_4). \end{aligned} \quad (3.29)$$

によって与えられる。この各項の分母には、やはりベクトル多重項からの寄与 $\prod_{\alpha,\beta} n_{\alpha,\beta}^{\vec{Y}}$ が含まれている。pure Yang-Mills 理論の場合とは違い、ここでは分子にもハイパー多重項に由来する因子が含まれている：

$$\begin{aligned} Z_{SU(2) N_f=4 \text{SQCD}} &= \sum_{Y_1, Y_2} q^{|Y_1|+|Y_2|} \frac{\prod_{f=1}^4 \prod_{\alpha=1}^2 \prod_{(i,j) \in Y_\alpha} (a_\alpha + \epsilon_1 i + \epsilon_2 j - m_f)}{\prod_{\alpha,\beta} n_{\alpha,\beta}^{(Y_1, Y_2)}}, \\ &= 1 + q \frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_2} \left(\frac{\prod_{f=1}^4 (a_1 + \epsilon - m_f)}{a_{12}(a_{21} + \epsilon)} + \frac{\prod_{f=1}^4 (a_2 + \epsilon - m_f)}{a_{21}(a_{12} + \epsilon)} \right) + \dots. \end{aligned} \quad (3.30)$$

ただし $m_{1,2} = \epsilon - \mu_{1,2}$, $m_{3,4} = \mu_{3,4}$ である。したがってこの分配関数もまた、先ほどの Yang-Mills 理論の例のように、様々な Young 図の組みについて足し上げることで、インスタントン展開の形で計算できる。そのうち 1-インスタントン部分については、四章で具体的に計算することになる。

$\mathcal{N} = 2^*$ $SU(2)$ 理論

$\mathcal{N} = 2^*$ 理論とは、 $\mathcal{N} = 4$ 理論の質量変形から得られる $\mathcal{N} = 2$ ゲージ理論のことである。したがってこの理論には、ハイパー多重項として随伴表現で変換するものが一つ含まれている。 $\mathcal{N} = 2^* SU(2)$ 理論についても、Nekrasov 分配関数を書き下すことは難しくなく、

$$Z_{SU(2)\mathcal{N}=2^*}(\vec{a}, m, q, \epsilon_1, \epsilon_2) = \sum_{Y_1, Y_2} q^{|Y_1|+|Y_2|} z_{\text{vect}}(\vec{a}, \vec{Y}) z_{\text{adj}}(\vec{a}, \vec{Y}, m), \quad (3.31)$$

と表されることはすぐに理解できるであろう。Young 図の足し上げ計算については省略する。

4 Alday-Gaiotto-Tachikawa 予想

いよいよ本稿の主題である AGT 予想を説明する。この予想の背景には Gaiotto の発見した $\mathcal{N} = 2$ デュアリティーの理論がある。これについては 4.1 節で解説されるが、この部分は本論からは独立している。したがって急いでいる読者は、4.1 節を読み飛ばしても以降を理解するには差し支えない。この章の残りでは、AGT 予想を具体的な計算に基づいて説明する。

4.1 $\mathcal{N} = 2$ 四次元ゲージ理論に対する Gaiotto プログラム

今から遡ること十年以上も前に、四次元 $\mathcal{N} = 2$ ゲージ理論を M 理論の枠組みで解析する手法が Witten により与えられた [27]。そしてそれに続く一連の研究によって、M 理論がゲージ理論の非摂動的な

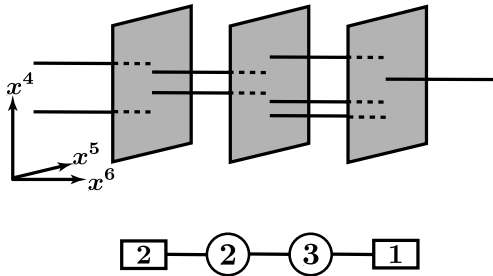


図 9: ブレイン構成とクイバー図。

振る舞いを理解するための強力な手段を与えることが明らかにされた。ところが最近になり、Gaiotto によってこのアイデアが改めて大きく発展させられることになった [28]。彼の研究は、非常に広いクラスの四次元 $\mathcal{N} = 2$ 超共形場理論とその S-双対が、M5-ブレーンのコンパクト化の枠組みにより非常にクリアな形で理解できることを明らかにした。[28] においては、ブレーンをコンパクト化する内部空間としてパンクチャー付き Riemann 面が現れる。したがって Gaiotto の理論の重要な示唆の一つは、 $\mathcal{N} = 2$ 超共形場理論の分類と、パンクチャー付き Riemann 面の集合の間に深い関係があるということである [27, 28, 29]。

ではここでは文献 [29] に従って、このブレイン構成について具体的に見て行こう。出発点となるのはゲージ理論の Witten 構成である。図 9 のような D4-NS5 系を考えてみよう¹。まず、 $n+1$ 枚の平行な NS5 ブレインが $x^{0,1,2,3,4,5}$ 方向に広がっているものとする。これらは x^6 方向に関して離れている。また NS5 の間に D4 ブレインがのびているものとしよう。D4 は $x^{0,1,2,3,6}$ 方向に世界体積をもち、図のように x^6 方向に関しては有限区間あるいは半無限状に広がっている。するとよく知られているように、2 枚の NS5 ブレインに区切られた、 k 枚の重なった D4 ブレインの世界体積上には $U(k)$ ゲージ群が生じることになる。そして D4 ブレインの x^6 方向に関する長さがゲージ結合定数を与える：

$$\frac{1}{g_{YM}^2} = \frac{\Delta x^6}{\ell_s g_s}. \quad (4.1)$$

この式より、半無限にのびる D4 ブレインが生む対称性に対しては、ゲージ結合定数が消えてしまうことが見て取れる。したがってこのような無限に長いブレインの作り出す対称性は、大域的なフレー

¹さらに D6 ブレインを導入して、基本表現のフレーバーを加えることも出来る。しかし Hanany-Witten 効果を用いると、これらも D4 ブレインの配位に置き換えられる。



図 10: ゲージ群が $G = SU(N_1) \times \cdots \times SU(N_n)$ の線形クイバー図.

バー対称性である. そしてフレーバー対称性のランクに応じた数だけ、ハイパー多重項があらわれていることになる. このようにして読み取れるゲージ群とフレーバー対称性を、丸と四角で表したのが図 9 下段のいわゆるクイバー図である. 図では簡単な為に、ゲージ群が二つの例を与えた. 今我々が考えているタイプの NS5-D4 系であれば、クイバー図を書き下す一般的なルールは明らかであろう.

実際はクイバー図には理論の対称性以上の情報が含まれている. というのも、二つの対称性 (丸、あるいは四角) をつなぐ線分は、両者のもとで荷電しているハイパー多重項を表しているからである. 例えば二つの丸で囲まれた一本の線分は双基本表現で変換するハイパー多重項の存在を表している. また丸と四角を結ぶ線分は、基本表現の物質場がいくつか存在し、それらがフレーバー対称性で回っている状況を記述している. このような物質場が生じるのは、ブレイン構成から簡単に理解できる. というのも、一つの NS5 で区切られた D4 のスタックが二組あると、これら左右の D4 ブレイン間にのびる開いたストリングからカイラル場が生じるからである. ストリングの端にある Chen-Paton 因子から、これらがゲージ群の双基本表現で変換していることがすぐに分かる. またストリングの自由度から、 $N = 1$ カイラル多重項がベクトル的なペアで現れることも分かる. つまり生じるのは $N = 2$ ハイパー多重項である.

以上の議論から分かるように、ブレイン構成から得られるゲージ理論の情報をクイバー図としてまとめることが出来る. クイバーが記述するのはベクトル多重項とハイパー多重項のコンテンツに関する情報である. さらに考えている NS5-D4 系には $N = 2$ 超対称性があるので、物質場コンテンツさえ分かれば、我々はゲージ理論のラグランジアンも知っていることになる. つまりクイバー図は、 $N = 2$ 理論を一意的に指定するのである. 例えば図 9 は $N = 2$ $U(2) \times U(3)$ ゲージ理論を表している. この理論に含まれるハイパーは $(2, 3)$ 表現が一つ、 $(2, 1)$ 表現が二つ、そして $(1, 3)$ 表現一つである. ラグランジアンも容易に構成することが出来る.

共形ゲージ理論と M 理論リフト

さてこのように構成されるゲージ理論のうち、すべてのゲージ群に対してベータ関数が消えているモデルを考えることにする. このような理論は共形クイバー理論と呼ばれる. そこですべてのベータ関数が消えているための条件を導いてみよう. ゲージ群 $U(N_a)$ に関するベータ関数それぞれには、ベクトル多重項 N_a 個とハイパー多重項 $N_{a-1} + N_{a+1}$ 個の寄与がある. したがって i 番目のゲージ群 $U(N_a)$ に対するベータ関数は

$$\beta_a \propto N_{a-1} - 2N_a + N_{a+1}, \quad (4.2)$$

となる. この関係式から、共形クイバー理論を得るには $N_0 = N_1 = \cdots = N_{n+1} \equiv N$ ととればよいことが分かる. つまり我々の考えるべき状況は、どの区間でも D4 ブレインの枚数が同じような NS5-D4 系である.

ではこれまで考えて来た IIA 理論のブレイン配位を、M 理論へ持ち上げよう. まず正則変数

$$v := \frac{1}{\ell_s}(x^4 + ix^5), \quad s := x^6 + ix^{10}, \quad (4.3)$$

を導入することにする. さらにシリンダー座標 s からの座標変換 $t = e^{-s} \in \mathbb{C}^\times$ も定義しておく. s が張るシリンダー (をパンクチャー付き球面に写像したもの) を C としよう. よく知られているよう

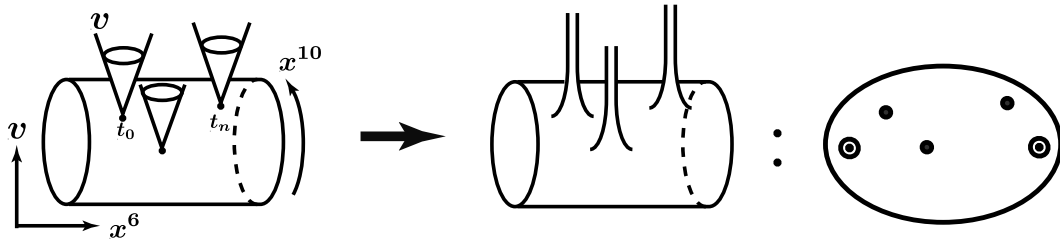


図 11: NS5-D4 ブレイン系の M 理論への持ち上げと、クーロンブランチ上への変形. この配位は $n+3$ 点付きの球面 (左) に M5 ブレインを巻いたものである.

に、D4 ブレインは M 理論方向 $x^{10} \sim x^{10} + 2\pi$ を巻く M5 ブレインに持ち上がる. したがって我々の考えている系は、 N 枚の重なり合った M5 ブレインがシリンダー C を巻いた配位へと持ち上がる. ただし n 個の点 $t = t_\alpha$ だけは特別であり、そこには v 方向に世界体積をもつ M5 ブレインが差し込まれている. これらは NS5 ブレインに由来するものである. そこで以上を図示すると図 11 の左側のようなになる. この配位は曲線

$$\Sigma : v^N \prod_{\alpha=0}^n (t - t_\alpha) = 0 \quad (4.4)$$

を M5 ブレインが巻いているものと見なせる.

N 枚の重なり合った M5 ブレインの世界体積には、低エネルギーにおいて、6次元の A_{N-1} 型 $\mathcal{N} = (2, 0)$ 超共形場理論が実現することが知られている. したがって今まで考えて来たブレイン構成を、6次元理論の言葉で言い換えることが出来る: $\mathcal{N} = (2, 0)$ 理論を曲線 C にコンパクト化し、各点 $t = t_\alpha$ にある欠陥演算子を挿入すると、この配位は 4次元の $\mathcal{N} = 2$ 超共形場 (ゲージ) 理論を作り出す². Gaiotto が (再) 発見したことの一つは、この構成は C が上のようなシリンダーの場合に限らず、一般のパンクチャー付き Riemann 面 $C_{n,g}$ に対してもうまく働くということである. 彼の議論のすべてを紹介することは出来ないが、Seiberg-Witten 理論とのつながりについて手短かに説明したい.

いままで扱ってきた式は、共形場理論を実現している場合の話であった. これはつまり理論にスケールが無い状況であるから、すべてのモジュライが消えている ($\langle \text{tr } \Phi^i \rangle = 0$) ケースである. そこでこれらのモジュライをスイッチオンし、クーロンブランチの一般的な点に行くこと考えよう. するとこの変形により配位 (4.4) に存在した特異性は解消され、M5 ブレインたちは次の正則曲線を巻く一枚のブレインへと融合する:

$$F(t, v) = v^N \prod_{\alpha=0}^n (t - t_\alpha) + \sum_{i=1}^N p_i(t) v^{N-i} = 0. \quad (4.5)$$

理論の IR パラメータ $\langle \text{tr } \Phi^i \rangle$ の情報を係数にまとめあげたものが、新たに加わった多項式 $\sum p_i(t) v^{N-i}$ である. この曲線は漸近的な振る舞いに関し、いくつかの条件が課されている. というのもブレイン系の両端には $N_{0, n+1}$ 枚の D4 ブレインが延びていた. そのため配位 (4.5) に関しても、 $t \rightarrow 0, \infty$ において v について $N_{0, n+1}$ 個の根を持ってはならない.

図 11 の右端の球面上に二種類のパンクチャーがあらわれていることが見て取れる. 単純パンクチャーは \bullet 、完全パンクチャーは \odot で書き表されている. より広いクラスの $\mathcal{N} = 2$ 理論を考える際には、さらに多くの種類のパンクチャーがあらわれ得るが [28] それらについては述べないことにする.

²正確にはシリンダーをパンクチャー付き球面にマップしなくてはならない. 一般的な Riemann 面上に $\mathcal{N} = (2, 0)$ 理論を乗せる手法については、[28] を参照.

変数変換 $v = tx$ を行おう. その結果得られる Seiberg-Witten 曲線の **Gaiotto 標準形** は次のような形のものである:

$$x^N = \sum_{i=2}^N \phi_i(t) x^{N-i}. \quad (4.6)$$

$\phi_i(t) dt^i$ は Riemann 面 C 上の i 次微分である. Gaiotto の表示においては, Seiberg-Witten 微分は $\lambda = xdz$ という形をしている. すると以上の考察から, M 理論より Seiberg-Witten 解 [2] のデータが得られるので, ゲージ理論の低エネルギー有効理論が決定されることになる. この表示の意味を理解するために, 具体例 $C_{4,0}$ を考えてみよう.

4-パンクチャー付き球面 $C_{4,0}$

質量変形する前の理論においては, N 枚の M5 ブレインを 4 点付き球面 $C_{4,0}$ に巻いた配位は

$$v^N(t-t_0)(t-t_1) = (u^{(2)}v^{N-2} + u^{(3)}v^{N-3} + \dots + u^{(N)})t, \quad (4.7)$$

と表された. まず変数変換 $v = tz$ を行おう.

$$x^N = \sum_{i=2}^N \frac{u^{(i)}}{t^{i-1}(t-1)(t-q)} x^{N-i}. \quad (4.8)$$

t についても適当にリスケールした. この $q = e^{i\pi\tau}$ は, UV のゲージ結合定数 $\tau = 4\pi i/g_{\text{YM}}^2 + \theta/2\pi$ を与える. というのも D4 の長さ Δx^6 が $1/g_{\text{YM}}^2$ を与えていたので, これを M 理論に持ち上げたパラメータ $q = t_1/t_0 = e^{-(s_1-s_0)}$ が正則結合定数 $e^{i\pi\tau}$ に他ならないのである. さて (4.6) に現れる i 次微分 $\phi_i(t) dt^i$ は, $t = 1, q$ に単純極をもち $t = 0, \infty$ に $i-1$ 次の極を持っている. この二種類のパンクチャーが, 図 11 における ● と ⊙ である. 特に $N = 2$ 枚の D4 ブレインしか考えないときには ϕ_2 しかあらわれない. この場合には ● と ⊙ はどちらも単純極を表しており, 理論には一種類のパンクチャーしかあらわれない. これは一見すると当たり前の事実である. しかし Gaiotto 双対性や AGT 予想を考える際に $SU(2)$ ゲージ理論が特別に簡単であるのは, この事実と密接に関係しており, とても重要な性質である. そこでこの場合を扱おう.

適当な分数線形変換 $SL(2, \mathbb{C})$

$$t \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}, \quad x \rightarrow (cz+d)^2 x, \quad (4.9)$$

を行うことで, ϕ_2 の四つの単純極を一般の位置 $z = z_{1,2,3,4}$ にとることが出来る. すると, もとの曲線にあったモジュライ q は, $z_{1,2,3,4}$ の交差比 cross ratio として与えられることになる. つまり Gaiotto 表示は, $C = C_{4,0}$ の余接バンドル T^*C 中の曲線

$$x^2 = \phi_2(z), \quad \phi_2(z) = \frac{u}{\prod_{i=1}^4 (z-z_i)}, \quad (4.10)$$

として表される. そして C の $SL(2, \mathbb{C})$ 不変なモジュライが q である.

この表示はほかの Riemann 面にもそのまま一般化することが出来る. 例えば $n+3$ パンクチャー付きの球面 $C_{n+3,0}$ に対しては

$$\phi_2(z) = \frac{U_{n-1}(z)}{\prod_{i=1}^{n+3} (z-z_i)}, \quad (4.11)$$

とした余接バンドル T^*C 中の曲線で書き表される. では, これら Seiberg-Witten 曲線の Gaiotto 表示にあらわれている, ベースの空間 C にはどのような意味があるのだろうか? 実は UV のマージ

ナルな結合定数 q の張る空間が、 $C_{4,0}$ の Teichmuller 空間 $\mathcal{M}_{4,0}$ となっているのである。このように Gaiotto 曲線 C は UV パラメータを表し、Seiberg-Witten 曲線 $\Sigma \subset T^*C$ は IR のパラメータを与えるのである。

(4.10) を用いて、パンクチャーでの Seiberg-Witten 微分 $\lambda = x dz$ の振る舞いについても議論しておこう。パンクチャー近傍 $z = z_i + \epsilon$ において、 $x \sim \epsilon^{-1/2}$ である。したがって $w = \epsilon^2$ という局所座標をとっておくと、Seiberg-Witten 微分はパンクチャー近傍で $\lambda \sim dw$ と振る舞う。つまり、2次微分には極があるが、Seiberg-Witten 微分はパンクチャーの位置でも滑らかである。この性質は、質量変形によって変更される。

弱結合とパンツ分解

$C_{4,0}$ の場合は、弱結合 $\tau \rightarrow i\infty$ は $q \rightarrow 0$ に対応することはすぐに分かる。 $C_{n+3,0}$ 理論においても、この事情は変わらない。結合定数は NS5 ブレイン間の距離に対応していたから、クイバーの場合は $t_\alpha/t_{\alpha-1} = \exp(-4\pi^2/g_\alpha^2 + i\theta/2)$ と与えられる。したがって、 $g_\alpha \rightarrow 0$ とは $|t_{\alpha-1}| \gg |t_\alpha|$ の極限を意味する。D ブレインの言葉では、これは NS5 ブレインたちが互いに無限に離れる極限である。Riemann 面 $C_{n+3,0}$ の言葉で言うと、パンツ分解に現れるチューブが無限に伸び（あるいは同じことであるが、チューブが無限小につぶれ）、面がグラフに退化する極限を表している。

さて理論が完全な弱結合にあるときは、 $|t_0| \gg \dots \gg |t_{\alpha-1}| \gg |t_\alpha| \gg \dots \gg |t_n|$ が満たされている。したがって次の式を示すのは容易であろう：

$$|t_0(t_\alpha)^n| \ll |t_0 t_1 (t_\alpha)^{n-1}| \ll \dots \ll |t_0 t_1 \dots t_{\alpha-1} (t_\alpha)^{n+1-\alpha}|, \quad (4.12)$$

$$|t_0 t_1 \dots t_{\alpha-1} t_\alpha (t_\alpha)^{n-\alpha}| \gg |t_0 \dots t_{\alpha-1} t_\alpha t_{\alpha+1} (t_\alpha)^{n-\alpha-1}| \gg \dots \gg |t_0 \dots t_\alpha t_n|. \quad (4.13)$$

これを後で用いる。

質量変形

次に質量変形を行う。質量によって変形する前には、 ϕ_i の極はすべて1次、あるいは $i-1$ 次以下である。その一方で、Seiberg-Witten 微分はパンクチャーにおいても極を持たなかった。そこで $C_{n+3,0}$ の M 理論曲線に次のような変形を導入しよう

$$v^2 \prod_{a=0}^n (t - t_a) = M_{n+1}(t)v + U_{n+1}(t). \quad (4.14)$$

ただしここでは簡単のため、M5 ブレインの枚数は2枚とした。ここで新たにあらわれたパラメータは、 $n+1$ 次多項式 M_{n+1} の $n+2$ 個の係数と、 U_{n+1} の $n+1$ 次と0次の項の係数である。これらをあわせると $n+4$ 個であり、これらが理論の質量パラメータに対応する。ただし変数 v にはシフトの自由度があるので、実際の物理的なパラメータ数は $n+3$ 個である。このシフトの自由度を使って、曲線の式から v の一次項を消去しよう：

$$v^2 \prod_{a=0}^n (t - t_a) = -\frac{1}{4 \prod_{a=0}^n (t - t_a)} M_{n+1}^2(t) + U_{n+1}(t). \quad (4.15)$$

いま固定した v のシフトの自由度は、理論の対角的 $U(1)$ ゲージ群の自由度に対応する。これは v 方向の移動は、重なり合った M5 ブレインたちの重心移動の自由度であることから分かる。つまり理論の $U(1)$ 部分をデカップルさせたことになる。まとめると、 $C_{n+3,0}$ に巻いた $N=2$ 枚の M5 ブレインが与える Seiberg-Witten 曲線は

$$x^2 = \phi_2(z) = \frac{P_{2n+2}(z)}{\prod_{a=1}^{n+3} (z - z_a)^2}, \quad (4.16)$$

である. これは (4.15) に座標変換 $v = tz$ と $SL(2, \mathbb{C})$ を施した式である. 質量変形を導入したことで, $\phi_2(z)(dz)^2$ に2次の極があらわれたことに注意しよう. そのため, Seiberg-Witten 微分 $\lambda = \sqrt{\phi_2(z)}dz$ が, パンクチャーの位置において単純極を持つようになる. そして次に見るように, そこでの留数, あるいは $\phi_2(z)(dz)^2$ の2次の極における係数が, ハイパー多重項の質量パラメータを表している.

このようにして導入されるパラメータが, 実際に質量を与えることを理解するために, 再び $C_{4,0}$ の具体例で考えてみよう. M 理論から得られる曲線 (4.7) は, 質量変形によって

$$v^N(t-1)(t-q) = M_2(t)v^{N-1} + \sum_{i=2}^N U_2^{(i)}(t)v^{N-i}, \quad (4.17)$$

と変形される. ただしここでは, M5 ブレイン N 枚の場合を考察しよう. M_2 も P_2 も, t に関する2次の多項式である. 新たに導入されたパラメータの数の勘定は, 先の例と全く同じように行える. これらが質量パラメータであることを理解しよう.

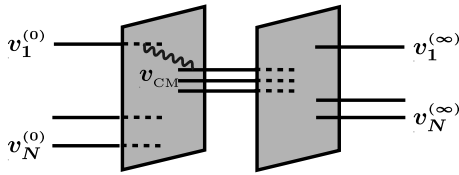


図 12: ブレイン構成におけるハイパー多重項の質量. 波線は, ハイパー多重項を生み出す開弦.

そのために, まず D4-NS5 系に戻って考えることにしよう. 図 12 に表されているように, v 方向において D4 ブレインたちを引き離すと, D4 ブレイン間に張るストリングは引き延ばされ, 張力がエネルギーを稼ぐ. そのために, D4 ブレインの間隔がそれらの質量を生み出すことになる. そこで $v_i^{(0, \infty)}$ を, それぞれ左右にある半無限にのびた i 番目の D4 ブレインの位置とする. そしてそれらの重心を $v_{CM}^{(0, \infty)}$ としよう. また, NS5 の間に張っている D4 ブレインの重心位置を $v_{CM}^{(1)}$ と書くことにする. すると図 12 の波線のように, 左の i 番目のブレインからのびるストリングの質量は $\mu_i^{(0)} \propto v_i^{(0)} - v_{CM}^{(1)}$ で与えられる. 右についても同様に $\mu_i^{(\infty)} \propto v_i^{(\infty)} - v_{CM}^{(1)}$ となる.

以上の議論から分かるように, ハイパーの $2N$ 個の質量は, $v_i^{(0)}$ たちの差, $v_{CM}^{(1)} - v_{CM}^{(0)}$, $v_{CM}^{(1)} - v_{CM}^{(\infty)}$, そして $v_i^{(\infty)}$ たちの差, の4組に分けられる. ある NS5 ブレインに注目しよう. その左右にある D4 ブレインの重心たちの差 $v_{CM}^{(\alpha)} - v_{CM}^{(\alpha+1)}$ は質量を与え, $U(1)$ 質量 $m_{1,2}$ と呼ばれる. 一方ブレイン配位の端の領域では, 半無限 D4 ブレインたちの間隔が質量を与え, それを $SU(N)$ 質量 $\tilde{m}_i^{(0, \infty)}$ と呼ぶ. ではこれらの質量にはどのような意味があるのだろうか? この配位を M 理論に持ち上げると, $U(1)$ 質量は $t = 1, q$, $SU(N)$ 質量は $t = 0, \infty$ に対応させられることが分かるであろう. したがって Gaiotto 曲線の \bullet は $U(1)$ に, \odot は $SU(N)$ に付随している.

