Non-Abelian Localization for Supersymmetric Yang-Mills-Chern-Simons Theories on Seifert Manifold

太田 和俊 (明治学院大)

arXiv:1205.0046

吉田 豊 氏(KEK) との共同研究

Introduction

- 局所化定理(Localization theorem, Duistermaat-Heckmanの公式, 固定点定理)

$$\int_{\mathcal{M}} d\mu\, f(x) = \sum_{p\in\mathcal{M}^*} \tilde{f}(p)$$

- $\mathcal{M}$: Symplectic manifold

- $\mathcal{M}^*$: 対称性(isometry)に対する固定点集合

Symplectic ⇒ symplectic 2-form ω ⇒ $d\mu \sim \dfrac{1}{n!}\omega^n$ ⇒ “topological”

局所化定理の応用

- 指数定理, 超対称指数(Witten index)
- Topological string (mirror symmetry)
- BPSソリトンのmoduli空間の体積(Nekrasovの公式)
- 超対称ゲージ理論における分配関数またはWilsonループの厳密な計算

  (4d YM on S^4 [Pestun (2007)], 3d CS on S^3 [Kapustin-Willett-Yaakov (2010)])

(超対称)場の理論

無限自由度(経路積分)

↓ 局所化(Localization)

(可積分)統計系

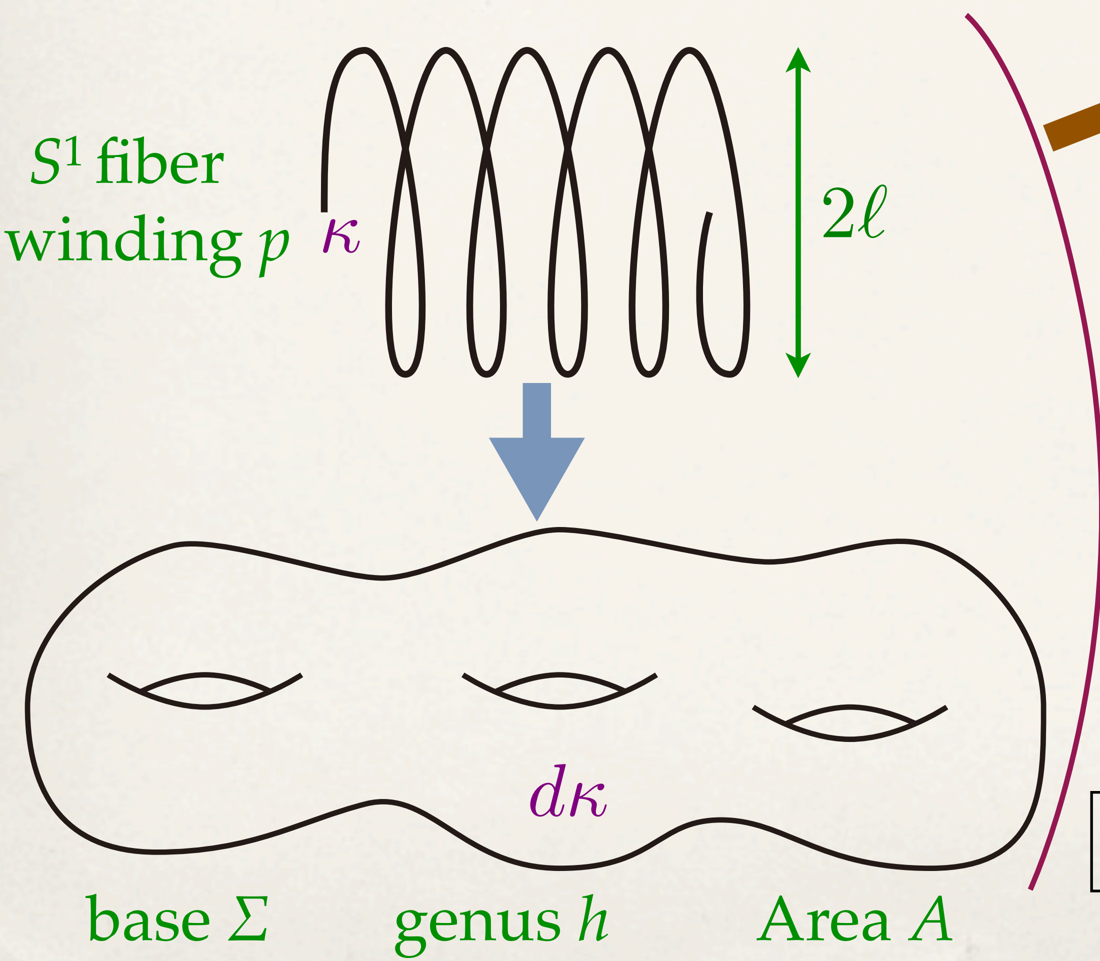
有限自由度(多重積分,離散和)

