弦の場の理論における多重ブレイン解と巻き付き数

京都大学
小路田　俊子
With 畑　浩之

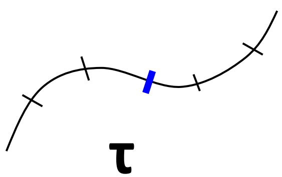
自由場

- 点の場の理論

世界線のDiffeo $\longrightarrow Q_B|\text{phys}\rangle = 0 \quad Q_B = cH = c\left(p^2 + m^2\right)$

時空座標を引数に持つ関数 $\phi(x)$

場のEOMとして条件を再現



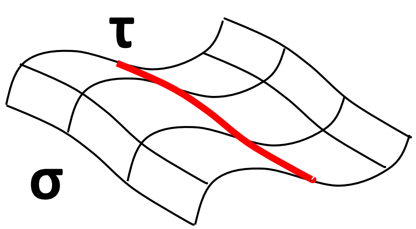
$$\longrightarrow S = \frac{1}{2}\int d^4x\, \phi(x) Q_B\, \phi(x)$$

- 弦の場の理論

世界面のDiffeo $\longrightarrow Q_B|\text{phys}\rangle = 0 \quad Q_B = \int c\left(T^{\text{mat}} + \frac{1}{2}T^{\text{gh}}\right)$

弦座標を引数に持つ汎関数 $\Psi[X(\sigma), b(\sigma), c(\sigma)]$

場のEOMとして条件を再現



$$\longrightarrow S = \frac{1}{2}\int DX\ \ \Psi[X(\sigma)] Q_B \Psi[X(\sigma)]$$

Chern-Simons理論とCSFTの類似性

Chern-Simons理論

$$S=\frac{k}{2\pi}\int_M \mathrm{tr}\left[\frac{1}{2}A\wedge dA+\frac{1}{3}A\wedge A\wedge A\right]$$

$$d \qquad \wedge \qquad \int_M \mathrm{tr}$$

$$\Updownarrow$$

$$Q_B \qquad * \qquad \int$$

CSFT

$$S=\frac{1}{g_o^2}\int\left[\frac{1}{2}\Psi*Q_B\Psi+\frac{1}{3}\Psi*\Psi*\Psi\right]$$

$$d^2=0$$

$$d(A\wedge B)=A\wedge dB+(-1)^A dA\wedge B$$

$$(A\wedge B)\wedge C=A\wedge(B\wedge C)$$

$$\mathrm{tr}\,A\wedge B=(-1)^{AB}\,\mathrm{tr}\,B\wedge A$$

$$\int_M dA=0$$

$$Q_B^2=0$$

$$Q_B(\Psi*\Phi)=(Q_B\Psi)*\Phi+(-1)^{\Psi}\Psi*Q_B\Phi$$

$$(\Psi*\Phi)*\Sigma=\Psi*(\Phi*\Sigma)$$

$$\int\Psi*\Phi=(-1)^{\Psi\Phi}\int\Phi*\Psi$$

$$\int Q_B\Psi=0$$

Chern-Simons理論とCSFTの類似性

作用の構造が全く同じ

Chern-Simons理論

運動方程式 : $dA + A \wedge A = 0$

微小ゲージ変換 : $\delta_\lambda A = dA + A \wedge \lambda - \lambda \wedge A \rightarrow \delta_\lambda S = 0$

有限ゲージ変換 : $A \rightarrow g(d + A)g^{-1} \quad S \rightarrow S + \boxed{\frac{k}{24\pi^2}\int (gdg^{-1})^3}$

Winding数

CSFT

運動方程式 : $Q_B\Psi + \Psi * \Psi = 0$

微小ゲージ変換 : $\delta_\Lambda \Psi = Q_B\Lambda + \Psi * \Lambda - \Lambda * \Psi \rightarrow \delta_\Lambda S = 0$