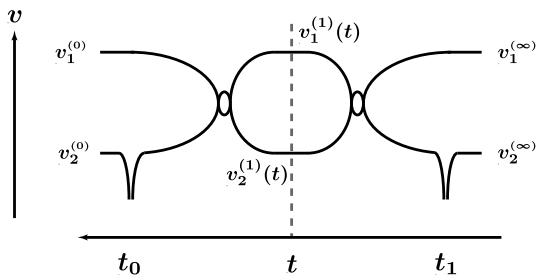


図 13: 弱結合における曲線の構造 ($N = 2$, $n = 1$ の場合) .

実はこの $U(1)$ と $SU(N)$ は, ゲージ理論においては, 質量を導入する際に用いるフレーバー対称性としてあらわれる. フレーバー対称性 $U(N_f)$ があるとき, この対称性をあたかもゲージ対称性であるかのように見なそう. すると仮想的 Higgs 機構によりハイパー多重項 Q_I に質量項 $\mathcal{L}_{\text{mass}} = \text{Re } m_J^I \tilde{Q}_{iJ} Q^{iI}$ が導入できる. するとその構成から, この質量項は $[m, m^\dagger] = 0$ ならば $\mathcal{N} = 2$ 超対称性を保つ.

質量変形の前は, パンクチャーの位置においても Seiberg-Witten 微分 λ は極を持たなかった. しかし変形の後には, 単純極を持つことになる. そしてこの留数は理論の質量パラメータのアファイン線形な組み合わせで表されている. では実際に, 質量がこれら留数と関係していることを示すことにしよう. 再び (4.5) の場

合に戻って議論しよう. この式を t についての多項式方程式と見なすと

$$F(t, v) = \sum_{\alpha=0}^{n+1} q_{\alpha}(v) t^{n+1-\alpha}, \quad (4.18)$$

と書き換えることが出来る. これを (4.5) と比べると

$$q_{\alpha}(v) = c_{\alpha} (v^N - \mu_{\alpha} v^{N-1} - \dots - u_N^{\alpha}), \quad (4.19)$$

である. ただしここで

$$p_0(t) = \prod_{\alpha=0}^n (t - t_{\alpha}) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} t^{n+1-\alpha}, \quad q_0(v) = \prod_{i=1}^N (v - v_i^{(0)}), \quad (4.20)$$

を導入しよう. すると $c_{\alpha} = (-1)^{\alpha} (t_0 t_1 \dots t_{\alpha-1} + \text{perms})$, $\mu_0 = \sum_i v_i^{(0)}$ であることがすぐに分かる. 以上の準備の下、留数を計算してみることにしよう. まずは完全パンクチャーから議論を始める. ここでは $x_6 \rightarrow 0$ の場合を例にとる. このとき、 $t \rightarrow \infty$ であるので、この領域での曲線 $F(t, v) = 0$ の漸近形に寄与するのは

$$F(t, v) \sim q_0(v) t^{n+1} = 0, \quad (4.21)$$

の部分である. つまり $q_0(v)$ の N 個の根が、 $x_6 \rightarrow 0$ におけるブレイン配位の漸近的な位置を与えている (図 13 の左端). したがってその N 個の根 $v_i^{(0)}$ が、M5 ブレインの N 枚のシートの漸近的な位置を表している. つまり各シート上での $\lambda = v dt/t$ の留数たちは

$$(-v_1^{(0)}, -v_2^{(0)}, \dots, -v_N^{(0)}), \quad (4.22)$$

で与えられる. したがってこれらは本質的には $SU(N)$ 質量 $\tilde{m}_i^{(0)}$ そのものである. 実際には重心 $U(1)$ の自由度を取り除かなければならないが、それについては次節で計算する.

次に $t = t_{\alpha}$ での留数を計算しよう. 式 (4.5) より、 $t \sim t_{\alpha}$ では

$$v^N + \frac{1}{(t - t_{\alpha})} \frac{p_1(t) v^{N-1} + \dots}{\prod_{\beta \neq \alpha} (t - t_{\beta})} = 0, \quad (4.23)$$

であるので、各シート上における振る舞いは $(v_i) \sim (0, \dots, 0, \rho_{\alpha}/(t - t_{\alpha}))$, となる. ただしここで $\rho_{\alpha} := -p_1(t_{\alpha})/\prod_{\beta \neq \alpha} (t_{\alpha} - t_{\beta})$ という記号を導入した. つまり留数たちは

$$(0, \dots, 0, \rho_{\alpha}/t_{\alpha}), \quad (4.24)$$

で与えられ、これらは $U(1)$ 質量 m_i に対応している. そのことを理解するために、弱結合極限においてこの値を見積もってみよう. まず (4.5)、(4.18)、(4.19) の三式を比べると

$$p_1(t) = - \sum_{\beta} c_{\beta} \mu_{\beta} t^{n+1-\beta}, \quad (4.25)$$

であることがすぐに分かる. 弱結合 $|t_0| \gg \dots \gg |t_{\alpha-1}| \gg |t_{\alpha}| \gg \dots \gg |t_n|$ では $c_{\beta} \sim (-1)^{\beta} t_0 t_1 \dots t_{\beta-1}$ である. したがって不等式 (4.12) と (4.13) より、 $p_1(t_{\alpha})$ の項のうちで主要な寄与をするのは $c_{\alpha} \mu_{\alpha} t^{n+1-\alpha}$ と $c_{\alpha+1} \mu_{\alpha+1} t^{n-\alpha}$ の二つだけである. つまり

$$p_1(t_{\alpha}) \sim (-1)^{\alpha+1} t_0 t_1 \dots t_{\alpha-1} (t_{\alpha})^{n+1-\alpha} (\mu_{\alpha} - \mu_{\alpha+1}), \quad (4.26)$$

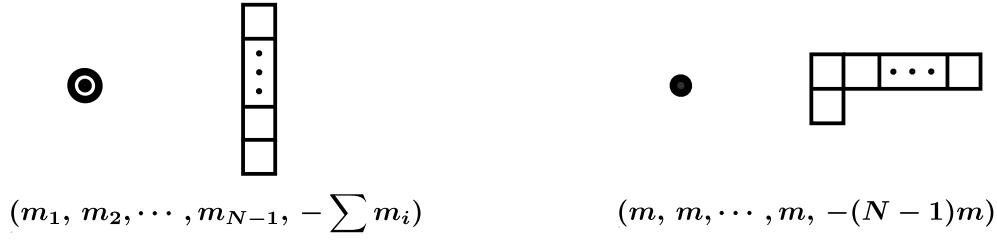


図 14: 完全パンクチャー (左) と、基本パンクチャー (右) . 各パンクチャーにおける留数 (質量) たちからフレーバー対称性が読み取れる.

である. また弱結合では、不等式より $\prod_{\beta \neq \alpha} (t_\alpha - t_\beta) \sim (-1)^\alpha t_0 t_1 \cdots t_{\alpha-1} (t_\alpha)^{n-\alpha}$ であるから、結局留数 (4.24) は

$$(0, \dots, 0, \mu_\alpha - \mu_{\alpha+1}), \quad (4.27)$$

で与えられる. μ_α は α 番目の D4 ブレインの重心を与えるので、これはまさに $U(1)$ 質量だ. このことを見るためには、弱結合極限で α 番目の D4 ブレイン付近 $|t_{\alpha-1}| \gg |t| \gg |t_\alpha|$ においては $\dots \ll |c_{\alpha-1} t^{n+2-\alpha}| \ll |c_\alpha t^{n+1-\alpha}| \gg |c_{\alpha+1} t^{n-\alpha}| \gg \dots$ となることを用いればよい. したがってこの領域における曲線の振る舞い $F(t, v) \sim q_\alpha(v) t^{n+1-\alpha} = c_\alpha (v^N - \mu_\alpha v^{N-1} - \dots - u_N^\alpha) t^{n+1-\alpha}$ の項のみが寄与する. $v^N - \mu_\alpha v^{N-1} - \dots - u_N^\alpha = \prod_i (v - v_i^{(\alpha)})$ とすると、 $v_i^{(\alpha)}$ がブレインの各シートの位置を表し、 $\mu_\alpha = \sum_i v_i^{(\alpha)}$ がそれらの重心を与えている. 以上の結果を、 $C_{4,0}$ に $N = 2$ 枚の M5 ブレインを巻いた例に関して描くと図 13 のようになる.

以上で議論して来た Gaiotto 表示の性質は、一般の N, C に対しても引き継がれる. つまり $SU(N)$ クイバー理論に対し、Seiberg-Witten 曲線は余接バンドル T^*C 中の曲線

$$x^N + x^{N-2} \phi_2(z) + \dots + x \phi_{N-1}(z) + \phi_N(z) = 0, \quad (4.28)$$

と表される. そして次節で見ると、曲線の種数とパンクチャーが理論のクラスを定めている. また Seiberg-Witten 微分 λ の留数が、質量とそれに対応するフレーバー対称性を記述する.

質量、フレーバー対称性とパンクチャー

さて最後に重心自由度を取り除き、留数とフレーバー対称性との関係をはっきりとさせておこう. 重心 $U(1)$ 自由度の除去は、曲線 (4.5) から v^{N-1} の項を消去すればよい. つまり $v_{\text{new}} = v + p_1(t)/N \prod (t - t_\alpha)$ と変数を一箇関数でシフトさせればよい. これに従い、Seiberg-Witten 微分も $\lambda_{\text{new}} = \lambda_{\text{old}} + p_1(t)/N \prod (t - t_\alpha) \times dt/t$ に置き換わる. つまり質量留数もシフトすることになる. λ が BPS 粒子の中心電荷を与えることを思い出すと、このシフトは粒子のフレーバー電荷をゲージ電荷によるシフトで再定義したにすぎない.

完全パンクチャー \odot 周りにおける、Seiberg-Witten 微分 λ の留数を考えてみよう. ここでは $t = \infty$ を考える. (4.25) を用いると、シフト分 $p_1(t)/N \prod (t - t_\alpha) \times dt/t$ の留数は $-\mu_0/N = -v_{\text{CM}}^{(0)}$ に等しいことがわかる. したがって新たな Seiberg-Witten 微分 λ_{new} は、 N 枚のシート上で留数

$$(m_1, \dots, m_{N-1}, -\sum_{i=1}^{N-1} m_i). \quad (4.29)$$

を持つ. ただし、各留数は $m_i = v_i^{(0)} - v_{\text{CM}}^{(0)}$ である. このパンクチャーに対応するフレーバー対称性は $SU(N)$ である. そして先ほどのハイパーの質量は、このフレーバー対称性の Cartan 部分を用いて入れた質量である.

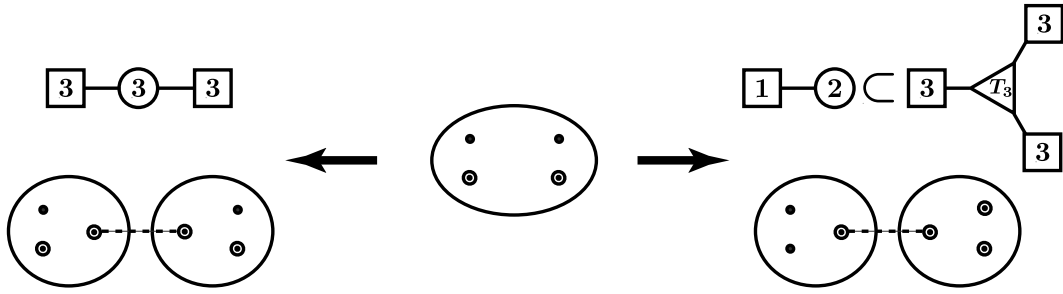


図 15: 4 点付きパンクチャーの二つの退化パターン. 左は 6 フレーバーの $SU(3)$ SQCD. 右は T_3 理論の $SU(2)$ 部分をゲージ化し、基本フレーバーをカップルさせた理論.

一方単純パンクチャー \bullet では、留数のシフトは $m := -\rho_\alpha/Nt_\alpha$ で与えられる. ただし $t = t_\alpha$ を考えた. したがって前節の結果とあわせると、各シート上で留数は

$$(m, \dots, m, (1-N)m) \quad (4.30)$$

となることが分かった. この場合は、フレーバー対称性 $S(U(1)^2) = U(1)$ が対応している.

このように、Gaiotto 表示における留数の構造と、その質量に付随したフレーバー対称性の間には美しい対応関係があることが分かった. したがってこのアイデアを押し進めることで、様々な対称性に付随したパンクチャーを新たに導入し、 $\mathcal{N} = 2$ 理論のクラスを大幅に拡大させることが出来る. この詳細と、そこから導かれる目覚ましい結果の数々については、原論文 [28]. を参照されたい. さてブレインの枚数が $N = 2$ の場合はどちらの質量留数も $(m, -m)$ となることから、パンクチャーに違いは無い. したがってフレーバー対称性は、どちらの場合でも $SU(2)$ へ持ち上がることになる.

さらに $N = 2$ の場合は理論全体のフレーバー対称性についても特別であり、しばしばそれらは高い対称性へ持ち上がる. これはゲージ理論に対してはよく知られた事実であり、 $SU(2)$ の基本表現が擬実なためである. この理由により、例えば基本表現 $\mathbf{2}$ のハイパー多重項 (Q, \tilde{Q}^\dagger) を d 個考えると、 $2d$ 個のハーフハイパー Q, \tilde{Q} をまわす $SO(2d)$ フレーバー対称性までに持ち上がり、ハイパーはそれらのベクトル表現 $\mathbf{2d}$ で変換する. この観点からは、ハーフハイパー多重項が偶数個導入されているのは、 $SU(2)$ ゲージ理論の大域的アノマリーを相殺させるためである. また、双基本表現で変換するハイパー多重項については $U(1)$ フレーバー対称性がある. ゲージ群が $SU(2) \times SU(2)$ の場合、これは実表現であるので、フレーバー対称性は $Sp(1) \sim SU(2)$ まで持ち上がる事が分かる. 一方ブレイン構成側から見てみると、4-フレーバー SQCD に対しては、 $SO(8)$ フレーバー対称性のうち $SU(2)^4 \subset SO(8)$ 部分のみが見えていることになる.

また、球面に 3 つの完全パンクチャーをのせてブレインを 3 枚巻いた配位を取り上げてみよう. この系は四次元において、 T_3 理論 (Minahan-Nemeschansky 理論) と呼ばれる強結合な共形場理論を与える. ブレイン構成から見て取れるフレーバー対称性は、3 つのパンクチャーからくる $SU(3)^3$ 対称性である. しかし実際のフレーバー対称性は E_6 であることが知られており、その部分群のみが見えていることになる. さて T_3 理論の $SU(3)$ 対称性を一つ取り上げ、 $SU(2)$ 部分群を弱くゲージ化してみよう. そしてさらに $SU(2)$ ゲージ群の基本表現ハイパーを一つ加えると、新たな共形場理論が得られる. この理論は実は、6 フレーバー $SU(3)$ SQCD の強結合を記述するデュアル理論である. これが Argyres-Seiberg の S-デュアリティーである. Gaiotto 曲線の言葉で理解すると、図 15 のように曲線に二つのパンツ分解、つまり二つの弱結合記述があることに起因している.

このようにすべてのフレーバー対称性がブレイン構成から読み取れる訳ではなく、典型的には $SU(N)$ 部分群のみが露になるのが Gaiotto による記述である. しかしこのような対称性の一部分だけに注目することで、S-デュアリティーの作用を見通しよく理解することが出来るのである [28].

4.2 AGT 予想

Gaiotto による M5-ブレーン構成が示唆していることは、Riemann 面のパンツ分解操作は四次元超共形場理論と深い関係を持っているということである。その一方で Riemann 面の縫い合わせ操作と聞いて我々がすぐに連想するのは、二次元の共形場理論であろう。したがって四次元超共形場理論と二次元共形場理論の間に何らかの対応関係を期待するのは自然である。このようなアイデアに基づき、Alday らはいわゆる AGT 対応を提唱した。四次元超共形場理論と二次元共形場理論を結びつけるこの試みを具体的なものとするために、彼らは $\mathcal{N} = 2$ $SU(2)$ 超対称クイバーゲージ理論を取り上げ、考察の対象として Nekrasov 分配関数を選んだ。そして彼らはそれが Liouville 理論の相関関数に対応していることを初めて発見したのである。

この節では具体的な $SU(2)$ ゲージ理論を選び、Alday たちの発見と同じ道をを辿ることで AGT 予想について考えてみよう。まずは我々の規範的な例である 4 フレーバー SQCD から議論を始めよう。

$SU(2)$ $N_f = 4$ 超共形ゲージ理論 : $T_{4,0}[A_1]$

Nekrasov 公式の構成を思い出そう。 $U(2)$ $N_f = 4$ ゲージ理論では、ベクトル多重項からの寄与とハイパー多重項からの四つの寄与があるから、Nekrasov 公式は次のように書き下された:

$$Z_{\text{inst}} = \sum_{Y_2, \bar{Y}_2} q^{|Y|} z_{\text{vect}}(\vec{a}, \vec{Y}) \times z_{\text{antifund}}(\vec{a}, \vec{Y}, \mu_1) z_{\text{antifund}}(\vec{a}, \vec{Y}, \mu_2) z_{\text{fund}}(\vec{a}, \vec{Y}, \mu_3) z_{\text{fund}}(\vec{a}, \vec{Y}, \mu_4). \quad (4.31)$$

ここでクローンモジュライ a 、質量 μ そして Ω -背景 $\epsilon_{1,2}$ はすべて質量次元 1 の量であったことを思い出す。残りのパラメータである共形ゲージ理論の UV 結合定数 q は次元ゼロである。その一方 Nekrasov 分配関数 $Z = 1 + \mathcal{O}(q)$ 自体は無次元量である。したがって有理式 $z_{\text{vect}} z_{\text{fund}} \times \dots$ は a 、 μ そして $\epsilon_{1,2}$ に関する質量次元ゼロの斉次式である。したがってすべてのパラメータをリスケールすることで、無次元化したパラメータで書き直すことが出来る。ここでは Alday らに従い質量スケール因子 $\hbar := \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}$ を取り出し、無次元化したパラメータたちを改めて a 、 μ 、 $\epsilon_{1,2}$ とかくことにしよう:

$$Z_{\text{inst}}(a, \mu; \epsilon_{1,2}; q) \rightarrow Z_{\text{inst}}(\hbar a, \hbar \mu; \hbar \epsilon_{1,2}; q) = Z_{\text{inst}}(a, \mu; \epsilon_{1,2}; q) \quad (4.32)$$

ただし最後の行への変形では、Nekrasov 分配関数が次元ゼロであることを用いた。以下では Nekrasov 分配関数に現れるパラメータはすべて無次元化したものとする。 \hbar を用いて質量次元を回復させる操作も自明であろう。この $\hbar := \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}$ による無次元化の後には、 Ω -背景は互いに逆数の関係となることがわかる

$$\epsilon_1 = b, \quad \epsilon_2 = 1/b. \quad (4.33)$$

そこで後の Liouville 理論との比較のために次の量を定義しておこう:

$$Q := \epsilon_1 + \epsilon_2 = b + 1/b. \quad (4.34)$$

では早速 Nekrasov 分配関数を調べる作業にとりかかろう。まず、フレーバー対称性 $U(2)_1 \times U(2)_2$ がそれぞれ露に作用する質量行列二つを、Cartan $U(1)_i$ 部分と $SU(2)_i$ 部分に分解しよう:

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} = m_1 \sigma^0 + \tilde{m}_1 \sigma^3, \quad \begin{pmatrix} \mu_3 & 0 \\ 0 & \mu_4 \end{pmatrix} = m_2 \sigma^0 + \tilde{m}_2 \sigma^3 \quad (4.35)$$

ここで σ^0 は 2×2 単位行列である. これら前節で導入した $U(1)$ 質量と $SU(2)$ 質量である. Nekrasov 分配関数は $SU(2)_1 \times SU(2)_2$ の Weyl 群

$$\tilde{m}_{\tilde{i}} \longrightarrow -\tilde{m}_{\tilde{i}}, \quad (4.36)$$

の作用の下で不変になっている. またゲージ群の Weyl 群の作用 $a \rightarrow -a$ の下でも不変に保たれている. Gaiotto 構成の節で見た通り、 $SU(2)$ ゲージ群を考えた時は、ハイパー多重項が擬実表現 **2** であるからフレーバー対称性が

$$\prod_{\tilde{i}=1}^2 SU(2)_{\tilde{i}} \times \prod_{i=1}^2 U(1)_i \longrightarrow \prod_{\tilde{i}=1}^2 SU(2)_{\tilde{i}} \times \prod_{i=1}^2 SU(2)_i \subset SO(8), \quad (4.37)$$

にまで上がるはずである. この現象を、もう一度ゲージ理論の観点から復習することにする. ある表現 R で変換するハイパー多重項 (Q, \tilde{Q}^\dagger) は、 $\mathcal{N} = 2$ スーパーポテンシャル $W = \tilde{Q}_I \Phi^I_J Q^J$ を持っている. ただし、上付き・下付き添字は R とその共役表現の添字である. そこで R が (擬) 実の場合、ハーフハイパー (Q, Q^\dagger) が可能になると考えられる. そこで、スーパーポテンシャルからどのような条件が課されるかを考えてみる. 不変テンソル R を用いると、 $Q^* = RQ$ であるから $W = Q^t R^t \Phi Q$ となる. すると擬実表現の場合には不変テンソル R が反対称なので、 $R^t \Phi$ は対称行列となり、このようなスーパーポテンシャルを組むことが出来る. したがって、 $2d$ 個の擬実表現ハーフハイパーは

$$W = \sum_{i=1}^{2d} Q_{(i)}^t R^t \Phi Q_{(j)}, \quad (4.38)$$

というスーパーポテンシャルを持っており、これらのフレーバー対称性は $O(2d)$ であることが分かる. 通常のハイパー多重項は、二つのハーフハイパーを $Q = Q_{(1)} + iQ_{(2)}$, $\tilde{Q} = R(Q_{(1)} - iQ_{(2)})$ と組めばよい. 次に R が実表現の場合を考えると、不変テンソル R が対称で $R^t \Phi$ は反対称行列となるので、ハーフハイパーが一つではスーパーポテンシャルが組めない. そこで2個導入すると

$$W = \epsilon^{ij} Q_{(i)}^t R^t \Phi Q_{(j)}, \quad (4.39)$$

とすることでスーパーポテンシャルを与えることが出来る. $2d$ 個への拡張も明らかであり、フレーバー対称性は $Sp(2d)$ となる.

そこでゲージ群の $U(1)$ 部分を取り除き、フレーバー対称性が拡大した場合を調べたいのであるが、そのためには随伴 Higgs 場の期待値をトレースレス $\vec{a} = (a_1, a_2) \rightarrow (a, -a)$ にとれば良いと思われる. しかしながらこの操作だけでは不十分であることが分かる. それは、この操作だけでは、フレーバー対称性の増大 $U(1)_i \rightarrow SU(2)_i$ に対応した新たな Weyl 不変性

$$m_i \longrightarrow Q - m_i, \quad (4.40)$$

が生まれにくいからである. ここで Weyl 反転を $m_i \rightarrow -m_i$ ではなく上のように Q を含めて定義した理由は、ハイパー多重項の質量パラメータの取り方に関係があるが、ここでは詳しく議論しない.

Alday らは $U(1)_i \rightarrow SU(2)_i$ を起こさせるために取り除くべき $U(1)$ 因子を提唱した:

$U(2)$ $N_f = 4$ ゲージ理論の $U(1)$ 因子

$$Z^{U(1)} = (1 - q)^{2m_1(Q - m_2)}. \quad (4.41)$$

そしてこの $U(1)$ 因子を取り除くことで次の \mathcal{F} を考えた:

$$Z_{\text{inst}}^{U(2)}(a) = Z^{U(1)} \mathcal{F}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}(q). \quad (4.42)$$

ただし $Z_{U(2)}(a)$ は $\vec{a} = (a, -a)$ で見積もった $U(2)$ 分配関数を意味する. そして Alday らは、**この \mathcal{F} を考えることで期待される新たな Weyl 不変性 (4.40) が生じると主張した**. この仕組みを理解するために、Nekrasov 分配関数の 1-インスタントン計算を行ってみよう. インスタントン数 1 の寄与は $\vec{Y} = (\square, \phi)$ と $\vec{Y} = (\phi, \square)$ の二つの和からくるので、対応する因子を書き下すと

$$Z_{\text{inst}} = 1 - q \left(\frac{\prod_{i=1}^4 (a + M_i + Q/2)}{2a(2a + Q)} + \frac{\prod_{i=1}^4 (-a + M_i + Q/2)}{2a(2a - Q)} \right) + \mathcal{O}(q^2), \quad (4.43)$$

となる. ここで式の対称性が見えやすくなるように、修正した質量パラメータ

$$M_{1,2} = \mu_{1,2} - \frac{Q}{2}, \quad M_{3,4} = -\mu_{3,4} + \frac{Q}{2}, \quad (4.44)$$

を導入した. この質量パラメータのコトバでは、新たに生じるべき Weyl 不変性は $M_1 \leftrightarrow -M_2$ と $M_3 \leftrightarrow -M_4$ である. そこで $M_1 \leftrightarrow -M_2$ (つまり $m_1 \rightarrow Q - m_1$) の変換を考えてみよう. もちろん Z_{inst} はこのままでは Weyl 不変ではない. それは、例えば分配関数の 1-インスタントンまでの展開 (4.43) の中に、 $M_{1,2}$ に関して奇数次の項

$$\begin{aligned} & -q(M_1 + M_2) \left(\frac{(a + Q/2) \prod_{i=3}^4 (a + M_i + Q/2)}{2a(2a + Q)} + \frac{(-a + Q/2) \prod_{i=3}^4 (-a + M_i + Q/2)}{2a(2a - Q)} \right) \\ & = -q(2m_1 - Q)(Q - m_2), \end{aligned} \quad (4.45)$$

があるためである. 注目すべきことに、この部分は a を全く含んでいない. そのためこの問題をはらんだ m_1 依存性は、 $U(1)$ 因子 $1/Z^{U(1)} = 1 + 2qm_1(Q - m_2) + \dots$ によって完全に取り除かれる. つまり $U(1)$ 因子を除することで、新たに Weyl 不変性 $m_1 \rightarrow Q - m_1$ が生まれることになる. $M_3 \leftrightarrow -M_4$ (つまり $m_2 \rightarrow Q - m_2$) の方についても全く同じ仕組みが働いている.

$$\mathcal{F}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}(q) = \begin{array}{cccc} & \mathbf{2} & & \mathbf{3} \\ & | & & | \\ \mathbf{1} & \text{---} & \alpha & \text{---} & \mathbf{4} \end{array}$$

図 16: $SU(2)$ ゲージ理論の Nekrasov 分配関数.