今日の話

$U(1)$ isometryを持つ3次元のSeifert多様体上で超対称Yang-Mills-Chern-Simons理論を考え、局所化定理を用いて分配関数等を厳密に計算する

Seifert多様体

Seifert多様体 = genus hを持つRiemann面Σ上のS^1 fiber (winding p)



Seifert manifold M

$d\mathrm{Vol} \sim \kappa \wedge d\kappa$

contact form

<u>*e.g.*</u>

- S^3 : p=1, h=0
- $S^1 \times \Sigma$: p=0, $\forall h$
- Lens space($S^3/\mathbf{Z}_p$) : $\forall p$, h=0

etc.

Seifert多様体は$U(1)$ isometryを持つ

超対称性と同変コホモロジー

- 3d $\mathcal{N}$=2 gauge field

$$\underbrace{A = A_z dz + A_{\bar{z}} d\bar{z}}_{} + A_\kappa \kappa \longrightarrow \Phi = A_\kappa + i\sigma$$

Riemann面上のゲージ場　fiber方向成分　adjoint scalar

SUSY変換

supercharge の適当な線形結合と場の再定義 (topological twist)

$$\boxed{\begin{aligned} &QA = \lambda, \quad Q\lambda = -i(\mathcal{L}_V - \delta_\Phi)A, \\ &Q\Phi = 0 \end{aligned}}$$

$\mathcal{L}_V$: Isometry方向のLie微分

δ_Φ : Φをパラメータとするゲージ変換

BRST変換 (同変コホモロジー)

曲がった空間M上でも超対称電荷をうまく選ぶ事で、同変コホモロジーを構成できる

$$Q^2 \sim (\text{Poincare sym}) + (\text{gauge sym}) + (\text{R-sym}) + \cdots$$

on flat space

- Kapustin-Willett-Yaakovの選び方

$$Q^2 = 0 \qquad \text{on } S^3$$

- 我々の選び方 [Källén (2011)]

$$Q^2 = -i(\mathcal{L}_V - \delta_G) \quad \text{on Seifert多様体}$$

空間Mのisometry　　ゲージ変換

Isometryとゲージ変換で不変な量 $\Rightarrow$ 同変コホモロジー

$\Rightarrow$ 厳密に計算できる"物理量"

Cohomological Operators

- 3d supersymmetric CS action

$$S_{\mathrm{SCS}} = \frac{k}{4\pi}\int_M \mathrm{Tr}\left[A\wedge dA - \frac{2i}{3}A\wedge A\wedge A\right] + \frac{k}{4\pi}\int_M d^3x\sqrt{g}\,\mathrm{Tr}\left[2D\sigma - \tilde{\lambda}\lambda\right]$$

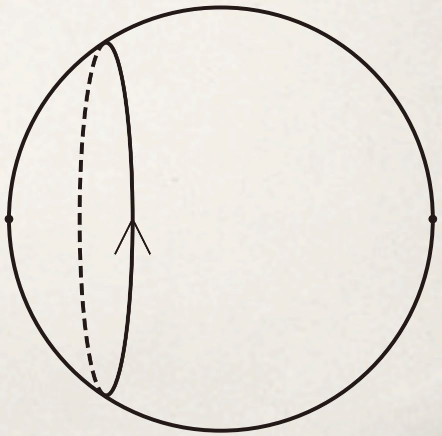
$$QS_{\mathrm{SCS}} = 0 \quad \text{but} \quad S_{\mathrm{SCS}} \neq Q(\text{something})$$

