Embedding tensors, dualities, and auxiliary fields in 4D $\mathcal{N}=2$ supergravity

立教大学理学部物理学科 木村 哲士

E-mail: tetsuji@rikkyo.ac.jp

超重力理論をゲージ化する (非可換ゲージ対称性を付加する) ことは様々な理由で切望される。最も系統的な手法は embedding tensor formalism であろうと思われる。embedding tensor formalism の強みは、超重力理論を形式的に双対共変に書き表すことにある。適当なフレームを選べば、電気的配位や磁気的配位を「ゲージ理論」のままで見通すことが可能となる。超対称性を最大に持つ場合は 3 次元から 9 次元まで整備されたが、超対称性が低い場合は開発中である。この手法が 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 超重力理論に適用できたのは 2011 年 [1] である。最大超重力理論と異なり、4 次元 $\mathcal{N}=2$ 超重力理論はベクトル場と物質場が違う多重項に属するため、非常に多様な性質を持ち、面白い。

この講演では、embedding tensor formalism 特有のテンソル補助場の扱いに注目する。電気的配位では補助場に過ぎない道具が、磁気的配位に双対変換する時にきちんと力学的場になることを追跡する。双対変換においてスカラー場がテンソル場に変換されることを、この formalism でも確認すべきであるとするのが、主たる動機である。この課題は、embedding tensor が弦理論のコンパクト化におけるフラックスの期待値と密接に関係するであろうことを意識している。

1 話の流れ

理論の大域的対称性 G_0 の一部をゲージ対称性に格上げするとき、前者の生成子 t_α と後者の生成子 T_M との間に $T_M = \Theta_M{}^\alpha t_\alpha$ という関係を結ぶ。この $\Theta_M{}^\alpha$ を embedding tensor と呼ぶ[1]。これを用いて微分を共変微分に書き直すことで、場の強さなどが与えられる:

$$\partial_\mu \to \mathcal{D}_\mu = \partial - \mathrm{g} W_\mu^M T_M \quad , \quad [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] = -\mathrm{g}\mathcal{F}_{\mu\nu}^M T_M \quad , \quad \mathcal{F}_{\mu\nu}^M = 2\partial_{[\mu} W_{\nu]}^M + \mathrm{g} T_{[NP]}{}^M W_\mu^N W_\nu^P$$
$$[T_M, T_N] = -T_{MN}{}^P T_P \quad , \quad T_{MN}{}^P = \Theta_M{}^\alpha (t_\alpha)_N{}^P$$

ここで、通常ならば $T_{(MN)}{}^P = 0$ とするのだが、この条件を緩めて $T_{(MN)}{}^P T_P = 0$ さえ満たせば良いとする。こうするともはや $\mathcal{F}_{\mu\nu}^M$ はゲージ共変ではないのだが、テンソル補助場 $B_{\mu\nu}^{(NP)}$ を導入して、次の形式をゲージ変換 δW_μ^M, $\delta B_{\mu\nu}^{(NP)}$ について共変にする:

$$\mathcal{H}_{\mu\nu}^M \equiv \mathcal{F}_{\mu\nu}^M + \mathrm{g} T_{(NP)}{}^M B_{\mu\nu}^{(NP)}$$

4 次元 $\mathcal{N}=2$ の系 [1] におけるこの補助場 $B_{\mu\nu}^{(NP)}$ の働きに着目する。電気的な配位ではこの補助場は積分できるが、磁気的配位では、[3, 4] の様にハイパー多重項のスカラー場の力学自由度を奪う (ゲージ理論のままでスカラー場がテンソル場に双対変換される) ことが実際に確かめられた。これは embedding tensor formalism では初めて確認できたことである。この操作が多重項で実現されるならば、双対変換されるハイパー多重項はスカラーテンソル多重項になると期待される [5] が、その実現は現時点では難しい。次のセクション以降では計算の詳細を掲載する。