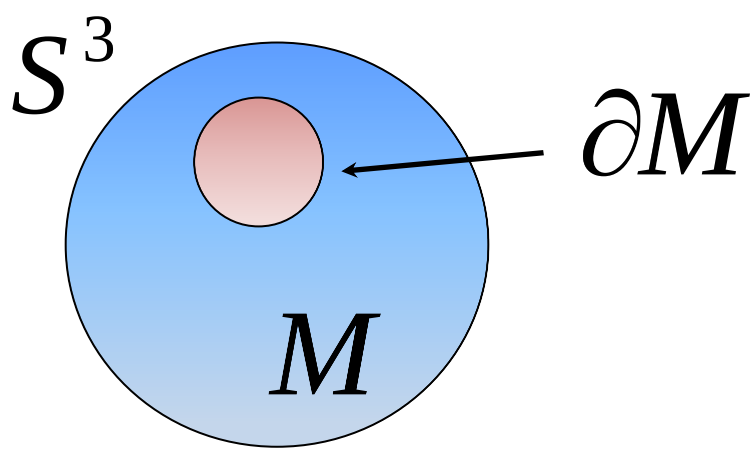
有限ゲージ変換 : $\Psi \rightarrow U(Q_B + \Psi)U^{-1} \quad S \rightarrow S + \frac{\pi^2}{3}\int (UQ_BU^{-1})^3$

Winding 数

$$g = e^{i\phi(x)\tau} \quad \tau: \text{パウリ行列}$$

$$\int_M (gdg^{-1})^3 = \int_M d(\cdots\phi(x)\cdots)$$

$$= \int_{\partial M} (\cdots\phi(x)\cdots) \in \text{整数}$$



弦の場の理論におけるWinding数

$$\mathcal{N} = \frac{\pi^2}{3}\int (UQ_B U^{-1})^3 = \int Q_B \mathcal{A} = \int_{\partial} \mathcal{A} = \text{整数}$$

- 多様体の概念無し。
- Uはどんな群？
- コンパクトとは？Boundaryとは？

$\mathcal{N}$ はエネルギーに比例するので、ブレインの枚数と
$\mathcal{N}$は対応している。
巻きつきを変化させる構造＝古典解（弦の真空構造）

K,B,c代数

$$[K, B] = 0 \quad \{B, c\} = 1 \quad B^2 = c^2 = 0$$
$$Q_B K = 0 \quad Q_B B = K \quad Q_B c = cKc$$

[Y.Okawa]

$$|K\rangle \equiv \frac{\pi}{2}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{dz}{2\pi i}T(z)|1\rangle$$

$$|B\rangle \equiv \frac{\pi}{2}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{dz}{2\pi i}b(z)|1\rangle \qquad |c\rangle \equiv \frac{2}{\pi}c(0)|1\rangle$$

弦の場はこのK,B,cで書かれる。

Ex) タキオン凝縮解:　$\Psi = cK\frac{1}{G}Bc(1-G) \quad G = \frac{K}{1+K}$

これまでに分かったこと

- 任意の解を全微分形に書いた $\frac{\pi^2}{3}\int (UQ_BU^{-1})^3 = \int Q_B\mathcal{A}$

  ←ところが･･･　単純に計算すると$\int Q_B{}^{\forall}(\cdots) = 0$!
- 既知の古典解(タキオン凝縮解)について計算したところ、$K = 0$にsingularityが存在。これを正則化 $K \to K + \varepsilon$ することで正しい結果が得られた。
- (Winding数の加法性について)