このように Alday らの議論を辿ってあらたに分かったことは、**通常我々が計算している Nekrasov 公式は $U(2)$ ゲージ群に対するものであって、 $SU(2)$ とするためには $\Phi = \text{diag}(a_1, a_2)$ をトレースレスにするだけでなく、 $U(1)$ 因子を除去しなくてはならない**、ということである. つまり、 $SU(2)$ ゲージ理論の Nekrasov 公式は

$$\mathcal{F}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}(q) = Z_{\text{inst}}^{U(2)}(a) / Z^{U(1)}, \quad (4.46)$$

で与えられると考えるべきである. ここで共形場理論との対応を見やすくするために、次のパラメータを導入した:

$$\alpha = Q/2 + a, \quad \alpha_1 = Q/2 + \tilde{m}_1, \quad \alpha_2 = m_1, \quad \alpha_3 = m_2, \quad \alpha_4 = Q/2 + \tilde{m}_2. \quad (4.47)$$

いよいよ AGT 予想の主張を述べる準備が整った. 論文 [4] における Alday らの驚くべき発見は、 $SU(2)$ ゲージ理論の Nekrasov 公式 $\mathcal{F}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}(q)$ がじつは**中心電荷 $c = 1 + 6Q^2$ の Virasoro 共形ブロックと厳密に一致している**、ということである:

AGT 予想 [4]

球面上の四点 $0, q, 1, \infty$ に次元 $\Delta_i = \alpha_i(Q - \alpha_i)$ の頂点演算子を挿入した共形ブロックを考えよう. ただし中間状態の次元が $\Delta = \alpha(Q - \alpha)$ の s -チャンネルで評価する. この共形ブロックは、 $U(1)$ 因子を割り出して定義した $SU(2)$ $N_f = 4$ 超共形ゲージ理論の Nekrasov 分配関数 \mathcal{F} にほかならない:

$$\mathcal{F}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}(q) = \mathcal{F} \left[\begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{matrix} \right] (\Delta; q) \quad (4.48)$$

ただしここでの共形ブロックは、中心電荷 $c = 1 + 6Q^2$ の Virasoro 代数に対するものである.

Gaiotto の M5 ブレイン構成において、 $SU(2)$ $N_f = 4$ 超共形ゲージ理論は四点付き球面 $C_{4,0}$ から現れる $\mathcal{T}_{4,0}[A_1]$ 理論であった. したがって図 16 のように球面上の四点共形ブロックが対応するのは自然であるとも考えられる. またゲージ理論において議論していた $SU(2)^4$ フレーバー対称性に起因する Weyl 不変性は、共形ブロックの対称性 $\alpha_i \rightarrow Q - \alpha_i$ にほかならない.

この主張を AGT 予想と呼んでいるのは、現時点までで証明がなされていないためである. というのも両者は全く異なる数学的起源をもつ関数であるので、この等価性の証明は決して容易い問題ではないからである. 特にインスタントモジュライ空間の Ω -同変コホモロジー群上に Virasoro 代数の作用があり、その表現としての構造を持つという主張は数学的にも全く新しく、今後の発展が待たれる話題である. 幸運なことに、いくつかの単純化した系では物理学者による証明が与えられているので、この話題については本稿の最後の章で触れたい.

そこで、ここではインスタント展開の下で具体的にチェックしてみよう. 1-インスタントの次数までで、 $SU(2)$ ゲージ理論に対する Nekrasov 分配関数は

$$\begin{aligned} Z_{\text{inst}} / Z^{U(1)} &= 1 - q \left(\frac{\prod_{i=1}^4 (a + M_i + Q/2)}{2a(2a + Q)} + \frac{\prod_{i=1}^4 (-a + M_i + Q/2)}{2a(2a - Q)} \right) \\ &\quad + \frac{q}{2} (M_1 + M_2 + Q)(M_3 + M_4 + Q) + \mathcal{O}(q^2), \end{aligned} \quad (4.49)$$

となる. ここで二行目の項は、 $U(1)$ 因子の除法から来たものだ. 一行目にある q^1 の因子だけを通過したのでは、当然ながら分子は因子化した形とはならず、複雑な有理式を与える. しかし驚くべきことに $U(1)$ 因子に由来する二行目の項を加えると、得られる 1-インスタント項は非常にきれいな形に因子化する:

$$\begin{aligned} Z_{\text{inst}} / Z^{U(1)} &= 1 - q \frac{(2a^2 - Q(\mu_1 + \mu_2) + 2\mu_1\mu_2) (2a^2 + Q(\mu_3 + \mu_4 - 2Q) + 2(\mu_3 - Q)(\mu_4 - Q))}{2(4a^2 - Q^2)} + \mathcal{O}(q^2), \end{aligned}$$

これは共形ブロックの計算から期待される項そのものである:

$$\mathcal{F} \left[\begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{matrix} \right] (\Delta; q) = 1 + q \frac{(\Delta + \Delta_1 - \Delta_2)(\Delta + \Delta_3 - \Delta_4)}{2\Delta} + \mathcal{O}(q^2).$$

ここでは手でも簡単に計算することが出来る 1-インスタント補正の部分のみチェックした. 今考えている量にはパラメータの数が十分あるので、Nekrasov 分配関数と共形ブロックの値を 1-インスタ

ントンであわせられるのは当然だ、と考える読者がいるかもしれない。しかしながら注意すべきなのは、我々はパラメータ間の関係として、簡単な多項式のものしか課していないことである（これらは Liouville 理論に直接関係した自然なパラメータ付けだ）。それにも関わらず、複雑な Nekrasov 分配関数を $U(1)$ 因子で割りパラメータの関係式を代入するだけで、各インスタント数の項が因子化し、共形ブロックの計算から期待される多項式を与えるのである。このように我々のチェックした 1 次での等価性の時点で、すでに非自明な現象が起きているのである。計算機も駆使することで、この等価性はインスタント展開の 10 次程度まで確認されている。関心のある読者の方には、*Maple* などを用いて 2-インスタント以上のチェックをされてみることをお勧めする。当然ではあるが、展開の高次になるほど分配関数に寄与する項は組み合わせ論的な増大を見せ、その計算は困難になる。しかし驚くべきことに、各インスタント数で寄与を与える有理式たちを通分し、分子と分母を因子化し、約分してみると共形ブロックも Nekrasov 分配関数も全く同じ有理式を与えることが見て取れるのである。とくに分母には各インスタント数に対応するレベルの Kac 行列式が現れる。そしてこのことに対応し、Nekrasov 分配関数の極の位置と留数の構造が AGT 予想にとって非常に重要である。そのことについては最後の章で触れたい。

$SU(2)$ 線形クイバーゲージ理論 : $T_{n+3,0}[A_1]$

AGT 予想は 4 フレーバー理論に限られた対応ではない。我々は Gaiotto 構成から、Riemann 面の pants 分解の集合と四次元ゲージ理論の間に一対一の対応があることを学んだ。したがって AGT の対応はこれらに対して普遍的に成立していると期待される。そこで最もシンプルな一般化の系列を紹介しよう。

ここで考えるのは、 $n+3$ 点付き球面である。その pants 分解として、図 17 のように線形なものを考えよう。

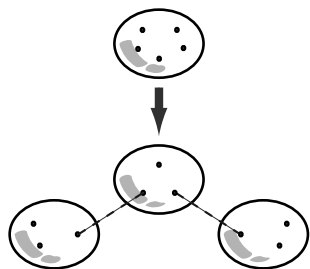


図 17: 線形な pants 分解.

この Riemann 面に対応するゲージ理論は $SU(2) \times SU(2) \times \cdots \times SU(2)$ クイバーゲージ理論である。ただし物質場として、隣接するゲージ群の間に、双基本表現のハイパー多重項がそれぞれ一つある。またさらにクイバーの端にあるゲージ群二つは、それぞれ (反) 基本表現ハイパー多重項を二つもつ。このゲージ理論に対する Nekrasov 分配関数もまた簡単に書き下すことが出来る。 q_i を i 番目のゲージ群に対する結合定数としよう。また \vec{a}_i も i 番目のゲージ群に対する Coulomb モジュライである。すると $U(2)^n$ クイバー理論に対するインスタント分配関数は次のように与えられる:

$$Z_{\text{inst}} = \sum_{\vec{Y}_i} \left(\prod_{i=1}^n q_i^{|\vec{Y}_i|} z_{\text{vect}}(\vec{a}_i, \vec{Y}_i) \right) z_{\text{antifund}}(\vec{a}_1, \vec{Y}_1, \mu_1) z_{\text{antifund}}(\vec{a}_1, \vec{Y}_1, \mu_2) \\ \times \prod_{i=1}^{n-1} z_{\text{bifund}}(\vec{a}_i, \vec{Y}_i; \vec{a}_{i+1}, \vec{Y}_{i+1}; m_{i+1}) \times z_{\text{fund}}(\vec{a}_n, \vec{Y}_n, \mu_3) z_{\text{fund}}(\vec{a}_n, \vec{Y}_n, \mu_4). \quad (4.50)$$

質量 μ_1, \dots, μ_4 を $U(1)$ 質量と $SU(2)$ 質量に分ける方法は、 $n=1$ の場合と全く同様である。また、この理論に対する $U(1)$ 因子は

$$Z^{U(1)} = \prod_{l \leq n} (1 - q_l q_{l+1} \cdots q_n)^{m_l(Q - m_{n+1})} \quad (4.51)$$

と与えられている。したがってこれらの比 $Z_{\text{inst}}/Z^{U(2)}$ をとることで、 $SU(2)^n$ クイバー理論の分配関数 $\mathcal{F}_{\vec{m}_1}^{m_1 \alpha_1 \cdots m_{n+1} \vec{m}_{n+1}}$ が得られるが、これも再び共形ブロックとの一致をみる

$$\mathcal{F}_{\vec{m}_1}^{m_1 \alpha_1 \cdots m_n \alpha_n m_{n+1} \vec{m}_{n+1}}(q_1, \dots, q_n) = \mathcal{F} \left[\begin{matrix} 2 & 3 & 4 & \cdots & n+2 \\ 1 & & & & n+3 \end{matrix} \right] (\Delta; q_1, \dots, q_n). \quad (4.52)$$

ただし右辺は、 $n + 3$ 点付き球面の線形なパンツ分解に対応した共形ブロックである。パラメータ間の関係式は $n = 1$ の場合の自然な拡張であるので、詳細は原論文 [4] を参考にされたい。インスタントン展開形でこの予想を具体的にチェックすることが出来ることもまた 4 フレーバー理論と同様であるが、重要なポイントは、AGT 予想は 4 フレーバーのゲージ理論に限らず、ラベル $n = 1, 2, 3, \dots$ に応じて、無限個の理論からなるクラスの間で成立していると予想されている点である。そこで球面の例を離れ、さらにトーラスに対応する場合の AGT 予想について述べる。

$SU(2) \mathcal{N} = 2^*$ 理論 : $\mathcal{T}_{1,1}[A_1]$

一点付きトーラスを考えよう。このリーマン面のパンツ分解を考えると、ハイパー多重項に対応した三つ足頂点は、パンツをつなぐチューブの両端に接続している。つまりハイパー多重項は、チューブが表している $SU(2)$ ゲージ群の元で $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3}$ 表現で変換している。ゲージ群に関するシングレットは無視してかまわないので、一点付きトーラスに対応した理論は、随伴表現 $\mathbf{3}$ のハイパー多重項を一つ含むゲージ理論である。つまり $SU(2) \mathcal{N} = 2^*$ 理論にほかならない。そこで $U(2) \mathcal{N} = 2^*$ 理論に対するインスタントン分配関数を考えよう：

$$Z_{\text{inst}} = \sum_{\vec{Y}} q^{|\vec{Y}|} z_{\text{vect}}(\vec{a}, \vec{Y}) z_{\text{adj}}(\vec{a}, \vec{Y}, m). \quad (4.53)$$

この理論に対する $U(1)$ 因子は

$$Z^{U(1)} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{2m(Q-m)-1} \quad (4.54)$$

であると提唱されている。したがってこの場合の AGT 対応は、

$$Z_{\text{inst}}^{U(2)} = Z^{U(1)} \mathcal{F}_\alpha^m(q), \quad (4.55)$$

で定まる $\mathcal{F}_\alpha^m(q)$ が、一点付きトーラスの共形ブロック $\mathcal{F}_m(\Delta; q)$ と一致することを予想する。ただしパラメータの同一視は以前と同様に AGT の辞書に従い、挿入されているプライマリーの次元は $\Delta_1 = m(Q - m)$ ととり、中間状態を走る状態については $\Delta = \alpha(Q - \alpha)$ である。ただしクローンモジュライについては $\alpha = Q/2 + a$ と記した。この予想もまた、計算機を用いて具体的にチェックできる。また、この種数 1 の AGT 対応は、 \hat{A}_n クイバーゲージ理論と n 点付きトーラスの共形ブロックとの間の対応関係へと一般化することも出来る [4]。

特筆すべきことに、2009 年の暮れになって Fateev と Litvinov によって $SU(2) \mathcal{N} = 2^*$ に対する AGT 予想の証明が与えられた。彼らの用いた手法は、共形ブロックに対する Zamolodchikov 漸化式に注目するというものである。この話題については最後の章で触れることにする。

Liouville 相関関数と S^4 上の分配関数

これまではゲージ理論のインスタントン補正部分に対し、AGT 対応をみてきた。そこで次に摂動部分などにも共形場理論による解釈がつくのかについて考えたい。

共形場理論の側から話を始めよう。これまでは、模型の選び方については議論してこなかった。そこで唐突ではあるが、中心電荷の $c = 1 + 6(b + 1/b)^2$ の Liouville 場理論の四点関数を考えて見ることにしよう。2 章で述べたように、これを計算するには三点関数が必要であった。その三点関数は Appendix にある DOZZ 公式で与えられるが、これは実は 4 フレーバー理論に関する分配関数の摂動補正部分をあたえている。さらに (2.44) には $q^{\Delta - \Delta_3 - \Delta_4}$ の係数も含まれていたが、AGT の辞書を使うとこれは本質的に Nekrasov 分配関数の古典部分 $q^{-a^2} = e^{-2\pi i \tau a^2}$ である。したがって Nekrasov 分

配関数全体を考えると、これは Liouville の四点関数に等しくなる。精密に言うと、DOZZ 公式を通じて AGT 予想は次の形にまとまる:

$$\langle V_4(\infty) V_3(1) V_2(q, \bar{q}) V_1(0) \rangle = f(\alpha_1^*) f(\alpha_2) f(\alpha_3) f(\alpha_4) |q^{Q^2/4 - \Delta_3 - \Delta_4}|^2 \int a^2 da |Z_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}(q)|^2.$$

この右辺の積分は、実は Pestun によって計算された S^4 上の $\mathcal{N} = 2$ ゲージ理論の分配関数 [30] にほかならない。このとき局所化の方法を通じ、正則部分 Z と半正則部分 $|Z|$ はそれぞれ S^4 上の南極と北極からの寄与として理解される。このように Liouville 場理論の物理的相関関数は、 S^4 上の $\mathcal{N} = 2$ ゲージ理論の分配関数に対応していると期待される。

ストレステンソルと量子 Seiberg-Witten 微分

AGT 対応における Seiberg-Witten 曲線についても議論しておこう。そのためのヒントとなるのが、Ward-Takahashi の恒等式である:

$$\langle T(z) \prod_i V_i(z_i) \rangle = \sum_j \left(\frac{\Delta_j}{(z - z_j)^2} + \frac{\partial_j}{z - z_j} \right) \langle \prod_i V_i(z_i) \rangle. \tag{4.56}$$

$\Delta_j \simeq -m_j^2$ であったことを思い出すと、右辺に現れる微分演算子は Gaiotto 曲線の因子 $\phi_2(z)$ とほとんど同じ極構造をしている。そこで Alday らは、準古典極限においてエネルギーストレステンソルが Seiberg-Witten 曲線 $x^2 = \phi_2(z)$ を与えると予想した:

$$\lim_{\epsilon_{1,2} \rightarrow 0} \frac{\langle T(z) \prod_i V_i(z_i) \rangle}{\langle \prod_i V_i(z_i) \rangle} = \phi_2(z). \tag{4.57}$$

この予想はいくつかの具体例においてチェックされている。

さてこの予想は、 Ω -背景がスイッチオンされると、Gaiotto 微分は演算子 $\hat{\phi}_2(z) = T(z)$ に持ち上がることを示唆している。つまり Ω -背景は Seiberg-Witten 理論の「量子化」を導くことになる。AGT 対応のこの帰結については、現在も様々な角度から研究されている。

4.3 $SU(N)$ ゲージ理論と Wyllard 予想

$SU(2)$ 超共形ゲージ理論の分配関数には、Virasoro 対称性をもつ Liouville 理論による記述があることがわかった。では、もっとランクの高いゲージ理論についても、このようなストーリーは成り立たないのだろうか？じつは Wyllard によって、AGT 対応は $SU(N)$ ゲージ理論にまで拡張出来ることが明らかにされている。

この拡張のためのヒントとなるのが、Liouville 理論は A_1 型の戸田場の理論に他ならないという事実である。

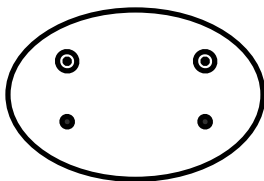


図 18: $\mathcal{T}_{4,0}[A_{N-1}]$ 理論.

そこで $SU(N)$ ゲージ理論には、 A_{N-1} 型の Toda 場の理論に対応物があると期待するのは自然であろう。そこで Wyllard は、 $SU(N)$ ゲージ理論の Nekrasov 分配関数は Toda 共形ブロックに等しい、と予想した [9]。実際にこの予想を定式化するのには巧妙な考え方を導入する必要があるので [9, 31]、一般論を紹介するには紙面が足りない。そこでここでは、 $SU(N)$ $N_f = 2N$ SQSD の例を的に絞って Wyllard 予想を紹介することにしよう。

この場合も、Nekrasov 分配関数は四点の \mathcal{W}_N 共形ブロックと一致すると期待される。Toda 場の理論における一般の頂点演算子は、 $V_{\vec{\alpha}} = e^{\langle \vec{\alpha}, \vec{\phi} \rangle}$ とかける。そこでその四点関数を考えてみると、外線運動量のパラメータ数は $4(N-1)$ 個である。その一方、 $SU(N)$ $N_f = 2N$ SQSD の質量パラメータは $2N$ 個であり、 $N \geq 3$ では共形場

理論側のパラメータ数が多すぎるのがわかる。その理由は、 $N = 3$ 以上では球面のパンクチャーには二種類あったことを考慮していなかったことにある (図 18)。完全パンクチャー \odot 二つには、制限なしの頂点演算子 $V_{\vec{\alpha}}$ を割り振るとしよう。では残った単純パンクチャーにはどのような演算子を割り振ればよいのだろうか? Wyllard は、単純パンクチャー \bullet に対しては半退化場 $\alpha = \kappa\omega_1, \kappa\omega_{N-1}$ を与えておくと、四点共形ブロックが Nekrasov 分配関数を再現することを発見した:

$$Z_{\text{inst}}^{U(N)}(\vec{a}) / Z_{(N)}^{U(1)} = \langle V_{\vec{\alpha}_4}(\infty) V_{\kappa_3\vec{\omega}_1}(1) \mathbf{1}_{\vec{\alpha}} V_{\kappa_2\vec{\omega}_1}(q) V_{\vec{\alpha}_1}(0) \rangle. \quad (4.58)$$

ここで $\omega_{1,N-1}$ は (反) 基本表現の最高ウェイトである。実際、この相関関数の外線パラメータは $2(N-1) + 2 = 2N$ 個となっている。また、三点関数のうち一つの頂点演算子がこの半退化場であるときには、Toda 理論における DOZZ 公式に相当する公式もすでに与えられており [32]、これも Nekrasov 分配関数の摂動補正項と一致することが確認できる。さらにこのような退化場の取り方は、Gaiotto 曲線のパンクチャーにおける特異性と整合的であることもチェックできる [33]。Wyllard 予想に関する具体的な計算や、パラメータの同一視については、原論文 [9] を参照してください。

クイバーの“しっぽ”を持つゲージ理論への拡張は、[31] により与えられ“AGT-ail 予想”と名付けられている³。また SO や Sp 群ゲージへの拡張については、[34] において試みられている。

4.4 変種たち : Gaiotto 予想

これまで考えてきた AGT 関係は、四次元超共形ゲージ理論 (の質量変形) に対するものであった。これらの理論は Gaiotto により、点付きリーマン面を用いた自然な分類が発見されていた。では超共形ゲージ理論からフレーバーをデカップルさせて漸近自由ゲージ理論を考えたとき、今まで見てきたスキームはどう変わるのであろうか? この節では、この疑問に対する答えを与える。Gaiotto による発見 [10] に従い、 $SU(2)$ super Yang-Mills 理論から調べはじめよう。

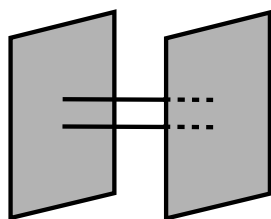


図 19: $SU(2)$ SYM のブレイン構成。

まずフレーバーをデカップルさせることから考えよう。そのためには、取り除きたいハイパー多重項の質量を無限大に飛ばせば良い。ただしそのままでは非自明なゲージ理論のダイナミクスが残らないため、ゲージ結合定数に対してもスケールング極限をとる必要がある。例えば、 $SU(2)$ $N_f = 4$ ゲージ理論から $SU(2)$ super Yang-Mills 理論を得るには、

$$m_f \rightarrow \infty \text{ for } f = 1, \dots, 4, \quad q \prod_{f=1}^4 m_f \rightarrow \Lambda^4, \quad (4.59)$$

を考えれば良い。この極限をゲージ理論サイドから正当化することは読者の皆さんの演習としておきたい。そこでここでは Nekrasov 公式 (あるいは Seiberg-Witten 曲線) に (4.59) を用いると、正しく $SU(2)$ super Yang-Mills 理論の答えが得られ、整合性が簡単にチェックできることをコメントするにとどめておく。

では $N = 2$ $SU(2)$ Yang-Mills のブレイン構成を用いて Gaiotto 曲線を特定してみよう。水平方向 (t 座標)、垂直方向 (v 座標) の断面はそれぞれ二回ブレインと交わるので、対応する $M5$ ブレイン配位を表す方程式は、 t と v 双方の二次多項式で与えられる:

$$c_0 t^2 + c_1 t(v^2 - 2u) + c_2 = 0.$$

³これは研究会「From Sigma Models to Four-dimensional QFT」で紹介された、Drukker によるネーミングである。

係数と物理パラメータの関係は $\Lambda^4 = c_2 c_0 / c_1^2$ と Seiberg-Witten 微分 $\lambda = v dt/t$ により決まっている [29]. この M 理論曲線を適当にリスケールすると、よく知られた Seiberg-Witten 曲線の標準形が現れる

$$v^2 - \Lambda^2 z - 2u - \frac{\Lambda^2}{z} = 0. \tag{4.60}$$

さて Seiberg-Witten 曲線の Gaiotto 表示とは、Seiberg-Witten 微分が $\lambda = v dz/z = \sqrt{\phi_2(z)} dz$ であるのに対し曲線が $x^2 = \phi_2(z)$ となる表示であった. したがってこの結果より直ちに $SU(2)$ Yang-Mills 理論の曲線が定まる:

$$\phi_2(z) = \frac{\Lambda^2}{z^3} + \frac{2u}{z^2} + \frac{\Lambda^2}{z}. \tag{4.61}$$

コンパクト化に付随する二次微分 $\phi_2(z) (dz)^2$ を考えると、これは $z = -u/\Lambda^2 \pm \sqrt{(u/\Lambda^2)^2 - 1}$ に零点を持ち、 $z = 0, \infty$ に 3 次の特異性を持つリーマン球面を定めている. これまで考えてきた $N_f = 4$ 理論ではパンクチャーの留数に質量パラメータが対応していたが、今の場合にはダイナミカルスケールが付随していることに注意する. これは極限 (4.59) によって質量が Λ に転化したためである.

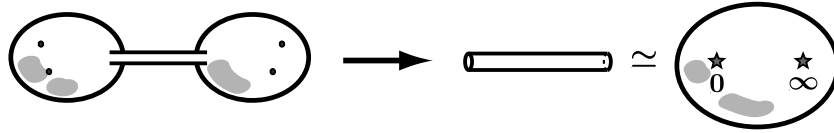


図 20: 漸近自由極限 $q \rightarrow 0$ と非正則特異性.

このようにフレーバーを取り除く極限操作をすると、Gaiotto 曲線では各フレーバーに対応した regular なパンクチャー同士がぶつかり合う. 図 20 を見ると、漸近自由極限 $q \rightarrow 0$ をとることで二つのパンクチャーをつなぐチューブが細くなり、無限に長いシリンダーへと退化することが分かる. このリーマン面は、二つパンクチャーを持った球面に共形同値である. このように漸近自由理論への極限の下で、tame な特異性たちから **wild** な特異性、すなわち **irregular singularity** が生じることがわかる.

したがって super Yang-Mills 理論の Gaiotto 曲線は、リーマン球面に二つの irregular singularity が付け加わったものと考えられる. AGT 対応がこの場合にも存在すると仮定すると、図 21 のように非正則

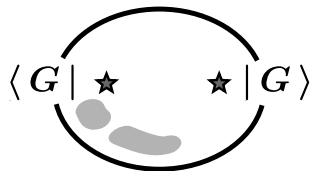


図 21: 非正則特異性と Gaiotto 状態.