- Supersymmetric Wilson loop

$$W(C) \equiv \mathrm{Tr}_R\,\mathcal{P}\exp i\oint_C \Phi\kappa = \mathrm{Tr}_R\,\mathcal{P}\exp i\oint_C (A_\kappa + i\sigma)\kappa$$

C : fiber方向のloop

$$QW(C) = 0 \quad \text{but} \quad W(C) \neq Q(\text{something})$$



Localization

- 同変コホモロジーの観点からは、*Q*-closedなものに*Q*-exactなものを付け加えても期待値は変わらない

- 超対称YM作用は一般に*Q*-exactなものとしてかける

$$S_{\mathrm{SYM}} = \frac{1}{g^2} Q(\mathrm{something})$$ ⇒ 分配関数や期待値がcouplingによらない

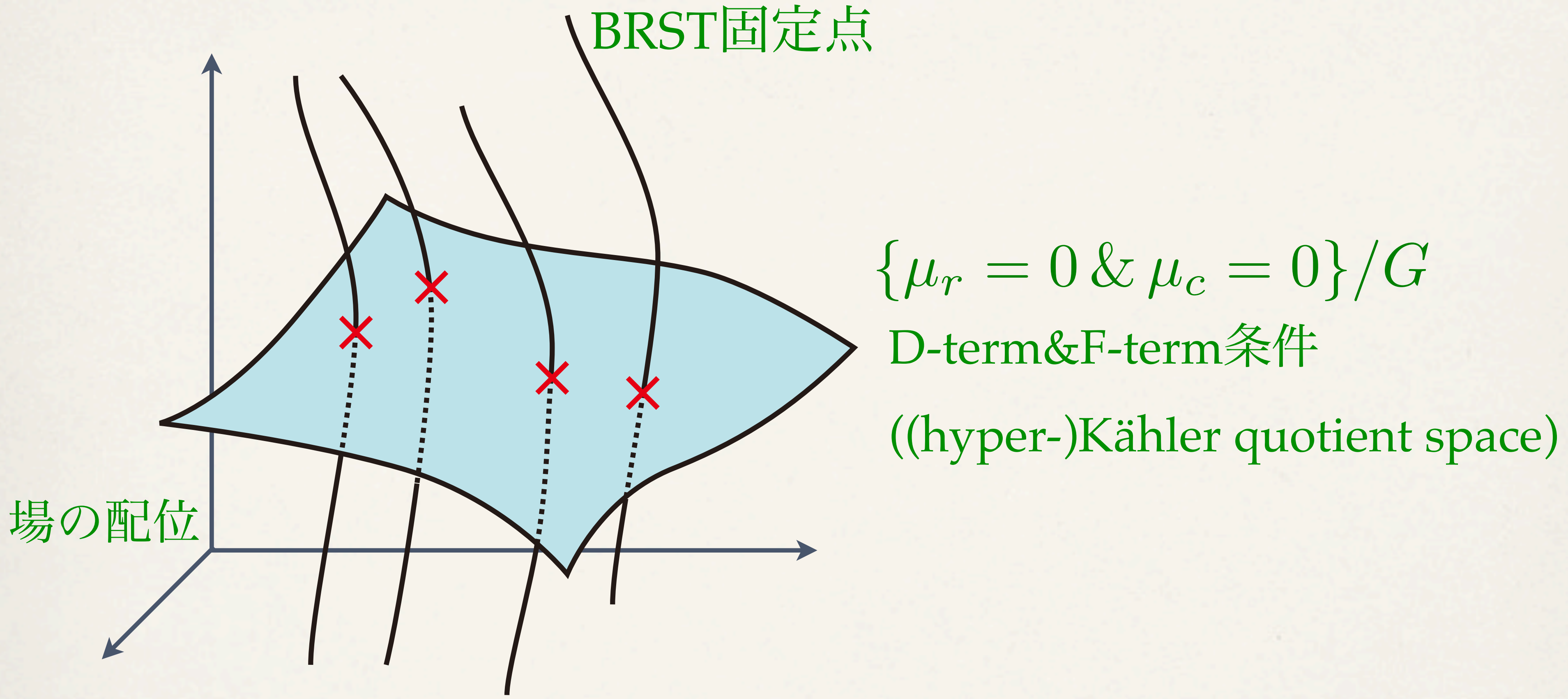
⇒ weak coupling(1-loop)での評価が厳密

$$Z_{\mathrm{SCS}} = \int e^{iS_{\mathrm{SCS}}} \quad \longleftrightarrow \quad Z_{\mathrm{SYMCS}} = \int e^{iS_{\mathrm{SCS}} - S_{\mathrm{SYM}}}$$

$$= \left\langle e^{iS_{\mathrm{SCS}}} \right\rangle_{\mathrm{SYM}}$$

$g \sim \infty$ $\qquad\qquad$ $g \sim 0$

- 超対称YM理論はBRST変換の固定点とmoment map=0に局所化する



$$\mathcal{Z}_{\mathrm{SYM}} = \sum_{\text{fixed points}} (\text{Jacobians})$$

1-loop Determinants

- 固定点まわりの1-loop determinantもBRST代数から求まる

$$(\text{Jacobians}) \sim \sqrt{\text{Det}(\text{Super Hessian})}$$

- Φを対角化するゲージ固定のもとでvector multipletに対して計算すると

$$\prod_{\alpha \neq 0} \frac{\text{Det}_{c,\bar{c}} \left| \mathcal{L}_V - i\alpha(\phi) \right|}{\text{Det}_{A_\Sigma} \left| \mathcal{L}_V - i\alpha(\phi) \right|} \sqrt{\frac{\text{Det}_{\chi_r} \left| \mathcal{L}_V - i\alpha(\phi) \right|}{\text{Det}_{\bar{\Phi}} \left| \mathcal{L}_V - i\alpha(\phi) \right|}}$$