[1] レビューとして例えば [2]。

2 設定

ここでは哲学は [1] にすべて譲り、技術的な設定を抑えるにとどめる。4 次元 $\mathcal{N}=2$ 超重力理論 [1] で登場する embedding tensors を簡単にまとめておく。この理論は大域的対称性として

$$G_0 \;=\; G_{\text{symp}} \times G_{\text{hyper}}$$

を持つ。$G_{\text{symp}}, G_{\text{hyper}}$ はそれぞれベクトル多重項、ハイパー多重項に内蔵される大域的対称性である[2]。そしてゲージ共変微分を次で定義する:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\mu X^\Lambda \;&=\; \partial_\mu X^\Lambda + \mathrm{g} W_\mu^N T_{NP}{}^\Lambda X^P\,, \quad \mathcal{D}_\mu \phi^A \;=\; \partial_\mu \phi^A - \mathrm{g} W_\mu^M k^A{}_M\,, && \text{(1a)}\\
W_\mu^M \;&=\; \begin{pmatrix} W_\mu^\Lambda \\ W_{\mu\Lambda} \end{pmatrix}, \quad X^M \;=\; \begin{pmatrix} X^\Lambda \\ F_\Lambda \end{pmatrix}, && \text{(1b)}\\
T_{MN}{}^P \;&=\; \Theta_M{}^{\mathsf{a}} (t_{\mathsf{a}})_N{}^P\,, \quad k^A{}_M \;=\; \Theta_M{}^{\mathsf{m}} k^A{}_{\mathsf{m}}\,, && \text{(1c)}\\
\Lambda \;&=\; 1,2,\ldots,n_{\mathrm{V}}+1\,, \quad A \;=\; 1,2,\ldots,4(n_{\mathrm{H}}+1)\,, && \text{(1d)}\\
\mathsf{a} \;&=\; 1,2,\ldots,\dim G_{\text{symp}}\,, \quad \mathsf{m} \;=\; 1,2,\ldots,\dim G_{\text{hyper}}\,. && \text{(1e)}
\end{aligned}$$

ここで X^Λ はベクトル多重項の複素スカラー場、ϕ^A はハイパー多重項の実スカラー場である。また $W_{\mu\Lambda}$ は磁気的ゲージ場、F_Λ はプレポテンシャルの一階微分である。そして $(t_{\mathsf{a}})_N{}^P$ は G_{symp} の生成子の行列表記、$k^A{}_{\mathsf{m}}$ は G_{hyper} を表す tri-holomorphic Killing vector である。embedding tensors $\Theta_M{}^{\mathsf{a}} = (\Theta_\Lambda{}^{\mathsf{a}}, \Theta^{\Lambda\mathsf{a}})$, $\Theta_M{}^{\mathsf{m}} = (\Theta_\Lambda{}^{\mathsf{m}}, \Theta^{\Lambda\mathsf{m}})$ には次の制限がある:

$$\begin{aligned}
f_{\mathsf{ab}}{}^{\mathsf{c}} \Theta_M{}^{\mathsf{a}} \Theta_N{}^{\mathsf{b}} + (t_{\mathsf{a}})_N{}^P \Theta_M{}^{\mathsf{a}} \Theta_P{}^{\mathsf{c}} \;&=\; 0 \;=\; f_{\mathsf{mn}}{}^{\mathsf{p}} \Theta_M{}^{\mathsf{m}} \Theta_N{}^{\mathsf{n}} + (t_{\mathsf{a}})_N{}^P \Theta_M{}^{\mathsf{a}} \Theta_P{}^{\mathsf{p}}\,, && \text{(2a)}\\
0 \;=\; \Theta^{\Lambda[\mathsf{a}} \Theta_\Lambda{}^{\mathsf{b}]}\,, \quad 0 \;&=\; \Theta^{\Lambda[\mathsf{a}} \Theta_\Lambda{}^{\mathsf{m}]}\,, \quad 0 \;=\; \Theta^{\Lambda[\mathsf{m}} \Theta_\Lambda{}^{\mathsf{n}]}\,. && \text{(2b)}
\end{aligned}$$

一般に $T_{(MN)}{}^P \neq 0$ を許すときの「共変な」場の強さは、テンソル補助場 $B_{\mu\nu\mathsf{a}}, B_{\mu\nu\mathsf{m}}$ を用いて

$$\mathcal{H}_{\mu\mu}^\Lambda \;=\; \mathcal{F}_{\mu\nu}^\Lambda + \frac{\mathrm{g}}{2}\Big(\Theta^{\Lambda\mathsf{a}} B_{\mu\nu\mathsf{a}} + \Theta^{\Lambda\mathsf{m}} B_{\mu\nu\mathsf{m}}\Big)\,, \quad \mathcal{F}_{\mu\mu}^\Lambda \;=\; 2\partial_{[\mu} W_{\nu]}^\Lambda + \mathrm{g} T_{[NP]}{}^\Lambda W_\mu^N W_\nu^P\,, \qquad (3)$$