特異性に対応して、ある状態 $|G\rangle$ を与えることが出来る. そして非正則パンクチャー $z = 0, \infty$ がある状態 $|G\rangle$ に対応しているとき、共形場理論には図 21 に対応して $\langle G|G\rangle$ で定められる相関関数が存在すると期待される. これを **非正則共形ブロック (irregular conformal block)** と呼ぶ [10]. ではこの具体形を推定することにしよう. そのためには二次元のエネルギーストレステンソルは Gaiotto 二次微分に対応していたことを思い出せば良い:

$$\langle T(z) \prod_i V_i(z_i) \rangle \simeq \phi_2(z) \langle \prod_i V_i(z_i) \rangle. \tag{4.62}$$

ただし重力光子を含まない ϕ_2 を見積もるためには準古典極限 (ゲージ理論極限) $\epsilon_{1,2} \ll a, m$ をとる必要がある. さて通常の共形ブロックにおいては、各パンクチャーには共形場理論の頂点演算子 $V(z)$ が対応していた. では非正則パンクチャーに対応する場合、あるいは状態 $|G\rangle$ はどのようなものである

うか? これを知るために AGT 対応 (4.62) が Gaiotto 曲線 (4.61) と整合的であるための条件を考えてみよう. つまり $T(z) = \sum L_n z^{-n-2}$ を非正則共形ブロック $\langle G|G \rangle$ へ挿入したとき、準古典極限において Gaiotto 二次微分 (4.61) が再現されねばならない:

$$\langle G|T(z)|G \rangle = \langle G| \left(\cdots + \frac{L_1}{z^3} + \frac{L_0}{z^2} + \frac{L_{-1}}{z} + \cdots \right) |G \rangle \rightarrow \phi_2(z) \langle G|G \rangle. \quad (4.63)$$

これを (4.61) と比べると自然な条件として、 $L_1|G \rangle = \Lambda^2|G \rangle$ と $L_{n \geq 2}|G \rangle = 0$ が考えられる. そこで残る問題は

$$\frac{\langle G|L_0|G \rangle}{\langle G|G \rangle} \rightarrow 2u \quad \text{as } \epsilon_{1,2} \ll a. \quad (4.64)$$

となるための条件を課すことである. この部分については込み入ったカラクリが仕掛けられているため、天下りの的になってしまうが、ここでは「状態 $|G \rangle$ は Verma 加群 \mathcal{V}_Δ の中の状態である」、という条件を課すことにする. この設定から (4.64) が再現される仕組みはもう少し後で明らかになる.

そこで状態 $|G \rangle$ を、次の条件を満たす Verma 加群 \mathcal{V}_Δ の中の状態 $|G \rangle = |\Delta \rangle + c_1 L_{-1} |\Delta \rangle + \cdots \in \mathcal{V}_\Delta$ であると定義してみよう:

$$L_1|G \rangle = \Lambda^2|G \rangle, \quad L_n|G \rangle = 0 \quad \text{for } n \geq 2. \quad (4.65)$$

この状態を **Gaiotto 状態**、あるいは **Whitaker ベクトル** と呼ぶ. Gaiotto 状態を Verma 加群の基底で展開したと考え、その不定係数 c_1, \dots を条件 (4.65) によって帰納的に決定してゆけば、次の結果を得る:

$$|G \rangle = |\Delta \rangle + \frac{\Lambda^2}{2\Delta} L_{-1} |\Delta \rangle + \frac{\Lambda^4}{4\Delta(2c\Delta + c + 16\Delta^2 - 10\Delta)} ((c + 8\Delta)L_{-1}^2 - 12\Delta L_{-2}) |\Delta \rangle + \cdots \quad (4.66)$$

これが irregular な特異性に対応する状態であるから、その内積は “irregular な” 共形ブロックと見なすのが自然である. AGT 予想の考え方に従えば、共形ブロックは Nekrasov 分配関数に一致すると期待される. このアイデアに基づき、Gaiotto は次の性質を発見した:

Gaiotto 予想 [10]

図 21 に対応した非正則共形ブロックは、 $SU(2)$ pure Yang-Mills 理論の Nekrasov 分配関数に一致する:

$$\langle G|G \rangle = Z_{\text{inst}}^{\text{pure } SU(2)} \quad (4.67)$$

ただしパラメータ間の同一視は、元の AGT 予想と同じ関係式を用いる.

式 (4.66) の用に計算した Gaiotto 状態の表示を使うと、インスタントン展開の下のいくつかの次数までこの予想をチェックすることが出来る. レベル 2 までについては、左辺は Gaiotto ベクトル (4.66) から簡単に計算でき、右辺もすでに (3.28) に与えてある. したがって具体的なチェックは読者の皆さんの演習に残しておくことにする. 実際に手を動かして計算してみると分かるのであるが、この一致もまた非常に非自明である. 特に Nekrasov 公式の側はヤング図に対する和であるので、各インスタントン数に寄与する有理式をすべて足し上げ通分して初めて Gaiotto 状態側と同じ結果があらわれる. その際、Nekrasov 公式の分母に Kac 行列式があらわれることも非常に不思議な結果である.

Gaiotto 状態をインスタントン展開の形

$$|G\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^{2n} |\Delta, n\rangle \quad (4.68)$$

で考えてみよう. ただし $|\Delta, n\rangle$ はレベル n のベクトル $L_0|\Delta, n\rangle = (\Delta + n)|\Delta, n\rangle$ である. この ansatz が条件 (4.65) と整合的であることはすぐにチェックできる⁴. $|\Delta, n\rangle$ は Gaiotto 状態を張るベクトルたちの中から、一定のウェイトを持つものを抜き出してきたものにすぎない. しかしながらこのベクトルは Virasoro 代数の表現の言葉により奇麗に表されることが分かっている. 具体的には、Marshakov、Mironov および Morozov[35] によって次の重要な表示が与えられた:

Gaiotto 状態の表示 [35]

$$|\Delta, n\rangle = \sum_{|Y|=n} \mathcal{G}_{\Delta}^{-1}([1^n]; Y) L_{-Y} |\Delta\rangle. \quad (4.69)$$

これが Gaiotto 状態の条件 (4.65) をみたすことは [35] で示されている. この証明を簡単に紹介しよう. 式 (4.69) を認めると Gaiotto 状態は

$$\begin{aligned} |G^{\text{MMM}}\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^{2n} \sum_{|Y|=n} \mathcal{G}_{\Delta}^{-1}([1^n]; Y) L_{-Y} |\Delta\rangle \\ &= \sum_Y \Lambda^{2|Y|} \mathcal{G}_{\Delta}^{-1}([1^n]; Y) L_{-Y} |\Delta\rangle, \end{aligned} \quad (4.70)$$

と表されることになる. この状態は

$$\begin{aligned} \langle \Delta | L_W | G^{\text{MMM}} \rangle &= \sum_Y \Lambda^{2|Y|} \mathcal{G}_{\Delta}^{-1}([1^n]; Y) \mathcal{G}_{\Delta}(Y; W) \\ &= \Lambda^{2|W|} \delta_{W, [1^{|W|}]}, \end{aligned} \quad (4.71)$$

という性質を満たす. $L_Y L_{k>0}$ を Virasoro 代数の交換関係を用いてヤング図の順序に並び替えたとき、 $L_Y L_k = \sum_{Y'} C_{Y, Y'}^{(k)} L_{Y'}$ となるとおく. すると $|G^{\text{MMM}}\rangle$ とデイセンダントの内積は

$$\begin{aligned} \langle \Delta, Y | L_k | G^{\text{MMM}} \rangle &= \sum_{Y'} C_{Y, Y'}^{(k)} \langle \Delta | L_{Y'} | G^{\text{MMM}} \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_{Y, [1^n]}^{(k)} \Lambda^{2n}, \end{aligned} \quad (4.72)$$

と書き換えられる. ただし最後の行への変形で (4.71) を用い、 $|Y'| = n$ とした. ここで定義と Virasoro 代数より、 $C_{Y, Y'}^{(k)}$ はヤング図の箱数と長さが $|Y'| = |Y| + k$ と $d(Y') \leq d(Y) + 1$ を満たすときのみ非零である. そこで $Y' = [1^n]$ の場合を考えてみる. すると $C_{Y, [1^n]}^{(k)}$ がゼロでない Y は $n = |Y| + k$ かつ $n \leq d(Y) + 1$ を満たすものだから、 $Y = [1^{n-1}]$ だけしか無い. これは $k = 1$ の時のみ可能である. したがって $C_{[1^{n-1}], [1^n]}^{(1)} = 1$ からの寄与のみがあるから

$$\langle \Delta, Y | L_k | G^{\text{MMM}} \rangle = \delta_{k,1} \delta_{Y, [1^{n-1}]} \Lambda^{2n}, \quad (4.73)$$

⁴ L_1 はベクトルのレベルを一つ下げるので、(4.65) の一つ目の条件より、 $|\Delta, n\rangle$ の係数は Λ^{2n} に比例しなくてはならない.

を意味する. これより $L_{k \geq 1} |G^{\text{MMM}}\rangle = 0$ は直ちに従う. そこで $L_1 |G^{\text{MMM}}\rangle = \sum_Y c_Y |\Delta, Y\rangle \in \mathcal{V}_\Delta$ という様に、Verma 加群の基底で展開してみよう. すると

$$\delta_{Y, [1^{n-1}]} \Lambda^{2n} = \langle \Delta, Y | L_1 |G^{\text{MMM}}\rangle = \sum_{Y'} c_{Y'} \mathcal{G}_\Delta(Y, Y'), \quad (4.74)$$

より $c_Y = \mathcal{G}_\Delta^{-1}(Y, [1^n]) \Lambda^{2n+2}$ を得る. したがって $|G^{\text{MMM}}\rangle$ はコヒーレント状態条件 (4.65) を満たすことになる. つまり $|G^{\text{MMM}}\rangle = |G\rangle$ である (状態の一意性は自明). **証明終わり**

さて、先ほど途中で議論が中断していた (4.64) の問題について立ち返ろう. インスタントン展開 (4.68) より

$$\begin{aligned} \langle G | L_0 | G \rangle &= \left(\Delta + \frac{1}{2} \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \right) \langle G | G \rangle \\ &= \left(\frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2}{4} - a^2 + \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{2} \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \right) \langle G | G \rangle \end{aligned} \quad (4.75)$$

が従うことはすぐに分かる. ただしゲージ理論と比べるために、最後の行では $\hbar = \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}$ によって質量次元を復元した. ここで Gaiotto 予想 $\langle G | G \rangle = \exp(-\mathcal{F}_{\text{inst}}(a, \Lambda)/\epsilon_1 \epsilon_2 + \dots)$ を認めることにすると、

$$\lim_{\epsilon_{1,2} \rightarrow 0} \frac{\langle G | L_0 | G \rangle}{\langle G | G \rangle} \propto a^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{F}_{\text{inst}}(a, \Lambda)}{\partial \Lambda} \quad (4.76)$$

Seiberg-Witten 理論において発見された Matone 関係式 [36, 37, 38] を用いると、右辺はクーロンモジュライ u にほかならない. このように AGT 関係において、クーロンモジュライの現れ方は非常に非自明で興味深い. そのような側面に関心のある読者には、文献 [39] を参照することをお勧めしたい.

Marshakov らの表示を用いると、漸近自由 AGT 予想は次の形にまとまる:

Gaiotto 予想の別表示 [35]

$$Z_{\text{inst}}^{\text{pure}}(\alpha, \Lambda; b) = \sum_n \Lambda^{4n} \mathcal{G}_\Delta^{-1}([1^n]; [1^n]). \quad (4.77)$$

この表示に書き直すには Verma 加群の基底 $L_{-Y} |\Delta\rangle$ の内積が成す Gram 行列がブロック対角な \mathcal{G}_Δ であったことを思い出せば良い.

Marshakov らの論文 [35] においてはさらに重要なことが証明されている. それは **$N_f = 4$ ゲージ理論に対する AGT 関係式にデカップリング極限 (4.59) を適用することで、漸近自由 AGT 予想 (4.77) が導かれる**、ということである. この結果を示すためのカギは、 $\Delta_f \gg \Delta$ 極限における三点関数 \mathcal{R} の漸近的振る舞いである:

$$\mathcal{R}_{12\alpha}(Y) \sim \prod_{i=1}^{d(Y)} (Y_i \Delta_1 - \Delta_2). \quad (4.78)$$

$|Y| = n$ を固定したとき、この因子のうちで $\sim (\Delta_1 - \Delta_2)^n$ のものが一番効く. これは $Y = [1^n]$ の形のヤング図に対応する. したがって球面の四点共形ブロックを漸近自由極限で評価すると、次の有限

の値が残る:

$$\begin{aligned}
& \lim \sum q^{|Y|} \mathcal{R}_{12\alpha}(Y) \mathcal{G}_{\Delta}^{-1}(Y, Y') \mathcal{R}_{34\alpha}(Y') \\
&= \lim \sum \left(q^{n/2} (\Delta_1 - \Delta_2)^n \right) \mathcal{G}_{\Delta}^{-1}([1^n], [1^n]) \left(q^{n/2} (\Delta_3 - \Delta_4)^n \right) \\
&= \sum_n \Lambda^{4n} \mathcal{G}_{\Delta}^{-1}([1^n], [1^n]).
\end{aligned} \tag{4.79}$$

ただしデカップリング極限では $\lim q^2 \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4 = \Lambda^8$ であることに注意する. この結果は、非正則共形ブロックの Marshakov-Mironov-Morozov による表式にほかならない.

以上はハイパー多重項を含まない pure Yang-Mills 理論に対する AGT 予想の話であった. 基本表現フレーバー数が $N_f = 1, 2$ のときも、やはり Gaiotto 曲線の議論から非正則共形ブロックが定まると推察される. そこで $\phi_2(z)$ とエネルギーテンソルの比較を繰り返すことで、次のような Gaiotto 状態を定義するのが自然である:

$$L_1 |G, m\rangle = -2m\Lambda |G, m\rangle, \quad L_2 |G, m\rangle = -\Lambda^2 |G, m\rangle. \tag{4.80}$$

ただしこれ以上高いレベルの Virasoro 生成子に対しては $L_{n \geq 3} |G, m\rangle = 0$ である. またここに現れる m は、ゲージ理論のハイパー多重項の質量に対応することになるパラメータである. この Gaiotto 状態と先ほど定義した $|G\rangle$ を用いることで二つのタイプの非正則共形ブロックが定まるが、これらはフレーバー数が $N_f = 1, 2$ の $SU(2)$ ゲージ理論の Nekrasov 分配関数に一致する:

基本表現フレーバーが入った場合の Gaiotto 予想

フレーバー $N_f = 1, 2$ の Nekrasov 分配関数は、次の非正則共形ブロックと一致する:

$$Z_{\text{inst}}^{N_f=1}(\alpha, m, \Lambda; b) = \langle G, m | G(\Lambda^2 \rightarrow \Lambda^2/2) \rangle, \tag{4.81}$$

$$Z_{\text{inst}}^{N_f=2}(\alpha, m_1, m_2, \Lambda; b) = \langle G, m_2 | G, m_1 \rangle. \tag{4.82}$$

この予想もまた Virasoro 代数の表現のコトバにより表すことが出来る [35] が、その詳細については省略する.

以上、Gaiotto 予想について説明した. これまで Gaiotto 「予想」と表現してきたが、実は $N_f = 0, 1, 2$ の $SU(2)$ ゲージ理論に対しては数理的な手法により証明がなされている. この話題については最後の章で触れることにする.

この漸近自由ゲージ理論の AGT 予想は $SU(2)$ ゲージ群に対するものであった. そこでほかのゲージ群に対してもこのようなシンプルな関係が成立しているか否かを調べることも面白い. $SU(N)$ ゲージ群については、拡張のアイデアは筆者らによって与えられた. 特に $SU(3)$ super Yang-Mills 理論に対しては、 \mathcal{W}_3 -代数の表現論により非正則共形ブロックが具体的に構成され、拡張された AGT 関係が発見されている [40]. ちなみに現時点において、こちらの予想は未だ証明されていない.

5 AGT 予想における非局所演算子

この節では $\mathcal{N} = 2$ ゲージ理論における非局所演算子を、AGT 対応の観点から考察しよう. ゲージ理論における代表的な非局所演算子として、Wilson のループ演算子

$$W_R(L) = \text{Tr}_R P \exp \left[g \oint_L (iA + \text{Re}(\phi) ds) \right] \tag{5.1}$$

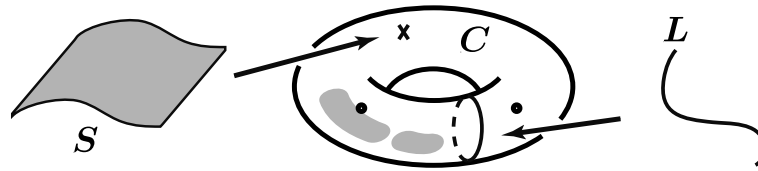


図 22: 線演算子 L 、表面演算子 S と Gaiotto 曲線 C .

が上げられる. ここで L は時空中の閉曲線で, R は Wilson ループ演算子をラベルする表現である. さらに Wilson 演算子以外にも, その磁気的な類似物である 't Hooft 演算子や, 二次元的な広がりを持つ表面演算子についても考えてゆくことにする.

Gaiotto による M 理論構成の観点から述べると, これら非局所演算子はすべて M2 ブレインに由来する. 開いた M2 ブレインは, ゲージ理論を実現している M5 ブレイン上に境界を持つことが出来る. 6次元 (2,0) 理論において, M2 ブレインの境界が作り出すストリング的な物体が, 非局所演算子を生み出すのである. ただし今はこの 6次元理論を $\mathbb{R}^4 \times C$ へコンパクト化することを考えている. したがって線演算子と表面演算子の違いは, M2 ブレインの世界体積が時空中に何次元で広がっているのかの差異そのものである.

このように (2,0) 理論の観点から考えると, 表面演算子を M 理論において実現するためには, \mathbb{R}^4 にのびたストリングが C の中ではどの点に置かれているのかを指定しなければならない. したがって表面演算子は Gaiotto 曲線 C 上の点でラベルされると予想される (図 22). 同様に線演算子を指定するラベルは Gaiotto 曲線 C 上の 1-サイクルであることが予想される. つまり非局所演算子たちも 2次元的に自然に理解されるのである. では AGT 対応はこれら演算子についても拡張されるのだろうか? 本節ではこの話題について扱うことにしよう.

5.1 ループ演算子と非自己交差サイクル

$SU(2)$ ゲージ理論においては, ゲージ群の表現は半整数スピン j のみでラベルされる. スピン j 表現に対する整数電荷 $q = 2j$ を定義しておく. Pestun の計算によると, $SU(2)$ ゲージ理論のスピン j -表現の Wilson ループの期待値は, Nekrasov 公式に

$$W_j(a) = \text{tr}_{R_j}(e^{4\pi i b a T^{(3)}}) = \sum_{p=-j}^j e^{2\pi b p a}, \quad (5.2)$$

をかけたもので与えられる: $\mathcal{W}(L) \cdot \mathcal{F} = W_j \mathcal{F}$. つまり Nekrasov のインスタントン分配関数は, Wilson ループ演算子の固有関数になっている [30].

さて, Wilson ループ演算子には '**t Hooft 演算子**' と呼ばれる磁気的な類似物がある. Wilson 演算子では試験電荷を, ゲージ場に結合させて得られた. 大雑把に言うと, 't Hooft 演算子はこの Wilson 演算子の構成をモノポールに置き換えたものである. したがって 't Hooft 演算子は欠陥演算子の一種で, ループ γ 付近におけるゲージ場の振る舞いにモノポールのな特異性を与えるものである. 正確に定義する為に, 経路積分において定式化しよう. すると 't Hooft ループ演算子を挿入することは経路

積分を、ループに沿って特異性を持つ場の配位にわたり考えることを意味する:

$$A = \begin{pmatrix} p/2 & 0 \\ 0 & -p/2 \end{pmatrix} \frac{1}{2g} (1 - \cos \theta) d\psi + \mathcal{O}(1/r), \tag{5.3}$$

$$\phi = \begin{pmatrix} p/2 & 0 \\ 0 & -p/2 \end{pmatrix} \frac{1}{2gir} + \mathcal{O}(1). \tag{5.4}$$

ただし (r, θ, ψ) は、't Hooft 演算子の世界線に直行する 3次元空間の局所球面座標である。この背景場から Dirac スtring が生じるので、Dirac 量子化条件により $p/2 \in \mathbb{Z}$ でなければならないことが分かる。

さらにこのような't Hooft ループ背景中で Wilson ループ演算子を定めると、ダイオンのループ演算子も定義できる。これを **Wilson-'t Hooft ループ演算子** と呼ぶ。したがって、Wilson-'t Hooft 演算子は電磁荷 (p, q) でラベルされる。ただし Weyl 群の作用 $(p, q) \sim (-p, -q)$ の下で同一視されるので、 p は非負にとることが出来る。

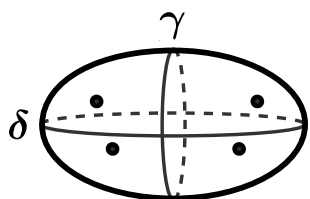


図 23: 4-フレーバ $SU(2)$ ゲージ理論に対する Gaiotto 曲線。

さてこれらループ演算子は、幾何学的にはどのように解釈されるのだろうか？ そこでまず Gaiotto 曲線を思い出すことにする。4-フレーバ $SU(2)$ ゲージ理論には、図 23 のような 4-パンクチャー付きの球面が対応していた。じつは **ループ演算子は、この Gaiotto 複素曲線 (Riemann 面) 上の非自己交差曲線のホモトピー類と対応している** のである [11]。それを理解する為に、まず図 23 のようにサイクル γ と δ を導入する。ここで γ は、ゲージ理論の弱結合における記述でつぶれてゆくサイクルに対応している。つまり Gaiotto の構成においてパンツ分解を行う際に、切り開くのに用いているサイクルが γ である。

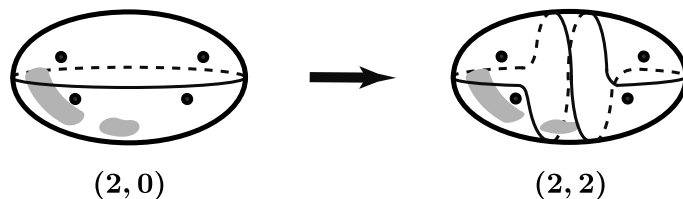


図 24: 最小'tHooft ループ演算子 $(p, q) = (2, 0)$ と、サイクル γ に沿った Dehn ツイストを 2 回施して得られる Wilson-'tHooft ループ演算子 $(p, q) = (2, 2)$ 。

図 23 の Riemann 面上において非自己交差曲線を分類してみよう。Dehn の定理によると、以下で説明する手順により与えられる (p, q) を用いるとすべてのホモトピー類を分類することが出来る [11]: まずサイクル γ に $(p, q) = (0, 1)$ を対応させ、 γ のコピーを q 個用意したものが $(0, q)$ である。そして例えば $(2, q)$ は、サイクル δ は $(p, q) = (2, 0)$ に、 γ に沿って q 回 Dehn ひねり⁵ を加えて得られるサイクルである (図 24)。このように与えられる非自己交差曲線のホモトピー類のラベル (p, q) は、ループ演算子をラベルする電磁荷に他ならないのである。

このように定めた $p, 2|q|$ は、非自己交差曲線とサイクル γ, δ の交差数である。S-デュアリティの作用 (Moore-Seiberg groupoid) の下で γ と δ の役割が入れ替わるので、このラベル (p, q) に対しては

$$(p, q) \rightarrow \left(2q, -\frac{p}{2} \right), \tag{5.5}$$

⁵ここでは γ に沿って曲面を切り開き、ループの断面パターンを q 回分シフトさせて張り合わせ直す操作を意味する。

と働くことがすぐに見て取れる ($q > 0$ とした). 実はこれは、Kapstin が与えたループ演算子に対する S-デュアリティの作用を再現している [41].

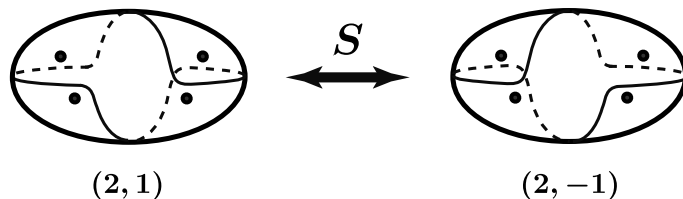


図 25: Wilson-'tHooft 演算子 $(2, 1)$ と、その S-デュアル $(2, -1)$.

簡単な例で考えてみよう. Wilson-'tHooft 演算子 $(2, 1)$ に S-デュアリティを作用させる. この場合、変換ルール (5.5) は $(2, 1) \rightarrow (2, -1)$ を意味する. 図 25 のように変換前後のループ演算子を図示してみると、これは確かに Gaiotto 曲線を 90 度回転させて移りあう非自己交差曲線のペアである.

ここではループ演算子の幾何学的解釈を、初等的な例で説明した. このアイデアはもっと複雑なゲージ理論に対しても働き、ループ演算子と Gaiotto 曲線上の非自己交差曲線のあいだに美しいマップがあることが分かっている [11]. ただしフレーバーを落として漸近自由なゲージ理論を考えた場合には、この対応関係は幾分込み入ったものとなる [42].

5.2 基本表面演算子とそのモノドロミー

次に $\mathcal{N} = 2$ ゲージ理論における half-BPS **表面演算子 surface operator** を考えてみよう. この演算子は時空中の二次元面に広がりをもつ欠陥演算子の一種であり、ここでは世界体積上において二次元 $\mathcal{N} = (2, 2)$ 超対称性が保たれているようなものを扱うことにする. このような演算子は、Wilson-'tHooft ループの自然な拡張であるにもかかわらず、永らく集中的に研究されることは無かった. ところが最近になって、いわゆる幾何学的 Langland 予想の $\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論による解釈において重要な役割を担うことが明らかになるなど、様々な興味から精力的に研究されはじめている. AGT 予想もまた、表面演算子が活躍する舞台の一つである.