今日は

- $K = 0, \infty$ がWinding数に値を持たせる

  $\to K = \infty$の正則化与える
- $K = 0, \infty$だけを種に多重ブレイン解を構成する方法を提案

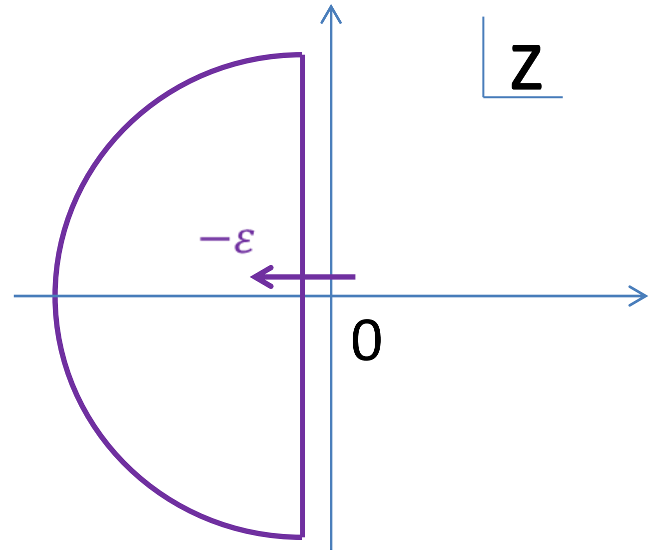
  → パッチ？？

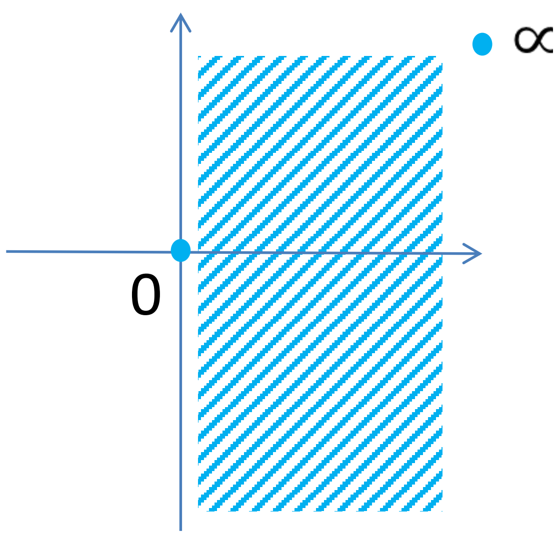
村田Schnablの多重ブレイン解

$$\mathcal{N} = \frac{1}{24\pi i}\oint \frac{dz}{2\pi i}\,\frac{d}{dz}\ln G(z)$$

[Murata & Schnabl]

$K \to K-\varepsilon$ 正則化に対応する経路
相関関数が定義されない領域





$C_R = \{0, \infty, Re(z) > 0\}$

$K \to K+\varepsilon$ で経路を定義すると

$\mathcal{N} =$ #(poles of G(z) in C_R)
$\quad -\#(zeros\ of\ G(z)$ in $C_R)$

$K = 0, \infty$ がWinding数のタネに

無限遠の正則化

$ex)\ \ G = 1 + z$ ←$\mathcal{N}$=1を出す

$$\mathcal{N} = \int Q_B\, \mathcal{A}\, [G]$$

$$= \begin{cases} = 0 & \text{(正則化無し)} \\ \neq 1 & \left(\frac{1}{K} \to \frac{1}{K} + \epsilon\right) \\ = 1 & \left(K \to \frac{K}{1+\varepsilon K}, B \to \frac{B}{(1+\varepsilon K)^2}, c \to c(1+\varepsilon K)^2 Bc\right) \end{cases}$$