ここで、$\alpha(\phi) \equiv \sum_{a=1}^{\text{rank}} \alpha_a \phi^a$

Φは固定点上では定数になる

- Fiber方向のLie微分 $\mathcal{L}_V$ は固有値$-i\dfrac{n}{\ell}$を持つ

- 場の自由度の数の差(ゼロモードの数)は2次元面のHirzebruch-Riemann-Rochの定理で求まる

$$\underset{\text{ghostのmode数}}{\dim\Omega^0(\Sigma,\mathcal{O}(-pn)\otimes V_\alpha)} - \underset{\text{gauge場のmode数}}{\dim\Omega^1(\Sigma,\mathcal{O}(-pn)\otimes V_\alpha)} = \frac{1}{2}\overset{\text{Euler数}}{\chi(\Sigma)} - \underset{\text{Fiber束}}{pn} + \alpha(\overset{\text{magnetic flux}}{m})$$

- Sin関数の無限積表示を使ってdeterminantが求まる

$$\prod_{\alpha\neq 0}\mathrm{Det}\,|\mathcal{L}_V - i\alpha(\phi)|^{\frac{1}{2}\chi(\Sigma)-pn+\alpha(m)} = \prod_{n\in\mathbb{Z}}\prod_{\alpha\neq 0}\left|\frac{n}{\ell}+\alpha(\phi)\right|^{\frac{1}{2}\chi(\Sigma)-pn+\alpha(m)}$$

$$= \prod_{\alpha>0}\left(2\sin\pi\ell\alpha(\phi)\right)^{\chi(\Sigma)}$$

$\boxed{\text{2次元YM on } \Sigma + \text{KK modes from } S^1 \text{ fiber} \Rightarrow \text{sin measure}}$

YMCS Partition Function

- 固定点上でCS作用を評価すると

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{SCS}}\big|_{\text{fixed points}} &= k\ell \sum_{a=1}^{r} \int_{\Sigma} \mathrm{Tr}\left[\phi_a F_{\Sigma}^{a} + \frac{p}{4\ell}\phi_a^2\,\omega - \frac{1}{2}\lambda^a \wedge \lambda^a\right] \\
&= k \sum_{a=1}^{r} \left[2\pi\ell\phi_a m_a + \frac{p\mathcal{A}}{4}\phi_a^2\right]
\end{aligned}
$$