Gukov と Witten の議論に従い、 UV における表面演算子を、その挿入位置付近においてゲージ群を部分群に破り、さらにゲージ場に特異性を発生させるもの、として定義しよう. このような表面演算子は、ゲージ群 $G = SU(N)$ をいかに破るか、という情報によって分類することが出来る [43]. そこで点 $x^2 = x^3 = 0$ 上の $x^{0,1}$ -平面に表面演算子を入れることにする. 直行する平面の極座標を $re^{i\theta} := x^2 + ix^3$ ととる. すると表面演算子の存在はゲージ場に特異性を生じさせる:

$$A = i\alpha d\theta + \dots \quad (5.6)$$

ただし、 α はゲージ群 G の最大トーラス $T = U(1)^{N-1}$ のリー代数を t に値をとる

$$\alpha = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in t, \quad \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_N. \quad (5.7)$$

ただしゲージ変換の自由度をもちいて α_i を並べ直した. これら α_i たちは等しい値をとることが出来るので、この配位と交換するゲージ群 G の部分群は一般に **Levi 部分群** $S(U(N_1) \times \dots \times U(N_n)) \subset G$ である. つまり表面演算子上では、ゲージ群は Levi 部分群までに破られていることになる.

つまりこの half-BPS 表面演算子を分類するのは、Levi 部分群 $S(U(N_1) \times \dots \times U(N_n)) \subset G$ である:

$$G \longrightarrow \mathbb{L} \subset G. \quad (5.8)$$

Levi 部分群 \mathbb{L} の最も代表的な取り方は、準最大 $\mathbb{L} = SU(N-1) \times U(1)$ と、最小 $\mathbb{L} = U(1)^{N-1}$ の二つがある。部分群 $\mathbb{L} = SU(N-1) \times U(1)$ に対応する演算子は、**基本表面演算子 (simple (elementary) surface operator)** と呼ばれる。一方 $\mathbb{L} = U(1)^{N-1}$ に対応するものは、**完全表面演算子 (full surface operator)** と呼ばれる。これらの呼称は、4 章におけるパンクチャーの分類と関係している。[12] に従い、ここでは $SU(2)$ ゲージ理論における基本表面演算子を調べることにしよう。

磁気的なパラメータ α に加えて、経路積分中に位相因子

$$\exp(i\eta \cdot m), \quad m = \int_S \frac{F_{U(1)}}{2\pi}, \quad (5.9)$$

として現れる電気的なパラメータ η も存在する。ここで $F_{U(1)}$ は、表面演算子上にあらわれる可換ゲージ因子の場の強さであり、 m はモノポール数と呼ばれる。そしてこれらを組み合わせた $t = \eta + \tau\alpha$ を Gukov-Witten の FI パラメータと呼ぶ。これらを用いて、2次元インスタントン因子 $z = e^{it}$ を定義しておこう。数学的には、表面演算子がある場合の Nekrasov 分配関数は

$$\Psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_m q^k z^m \int_{\mathcal{M}_{N,k,m}} 1_{\epsilon_{1,2}}, \quad (5.10)$$

と与えられると予想される。ここで $\mathcal{M}_{N,k,m}$ は、インスタントン数 k 、モノポール数 m の (ラミファイされた) インスタントン解のモジュライ空間である。したがってこの定義は、ゲージ場の配位に (5.6) という境界条件を付けた場合に対する、Nekrasov 関数の自然な拡張になっている。

基本表面演算子に関して、Alday らは次の予想を与えた:

AGGTV 予想[12]

Gaiotto 曲線上の点 $z \in C$ により指定される基本表面演算子を考える。この真空期待値は、考えているゲージ理論に対応した Liouville 理論の相関関数に、退化場 $\Phi_{2,1}(z) = e^{-b\phi(z)/2}$ を挿入したものに一致する。

ただし、ゲージ理論を \mathbb{R}^4 上で考えているときはカイラル共形ブロックに、 S^4 上で考えているときは物理的相関関数に挿入するものとする。元々の相関関数は $b \leftrightarrow 1/b$ 下で不変であった。そこに挿入する退化場を $\Phi_{2,1}(z) = e^{-b\phi(z)/2}$ 、 $\Phi_{1,2}(z) = e^{-\phi(z)/2b}$ のいずれにとるかは、表面演算子が時空 $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ のうちどちらの平面に挿入されたのかに対応して決まる。

この予想は、いくつかの角度からチェックされている。その一つとして、幾何工学の方法 (6 章) をもちいて、Type II 型開弦理論の有効作用と比較する研究がなされている [44, 45, 46, 47]。また数学的なチェックとして、分配関数 (5.10) を局所化の方法で計算し、それを共形ブロックと比較する研究も進んでいる。

表面演算子とループ演算子

さて、上で議論した表面演算子はそれ自身で興味深い対象であるが、実はループ演算子を考察する為の強力なツールともなるのである。そのことを理解する為の道具立てとして、2次元 $\mathcal{N} = (2, 2)$ 理論における線演算子の性質についてまとめておこう [12]。この理論における half-BPS 線演算子は、理論のマージナル変形として作り出すことが出来る。ただしこのマージナルな結合定数は、ある範囲 $x^1 \in [-L, L]$ において $t(x^1)$ と変化するものとする。すると低エネルギーに行くと、スケールは $L \rightarrow 0$ となるので、結合定数は $x^1 = 0$ において不連続な振る舞いをすると思わせる。したがってこのような線演算子は、結合定数の空間中の経路に関するホモトピー類によって分類される。

表面演算子上の線演算子を考える。表面演算子はゲージ群をこわすので、破れた後の $U(1)$ ゲージ群因子に対して Wilson-'tHooft 演算子を考えることが出来るのである。するとこの線演算子を境目として、

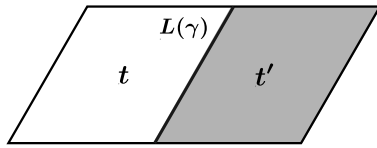


図 26: 表面演算子上の線演算子. t と t' はそれぞれ z, z' に対応した表面演算子をラベルする.

類で分類される.)

フュージョンとブレイディング

以上の議論を踏まえて、表面演算子上に作用している線演算子について調べよう。ポイントとなる事実は、線演算子が C 上のループで指定される、ということである。そしてこの閉曲線の始・終点となる $z \in C$ は、この線演算子が束縛されているところの表面演算子のラベルである。

ここで AGT 対応を思い出すと、このような線演算子は表面演算子の分配関数（つまり退化場を挿入した共形ブロック）に対するモノドロミー的操作で得られる、と期待される。というのも共形場理論の相関関数は演算子の挿入位置に関して一価関数であるが、共形ブロックは多価関数となる。つまりモノドロミーは考察の対象として自然であり、ループに沿ったモノドロミーが、ループに対応する線演算子を与えると予想できるからである。この予想は実際に正しいのであるが、これを理解する為に共形ブロックのフュージョンとブレイディングについて簡単に説明する。

球面上の四点関数を考える。ただしプライマリー場四つのうち、一つは退化場にとる。このような共形ブロックは超幾何微分方程式を満たすことが分かる。Gauss の超幾何関数は、 $|z| < 1$ において級数表示

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} z^n, \quad (5.11)$$

で与えられた。この関数は確定特異点 $z = 0, 1, \infty$ を持つ 2 階の超幾何微分方程式

$$z(1-z)\frac{d^2F(z)}{dz^2} + (\gamma - (1+\alpha+\beta)z)\frac{dF(z)}{dz} - \alpha\beta F(z) = 0 \quad (5.12)$$

の解である。当然ながら、実際はこの微分方程式にはもう一つの解があり、独立な解は

$$F = {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; z), z^{1-\gamma} {}_2F_1(1-\gamma+\alpha, 1-\gamma+\beta, 2-\gamma; z), \quad (5.13)$$

であることが分かる。この二つが $z = 0$ 近くにおける解の基底を与えているのである。

超幾何微分方程式の二つの解の存在は、 $\Phi_{2,1}(z) = V_{-b/2}(z)$ を挿入した 4 点共形ブロックには二種類あるということ意味している。この理由は、プライマリー場の満たす**退化フュージョン則**という性質

$$[V_{-b/2}] \times [V_\alpha] = [V_{\alpha-b/2}] + [V_{\alpha+b/2}]. \quad (5.14)$$

によって理解できる。この性質は、 $\Phi_{2,1}$ を挿入した場合は退化場に隣接する中間状態の運動量は $\alpha+b/2$ か $\alpha-b/2$ の二つの値だけを走る、ということを行っている。つまり共形ブロックとして、この土に対応した二つのみが可能であり、これが超幾何微分方程式の二つの解に他ならないのである。Liouville 場の理論のような非有理型の CFT においては、プライマリー場は連続スペクトルを持っていた。した

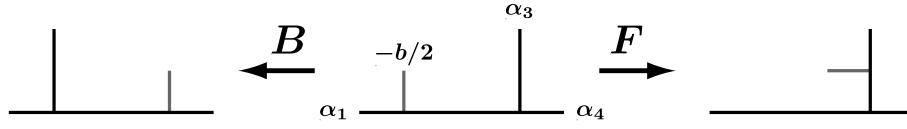


図 27: 4点共形ブロックのフュージョン (右) とブレイディング (左) .

がってある意味で「有限の理論」ではなく、演算子代数にこのような単純化は起らなかった. しかし退化場を挿入することで、あたかも有理型 CFT の共形ブロックのような扱いが可能になるのである. その為以下で見るようなモノドロミー的な議論が well-defined に行うことが出来るのである. さて今議論している二つの共形ブロックの具体形は、フュージョンで生じる二つの中間状態 $\alpha \pm b/2$ それぞれに対応して

$$\mathcal{F}_+^s(z) = z^{\alpha_1 b} (1-z)^{\alpha_3 b} \times {}_2F_1((- \alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_4 - b/2 + Q) b, (- \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 - b/2) b, (2\alpha_1 - b + 2Q) b; z)$$

$$\mathcal{F}_-^s(z) = z^{(Q-\alpha_1)b} (1-z)^{\alpha_3 b} \times {}_2F_1((\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 - b/2 - Q) b, (\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_4 - b/2) b, (2\alpha_1 - b) b; z)$$

で与えられる. この添字 s の表す s -チャンネルは、 z の値が 0 に近い時の共形ブロックのフレームをとるという意味である. \mathcal{F}_\pm^s の導出に関する詳細は、たいていの教科書で詳しい説明が与えられているのでここでは繰り返さないことにする.

さてこの共形ブロックを、収束半径 $|z| < 1$ を超えて解析接続してゆく時に起るのがモノドロミー現象であった. 例えば $z = 1$ に近づけてゆくことを考えてみよう. 超幾何微分方程式 (5.12) において $z \rightarrow 1+z$ としたのも、本質的には同じ形の微分方程式になる. したがって $z = 1$ 近くにおいて収束する級数表示は

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma; 1-z), (1-z)^{-\alpha-\beta+\gamma} {}_2F_1(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, -\alpha - \beta + \gamma + 1; 1-z), \quad (5.15)$$

と超幾何関数で与えられ、 $z = \infty$ における解についてもまったく同様に議論できる. そこで基底 (5.13) の線形結合で表されている微分方程式 (5.12) のある解を、 $z = 1$ 近くへ接続することを考えてみよう. そこでの自然な基底は (5.15) であったから、これらの線形結合で書き直されることになる:

$$\begin{aligned} {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; z) &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(-\alpha-\beta+\gamma)}{\Gamma(-\alpha+\gamma-)\Gamma(-\beta+\gamma-)} {}_2F_1(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma; 1-z) \\ &+ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (1-z)^{-\alpha-\beta+\gamma} {}_2F_1(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, -\alpha - \beta + \gamma + 1; 1-z). \end{aligned} \quad (5.16)$$

$z = \infty$ 近くの解へ接続する際も、同様の公式が得られる. これら接続公式に従って解が解析接続されることにより、超幾何関数の多価性、つまりモノドロミーが発生する. というのも、解を非可縮なループに沿って解析接続してみると、スタート地点に帰って来ても元の関数には戻らずに、解がモノドロミー行列による線形変換を受けるからである.

これを共形ブロックのコトバに焼き直すと、 s -チャンネルのブロックを t -チャンネルへ動かすと **フュージョン行列** $F_{\pm\pm}$ により変換されるということが分かる:

$$\mathcal{F}_\alpha^s(z) = \sum_{\alpha'=\pm} F_{\alpha\alpha'} \begin{bmatrix} -b/2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_4 \end{bmatrix} \mathcal{F}_{\alpha'}^t(z). \quad (5.17)$$

この係数行列の具体的な形は、後で与えることにする。フュージョンは z を 0 近傍から 1 の近くへ動かす移動であり、図 27 の右側の移動に対応している。さらに z を 0 近傍から ∞ (u -チャンネル) へ移動させる操作もあり、これはブレディングと呼ばれる。フュージョンとブレディングを繰り返すことで、共形ブロックにおいて退化場の挿入点 z を球面上で動かしてゆくことが出来る。その結果、移動経路に沿ったホモトピー類のモノドロミー表現の分だけ共形ブロックはモノドロミー変換を受けるのである。そしてこのモノドロミーこそがゲージ理論の線演算子に対応するのである。

線演算子の AGT 対応を議論する前に、もう少し共形場理論の議論を続けよう。以上で議論してきた Riemann 面のパンツ分解に対する操作は、Moore-Seiberg groupoid として知られる変換操作である。そしてこの作用は、一般の Liouville 共形ブロック上にも作用することが知られている。そして Moore-Seiberg groupoid を生成するのがフュージョンとブレディングという基本移動の作用である⁶。それらの共形ブロックへの作用をまとめておこう。

• フュージョン移動

$$\begin{array}{c} \alpha_2 \quad \alpha_3 \\ | \quad | \\ \alpha \\ | \\ \alpha_1 \quad \alpha_4 \end{array} = \sum_{\alpha'} F_{\alpha\alpha'} \begin{array}{c} \alpha_2 \quad \alpha_3 \\ \diagdown \quad / \\ \alpha' \\ | \\ \alpha_1 \quad \alpha_4 \end{array}. \quad (5.18)$$

• ブレディング移動

$$\begin{array}{c} \alpha_2 \quad \alpha_3 \\ \diagdown \quad / \\ \alpha_1 \end{array} = \Omega^{\epsilon}_{\alpha_2, \alpha_3} \begin{array}{c} \alpha_3 \quad \alpha_2 \\ \diagdown \quad / \\ \alpha_1 \end{array}. \quad (5.19)$$

$\epsilon = \pm 1$ はブレディングの向きを表す。このツイストの操作が与える位相因子は

$$\Omega^{\epsilon}_{\alpha_2, \alpha_3} = e^{-i\epsilon\pi(\Delta_{\alpha_1} - \Delta_{\alpha_2} - \Delta_{\alpha_3})}, \quad (5.20)$$

で与えられる。これを用いて次の量も定義しておく：

$$\begin{array}{c} \alpha_2 \quad \alpha_3 \\ | \quad | \\ \alpha \\ | \\ \alpha_1 \quad \alpha_4 \end{array} = \sum_{\alpha'} B_{\alpha\alpha'}^{\epsilon} \begin{array}{c} \alpha_3 \quad \alpha_2 \\ | \quad | \\ \alpha' \\ | \\ \alpha_1 \quad \alpha_4 \end{array}. \quad (5.21)$$

一般にはこれら Liouville フュージョン係数を求めるには、これら変換の満たすべき整合条件に由来する関数方程式を解かねばならない。Liouville 理論の場合、この作業を遂行することは不可能ではないがとても込み入ったものとなる⁷。しかし超幾何関数の接続公式の項で議論したように、挿入している場の一つが退化場であるときは簡単に求まるのである。 $\alpha_2 = -b/2$ の場合は、フュージョン行列の添字は $\alpha, \alpha' = \pm$ の二つのみを走ることが出来た。そしてフュージョン係数の値は

$$F_{--} \begin{bmatrix} -b/2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_4 \end{bmatrix} = \frac{\Gamma((2\alpha_1 - b)b) \Gamma((Q - 2\alpha_3)b)}{\Gamma((\alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_4 + b/2)b + 1) \Gamma((\alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_4 - b/2)b)}, \quad (5.22)$$

$$F_{-+} \begin{bmatrix} -b/2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_4 \end{bmatrix} = \frac{\Gamma((2\alpha_1 - b)b) \Gamma((-Q + 2\alpha_3)b)}{\Gamma((\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 - b/2 - Q)b) \Gamma((\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_4 - b/2)b)}, \quad (5.23)$$

$$F_{+-} \begin{bmatrix} -b/2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_4 \end{bmatrix} = \frac{\Gamma((-2\alpha_1 + Q)b + 1) \Gamma((Q - 2\alpha_3)b)}{\Gamma(-(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 - b/2 - Q)b + 1) \Gamma(-(\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_4 - b/2)b + 1)}, \quad (5.24)$$

$$F_{++} \begin{bmatrix} -b/2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_4 \end{bmatrix} = \frac{\Gamma((-2\alpha_1 + Q)b + 1) \Gamma((-Q + 2\alpha_3)b)}{\Gamma(-(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + b/2)b + 1) \Gamma(-(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 - b/2)b)}, \quad (5.25)$$

⁶一般の種数の Riemann 面に対しては、加えて S -移動という変形も存在する。しかしここでは省略する。

⁷多くの有理型 CFT については、この解は昔からよく知られている。Liouville 理論に対する Moore-Seiberg 整合性条件も、汎関数関係式ではあるが、量子群 $U_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$ の表現の Racah 係数を用いることで解かれている [48]。

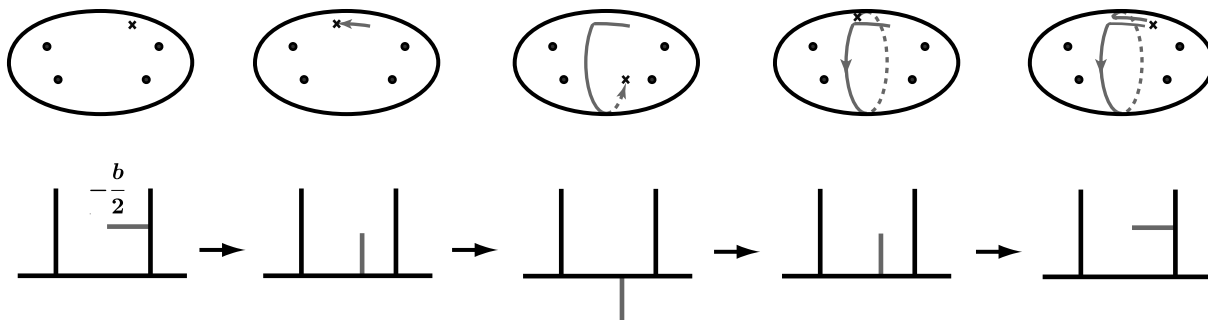


図 28: 表面演算子上に Wilson ループを生成する操作.

である. これらは、超幾何関数の接続公式から簡単に求めることができる.

ではこれらの演算を用いて、表面演算子を生成してみよう. ここでは簡単のために、 $SU(2) N_f = 4$ SQCD の例を扱おう. AGGTV 対応によると、このゲージ理論に表面演算子を挿入した系には、退化場の挿入された共形ブロックが付随していた. この五点の退化共形ブロックを図 28 の左端に図示した. 灰色の線が、 $\Phi_{2,1}(z)$ の挿入を表している. そこで、このブロックから基本 Wilson ループを計算してみよう. 前節で見た Drukker-Morrison-Okuda の辞書によると、Wilson ループに対応しているのは、 A -サイクル周りのモノドロミーである. したがって図 28 の操作から、基本表面演算子に束縛された基本 Wilson ループは

$$W = F\Omega^2 F, \quad (5.26)$$

によって与えられる.

同じように B -サイクルに関して計算すると、最小 't Hooft ループは

$$H = \Omega F \delta F \Omega^2 F \delta F \Omega, \quad (5.27)$$

と表すことができる.

さて以上では、退化場として $\Phi_{2,1}$ を用いてモノドロミーを考えた. しかしこの退化場に限らず、高いレベルにある退化場 $\Phi_{2j+1,1}$ を用いても類似の計算は行うことができる. ではこれから計算されるモノドロミーは、何に対応しているのだろうか? 実は $\Phi_{2j+1,1}$ に関するモノドロミーは、 $\text{spin-}j$ 表現のループ演算子を与えるのである.

線演算子と Verlinde ループ演算子

共形ブロックのモノドロミーを用いて、表面演算子上の線演算子について議論してきた. 線演算子自体は表面演算子のサポートがなくとも存在できるので、これが単独で存在しているケースについても理解したい. そこでここでは線演算子単独の場合に AGT 対応を確立することにしよう.

基本的なツールは以上の議論において出尽くしている. したがってわれわれは共形場理論を用いることで、表面演算子上の線演算子はすでに作り出すことができる. そこでポイントとなるのは不必要な表面演算子を消す方法を見つけることである. カギとなるのは、先ほども登場した退化フュージョン則である.

$$[V_{-b/2}] \times [V_{-b/2}] = [V_0] + [V_{-b}]. \quad (5.28)$$

まず共形ブロックに恒等演算子 V_0 を挿入する. この操作自体は共形ブロックの値を変えない. そしてこの V_0 を、二つの退化場 $V_{2,1}$ の OPE を恒等演算子へ射影したものと見なすことにする. つまり元

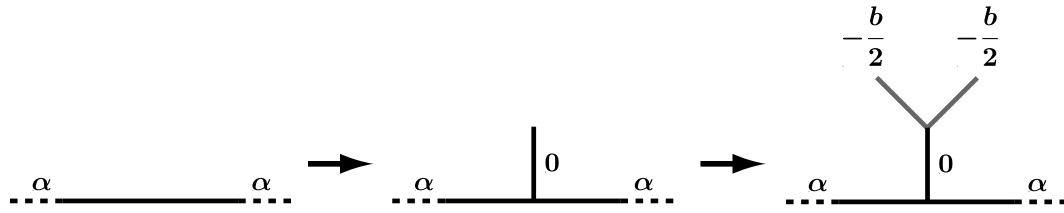


図 29: 共形ブロックの中間状態 α への $1 \in \Phi_{2,1} \cdot \Phi_{2,1}$ の挿入.

の共形ブロックに、頂点をもう一つ付け加えたブロックへ書き換える訳である (図 29) . ここまでくるとループ演算子を求めるアルゴリズムは容易に想像できる. つまり二つの退化場の一方を、ループ演算子に対応するサイクル γ に沿って動かす. そして始点にもとって来た後、二つの退化場をフュージョンさせて単位演算子に戻すことにする. その結果として、共形ブロックはサイクルに対応したモノドロミー変換を受けるのである. このようにして、サイクル γ に付随した共形ブロック上への演算子を定義することが出来る:

$$\mathcal{F}[\Gamma] \rightarrow \mathcal{L}(\gamma) \cdot \mathcal{F}[\Gamma]. \tag{5.29}$$

ここでデュアリティーフレーム Γ は、共形ブロックのチャンネルを指定しており、理論をどのような弱結合記述で考えているのかという情報を表している. このように与えられる演算 $\mathcal{L}(\gamma)$ が Liouville 共形場理論におけるループ演算子の対応物であり、**Verlinde ループ演算子**あるいは**量子ループ演算子**と呼ばれる. もちろんこのようなモノドロミーは、サイクル γ のホモトピー類にしかよらない. まとめると、次のようになる:

AGGTV-DGOT 予想[12, 49]

ゲージ理論のデュアリティーフレームを Γ にとる. Drukker-Morrison-Okuda の辞書のもと、サイクル γ でラベルされるループ演算子を考えよう. するとこの期待値は、ゲージ理論に対応する共形ブロック $\mathcal{F}[\Gamma]$ のモノドロミー演算

$$\mathcal{L}(\gamma) \cdot \mathcal{F}[\Gamma], \tag{5.30}$$

によって与えられる. \mathbb{R}^4 ではなく、 S^4 上での相関関数を考えた場合は

$$\langle L(\gamma) \rangle_{S^4} = \int d\mu(a) \overline{\mathcal{F}[\Gamma](a)} (\mathcal{L}(\gamma) \cdot \mathcal{F}[\Gamma](a)), \tag{5.31}$$

と与えられる. ただし $d\mu(a)$ は、DOZZ 三点関数の因子も含めた積分測度である.

このように共形場理論を考えているところの Riemann 面上にループを挿入する操作によって、モノドロミーは理解された. とするとループ演算子は境界 CFT の言葉を用いて記述することが出来るのではないか、と期待した読者も少なくないと思われる. この予想は的を射ており、実際に Verlinde ループ演算子を**トポロジカル欠陥演算子**として理解することも出来る. Verlinde ループ演算子を用いたアプローチでは、フュージョン・ブレイディング行列の具体形を知らなければならなかった. そのためしばしば計算が煩雑となる. 一方トポロジカル欠陥演算子を用いると理解が簡素化されるため、Toda 場の理論 ($SU(N)$ ゲージ理論) へ拡張する際にも見通しが良い. さらにこのアプローチは、ゲージ理論の Janus ウォールやデュアリティーウォールのようなドメインウォールが挿入されてい

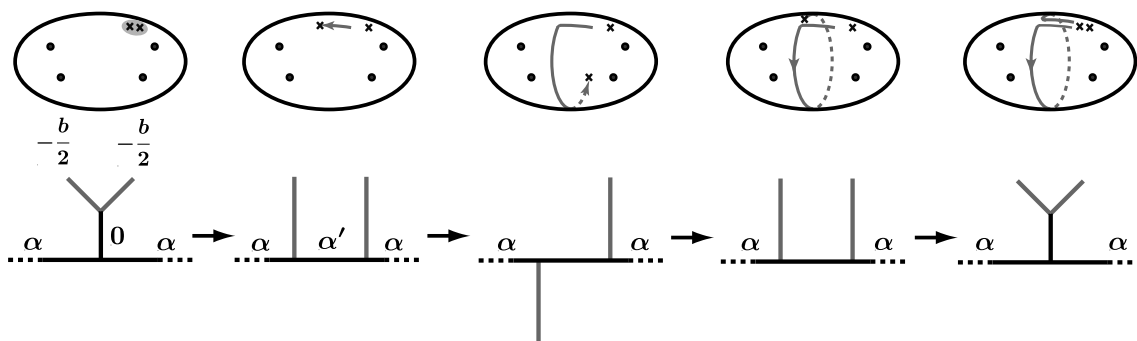


図 30: 基本 Wilson ループに対応する操作.