この正則化の意味は？

増田変換*

（＊Private talk）

KBc代数

(反)交換関係　$\{B, c\} = 1$　$B^2 = c^2 = 0$　$[B, K] = 0$

BRST代数　$Q_B K = 0$　$Q_B B = K$　$Q_B c = cKc$

増田変換
～KBc代数を保つ変換～

$$K \to g(K) \quad B \to \frac{g(K)}{K} B \quad c \to c \frac{K}{g(K)} Bc$$

K=∞の正則化

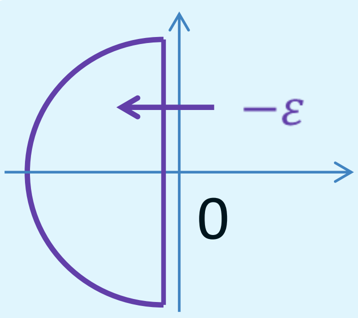
$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
(K, B, c) \arrow[r, "\text{Well known}", "\text{正則化}"'] \arrow[d, "K \to {}^{1}/_{K}"', "\text{増田変換}"] & (K_\varepsilon, B_\varepsilon, c_\varepsilon) = (K + \varepsilon, B, c) \arrow[d] \\
(\tilde{K}, \tilde{B}, \tilde{c}) \arrow[r, "\text{un known}", "\text{正則化}"'] & (\tilde{K}_\varepsilon, \tilde{B}_\varepsilon, \tilde{c}_\varepsilon)
\end{tikzcd}$$

- $(\tilde{K}, \tilde{B}, \tilde{c})$の正則化を$(K_\varepsilon, B_\varepsilon, c_\varepsilon)$の増田変換で定義する
- 無限遠に対する$K \to K + \varepsilon$ 正則化
- KだけでなくB,cも変換を受ける

ナイーブには$\mathcal{N}$=0, ±1, ±2しか無い

実は

$$\mathcal{N} = \#(\text{poles of G(z) in } C_R) - \#(zeros\ of\ G(z)\ \text{in}\ C_R) \quad + Anomalous\ term$$



C.f) 村田＆Schnablは
この項を落とすために
経路を$K \to K-\varepsilon$に

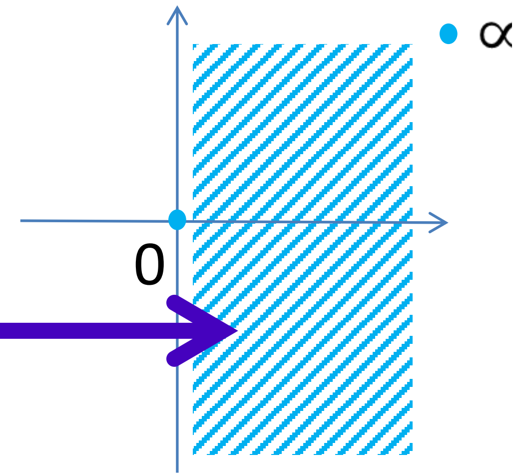
$K = 0, \infty$ がsimple pole (zero) で無い時 ➡ Anomalous term ≠ 0

$$ex) \quad G(K) = \frac{z(z+1)^2}{(z+2)} \to z^2 \ \ (z \sim \infty)$$

$K = 0, \infty$ は$\mathcal{N}$に±1ずつしか寄与できない ➡ $\mathcal{N}$=0, ±1, ±2　のみ

$\mathcal{N}$>3 のブレイン解の構成

$$\mathcal{N} = \#(\text{poles of } G(z) \text{ in } C_R) \\ -\#(zeros\ of\ G(z) \text{ in } C_R)$$