- 最終的にSeifert多様体上のYMCS理論の分配関数は有限次元(ゲージ群のrank)の多重積分に帰着する

fiberとbaseのsizeの比

$$
\mathcal{Z}_{\mathrm{SYMCS}} = \frac{1}{\ell^r |W|} \sum_{\vec{m}\in(\mathbb{Z}_p)^r} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{a=1}^{r} \frac{d\phi_a}{2\pi} \prod_{\alpha>0} \left(2\sin\frac{\alpha(\phi)}{2}\right)^{\chi(\Sigma)} e^{ik\sum_{a=1}^{r}\left[\phi_a m_a + \frac{p\mu}{4\pi}\phi_a^2\right]}
$$

Weyl群

許されるmagnetic fluxについての和

YM作用からの1-loop det.

固定点で評価したCS作用

Supersymmetric Index

- p=0 (M=S^1×Σ) のとき、magnetic fluxについての和は全整数を走る

- Poisson resummation formula

$$\frac{1}{(2\pi)^r}\sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^r}\prod_{a=1}^{r} e^{ik\phi_a m_a} = \frac{1}{k^r}\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^r}\prod_{a=1}^{r}\delta\left(\phi_a - \frac{2\pi n_a}{k}\right)$$

を用いると、積分は離散和まで帰着する(固定"点")　以下、G=U(N)

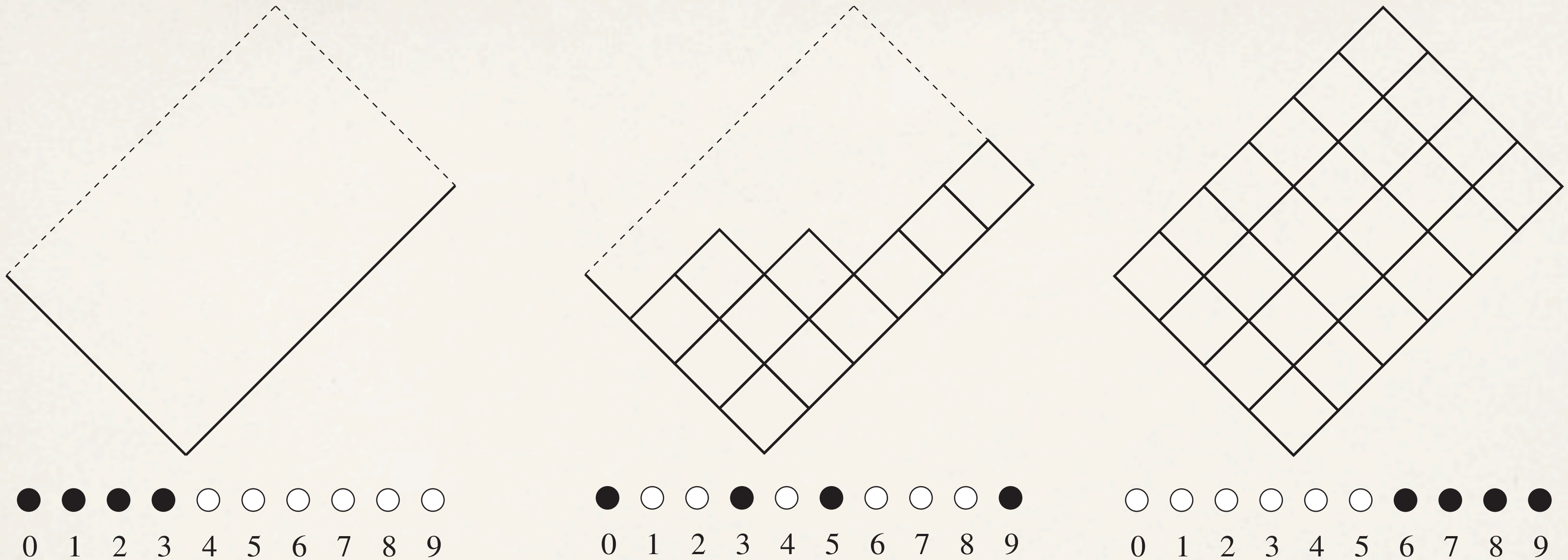
$$\mathcal{Z}_{\mathrm{SYMCS}}(S^1\times\Sigma) = C_N \sum_{n_1>\cdots>n_N}\prod_{1\le a<b\le N}[n_a - n_b]_q^{\chi(\Sigma)}$$