る場合への拡張においても重要となる. これらの話題については [50, 51] において詳しく調べられている.

さて Verlinde ループの演算をもちいた手法に、物理的解釈を与えることにしよう. 実は AGGTV-DGOT のアルゴリズムは、表面演算子と (反) 表面演算子の対消滅として理解できる. まず表面演算子・反表面演算子を挿入することを考え、モノドロミー操作で表面演算子側に束縛されたループ演算子を作ることにする. これは前節で議論したセットアップである. その後に反表面演算子と対消滅させることで表面演算子を消し去ることができ、結果としてループ演算子だけが取り残されることになるのである. このプロセスは、まさに退化場二つのフュージョンに対応したものである.

• $SU(2) N_f = 4$ ゲージ理論

まずウォーミングアップとして、 $SU(2) N_f = 4$ ゲージ理論における基本表現 ($j = 1/2$) Wilson ループ演算子から考え始めよう. この演算子に対応したサイクルは、Gaiotto 曲線 (図 23) における γ であった. したがって Verlinde 演算によりループ演算子を生成する為には、共形ブロックに図 30 のような変形を作用させればよい. これはフュージョンとブレイディングの組み合わせとして、次のように計算することが出来る:

$$\begin{aligned} W_{1/2} \mathcal{F}(a) &= (F^{-1} \Omega^2 F)_{++} \mathcal{F}(a) \\ &= 2 \cosh(2\pi b P) \mathcal{F}(a). \end{aligned} \tag{5.32}$$

ただし $\alpha = Q/2 + iP$ とおいた. ここでモノドロミー行列の $++$ 成分のみを取り出しているのは、図 30 の最初と最後の共形ブロックにおいて $-b/2$ 二つがフュージョンして出来る中間状態 $-b/2 \pm b/2$ のうち、運動量ゼロの真空表現 0 の場合のみを考えていたからである.

図 30 で行った作業は局所的な変形操作のみに基づいており、どのような共形ブロックで考えても変わらないものである. したがって、他の $SU(2)$ ゲージ理論においても Wilson ループの計算結果は全く同様である. また、高いレベルにある退化場 $\Phi_{2j+1,1}$ を用いて Verlinde のループ演算を実行することで、スピン- j 表現の Wilson ループを計算することも出来る:

$$W_j \mathcal{F}(a) = \sum_{p=-j}^j \exp(4\pi p P) \mathcal{F}(a). \tag{5.33}$$

これらの結果はゲージ理論側の結果 (5.2) と整合的であり、Verlinde ループ演算子/Wilson-'t Hooft ループ演算子対応の強い証拠を与えている.

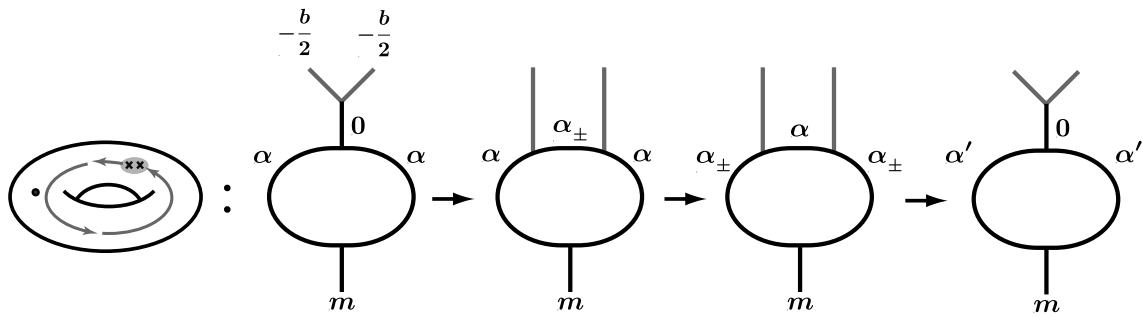


図 31: $\mathcal{N} = 2^*$ ゲージ理論の 't Hooft ループに対応する操作. ただし $\alpha' = \alpha_{\pm} = \alpha \pm b/2$.

● $\mathcal{N} = 2^*$ ゲージ理論

では最後に、't Hooft ループ演算子を計算してみよう. この期待値は、Wilson ループ演算子の場合とは異なり、どのようなゲージ理論を考えるかによって計算結果が著しく異なる. そこでここでは簡単のため、 $\mathcal{N} = 2^*$ $SU(2)$ ゲージ理論を取り上げることにしよう.

AGT 対応において、 $\mathcal{N} = 2^*$ ゲージ理論には一点付きトーラスが付随していた. そしてこの理論における最小 't Hooft ループ演算子は、図 31 のようなモノドロミー演算によって計算される. したがってこのループ演算子を共形ブロック (Nekrasov 関数) に作用させることにより、't Hooft ループ演算子の期待値に対応して

$$H_{1/2} \mathcal{F}(a) = (F^{-1}BF)_{++} \mathcal{F}(a + b/2) + (F^{-1}BF)_{+-} \mathcal{F}(a - b/2) \tag{5.34}$$

という形が得られる. ここで図 31 のようにブロックを変形させる際、退化場のフュージョンを考えるプロセス毎に、中間運動量に $\pm \leftrightarrow \alpha \pm b/2$ の自由度があらわれる. ただしループ演算子を計算するためには、図 31 の最初と最後のブロック双方で、退化場のペアから流れる運動量が 0 となっているようなブロックだけを取り出さなくてはならなかった. したがってこのような 't Hooft ループ計算に寄与する部分は、係数

$$\begin{aligned} (F^{-1}BF)_{++} &= (F \begin{bmatrix} -b/2 & -b/2 \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix}^{-1})_{++} B \begin{bmatrix} m & -b/2 \\ \alpha & \alpha+b/2 \end{bmatrix}_{-+} F \begin{bmatrix} -b/2 & -b/2 \\ \alpha+b/2 & \alpha+b/2 \end{bmatrix}_{-+} \\ &\propto \frac{\Gamma(2ibP)\Gamma(1 + b^2 + 2ibP)}{\Gamma(2ibP + mb)\Gamma(1 + b^2 + 2ibP - mb)}, \end{aligned} \tag{5.35}$$

$$\begin{aligned} (F^{-1}BF)_{+-} &= (F \begin{bmatrix} -b/2 & -b/2 \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix}^{-1})_{+-} B \begin{bmatrix} m & -b/2 \\ \alpha & \alpha-b/2 \end{bmatrix}_{+-} F \begin{bmatrix} -b/2 & -b/2 \\ \alpha-b/2 & \alpha-b/2 \end{bmatrix}_{++} \\ &\propto \frac{\Gamma(-2ibP)\Gamma(1 + b^2 - 2ibP)}{\Gamma(-2ibP + mb)\Gamma(1 + b^2 - 2ibP - mb)}, \end{aligned} \tag{5.36}$$

で与えられることが分かる. ここでループ演算子の規格化についての議論は省略したので、原論文を参考にされたい. このように AGT 対応を用いることで、通常は計算困難なループ演算子の期待値が、共形場理論の技法を用いて系統的に与えられることになる. これは非常に強力かつ魅力的な予想であり、現在も様々な角度から研究がなされている.

6 その後の発展

6.1 Dijkgraaf-Vafa 予想と β -アンサンブル

弦理論の枠内においても、共形ブロックと Nekrasov 関数の結びつきを厳密に理解することは、非常に難しい問題である。このような方向性において、ある程度の成功を収めているのが Dijkgraaf と Vafa による仕事である。彼らのプログラムが特に興味深いのは、副産物として新たな予想を与えるためである。この節では、彼らの発見を簡単に紹介したい。

共形場理論の自由場表示と Dijkgraaf-Vafa 予想

トポジカル弦理論を用いた AGT 対応の実現を調べる過程で、Dijkgraaf と Vafa は Nekrasov 分配関数（つまり共形ブロック）が一種の行列模型によって表される事を発見した。この行列模型は Penner 型とよばれる \log 形ポテンシャルを持つランダム行列模型である。非自己双対な Ω -背景 $\epsilon_1 + \epsilon_2 \neq 0$ を考える為に、実際には行列模型ではなく、その変形である β -アンサンブルを考えることになるが、この詳細は追々説明することにする。

歴史的順序とは反対になってしまうが、ストリング理論的な背景は後まわしにして、共形場理論の観点から Dijkgraaf-Vafa 予想を紹介することにしよう。これから説明する Dijkgraaf-Vafa 行列模型の共形場理論からの理解は A.Mironov、Al.Morozov、A.Morozov、Sh.Shakirov らロシアスクールの研究者たち [52, 53] や Itoyama、Oota ら [54] により精力的に研究され、整理されたものである。その出発点になるのは、共形ブロックの自由場表示（Coulomb ガス表示、Feigin-Fuchs 表示）である。共形ブロックを計算する際の基礎となるのが、頂点演算子の OPE とその係数であった：

$$V_{\alpha_1, Y_1}(q) V_{\alpha_2, Y_2}(0) = \sum_{\alpha} q^{\Delta(\alpha) - \Delta(\alpha_1) - \Delta(\alpha_2)} C_{\alpha_1, \alpha_2}^{\alpha} \sum_Y q^{|Y|} \beta_{\alpha_1, Y_1; \alpha_2, Y_2}^{\alpha, Y} V_{\alpha, Y}(0). \quad (6.1)$$

係数 C は共形場理論のの模型の取り方によって決まる数であり、理論のダイナミクスまで考えなければ計算することが出来ない因子であった。通常は演算子代数の associativity に由来する拘束条件を解くことによって計算されるのであるが、ここではその詳細には立ち入らない。その一方、ディセグメントのレベルを添字に持つ係数 β は、Virasoro 代数と OPE の整合性だけで決定されてしまうのであった。しかしながら一般には、その具体形を明示的に決定することは難しい。そこでここでは、この OPE 係数を自由場理論を用いて計算してみよう。以下では簡単のために $Y_1 = Y_2 = \emptyset$ とする。

具体的には自由スカラー場理論を用いることにする。それにより共形場理論のパラメータが特殊な値の場合しか考察することが出来なくなるが、計算は飛躍的に簡単化する。自由スカラー場 ϕ のプロパゲータは

$$\langle \phi(z) \phi(w) \rangle = 2 \log(z - w), \quad (6.2)$$

で規格化しておこう。中心電荷 $c = 1 - 6Q^2$ の理論を考えるため、エネルギーストレステンソルをツイストする

$$T(z) = \frac{1}{4}(\partial\phi(z))^2 + \frac{Q}{2}\partial^2\phi(z). \quad (6.3)$$

この模型のプライマリー場は $V_{\alpha}(z) =: \exp \alpha \phi(z) :$ と表示され、その OPE は簡単な計算で求めることが出来る：

$$\begin{aligned} V_{\alpha_1}(q) V_{\alpha_2}(0) &= q^{2\alpha_1\alpha_2} : e^{\alpha_1\phi(q) + \alpha_2\phi(0)} : \\ &= q^{2\alpha_1\alpha_2} \left(V_{\alpha_1 + \alpha_2}(0) + q \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} V_{\alpha_1 + \alpha_2, \square}(0) + \dots \right), \end{aligned} \quad (6.4)$$

ただし最後の行に移行する為に、 q について Taylor 展開し、 $L_{-1}V_\alpha = \alpha : \partial\phi V_\alpha :$ 等で書き直した。ここで注意すべき点は、右辺にあらわれる頂点演算子の運動量 α は保存則 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ を満たすものだけである、ということである。その係数も、例えばレベル 1 のディセグメントについては

$$\beta_{\alpha_1; \alpha_2}^{\alpha, \square} \Big|_{\text{free boson}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \delta_{\alpha, \alpha_1 + \alpha_2} \quad (6.5)$$

である。一方 2 章で説明したような方法に基づき、Virasoro 代数から計算される完全な値は、

$$\begin{aligned} \beta_{\alpha_1; \alpha_2}^{\alpha, \square} &= \mathcal{G}_\Delta^{-1}(\square, \square) \cdot \mathcal{R}'_{12}(\square) \\ &= \frac{\Delta + \Delta_1 - \Delta_2}{2\Delta} = \frac{\alpha(\alpha - Q) + (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2 - Q)}{2\alpha(\alpha - Q)} \end{aligned} \quad (6.6)$$

であり、自由場計算の結果は、これを保存則 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ で制限したものにほかならない。

このように自由場表示に基づく計算の欠点は、保存則の存在により中間運動量 α について一般的な表示が得られない点にある。OPE 係数の完全な関数形 $\beta(\alpha_1, \alpha_2; \alpha)$ を決定するに、自由場表示を改善することは共形場理論における永らくの問題であった。この問題に、AGT 予想に関する研究が大きな進歩をもたらすこととなったのである。

Morozov らロシアグループは、Dijkgraaf と Vafa の結果が次の形のスクリーニング演算子を用いることを示唆していると気がついた：

$$Q_{[0, q]} = \int_0^q : e^{b\phi(z)} : dz \quad (6.7)$$

発見の順序は前後するが、このスクリーニング演算子を既知のものとして話を進めよう。この演算子を挿入することで、実際に自由場計算は改善される。これを確認する為に、スクリーニング演算子を挿入した場合の OPE 係数を考えてみよう。すると次の形の展開形が得られる：

$$\begin{aligned} &: L_{-Y_1} V_{\alpha_1}(q) :: L_{-Y_2} V_{\alpha_2}(0) : \left(\int_0^q : e^{b\phi(z)} : dz \right)^N \\ &= C_{\alpha_1, \alpha_2}^{\alpha_1 + \alpha_2 + Nb} \Big|_{\text{free} + \text{screening}} \sum_Y q^{|Y|} \beta_{\alpha_1, Y_1; \alpha_2, Y_2}^{\alpha_1 + \alpha_2 + Nb, Y} \Big|_{\text{free} + \text{screening}} : L_{-Y} V_{\alpha_1 + \alpha_2 + Nb}(0) : \dots \end{aligned} \quad (6.8)$$

つまり中間運動量に関する保存則が $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + Nb$ という形に修正され、スクリーニング演算子の数 N だけシフトされることになる。Morozov らは、この改善された自由場計算に基づく結果が、 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + Nb$ の下で一般的な OPE 係数と一致すると主張した：

$$\beta_{\alpha_1, Y_1; \alpha_2, Y_2}^{\alpha_1 + \alpha_2 + Nb, Y} = \beta_{\alpha_1, Y_1; \alpha_2, Y_2}^{\alpha_1 + \alpha_2 + Nb, Y} \Big|_{\text{free} + \text{screening}} \quad (6.9)$$

この係数 β は有理関数である。したがってすべての自然数 N についてこの式が成り立つので、解析接続により、自由場計算は OPE 係数 $\beta_{\alpha_1, Y_1; \alpha_2, Y_2}^{\alpha, Y}$ について完全な情報を与えることがわかる。

この結果も具体的計算で確認できる。再び $Y_1 = Y_2 = \emptyset$ の場合を考えよう。

$$\begin{aligned} &V_{\alpha_1}(q) V_{\alpha_2}(0) \prod_{i=1}^N \int_0^q dz_i : e^{b\phi(z_i)} : \\ &= q^{2\alpha_1\alpha_2} \prod_{i=1}^N \int_0^q dz_i \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{2b^2} \prod_{i=1}^N z_i^{2b\alpha_2} (q - z_i)^{2b\alpha_1} : e^{\alpha_1\phi(q) + \alpha_2\phi(0) + \sum_i b\phi(z_i)} : \\ &= q^{2\alpha_1\alpha_2 + N(1+2b\alpha_1+2b\alpha_2) + N(N-1)b^2} \prod_{i=1}^N \int_0^1 dz_i \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{2b^2} \prod_{i=1}^N z_i^{2b\alpha_2} (1 - z_i)^{2b\alpha_1} \\ &\quad \times \left(V_{\alpha_1 + \alpha_2 + Nb}(0) + q \frac{\alpha_1 + b \sum_i z_i}{\alpha_1 + \alpha_2 + Nb} : L_{-1} V_{\alpha_1 + \alpha_2 + Nb}(0) : + \dots \right) \end{aligned} \quad (6.10)$$

このディセグメント場の係数を与える積分たちは、Euler のベータ関数を一般化したものであり、Selberg 型の積分とよばれる。展開のはじめの二項に関する積分を実際に行い、両者の比をとることで

$$\beta_{\alpha_1, \Phi; \alpha_2, \Phi}^{\alpha_1 + \alpha_2 + Nb, \square} \Big|_{\text{free} + \text{screening}} = \frac{\alpha(\alpha - Q) + (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2 - Q)}{2\alpha(\alpha - Q)} \Big|_{\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + Nb}, \quad (6.11)$$

が確認できる。これは (6.6) をきちんと再現している。高次の項も同様である。計算の詳細は、文献 [53] を参照されたい。

さて、以上は共形場理論の自由場表示に関する話であった。実はこのアイデアを AGT 予想に応用すると、興味深いことが分かる。そこで、共形ブロックを自由場計算により求めることを考えてみよう。AGT 予想への応用を見越して、ここでは球面の四点共形ブロックを取り上げる：

$$\begin{aligned} & \langle V_{\alpha_4}(\infty) V_{\alpha_3}(1) \prod_{i=1}^{N_2} \int_0^1 dz_i : e^{b\phi(z_i)} : V_{\alpha_2}(q) V_{\alpha_1}(0) \prod_{i=1}^{N_1} \int_0^q dz_i e^{b\phi(z_i)} : \rangle \\ &= \text{const.} \times \prod_{i=1}^{N_1} \int_0^q dz_i \prod_{j=N_1+1}^N \int_0^1 dz_j \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{2b^2} \prod_{i=1}^N z_i^{2b\alpha_1} (z_i - q)^{2b\alpha_2} (z_i - 1)^{2b\alpha_3} \end{aligned} \quad (6.12)$$

ここで考えているプライマリー場は、自由場理論におけるもの $V_\alpha(z) =: \exp \alpha \phi(z) :$ である。ミニマル模型に対しては、このような積分表示は 20 年以上も前に Dotsenko と Fateev によってすでに与えられていた。そこでこの表示を **Dotsenko-Fateev 積分** とよぶ。ただしここで得られた結果は一般の共形ブロックに対するものであり、Dijkgraaf と Vafa によってはじめて導入された。共形場理論の観点から述べれば、このような表示を得ることが出来たのは、先に述べたスクリーニング演算子を、その積分経路も含めて確定することが出来た為である。ただし現在までのところ、この結果に対する厳密な証明はまだなされていない。

以下では、慣習に従い $\beta = b^2$ という記号を導入しよう。この多重積分は、 $\beta = 1$ の場合は行列模型の固有値積分表示と見なすことが出来る。なぜならばこの場合、積分中の因子 $\prod_{i < j} (z_i - z_j)^{2\beta}$ は Vandermonde 行列式となり、よく知られているようにこれは行列積分測度の非対角成分から現れる因子にほかならないからである。ただし通常の模型と異なり、ポテンシャルが $\alpha_1 \log Z + \alpha_2 \log(Z - q) + \alpha_3 \log(Z - 1)$ という対数形をしている。このような行列模型は **Penner 型** とよばれ、Penner により Riemann 面のモジュライ空間の交点理論を調べる為に導入された。

さらに我々に馴染みのある行列模型と著しく異なる点がある。それは β が一般の場合、この積分はもはや行列積分と見なせないことである。そこで一般的には、この模型を行列模型とは呼ばず、 **β -アンサンブル** と呼ぶ。 β -アンサンブル自体は、Dyon ガスや Wigner 結晶の統計力学模型として研究されており、この場合の β は逆温度に対応している。我々の扱っている模型では、 $\beta = -\epsilon_1/\epsilon_2$ は Ω -背景場の値の比に他ならず、 $\beta \neq 1$ なる値にとることは中心電荷が $c \neq 1$ である共形場理論を考えることに対応している。ゲージ理論の観点からは、これは非自己双対背景を考えることにほかならない。そこで次の分配関数を考えよう：

$$Z_{\text{DF}} = q^{2\alpha_1\alpha_2} (1 - q)^{2\alpha_2\alpha_3} \prod_{i=1}^{N_1} \int_0^q dz_i \prod_{j=N_1+1}^N \int_0^1 dz_j \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{2\beta} \prod_{i=1}^N z_i^{2b\alpha_1} (z_i - q)^{2b\alpha_2} (z_i - 1)^{2b\alpha_3}. \quad (6.13)$$

これを **Dijkgraaf-Vafa の β -アンサンブル**、あるいは **Dotsenko-Fateev 分配関数** と呼ぼう。これは共形ブロックの自由場表示から得られたものであり、この分配関数は Virasoro 共形ブロック \mathcal{F} と厳密に等しいと予想される：

$$Z_{\text{DF}} = C \cdot q^{\Delta - \Delta_1 - \delta_2} \cdot \mathcal{F} \left[\begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{matrix} \right] (\Delta; q). \quad (6.14)$$

ただし二箇所で OPE をとったため、二つの運動量に対し、修正された保存則が課されている

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + N_1 b, \quad (6.15)$$

$$\alpha_4 = \alpha + \alpha_3 + N_2 b. \quad (6.16)$$

Dijkgraaf と Vafa が発見したのは、この Dotsenko-Fateev 分配関数と、共形ブロックと Nekrasov 分配関数の間の等価性である。

$$\mathcal{F} \left[\begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{matrix} \right] \longleftrightarrow Z_{\text{DF}} \longleftrightarrow Z_{\text{Nek}}. \quad (6.17)$$

つまり Dijkgraaf-Vafa β -アンサンブルを仲立ちとして、共形ブロックと Nekrasov 分配関数を結びつけられる可能性があることになる。この予想は様々なレベルでチェックされている。特に $\beta = 1$ の場合の行列模型をプラナーレベルで具体的に計算するものや [55]、一般の β における多重積分を拡張された Selberg 積分として扱うことで、インスタント展開の高次まで調べるアプローチが精力的に調べられた [56, 57, 53, 54]。とくに Selberg 積分としての扱いは、被積分関数の Jack 多項式による展開と相性がよく、Nekrasov 分配関数や共形ブロックの Young 図展開と深く関係しており重要である。

では、Dijkgraaf と Vafa はいかにしてこの関係を発見するに至ったのであろうか？その鍵になるのが、トポジカル弦理論とその双対性である。次節では、この弦理論のアプローチについて解説する。

幾何学的転移による“証明”

この節で考えるのは、AGT 関係のストリング的な実現である。特に Dijkgraaf と Vafa によって発見された方法について議論しよう。

カギとなるアイデアは、**幾何工学の方法 (geometric engineering)** と呼ばれるストリング理論のテクニックだ。幾何工学の方法は、四次元の $\mathcal{N} = 2$ 理論を、Type II 超弦理論の低エネルギー有効理論として理解する手法である。すると、ゲージ理論の解析に対しストリング双対性という強力な手法を活用できることになる。

今、我々の関心は $\mathcal{N} = 2$ ゲージ理論の Nekrasov 分配関数にある。 $\mathcal{N} = 2$ 理論をストリング理論へ埋め込む方法はいくつか考えられるが、ここでは Type II ストリングの Calabi-Yau コンパクト化として考えよう。すると Nekrasov 自由関数 $\mathcal{F}_{\text{Nek}} = \log Z_{\text{Nek}}$ は、このコンパクト化理論の低エネルギー有効作用 S_{eff} として与えられることが知られている [58]。その際 Ω -背景場は、 $\mathcal{N} = 2$ 超重力多重項における重力光子背景場に対応している。さらに重要なことは、この自由エネルギーはトポジカルストリング理論のプレポテンシャルとして計算することが出来る点にある。以上をまとめると

$$\mathcal{F}_{\text{Nek}} \longleftrightarrow S_{\text{eff}}(\text{Type II on CY} \times \mathbb{R}^4) \longleftrightarrow \mathcal{F}_{\text{top str}}(\text{CY}). \quad (6.18)$$

という関係である。詳細は文献を参考にされたい。

簡単のため、超共形 $SU(2)$ 線形クイバー理論を例にとろう。出発点となるのは、 A_1 特異性から作った 3-フォールド

$$A_1 \times \mathbb{C} \quad : \quad uv + x^2 = 0, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (6.19)$$

である。特異点は $u = v = x = 0$ にある。この特異点を $\mathbb{P}^1 \simeq S^2$ で置き換え、 A_1 特異性をレゾリューションしよう (図 32)。この球面 \mathbb{P}^1 は、空間 $uv + x^2 = 0$ の中のくびれ部分のようなものであり、それ以上つぶせない極小な二次元球面となっている。そして今考えている空間は z 方向については平坦であり、その方向に沿って極小球面の連続なファミリーがあることになる。

唐突であるが、この空間 $A_1 \times \mathbb{C}$ 上のトポジカル B-モデル弦理論を考えよう。とくに極小球面 S^2 上に、B-モデルの 2-ブレインを N 枚巻き付けてみよう。Witten の与えた cubic SFT とトポジカル

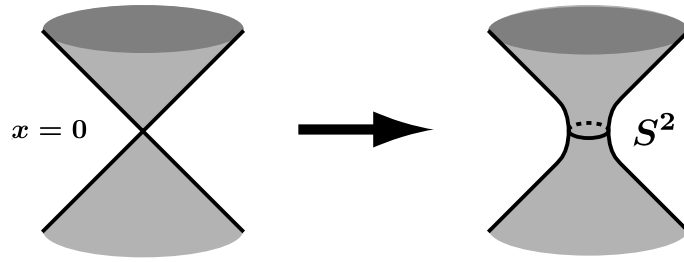


図 32: A_1 特異性 $uv + x^2 = 0$ とそのレゾリューション $uv + x^2 = r^2$.