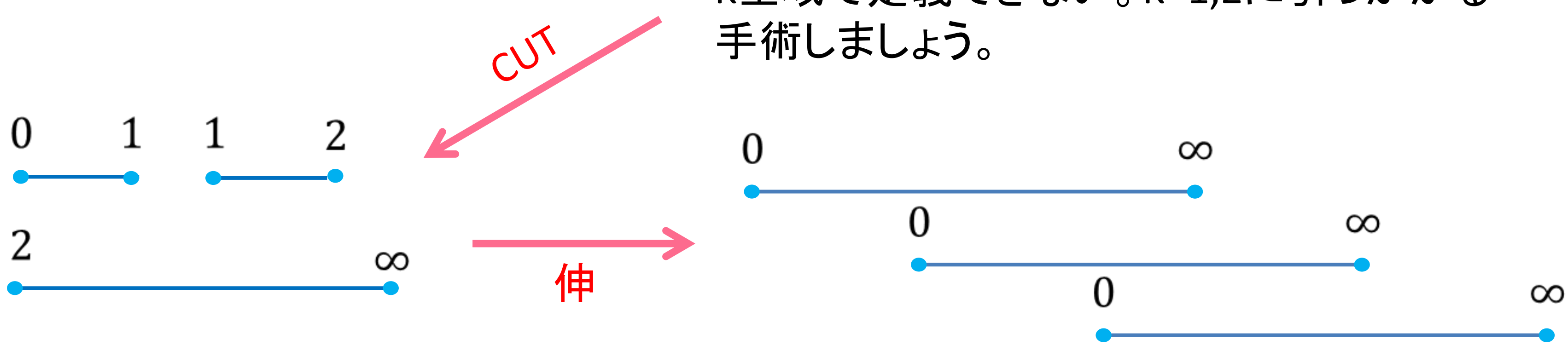
$C_R = \{0, \infty, Re(z) > 0\}$

相関関数が定義されない領域

を、利用できるようにしよう。

$$ex)\ \ G(K) = \frac{(K+1)^3}{(K-1)(K-2)}$$

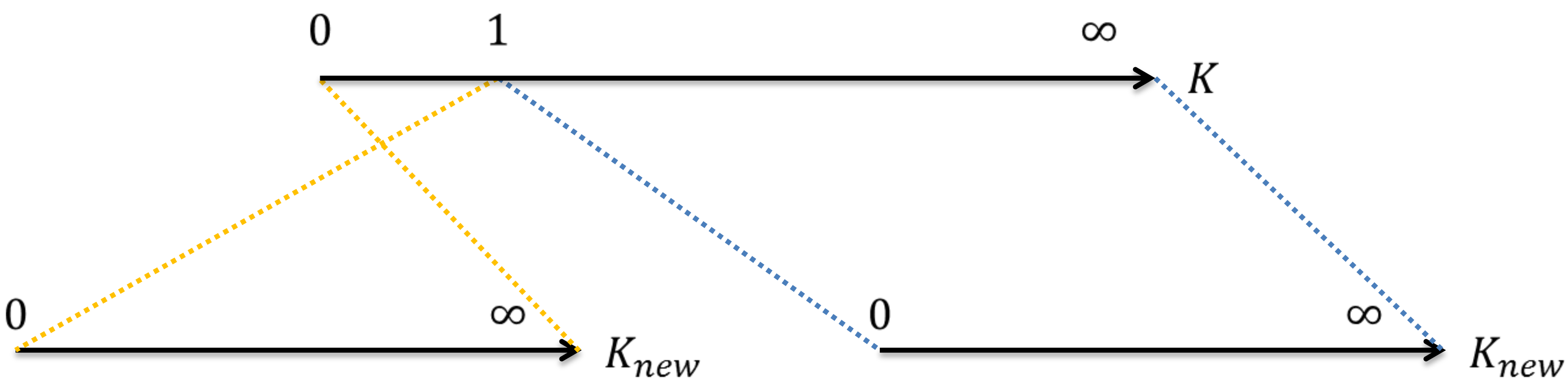
K全域で定義できない。K=1,2に引っかかる
手術しましょう。



手術の具体的中身

$$K \rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{1+K_{new}} & (0 \leq K \leq 1) \\ 1+K_{new} & (1 \leq K \leq \infty) \end{cases}$$

増田変換



$$\mathcal{N}[G(K)] = \mathcal{N}[G(K_{new})] + \mathcal{N}[G(K_{new})]$$

一般に領域は複数に分かれる。その場合もそれぞれをパッチにして貼りあわせる。

例　$\mathcal{N}$=3 ブレイン解

$$G = \frac{(K+1)^3}{K(1-K)} \qquad \cdots \qquad \#(poles\ of\ G) - \#(zeros\ of\ G) = 3 - 0$$