q-deformed 2d YM (BF-theory)
[Aganagic-Ooguri-Saulina-Vafa (2005)]

q-number : $[x]_q \equiv q^{x/2} - q^{-x/2}$

$$q \equiv e^{-g_s} = e^{\frac{2\pi i}{k}}$$

- 順序付き整数 (固定点) の和は次の制限付きYoung図に対する和として表せる



$N\times(k\text{-}N)$の箱の中のYoung図の数 = $U(N)$ level k CS理論の真空の数

= SUSY index (Witten index)

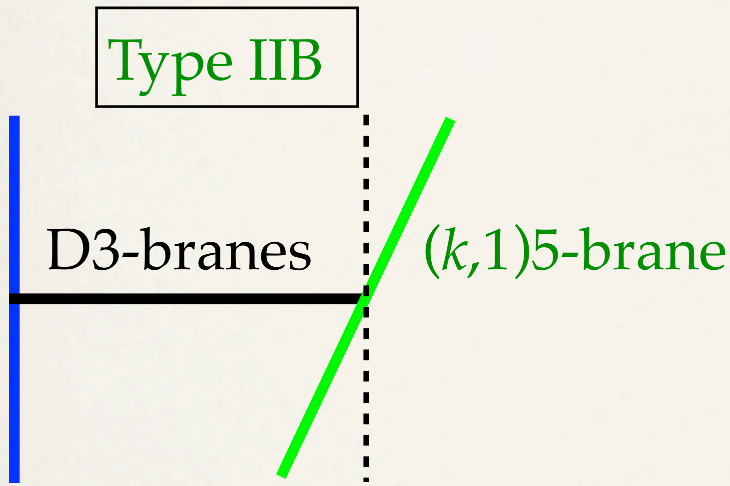
$$= \frac{k!}{N!(k-N)!}$$

- $N \leftrightarrow k\text{-}N$で対称 $\Rightarrow$ level-rank duality

$$G=U(N)_k \Leftrightarrow G'=U(k\text{-}N)_k$$

Index from Branes

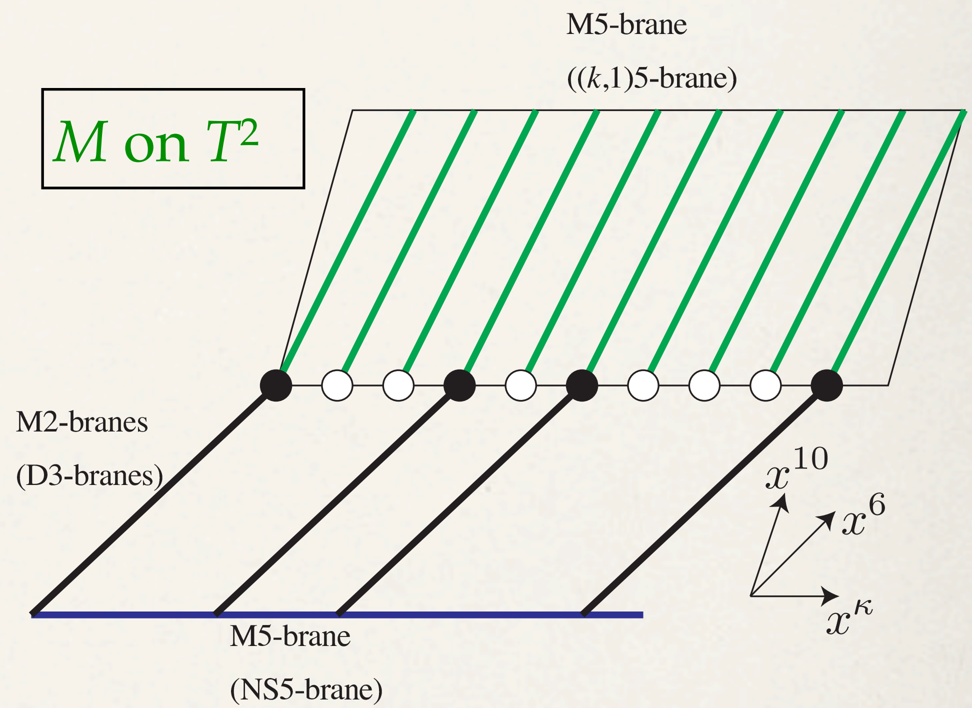
- Witten indexはbrane configurationからも理解できる [KO (1999)]