ストリングの関係により、このように作った B-モデル開弦理論は、行列模型までに落ちることが知られている [58]. したがってその分配関数は、行列積分

$$Z_{\text{DV}} = \int_{N \times N} dM e^{\frac{1}{g_s} \text{tr} W(M)}, \quad (6.20)$$

として与えられる. ここでポテンシャル W は、Calabi-Yau 幾何 $uv + x^2 - W'(z)^2 = 0$ にあらわれている関数である. したがって今の場合は $W = 0$ である.

さてこの B-モデルの系に、非コンパクトな B-モデル 2-ブレーンの束も挿入してみよう. 位置 $x = 0$, $z = q$ に α 枚のブレーンの束を挿入することに対応し、行列模型には

$$V_\alpha(q) = \det(M - q)^\alpha. \quad (6.21)$$

という演算子が挿入される. この演算子は、A-モデルを用いた結び目の解析などにあらわれる Ooguri-Vafa 演算子のミラーである. したがって $n + 2$ 個のスタックを挿入すると、理論の分配関数は

$$\begin{aligned} Z_{\text{DV}} &= \int_{N \times N} dM \prod_{a=1}^{n+2} V_{\alpha_a}(q_a) \\ &= \int d^N z \prod_{i < j} (z_i - z_j)^2 \prod_{i,a} (z_i - q_a)^{\alpha_a}, \end{aligned} \quad (6.22)$$

に変更される. 興味深いことに、これは自由場計算から得られた Dotsenko-Fateev 積分そのものだ.

ではなぜこの模型が AGT と関係するのであろうか? まずこの理論をポテンシャル

$$W(M) = \sum_{a=1}^{n+2} g_s \alpha_a \log(M - q_a), \quad (6.23)$$

をもつ Penner 型行列模型と見なす.

$$Z = \int_{N \times N} dM \exp \left[\frac{1}{g_s} \text{tr} W(M) \right]. \quad (6.24)$$

そしてこの行列模型を、Dijkgraaf-Vafa 相において解析することにする. つまり、行列積分を古典作用の極値 $W'(\zeta_A) = 0$ の周りで評価しよう. この極値は $z = \zeta_1, \dots, \zeta_{n+1}$ だけあるので、各変数 z_i に関する鞍点を $n + 1$ 個のうちのどれに選ぶか、という自由度がある. そこで ζ_A に選んだ変数 z_i が N_A 個あるものとする. つまり $N = N_1 + \dots + N_{n+1}$ 個の変数を、 $n + 1$ 個の鞍点に振り分けるのである. これは弦理論において合計 N 枚のブレーンを巻き付ける際に、 $n + 1$ 個のサイクルに割り振る作業に対応している. 以下では、この模型の 't Hooft 極限

$$N \rightarrow \infty, \quad \nu_A = g_s N_A, \quad (6.25)$$

における振る舞いを考えることにする. 行列模型の文脈では、't Hooft パラメータ ν_A は占有率と呼ばれる. さらに

$$\alpha_a \rightarrow \infty, \quad m_a = g_s \alpha_a, \quad (6.26)$$

という極限も同時にとることにする. ただし無限遠での電荷 $\alpha_0 = -\sum_{a=1}^{n+2} \alpha_a - N$ に対してもこの極限をとろう.

よく知られているように、行列模型のラージ N 極限における振る舞いはスペクトル曲線

$$F(x, z) = x^2 - W'(z)^2 + f(z) = 0, \quad (6.27)$$

によって記述される. これは「古典的な」曲線 $x^2 - W'(z)^2 = 0$ に量子補正

$$f(z) = g_s \left\langle \sum_i \frac{W'(z_i) - W'(z)}{z_i - z} \right\rangle, \quad (6.28)$$

が加わった形をしている. このスペクトル曲線は、実は弦理論の重要な双対性を反映している. それが**幾何学的転移 (geometric transition)**、あるいは**ラージ N 双対性 (large- N duality)** と呼ばれるデュアリティである. これはゲージ/重力対応の一種であり、幾何学的転移はブレインを含んだ開弦理論の系を、閉弦理論の系に置き換えるのである. この際、はじめに存在していたブレインの情報は、背景 Calabi-Yau 幾何の形やサイクルの大きさに化ける. ではさっそく、今まで考えてきた開弦の B-モデルに幾何学的転移を用いることにしよう. すると今まで考えてきた開弦 B-モデル (行列模型) の系は、スペクトル幾何

$$uv + F(x, z) = uv + x^2 - W'(z)^2 + f(z) = 0, \quad (6.29)$$

の上で考えたトポロジカル B-モデル閉弦理論に置き換わるのである. そして、行列模型の量子補正 $f(z)$ が古典的な曲線 $x^2 - W'(z)^2 = 0$ をスペクトル曲線 $F(x, z) = x^2 - W'(z)^2 + f(z) = 0$ へ変形することは、まさしく幾何学的転移を記述している. つまり行列模型の量子補正は、幾何学的転移によりブレインが背景の幾何学に溶け込んで、Calabi-Yau 空間を変形する現象に対応していたのである. 転移後の空間は、実は超共形 $SU(2)$ クイバー理論の Seiberg-Witten 曲線 (をストリング理論に埋め込んだもの) である. このことはすぐ後に与える具体例で詳しく見ることにする. したがってこの B-モデルに対応する Type IIB 閉弦理論は、 $\mathcal{N} = 2$ ゲージ理論の Seiberg-Witten 解を与えることになるのである. つまり**幾何学的転移を通じ、我々の考えている B-モデルの系は $SU(2)$ ゲージ理論を「幾何工学する」**のである. このように行列模型を仲立ちとして、共形ブロックと Seiberg-Witten 理論が結びつくのである. これが Dijkgraaf と Vafa のアイデアである.

では、このことを具体的に理解する為に、一般論を離れて 4-フレーバーの超共形 $SU(2)$ SQCD の例 $n = 1$ に戻ろう.

3-Penner 行列模型

ブレインの挿入点を $q_I = 0, 1, q$ と選ぶことにする. すると 4-フレーバーの $SU(2)$ ゲージ理論に対応する行列作用は

$$W(z) = m_1 \log z + m_2 \log(z - 1) + m_3 \log(z - q), \quad (6.30)$$

である. この場合、量子補正は

$$f(z) = \sum_{a=1}^3 \frac{c_a(\nu, m)}{z - q_a}, \quad (6.31)$$

という形であることはすぐに分かる (ただし係数 $c_I(\nu, m)$ の具体的な関数形を決定する為には、煩雑な行列模型の計算が必要となる). すると、スペクトル曲線は有理式

$$x^2 = \frac{P_4(z)}{z^2(z-1)^2(z-q)^2}, \quad (6.32)$$

という形で与えられる. 拘束 $\nu_1 + \nu_2 = g_s N = m_0 + \dots + m_3$ を考慮すると、自由パラメータは質量 m_0, \dots, m_3 と Coulomb ブランチパラメータ

$$a = \nu_1 - \nu_2 = \oint_{A\text{-cycle}} x dz, \quad (6.33)$$

の5個である. これらが4次式 $P_4(z)$ の5つの係数を与えている. 式 (6.32) からすぐに見て取れるように、このスペクトル曲線は、Gaiotto によって与えられた Sieberg-Witten 曲線の表示そのものである. この Gaiotto 表示が得られたのは、行列模型の作用を Penner 型にとったが故である. 幾何学的転移の適用の仕方も特徴的で、 $\mathcal{N} = 1$ ゲージ理論に対する Dijkgraaf-Vafa 理論と異なり、Calabi-Yau のファイバーとベースを取り替えて扱った形となっている. さてこの結果 (6.32) が、係数も含めて Sieberg-Witten 解を正しく再現していることは [55] でチェックされている. したがって先に述べた B-モデル閉弦の系は、この $SU(2)$ ゲージ理論の弦理論への埋め込みを与えている.

以上で説明したアイデアは、Dotsenko-Fateev 積分と Nekrasov 分配関数の対応を本当に説明しているのだろうか? そこで**ミラー対称性**を用いて、B-モデルを A-モデルへと置き換えよう. ミラー対称性により、いままで考えてきた B-モデルは、局所 Del-Pezzo 曲面 \mathbb{B}_5 と呼ばれるトーリック Calabi-Yau 空間上のトポロジカル A-モデルと等価である. このミラー A-モデルは、**トポロジカルパーテックス**と呼ばれる手法により厳密に解くことが出来る. そしてその結果えられるトポロジカル弦理論の分配関数は、Nekrasov 分配関数と完全に一致するのである [25]. したがって、A-モデルの分配関数は Nekrasov 関数そのものであり、ミラー対称性を使い B-モデルにより計算すると、同じ量が Dijkgraaf-Vafa 行列模型として与えられるのである.

ここで紹介した Dijkgraaf-Vafa の説明は、行列模型のプラナーレベルのみの議論に基づいていた. さらにストリングへの埋め込みが理論的に整備されているのは、 $\beta = 1$ の場合だけである. そこで話がより難しく、そして面白くなってゆくのは、 β -アンサンブルの全次数にわたって分配関数を考える際である. そこで重要となるのは、Dijkgraaf-Vafa 模型を Selberg 積分として扱う解析手法である [54, 53]. このアプローチに基づき、実際に Nekrasov 公式と Dijkgraaf-Vafa β -アンサンブルの比較計算に大きな進展が見られる. 現在 Dijkgraaf-Vafa 予想を証明することになると期待されているのは、この方向性である.

6.2 Zamolodchikov 漸化式による AGT 予想の証明

この節では A.Zamolodchikov が発見した、共形ブロックに関する漸化式の観点から、AGT 予想について調べることにする. Zamolodchikov の漸化式を書き下すために、球面上の四点共形ブロックから次のような楕円共形ブロック \mathcal{H}_Δ を定義しよう:

$$\begin{array}{c} \mathbf{2} \quad \mathbf{3} \\ | \quad | \\ \mathbf{1} \text{---} \text{---} \text{---} \mathbf{4} \end{array} (q) = (1-q)^{\frac{Q^2}{4} - \Delta_1 - \Delta_3} \left(\frac{q}{16Q} \right)^{\frac{a^2}{4}} \theta_3(Q)^{3Q^2 - (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4)} \mathcal{H}_\Delta(Q). \quad (6.34)$$

ここで楕円関数を用いて $Q = \exp(-\pi K(1-q)/K(q))$ を導入し、 $\theta_3(e^{2\pi i\tau}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i n^2 \tau}$ は Jacobi のテータ関数 $\theta_3(0|\tau)$ である. このブロックのレベル展開 $\mathcal{H}_\Delta(Q) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (16Q)^n \mathcal{H}_\Delta^n$ を考えよう.

すると展開の各項は、次の漸化式を通じて低次の項により決定されていることが A.Zamolodchikov により発見された [59]:

$$\mathcal{H}_\Delta^n = \delta_{n,0} + \sum_{1 \leq rs \leq n} \frac{c_{r,s} d_{r,s}}{\Delta - \Delta_{r,s}} \mathcal{H}_{\Delta_{r,s} + rs}^{n-rs}. \quad (6.35)$$

ただし、この漸化式の各項にあらわれている係数は

$$c_{r,s} = \frac{1}{2} \prod_{p=1-r}^r \prod_{q=1-s}^s \Big|_{(p,q) \neq (0,0), (r,s)} \frac{1}{pb + qb^{-1}}. \quad (6.36)$$

$$d_{r,s} = \prod_{i=1}^4 \prod_{p=-r+1, -r+3, \dots, r-1} \prod_{q=-s+1, -s+3, \dots, s-1} \left(\frac{Q}{4} - \frac{\mu_i}{2} - \frac{pb + qb^{-1}}{2} \right), \quad (6.37)$$

与えられ、 $\Delta_{r,s} = \Delta(a = (rb + sb^{-1})/2)$ である。また μ_i は、AGT 予想においてフレーバーの質量に対応するパラメーター (4.35) である (4 章を参照)。この関係式を **Zamolodchikov の漸化式** と呼ぶ。したがって Nekrasov 分配関数も同じ漸化式を満たしていることが示されたならば、AGT 予想が証明できたことになる。残念なことに、 $SU(2) N_f = 4$ SQCD の場合にはこの証明プログラムには技術的な困難が従い、現在のところ証明は与えられていない。しかしながらフレーバーが少ない場合や、 $\mathcal{N} = 2^*$ 理論においては、このアイデアにより AGT 予想を証明することが出来る [60, 61]。そこでここでは $SU(2)$ pure Yang-Mills 理論の場合について調べることにしよう。

非正則な共形ブロックの Zamolodchikov 漸化式

まずは pure Yang-Mills 理論に対応する非正則な共形ブロック $\langle G|G \rangle$ を考え、そのレベル展開の各項の間に成立する Zamolodchikov 漸化式を導くことにしよう。この漸化式は、式 (6.35) にフレーバーのデカップリング極限を適用することで導くことが出来る [62, 61]。そこで $\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 Q(q) \rightarrow \Lambda^4$ であることに注意すると、次の漸化式を容易に導くことが出来る:

$$\langle \Delta, k | \Delta, k \rangle = \delta_{k,0} + \sum_{1 \leq rs \leq k} \frac{c_{r,s}}{\Delta - \Delta_{r,s}} \langle \Delta_{r,s} + rs, k - rs | \Delta_{r,s} + rs, k - rs \rangle. \quad (6.38)$$

ただしインスタント展開 $\langle G|G \rangle = \sum_k \Lambda^{4k} \langle \Delta, k | \Delta, k \rangle$ に注意。したがって Gaiotto 予想 (4.67) を示すためには、 $SU(2)$ Yang-Mills 理論の k -インスタント分配関数 $Z_{\text{pure } SU(2), k}$ が $\langle \Delta, k | \Delta, k \rangle$ と同じ漸化式を満たすことを示せば良い。そのために Nekrasov 関数の LMNS 積分表示を紹介する。

Nekrasov 関数の LMNS 積分表示と極構造

Nekrasov 分配関数の積分表示は、位相的場の理論を用いたハイパー Kähler 空間の研究において、Losev、Moore、Nekrasov そして Shatashvili により導入された [63, 64]。特にいま我々の調べている $SU(2)$ Yang-Mills 理論に対しては、LMNS の積分表示は

$$Z_k = \frac{(-Q)^k}{(\epsilon_1 \epsilon_2)^k k!} \oint_{C_k} \frac{dx_k}{2\pi i} \cdots \oint_{C_1} \frac{dx_1}{2\pi i} \prod_{i=1}^k \frac{1}{P_1(x_i) P_2(x_i)} \prod_{1 \leq i < j \leq k} \frac{(x_{ij})^2 (x_{ij}^2 - Q^2)}{(x_{ij}^2 - \epsilon_1^2)(x_{ij}^2 - \epsilon_2^2)}, \quad (6.39)$$

与えられる。ただし $P_\alpha(x) = (x - a_\alpha)(x - a_\alpha + Q)$ という記号を導入した。この節では $Q = \epsilon_1 + \epsilon_2$ である。また積分経路 C_i は、極 $x_i = a_{1,2}, x_{j(<i)} + \epsilon_{1,2}$ を囲むものとする。

この積分表示と、Nekrasov 関数の Young 図展開は次のようなプロセスで関係する。はじめに x_1 について積分するものとしよう。この場合、留数を与える極は $x_1 = a_1$ と $x_1 = a_2$ の二つある。そこで

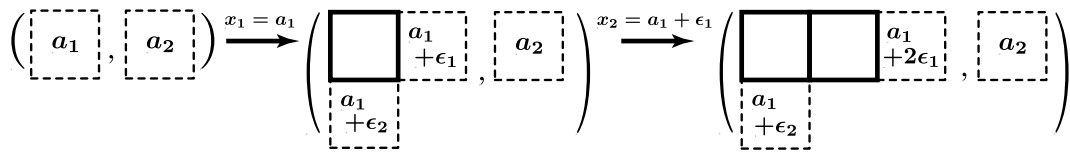


図 33: 留数計算における単純極の選択と、Young 図の拡大.

$x_1 = a_1$ 周りで計算した項を、Young 図列 (\square, Φ) に対応しているものと見なそう. $x_1 = a_2$ 周りには (Φ, \square) が付随している. ここでは (\square, Φ) に対応した項を考える. すると $x_1 = a_1$ での留数より

$$Z_k|_{x_1=a_1} = \frac{(-Q)^{k-1}}{(\epsilon_1 \epsilon_2)^{k-1} k!} \frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_2 a_{21} (a_{12} + Q)} \times \oint_{C_k} \frac{dx_k}{2\pi i} \cdots \oint_{C_2} \frac{dx_2}{2\pi i} \prod_{i=2}^k \frac{P_1(x_i - Q)}{P_1(x_i - \epsilon_1) P_1(x_i - \epsilon_2) P_2(x_i)} \prod_{2 \leq i < j \leq k} \frac{(x_{ij})^2 ((x_{ij})^2 - Q^2)}{(x_{ij}^2 - \epsilon_1^2) (x_{ij}^2 - \epsilon_2^2)}, \quad (6.40)$$

という表式が与えられる. また、新たな係数 $1/\epsilon_1 \epsilon_2 a_{21} (a_{12} + Q)$ は、Nekrasov 関数にあらわれる因子

$$\prod_{\alpha, \beta=1,2} \prod_{s \in Y_1} (a_{\alpha\beta} - l_{Y_\beta}(s) \epsilon_1 + (a_{Y_\alpha}(s) + 1) \epsilon_2)^{-1} \quad (6.41)$$

のうち、 $l_1(s) = a_1(s) = 0$, $l_2(s) = a_2(s) = -1$ となる箱 s の寄与である.

そこで次にこれを x_2 について積分するわけであるが、被積分関数の極の位置は、分母 $P_1(x_2 - \epsilon_1) P_1(x_2 - \epsilon_2) P_2(x_2)$ から来る. したがって次の積分に現れる極は $x_2 = a_1 + \epsilon_1, a_1 + \epsilon_2, a_2$ の三つである. このように $x_1 = a_1$ を選ぶことで、 x_2 にはこの三つの極があらわれる様子は図 33 に書き表されている一段階目のプロセスとして理解できる. したがって $x_2 = a_1 + \epsilon_1, a_1 + \epsilon_2, a_2$ から一つの極を選んで計算することは、Young 図 (\square, Φ) に一つ箱が加わり $(\square\square, \Phi)$, (\square, Φ) あるいは (\square, \square) となるプロセスとして表現することが出来る. そこでここでは極 $x_2 = a_1 + \epsilon_1$ からの寄与を計算することにしよう. すると $(\square\square, \Phi)$ に対応する項は

$$Z_k|_{x_1=a_1, x_2=a_1+\epsilon_1} = \frac{(-Q)^{k-2}}{(\epsilon_1 \epsilon_2)^{k-2} k!} \frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_2 (\epsilon_2 - \epsilon_1) (\epsilon_1 - \epsilon_2 + Q) a_{12} (a_{12} + Q) (a_{12} + \epsilon_1) (a_{12} + \epsilon_1 + Q)} \times \oint_{C_k} \frac{dx_k}{2\pi i} \cdots \oint_{C_3} \frac{dx_3}{2\pi i} \prod_{i=3}^k \frac{P_1(x_i - \epsilon_1 - Q)}{P_1(x_i - 2\epsilon_1) P_1(x_i - \epsilon_2) P_2(x_i)} \prod_{3 \leq i < j \leq k} \frac{(x_{ij})^2 ((x_{ij})^2 - Q^2)}{(x_{ij}^2 - \epsilon_1^2) (x_{ij}^2 - \epsilon_2^2)}, \quad (6.42)$$

となることが分かる. ここで新たに加わった留数には、因子 (6.41) のうち $l_1(s) = 1, a_1(s) = 0, l_2(s) = a_2(s) = -1$ となる箱 s からの寄与である. また、計算の途中であらわれた極 $x_i = \epsilon_1 + \epsilon_2$ は、式 (6.40) の分子にある因子 $P_1(x_i - Q)$ によって打ち消されてしまうことに注意する. したがって次の積分に現れる極は $x_3 = a_1 + 2\epsilon_1, a_1 + \epsilon_2, a_2$ の三つだけであり、再び極を選ぶ操作が Young 図の拡大として表されることになる. これは図 33 の二段階目のプロセスである. このように考えていくと、 k 重積分の留数計算における極の取り方は、箱の総数が $k = |Y_1| + |Y_2|$ である Young 図のペア (Y_1, Y_2) でラベルされることが分かるだろう. そして上の具体的な計算からすぐ予想できるように、 (Y_1, Y_2) に対応した極で評価した留数は、Nekrasov 関数に現れる因子そのものになっている:

$$Z_k|_{(Y_1, Y_2)} = \frac{1}{\prod_{\alpha, \beta=1}^2 n_{\alpha, \beta}^{(Y_1, Y_2)}(\vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2)}. \quad (6.43)$$

したがって、 Z_k 全体は k -インスタントン分配関数を正しく与えていることがわかる.

そこで LMNS 積分表示を用いることで、Zamolodchikov 漸化式を証明することを考えよう。そのためには、 k -インスタント分配関数の極とそこでの留数が分かればよい。分配関数の特異性は、被積分関数の極が衝突することで生じる。簡単な例で説明しよう。

$$Q \oint_{x=a_1} \frac{dx}{2\pi i} \frac{1}{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_1+Q)(x-a_2+Q)} = \frac{1}{a_{12}(a_{12}+Q)}, \quad (6.44)$$

という積分結果の特異性 $a_1 = a_2 - Q$ は、被積分関数に現れる極 $x = a_1$ が積分カンターの外の極 $x = a_2 - Q$ と衝突することで生じている。LMNS 積分の場合も全く同様であり、積分の途中で現れる極 $x = a_1 + k\epsilon_1 + l\epsilon_2$ がカンターの外の極 $x = a_2 - Q$ と衝突して、分配関数自体に $a_{12} + (k-1)\epsilon_1 + (l-1)\epsilon_2 = 0$ という極を与える。注意深く考えると、このようにしてあらわれる極は

$$a_{12} = \pm(r\epsilon_1 + s\epsilon_2), \quad r, s = 1, 2, \dots, k, \quad rs \leq k, \quad (6.45)$$

であることが分かる [60]。また、極はこれで尽くされていることも示すことが出来る。この極における中間状態の共形次元は、式 (6.38) に現れる $\Delta(2a = \pm(r\epsilon_1 + s\epsilon_2)) = \Delta_{r,s}$ 、であることに注意しよう。したがって、後はこの極における分配関数の留数を計算すれば良いことになる。以下で説明するように、LMNS 積分を用いることで極 $a_{12} = -(r\epsilon_1 + s\epsilon_2)$ における留数は

$$\begin{aligned} \text{Res } Z_k(a_1, a_2) &= \text{Res } Z_k|_{(r \times s, \Phi)}(a_1, a_2) Z_{k-rs}(a_1 + r\epsilon_1, a_1 + s\epsilon_2) \\ &= c_{r,s} Z_{k-rs} \left(\frac{r\epsilon_1 - s\epsilon_2}{2}, -\frac{r\epsilon_1 - s\epsilon_2}{2} \right), \end{aligned} \quad (6.46)$$

と与えられる。ただし我々は $SU(2)$ ゲージ群を考えているので、 $a_1 = -a_2 = a$ とした。また、 $Z_k|_{(r \times s, \Phi)}(a_1, a_2)$ は、 Y_1 が $r \times s$ の四角形 Young 図で Y_2 が空のペア \vec{Y} に由来する Nekrasov 関数の項である。すると $Z_k(a, -a) = Z_k(-a, a)$ なので、 $a_{12} = (r\epsilon_1 + s\epsilon_2)$ における留数も、符号をのぞいて全く同じであることが分かる。これで分配関数のすべての極の形が決まった。また $\lim_{a \rightarrow \infty} Z_k = \delta_{k,0}$ であるから、正則項も分かっている。したがってこの二つの情報から、漸化式 (6.38) が直ちに与えられる。つまり $Z_k = \langle \Delta, k | \Delta, k \rangle$ であり、 **$SU(2)$ Yang-Mills 理論に対する AGT 予想が証明されたことになる**。このような LMNS 積分と Zamolodchikov 漸化式を比較するアプローチにより、 $N_f = 1, 2$ の場合や $\mathcal{N} = 2^*$ 理論に関しても AGT 予想は証明されている。

では最後に、(6.46) を示すことにしよう。LMNS 積分を用い、 $a_{12} = -(r\epsilon_1 + s\epsilon_2)$ における k -インスタント分配関数の留数を求めよう。このような単純極が生じるためには、 rs 個の積分が既に行われていなくてはならない。そしてさらに、その際には $a_1, a_1 + \epsilon_1, a_1 + \epsilon_2, \dots, a_1 + (r-1)\epsilon_1 + (s-1)\epsilon_2$ という極が全て選ばれていなければならない。このような極をとる組み合わせは ${}_N C_{rs}$ だけあるので、積分変数の名前を付け替えると

$$\begin{aligned} \text{Res } Z_k(a_1, a_2) &= \frac{(-Q)^{k-rs}}{(\epsilon_1\epsilon_2)^{k-rs} (k-rs)!} \oint_{C_k} \frac{dx_k}{2\pi i} \dots \oint_{C_{rs+1}} \frac{dx_{rs+1}}{2\pi i} \prod_{rs < l < m \leq k} \frac{(x_{lm})^2 (x_{lm}^2 - Q^2)}{(x_{lm}^2 - \epsilon_1^2)(x_{lm}^2 - \epsilon_2^2)} \\ &\quad \times \prod_{l=rs+1}^k \frac{1}{P_1(x_l)P_2(x_l)} \frac{(-Q)^{rs}}{(\epsilon_1\epsilon_2)^{rs} (rs)!} R_{rs}, \end{aligned} \quad (6.47)$$