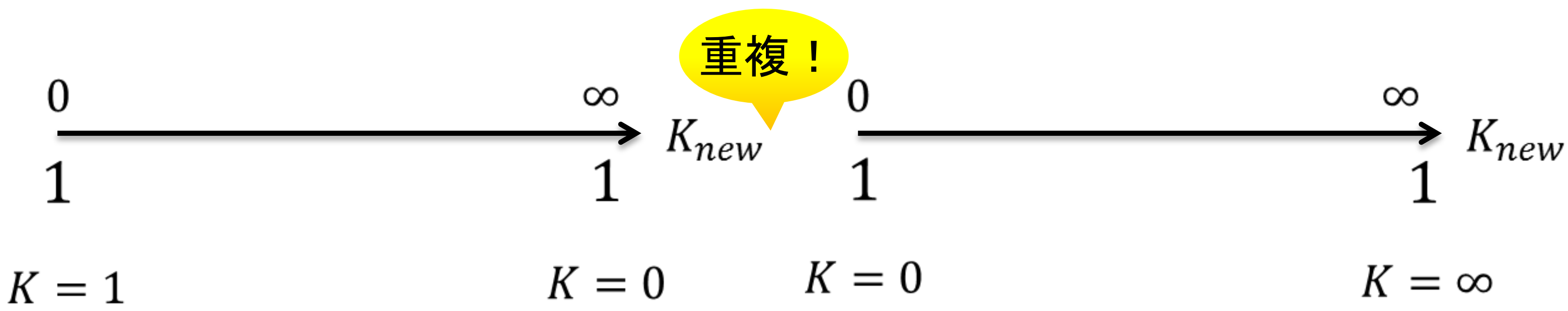
$K = 1$ のポールは具合が悪い

$\frac{1}{K-1} = \int_0^\infty dt\, e^{-t(K-1)}$　　$0 < K < 1$で定義されてない

$$G \;\to\; \begin{cases} \dfrac{(2+K_{new})^3}{K_{new}(1+K_{new})} & (0 \le K \le 1) \\ -\dfrac{(2+K_{new})^3}{K_{new}(1+K_{new})} & (1 \le K \le \infty) \end{cases}$$

K_{new}は$[0,\infty)$ で定義されている

〃



重複しないように数えれば$\mathcal{N}$ =3

- どんなGでも分割手術して定義すれば複素平面での議論が成り立つので、任意の多重ブレイン解を得る。

- Consistency check
  N=0,±1,±2の解(Kの全域で定義されている)に対して分割手術しても、同じ答えになる。

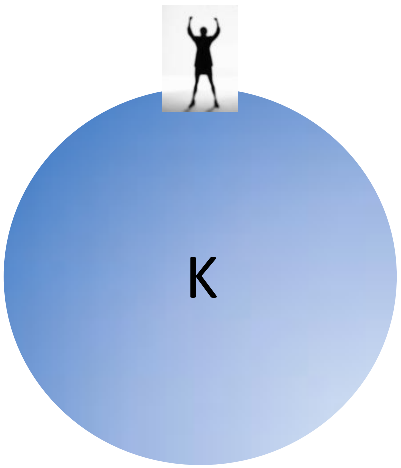
- さらに任意幅の相関関数が$K \to \frac{1}{K}$で不変
  （証拠多）（$\mathcal{N}$はこれの重みつき和）
  K=0,∞が同等であるというのは任意の相関関数のレベルで言える。弦の場の理論の基本性質。

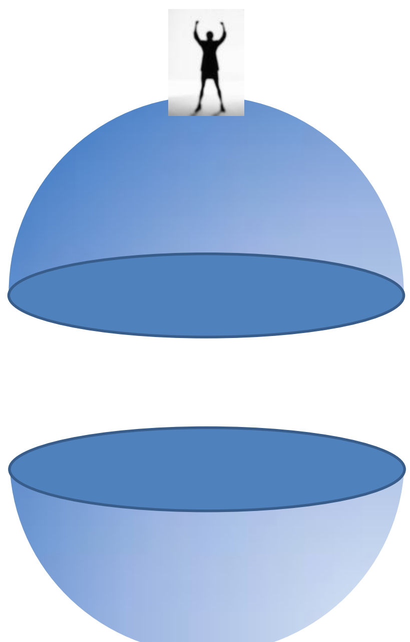
  （残念ながら分割手術に関してはそこまで強いことは言えない。現在研究中。)