NS5-brane

[Kitao-KO-Ohta (1999)]

uplift

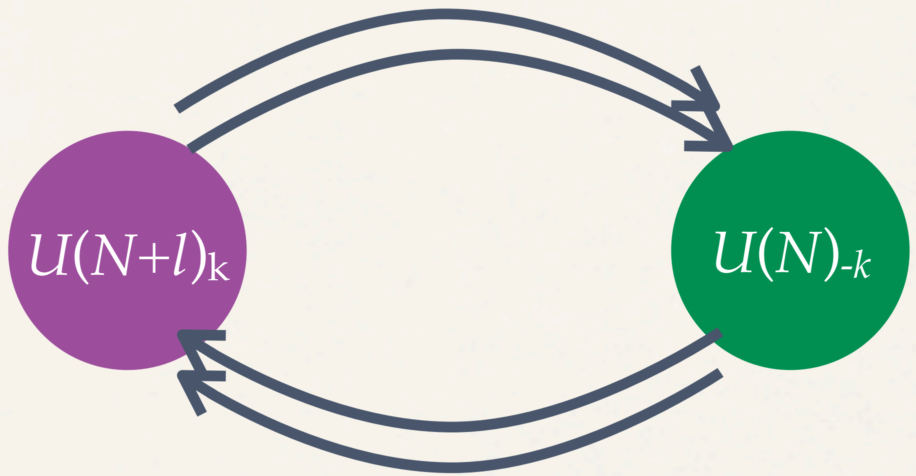


局所化定理の固定点 ⟷ 理論の真空

Braneの古典的配位

ABJM Model

- ABJM modelのmatterはself-conjugateなbi-fundamental表現

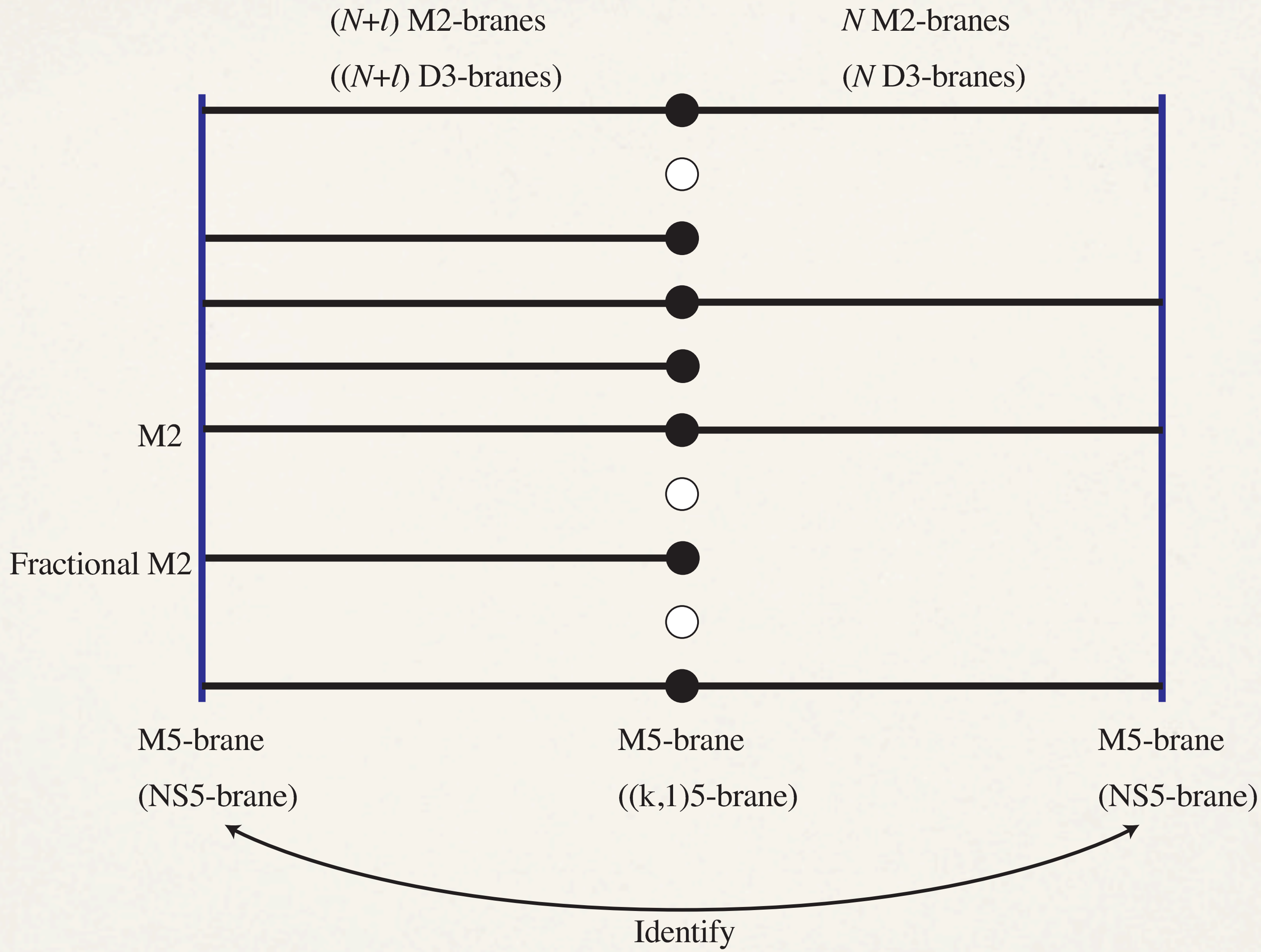


$$\mathcal{Z}_{\rm ABJ}^{U(N+l)_k\times U(N)_{-k}} = \frac{1}{(N+l)!N!}\sum_{\vec{m},\vec{\tilde{m}}}\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{a=1}^{N+l}\frac{d\phi_a}{2\pi}\prod_{c=1}^{N}\frac{d\tilde{\phi}_c}{2\pi}\frac{\left(\prod_{a<b}2\sin\frac{\phi_a-\phi_b}{2}\prod_{c<d}2\sin\frac{\tilde{\phi}_c-\tilde{\phi}_d}{2}\right)^{\chi(\Sigma)}}{\prod_{a,c}\left(2\cos\frac{\phi_a-\tilde{\phi}_c}{2}\right)^{2(\chi(\Sigma)-\varepsilon(p))}}$$

$$\times\, e^{ik\left[\sum_{a=1}^{N+l}(\phi_a m_a+\frac{p\mu}{4\pi}\phi_a^2)-\sum_{a=1}^{N}(\tilde{\phi}_a\tilde{m}_a+\frac{p\mu}{4\pi}\tilde{\phi}_a^2)\right]}$$

S^3 ($\chi(\Sigma)$=2, p=1) のとき、KWYの結果と一致

- ABJM modelの固定点(Witten index)もbrane configurationとうまく対応する



Higgs相/Coulomb相のより詳しい理解が必要

Conclusion

Results:

- $U(1)$ isometryを持つSeifert多様体上でYMCS理論の分配関数を局所化の方法を用いて計算した
- 局所化の固定点は 理論の真空構造やbrane pictureと対応する
- Matterを含む一般化(ABJM model)