と表すことが出来る。ただし

$$\begin{aligned} R_{rs} &= \text{Res} \oint_{C_{rs}} \frac{dx_{rs}}{2\pi i} \dots \oint_{C_1} \frac{dx_1}{2\pi i} \prod_{i,l} \frac{(x_{li})^2 (x_{li}^2 - Q^2)}{(x_{li}^2 - \epsilon_1^2)(x_{li}^2 - \epsilon_2^2)} \prod_{i=1}^{rs} \frac{1}{P_1(x_i)P_2(x_i)} \prod_{1 \leq i < j \leq rs} \frac{(x_{ij})^2 (x_{ij}^2 - Q^2)}{(x_{ij}^2 - \epsilon_1^2)(x_{ij}^2 - \epsilon_2^2)}, \\ &= \text{Res} \prod_{l=rs+1}^k \prod_{\rho=1}^r \prod_{\sigma=1}^s \frac{(x_l - a_{\rho\sigma})^2 ((x_l - a_{\rho\sigma})^2 - Q^2)}{((x_l - a_{\rho\sigma})^2 - \epsilon_1^2)((x_l - a_{\rho\sigma})^2 - \epsilon_2^2)} \frac{(\epsilon_1\epsilon_2)^{rs} (rs)!}{(-Q)^{rs}} \cdot Z_k|_{(r \times s, \Phi)}(a_1, a_2), \end{aligned}$$

であり、 $a_{\rho\sigma} = a_1 + (\rho - 1)\epsilon_1 + (\sigma - 1)\epsilon_2$ とおいた。すると簡単な代数計算から

$$\frac{1}{P_1(x_i)P_2(x_i)} \prod_{l=r_{s+1}}^k \prod_{\rho=1}^r \prod_{\sigma=1}^s \frac{(x_l - a_{\rho\sigma})^2 ((x_l - a_{\rho\sigma})^2 - Q^2)}{((x_l - a_{\rho\sigma})^2 - \epsilon_1^2)((x_l - a_{\rho\sigma})^2 - \epsilon_2^2)} \Big|_{a_{12} = -(r\epsilon_1 + s\epsilon_2)} = \frac{1}{P_1(x_i - r\epsilon_1)P_1(x_i - s\epsilon_2)}, \quad (6.48)$$

を示すことが出来る。つまり式 (6.47) の積分因子を R_{rs} の中に入れ、式 (6.48) で書き換えると、 $Z_k|_{(r \times s, \phi)}$ 以外の項は $Z_{k-rs}(a_1 + r\epsilon_1, a_1 + 2\epsilon_2)$ で表すことが出来るのである。このようにして (6.46) が得られる。

7 まとめと現状

本稿では、AGT 予想について出来るだけ初等的に解説することを試みました。説明の手際が良くないところや著者の不理解などが目につくかもしれませんが、この解説が少しでも皆様の参考になることを期待しています。

さて現在までのところ、AGT 対応の物理的な理解はさておき、数学的側面の理解は大分進んでいる。この不思議な対応の一つの理解の仕方は、Verma 加群の基底の取り方として、従来知られていたものよりも「良い」基底がある、と考えるアプローチである [65]。ここで言う良いという言葉の意味は、中間状態をその基底で表示して計算すると、共形ブロックが Nekrasov 関数の形で与えられる、という意味である。これまでの共形場理論の手法では、一般の共形ブロックを明示的に書き下すことは不可能であった。しかしながら AGT 予想が示唆するように共形ブロックが Nekrasov 関数に他ならないとすれば、その計算には組み合わせ論的な枠組みがあるはずである。それが先に述べた良い基底を用いることに他ならない。

このアプローチが今まで発見されていなかった理由には、AGT 対応を複雑にしている $U(1)$ 因子の存在が深く関わっている。つまり、Nekrasov 関数と共形ブロックの等価性は $U(1)$ 因子込みで成立しているので、 $U(1)$ 因子に対応した自由場共形場理論を含めて考えてはじめて、良い基底に基づくアプローチが働く点に留意しなくてはならない。ただし、この自由場で計算した共形ブロックは、 $U(1)$ 因子に他ならないことに注意する。すると AGT 関係が示唆していることは、元々考えていた Virasoro 代数に、自由場に付随した Heisenberg 代数も加えて拡張した Verma 加群の方が自然な対象だ、と言うことである。実際 V.Alba らの研究によると、この拡張された Verma 加群には Jack 多項式で表される基底があることが期待されており、これを用いて計算した共形ブロックは Nekrasov 関数の形で与えられる、と予想されている。

さらには数学者 Maulik と Okounkov によって、インスタントンモジュライ空間の同変コホモロジー上への W 代数の作用が、幾何学的表現論の枠組みで構成されたことが報告されている [66]。したがって今後、数学の方面からの AGT 予想の理解が飛躍的に進むことが期待される。

また行列模型を用いたアプローチも、AGT 予想の理解にとって重要となってきた。自己双対な Ω -背景 ($\beta = 1$) の場合は、 β -アンサンブルは通常の行列模型に他ならない。したがって、指標展開などの群論的テクニックに基づく行列模型の手法により、Dijkgraaf-Vafa 行列模型を仲立ちとして AGT 予想を証明することができる [67, 68]。ただし残念なことに、このアイデアがうまく機能するのは $\beta = 1$ の時のみであり、一般の Ω -背景への拡張には本質的な困難が従う。

しかしながら β -アンサンブル自身もとても良い性質を持つ理論であることが知られているので、AGT 予想を理解する為の良いアプローチになると期待される。Eynard と Orantin による精力的な研究により、通常の行列模型の自由エネルギーは、スペクトル曲線に対する一種のシンプレクティック不変量として理解されることが分かっている [69]。そして我々の関心である Ω -背景 $\beta \neq 1$ をスイッチ

オンすることは、スペクトル曲線に対する非可換化として理解されている [70]. さらに興味深いことに、量子化されたスペクトル曲線があらわれるのは β -アンサンブルに限った話ではない. Nekrasov と Shatashvili により、Nekrasov 自由エネルギーは可積分形の量子化と深く関係していることが明らかにされた [71]. このプログラムにおいては Seiberg-Witten 曲線を Schrödinger 作用素とする波動関数が Nekrasov 自由エネルギーを与え、Planck 定数の役割を果たすのは Ω -背景に他ならないのである. このように Ω -背景は “Seiberg-Witten 可積分系” の量子化と深く関わっており [72, 39]、そこに AGT 関係を理解する重要なヒントが隠れているものと期待される.

可積分形の量子化と共形場理論、S-デュアリティーと幾何学的 Langlands 予想、wall-crossing 現象と Hitchin 系など、AGT 予想と深く関係しているが取り上げることが出来なかった話題も多い. 今後これらの分野がより一層の結びつきをみせ、飛躍的に発展してゆくことが期待されている. そこでこれらのトピックスに関しては今後の進展を待つことにし、その縫合報告は専門家の手に委ねることにします.

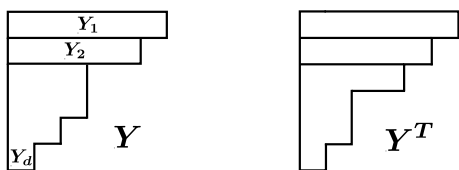
謝辞

これまで多くの方々から、議論・共同研究を通じて多くのことを学ばせて頂きました. また原稿に目を通して頂き、貴重な意見もいただきました. 本稿に学ぶところがあるとするならば、それは皆さまに負うところが多いと思います. 全ての個人名を列挙することはできませんが、改めて感謝の意を表したいとおもいます.

Appendix

A 算術をいくつか

A.1 Young 図



Young 図とは、非負整数の減少列のことである:

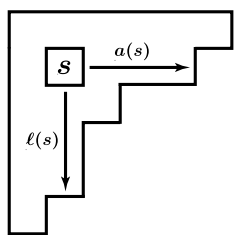
$$Y = [Y_1, Y_2, \dots, Y_d] \\ = \{Y_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid Y_1 \geq Y_2 \geq \dots \geq Y_d\}. \quad (\text{A.1})$$

これは図 34 のような階段型の図形としても表すことが出来る. Young 図 Y の転置はつぎのように定義される.

図 34: Young 図 Y とその転置 Y^T .

$$Y^T = \{Y^T_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid Y^T_j = \#\{i \mid Y_i \geq j\}\}.$$

図 34 の様に転置操作の絵を書いてみると、これは実際に Young 図形の転置を意味していることが理解できる. また、Young 図に含まれる箱の総数を $|Y|$ と書くことにする: $|Y| = \sum_{i=1}^{d(Y)} Y_i$.



各箱 $s = (i, j)$ について、Young 図の腕の長 (arm length) さと脚の長さ (leg length) という量を定義しておこう:

$$a_Y(s) = Y_i - j, \quad l_Y(s) = (Y^T)_j - i.$$

この量を図示すると、図 35 のようになる. この定義より、Young 図形に含まれない一般の座標 (i, j) に関しても、腕・脚の長さを定める方法は明らかであろう. このような記法は Nekrasov 分配関数の表示に用いられる.

図 35: Young 図と腕・脚の長さ.

A.2 Barnes 二重ガンマ関数と DOZZ 三点関数

Barnes 二重ゼータ関数を次で定める:

$$\begin{aligned}\zeta_2(s; x|\epsilon_1, \epsilon_2) &:= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{t^s e^{-tx}}{(1-x^{-\epsilon_1 t})(1-e^{-\epsilon_2 t})} \\ &= \sum_{m,n=0}^\infty (s+m\epsilon_1+n\epsilon_2)^{-s}.\end{aligned}\tag{A.2}$$

最後の行から、「二重ゼータ」という名前の意味は明らかであろう。これを用いて Barnes 二重ガンマ関数 **Barnes double Gamma function** [73] を導入する:

$$\Gamma_2(x|\epsilon_1, \epsilon_2) := \exp \frac{d}{ds} \zeta_2(s; x|\epsilon_1, \epsilon_2) \Big|_0.\tag{A.3}$$

これは無限積 $\prod (s+m\epsilon_1+n\epsilon_2)^{-1}$ をゼータ関数正則化により定義めている。この関数は様々な面白い性質を持つが、私たちの目的にとって重要なのは次の公式である:

$$\Gamma_2(x+\epsilon_1)\Gamma_2(x+\epsilon_2) = x\Gamma_2(x)\Gamma_2(x+\epsilon_1+\epsilon_2).\tag{A.4}$$

この関数の対数 $\log \Gamma_2$ は、Nekrasov 分配関数の研究に現れる $\gamma_{\epsilon_1, \epsilon_2}(x; \Lambda)$ と同じものである [23]. ただし $\gamma_{\epsilon_1, \epsilon_2}$ ではスケーリングにより Λ 依存性も含めている。したがってこの関数の性質や応用についての詳細は、インスタントン数え上げに関する優れた文献 [23] 等を参照されたい。

Liouville 理論への応用を考えて、 $\Gamma_b(x) := \Gamma_2(x|b, b^{-1})$ という特殊化を考えてみよう。この二重ガンマ関数は $x = -mb - nb^{-1}$ ($m, n \in \mathbb{N}$) に極がある有理型関数 (meromorphic function) である。弦理論ではしばしばこの関数に遭遇する。特に行列模型のスケーリング極限や、コニフォルド特異性の解析などにおいてあらわれる。また二次元スカラー QED の Schwinger による振幅計算にあらわれるのもこの因子である。ラージ N 双対性の研究において Gopakumar と Vafa は、Schwinger の結果を用いることでコニフォルドの A-モデル分配関数を $\Gamma_b(x)$ によって与えた。これらの話題に興味のある読者は [74] を参照のこと。

さてこの関数 $\Gamma_b(x)$ を用いて、 Υ -関数が定義できる

$$\Upsilon_b(x) := \frac{1}{\Gamma_b(x)\Gamma_b(Q-x)}\tag{A.5}$$

ここで Q は AGT 予想であらわれる $Q = b + 1/b$ である。今回は用いないが、この Υ -関数は次のように表すことも出来る:

$$\log \Upsilon_b(x) = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left[e^{-t} \left(\frac{Q}{2} - x \right)^2 - \frac{\sinh^2((Q/2 - x)t/2)}{\sinh(bt/2) \sinh(t/2b)} \right] \quad \text{for } 0 < \text{Re}(x) < Q.\tag{A.6}$$

Υ -関数に対しては、以下の公式が成り立っている:

$$\Upsilon_b(x) = \Upsilon_{b^{-1}}(x),\tag{A.7}$$

$$\Upsilon_b(x) = \Upsilon_b(Q-x),\tag{A.8}$$

$$\Upsilon_b(x+b) = \gamma(bx)b^{1-2bx}\Upsilon_b(x).\tag{A.9}$$

ここで小ガンマ関数は $\gamma(x) := \Gamma(x)/\Gamma(1-x)$ であり、最後の性質は

$$\Gamma_b(x+b) = \frac{\sqrt{2\pi}b^{bx-1/2}}{\Gamma(bx)}\Gamma_b(x),\tag{A.10}$$

から従う。

漸近的振る舞い

$$\Upsilon_b(x) \sim x^2 \log x + \frac{3}{2}x^2 \pm i\pi x^2 + Qx \log x + \mathcal{O}(x) \quad \text{as } \text{Im}(x) \rightarrow \pm\infty. \quad (\text{A.11})$$

この漸近的振る舞い（正確には $\log \Gamma_b$ の漸近的振る舞い）はトポロジカルストリング理論のコニフォルド特異性近傍での振る舞いを記述している。そのためこの展開形は弦理論の様々な場面で遭遇する因子である⁸。

解析性

Υ は x の整関数（entire function）で、その零点は

$$x = Q + mb + nb^{-1}, \quad -mb - nb^{-1} \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad (\text{A.12})$$

にある。

境界 Liouville 理論などにおいては、二重サイン関数

$$S_b(x) := \frac{\Gamma_b(x)}{\Gamma_b(Q-x)}, \quad (\text{A.13})$$

も重要となるが、ここでは詳しく述べない。興味のある読者は [75, 76] を参照のこと。

以上で数学の準備が整ったので、いよいよ Dorn、Otto、Zamolodchikov そして Zamolodchikov により発見された Liouville 三点関数を書き下すことができる：

DOZZ 三点関数

$$C_{\text{DOZZ}}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \left[\pi \mu \gamma (b^2) b^{2-2b^2} \right]^{\frac{Q-\sum_i \alpha_i}{b}} \times \frac{\Upsilon_0 \Upsilon_b(2\alpha_1) \Upsilon_b(2\alpha_2) \Upsilon_b(2\alpha_3)}{\Upsilon_b(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - Q) \Upsilon_b(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) \Upsilon_b(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1) \Upsilon_b(\alpha_3 + \alpha_1 - \alpha_2)}. \quad (\text{A.14})$$

ただし

$$\Upsilon_0 := \text{Res} \frac{d\Upsilon_b(x)}{dx}, \quad (\text{A.15})$$

という量を導入した。

参考文献

- [1] A. A. Belavin, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, Nucl. Phys. B **241**, 333 (1984).
- [2] N. Seiberg and E. Witten, Nucl. Phys. B **426**, 19 (1994) [arXiv:hep-th/9407087].
- [3] N. A. Nekrasov, Adv. Theor. Math. Phys. **7**, 831 (2004) [arXiv:hep-th/0206161].
- [4] L. F. Alday, D. Gaiotto and Y. Tachikawa, arXiv:0906.3219 [hep-th].
- [5] A. B. Zamolodchikov, Al. B. Zamolodchikov, Sov. Sci. Rev. A. Phys, Vol. 10, 269 (1989).
- [6] P. di Francesco, P. Mathieu and D. Senechal, Conformal Field Theory, Springer (1997)
- [7] J. Polchinski, “String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string,” Cambridge, UK: Univ. Pr. (1998) (J. ポルチンスキー著 伊藤 克司・小竹 悟・松尾 泰 (訳), ストリング理論, 第 1,2 巻, シュプリンガーフェアラーク東京 (2005,2006))

⁸また $\mathcal{N} = 1$ ゲージ理論の幾何工学 (geometric engineering) を通じ、ゲージ理論の有効グルーボールスーパーポテンシャルとも関係する。実際この展開の初項は有名な Veneziano-Yankielowicz スーパーポテンシャル $W_{VY} = NS \log S$ の弦理論での実現そのものになっている。

- [8] 山田 泰彦, 共形場理論入門 (数理物理シリーズ), 培風館 (2006)
- [9] N. Wyllard, *JHEP* **0911**, 002 (2009) [arXiv:0907.2189 [hep-th]].
- [10] D. Gaiotto, arXiv:0908.0307 [hep-th].
- [11] N. Drukker, D. R. Morrison and T. Okuda, *JHEP* **0909**, 031 (2009) [arXiv:0907.2593 [hep-th]].
- [12] L. F. Alday, D. Gaiotto, S. Gukov, Y. Tachikawa and H. Verlinde, *JHEP* **1001**, 113 (2010) [arXiv:0909.0945 [hep-th]].
- [13] R. Dijkgraaf and C. Vafa, arXiv:0909.2453 [hep-th].
- [14] Y. Tachikawa, arXiv:1108.5632 [hep-th].
- [15] A. Mironov, S. Mironov, A. Morozov and A. Morozov, arXiv:0908.2064 [hep-th].
- [16] A. Marshakov, A. Mironov and A. Morozov, arXiv:0907.3946 [hep-th].
- [17] J. Teschner, *Class. Quant. Grav.* **18**, R153 (2001) [arXiv:hep-th/0104158].
- [18] Y. Nakayama, *Int. J. Mod. Phys. A* **19**, 2771 (2004) [arXiv:hep-th/0402009].
- [19] V. A. Fateev and A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B* **280**, 644 (1987).
- [20] V. A. Fateev and S. L. Lukyanov, *Int. J. Mod. Phys. A* **3**, 507 (1988).
- [21] A. B. Zamolodchikov, *Theor. Math. Phys.* **65**, 1205 (1985) [*Teor. Mat. Fiz.* **65**, 347 (1985)].
- [22] A. Mironov and A. Morozov, *Nucl. Phys. B* **825**, 1 (2010) [arXiv:0908.2569 [hep-th]].
- [23] N. Nekrasov and A. Okounkov, arXiv:hep-th/0306238.
- [24] 伊藤克司, “ $\mathcal{N} = 2$ 超対称ゲージ理論とインスタントン,” 2004 年度原子核三者若手夏の学校 講義録素粒子論研究, **116(4)**, 5 (2008).
- [25] A. Iqbal and A. K. Kashani-Poor, *Adv. Theor. Math. Phys.* **7**, 457 (2004) [arXiv:hep-th/0212279],
M. Aganagic, A. Klemm, M. Marino and C. Vafa, *Commun. Math. Phys.* **254**, 425 (2005) [arXiv:hep-th/0305132],
T. Eguchi and H. Kanno, *JHEP* **0312**, 006 (2003) [arXiv:hep-th/0310235],
T. J. Hollowood, A. Iqbal and C. Vafa, *JHEP* **0803**, 069 (2008) [arXiv:hep-th/0310272],
H. Awata and H. Kanno, *JHEP* **0505**, 039 (2005) [arXiv:hep-th/0502061] ,
A. Iqbal, C. Kozcaz and C. Vafa, *JHEP* **0910**, 069 (2009) [arXiv:hep-th/0701156],
M. Taki, *JHEP* **0803**, 048 (2008) [arXiv:0710.1776 [hep-th]].
- [26] H. Nakajima, *Univ. Lect. Ser.* **18**, AMS (1999).
- [27] E. Witten, *Nucl. Phys. B* **500**, 3 (1997) [arXiv:hep-th/9703166].
- [28] D. Gaiotto, arXiv:0904.2715 [hep-th].
- [29] D. Gaiotto, G. W. Moore and A. Neitzke, arXiv:0907.3987 [hep-th].
- [30] V. Pestun, arXiv:0712.2824 [hep-th].
- [31] N. Drukker and F. Passerini, arXiv:1012.1352 [hep-th].
- [32] V. A. Fateev and A. V. Litvinov, *JHEP* **0711**, 002 (2007) [arXiv:0709.3806 [hep-th]].
- [33] S. Kanno, Y. Matsuo, S. Shiba and Y. Tachikawa, arXiv:0911.4787 [hep-th].
- [34] L. Hollands, C. A. Keller and J. Song, *JHEP* **1103**, 053 (2011) [arXiv:1012.4468 [hep-th]].
- [35] A. Marshakov, A. Mironov and A. Morozov, *Phys. Lett. B* **682**, 125 (2009) [arXiv:0909.2052 [hep-th]].
- [36] M. Matone, *Phys. Lett. B* **357**, 342 (1995) [arXiv:hep-th/9506102].
- [37] M. Matone, *Phys. Rev. D* **53**, 7354 (1996) [arXiv:hep-th/9506181].
- [38] J. Sonnenschein, S. Theisen and S. Yankielowicz, *Phys. Lett. B* **367**, 145 (1996) [arXiv:hep-th/9510129].
- [39] K. Maruyoshi and M. Taki, *Nucl. Phys. B* **841**, 388 (2010) [arXiv:1006.4505 [hep-th]].
- [40] M. Taki, arXiv:0912.4789 [hep-th].
- [41] A. Kapustin, *Phys. Rev. D* **74**, 025005 (2006) [arXiv:hep-th/0501015].
- [42] D. Gaiotto, G. W. Moore and A. Neitzke, arXiv:1006.0146 [hep-th].
- [43] S. Gukov and E. Witten, arXiv:hep-th/0612073.
- [44] C. Kozcaz, S. Pasquetti and N. Wyllard, *JHEP* **1008**, 042 (2010) [arXiv:1004.2025 [hep-th]].
- [45] T. Dimofte, S. Gukov and L. Hollands, arXiv:1006.0977 [hep-th].
- [46] M. Taki, arXiv:1007.2524 [hep-th].
- [47] H. Awata, H. Fuji, H. Kanno, M. Manabe and Y. Yamada, arXiv:1008.0574 [hep-th].
- [48] B. Ponsot and J. Teschner, arXiv:hep-th/9911110.
- [49] N. Drukker, J. Gomis, T. Okuda and J. Teschner, *JHEP* **1002**, 057 (2010) [arXiv:0909.1105 [hep-th]].
- [50] N. Drukker, D. Gaiotto and J. Gomis, arXiv:1003.1112 [hep-th].
- [51] J. Gomis and B. Le Floch, arXiv:1008.4139 [hep-th].

- [52] A. Mironov, A. Morozov and S. Shakirov, *Int. J. Mod. Phys. A* **25**, 3173 (2010) [arXiv:1001.0563 [hep-th]].
- [53] A. Mironov, A. Morozov and A. Morozov, *Nucl. Phys. B* **843**, 534 (2011) [arXiv:1003.5752 [hep-th]].
- [54] H. Itoyama and T. Oota, *Nucl. Phys. B* **838**, 298 (2010) [arXiv:1003.2929 [hep-th]].
- [55] T. Eguchi and K. Maruyoshi, *JHEP* **1002**, 022 (2010) [arXiv:0911.4797 [hep-th]].
- [56] H. Itoyama, K. Maruyoshi and T. Oota, *Prog. Theor. Phys.* **123**, 957 (2010) [arXiv:0911.4244 [hep-th]].
- [57] A. Mironov, A. Morozov and S. Shakirov, *JHEP* **1002**, 030 (2010) [arXiv:0911.5721 [hep-th]].
- [58] M. Marino, *Rev. Mod. Phys.* **77**, 675 (2005) [arXiv:hep-th/0406005],
M. Marino, arXiv:hep-th/0410165,
A. Neitzke and C. Vafa, arXiv:hep-th/0410178.
- [59] A. B. Zamolodchikov, *Commun. Math. Phys.* **96**, 419 (1984).
- [60] V. A. Fateev and A. V. Litvinov, *JHEP* **1002**, 014 (2010) [arXiv:0912.0504 [hep-th]].
- [61] L. Hadasz, Z. Jaskolski and P. Suchanek, *JHEP* **1006**, 046 (2010) [arXiv:1004.1841 [hep-th]].
- [62] R. Poghossian, *JHEP* **0912**, 038 (2009) [arXiv:0909.3412 [hep-th]].
- [63] A. Losev, N. Nekrasov and S. L. Shatashvili, *Nucl. Phys. B* **534**, 549 (1998) [arXiv:hep-th/9711108].
- [64] G. W. Moore, N. Nekrasov and S. Shatashvili, *Commun. Math. Phys.* **209**, 97 (2000) [arXiv:hep-th/9712241].
- [65] V. A. Alba, V. A. Fateev, A. V. Litvinov and G. M. Tarnopolsky, arXiv:1012.1312 [hep-th].
- [66] D. Maulik and A. Okounkov, to appear?
- [67] A. Mironov, A. Morozov and S. Shakirov, arXiv:1011.5629 [hep-th].
- [68] A. Mironov, A. Morozov and S. Shakirov, *JHEP* **1102**, 067 (2011) [arXiv:1012.3137 [hep-th]].
- [69] B. Eynard and N. Orantin, [arXiv: math-ph/0702045].
- [70] B. Eynard and O. Marchal, *JHEP* **0903**, 094 (2009) [arXiv:0809.3367[math-ph]].
- [71] N. A. Nekrasov and S. L. Shatashvili, arXiv:0908.4052 [hep-th].
- [72] A. Mironov and A. Morozov, *JHEP* **1004**, 040 (2010) [arXiv:0910.5670 [hep-th]].
- [73] E.W. Barnes, *Phil. Trans. Roy. Soc.* **A196**, 265 (1901).
- [74] 菅野浩明, “位相的弦理論の分配関数と数え上げ,” 2006 年度原子核三者若手夏の学校 講義録, 素粒子論研究, **115(5)**, 209 (2007).
- [75] B. Ponsot, *Int. J. Mod. Phys. A* **19S2**, 311 (2004) [arXiv:hep-th/0301193].
- [76] 黒川信重, 小川信也, “多重三角関数論講義,” 日本評論社 (2010).