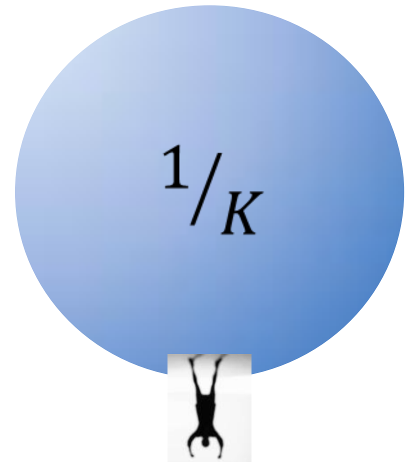
KBc多様体？

原点と無限遠（境界）の差としてWinding数が与えられる構造が出てきた

（位相的な量は）
北極と南極を入れ替えても不変







パッチが存在する時、
位相的量が現れる。
モノポール、Winding数・・・

$$\begin{cases} \dfrac{K_{new}}{1+K_{new}} & (0 \leq K \leq 1) \\ 1+K_{new} & (1 \leq K \leq \infty) \end{cases}$$

まとめ

- 弦の場の理論を位相的に見るという提案
- 多様体の代わりになる概念がKで与えられるのではないかということを見た。

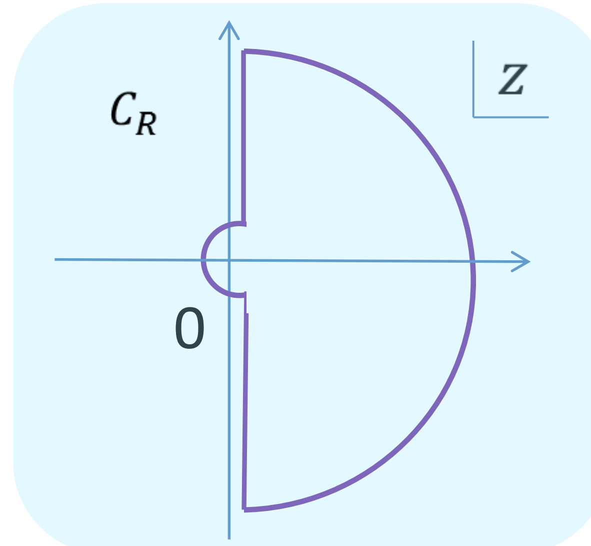
  K=0,∞が効く、パッチの導入

これから

- （強い意味の）運動方程式を調べる
- 表面積分という演算を構成
- ∞遠の正則化の理解が完全ではないこと

Back up

$\mathcal{N}$ =#(poles of G)-#(zeros of G)の証明（整数Part）



$$\mathcal{N} = \int_0^\infty ds\, e^{-\varepsilon s} s \oint \frac{dz}{2\pi i}\, e^{sz} \frac{z^2 G(z)'}{G(z)}$$

$$= \sum_{Re(z_a)<\varepsilon} \int_0^\infty ds\, e^{-\varepsilon s} s \oint_{z=z_a} \frac{dz}{2\pi i} \frac{n_a z_a^2}{z - z_a} e^{sz}$$

$$= \sum_{Re(z_a)<\varepsilon} n_a z_a^2 \int_0^\infty ds\, e^{(z_a-\varepsilon)s} s = \sum_{\substack{Re(z_a)<\varepsilon \\ z_a \neq 0}} n_a \int_0^\infty d(z_a s)\, e^{z_a s}\, z_a s$$

$$= \sum_{\substack{Re(z_a)<\varepsilon \\ z_a \neq 0}} n_a = -\left(n_0 + n_\infty + \sum_{Re(z_a)>\varepsilon} n_a \right)$$

$= \#$(poles of G(z) in C_R)$-\#(zeros\ of\ G(z)$ in $C_R)$