で与えられている。ゲージ共変、かつ G_0 共変な形式的 Lagrangian の明記は省略する [1]。embedding tensors の設定の仕方で、電気的系 ($\Theta^{\Lambda\mathsf{a}} = 0 = \Theta^{\Lambda\mathsf{m}}$) や磁気的系 ($\Theta_\Lambda{}^{\mathsf{a}} = 0 = \Theta_\Lambda{}^{\mathsf{m}}$)、混合系が与えられる。ここで考えたいのは混合系である。以後、議論を簡略化するため、可換ゲージ群 $T_{[MN]}{}^P = 0$ に特化する。ただし $T_{(MN)}{}^P$ は一般にゼロではない。

注意であるが、あるゲージ場 W_μ^M があったとき、「ある物質場には電気的に結合する一方で、同じゲージ場が他の物質場には磁気的に結合する」ということはない。

[2]技術的なことだが、[1] では 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 共形超重力理論を扱っている。ベクトル多重項のスカラー場 X^Λ は rigid special geometry 上に住み、ハイパー多重項のスカラー場 ϕ^A は hyper-Kähler cone 上に住む [6]。$G_{\text{symp}}, G_{\text{hyper}}$ はそれぞれの幾何学の global isometry groups (の一部) である。

3　ある混合配位

この講演では混合系を考える。[7] にならって次の様な embedding tensors を考える:

$$\Theta^{\Lambda \mathsf{a}} \;=\; \begin{pmatrix} \Theta^{I\mathsf{a}'} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \Theta_{\Lambda}{}^{\mathsf{m}} \;=\; \begin{pmatrix} \Theta_{I}{}^{\mathsf{m}'} & 0 \\ \Theta_{U}{}^{\mathsf{m}'} & 0 \end{pmatrix} , \tag{4a}$$

$$\Lambda \;=\; (I, U) , \quad \mathsf{a} \;=\; (\mathsf{a}', \widehat{\mathsf{a}}) , \quad \mathsf{m} \;=\; (\mathsf{m}', \widehat{\mathsf{m}}) , \quad I, \mathsf{a}', \mathsf{m}' \;=\; 1, 2, \ldots, n_{\rm T} \, . \tag{4b}$$

ここで $\Theta^{I\mathsf{a}'}$ と $\Theta_{I}{}^{\mathsf{m}'}$ は共に正方行列であり逆行列が存在すると仮定する。$\Theta^{\Lambda\mathsf{a}}$ の他の成分がゼロなのは、なるべく電気的な設定を考えるからである。(2) により、次が見出せる:

$$\Theta_{\Lambda}{}^{\mathsf{a}} \;=\; \begin{pmatrix} \Theta_{I}{}^{\mathsf{a}'} & 0 \\ \Theta_{U}{}^{\mathsf{a}'} & \Theta_{U}{}^{\widehat{\mathsf{a}}} \end{pmatrix} , \quad 0 \;=\; \Theta^{I[\mathsf{a}'} \Theta_{I}{}^{\mathsf{b}']} , \tag{5a}$$

$$\Theta^{\Lambda \mathsf{m}} \;=\; \begin{pmatrix} \Theta^{I\mathsf{m}'} & 0 \\ \Theta^{U\mathsf{m}'} & 0 \end{pmatrix} , \qquad 0 \;=\; \Theta^{\Lambda[\mathsf{m}'} \Theta_{\Lambda}{}^{\mathsf{n}']} \, . \tag{5b}$$

このような設定の下で、力学場を整理する。

3.1　テンソル場 $B_{\mu\nu\mathsf{a}}$ を追い出す

$B_{\mu\nu\mathsf{a}}$ の運動方程式 [1] から、$W_{\mu I}$ についての関係式が得られる:

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \mathrm{g}\Theta^{\Lambda\mathsf{a}} (\mathcal{G}_{\mu\nu\Lambda} - \mathcal{H}_{\mu\nu\Lambda}) \;=\; \Theta^{\Lambda\mathsf{a}} \widehat{\mathcal{J}}_{\mu\nu\Lambda} + \frac{1}{2} \Theta^{\Lambda\mathsf{a}} \Big[\mathcal{R}_{\Lambda\Sigma} B^{\Sigma}_{\mu\nu} - \frac{\mathrm{i}}{2} e \, \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \mathcal{I}_{\Lambda\Sigma} B^{\rho\sigma\Sigma} \Big] + \frac{1}{2} \Theta_{\Lambda}{}^{\mathsf{a}} B^{\Lambda}_{\mu\nu} \\ &=\; - \Theta^{I\mathsf{a}'} \widehat{\mathcal{J}}_{\mu\nu I} + \frac{1}{2} \Theta^{I\mathsf{a}'} \Big[\mathcal{R}_{\Lambda\Sigma} B^{\Sigma}_{\mu\nu} - \frac{\mathrm{i}}{2} e \, \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \mathcal{I}_{\Lambda\Sigma} B^{\rho\sigma\Sigma} \Big] + \frac{1}{2} \Theta_{I}{}^{\mathsf{a}'} B^{I}_{\mu\nu} \, , \end{aligned} \tag{6a}$$

$$\widehat{\mathcal{J}}_{\mu\nu\Lambda} \;\equiv\; \widehat{\mathcal{F}}_{\mu\nu\Lambda} - \Big[\mathcal{R}_{\Lambda\Sigma} \widehat{\mathcal{F}}^{\Sigma}_{\mu\nu} - \frac{\mathrm{i}}{2} e \, \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \mathcal{I}_{\Lambda\Sigma} \widehat{\mathcal{F}}^{\rho\sigma\Sigma} \Big] - \mathrm{i} \, e \, \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \mathcal{O}^{\rho\sigma}_{\Lambda} \, , \tag{6b}$$

$$\widehat{\mathcal{F}}_{\mu\nu\Lambda} \;\equiv\; \mathcal{F}_{\mu\nu\Lambda} - \frac{1}{2} \widehat{B}_{\mu\nu\Lambda} \, , \quad \widehat{\mathcal{F}}^{\Lambda}_{\mu\nu} \;\equiv\; \mathcal{F}^{\Lambda}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \widehat{B}^{\Lambda}_{\mu\nu} \, , \tag{6c}$$

$$B^{\Lambda}_{\mu\nu} \;\equiv\; \mathrm{g}\Theta^{\Lambda\mathsf{a}} B_{\mu\nu\mathsf{a}} \, , \quad \widehat{B}_{\mu\nu\Lambda} \;\equiv\; \mathrm{g}\Theta_{\Lambda}{}^{\mathsf{m}} B_{\mu\nu\mathsf{m}} \, , \quad \widehat{B}^{\Lambda}_{\mu\nu} \;\equiv\; \mathrm{g}\Theta^{\Lambda\mathsf{m}} B_{\mu\nu\mathsf{m}} \, . \tag{6d}$$

注意として、$\mathcal{I}_{\Lambda\Sigma} \equiv \mathrm{Im} F_{\Lambda\Sigma}$, $\mathcal{R}_{\Lambda\Sigma} \equiv \mathrm{Re} F_{\Lambda\Sigma}$ はそれぞれ、Poincaré 超重力理論に還元された時には一般化された結合定数 (の二次の負冪) と θ-angle である。$\Theta^{\Lambda\widehat{\mathsf{a}}} = 0$ のため、$B_{\mu\nu\widehat{\mathsf{a}}}$ は理論から脱落する。

(6a) に inverse matrix $(\Theta^{-1})_{\mathsf{a}'J}$ を作用させて、$B^{I}_{\mu\nu}$ を $\widehat{\mathcal{J}}_{\mu\nu I}$ で書き下そう [7]:

$$B^{I}_{\mu\nu} \;=\; [(\mathcal{I} + r\mathcal{I}^{-1} r)^{-1}]^{IJ} \Big\{ \mathrm{i} \, e \, \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \widehat{\mathcal{J}}^{\rho\sigma}_{J} + 2 (r \mathcal{I}^{-1})_{J}{}^{K} \widehat{\mathcal{J}}_{\mu\nu K} \Big\} \, , \tag{7a}$$

$$r_{IJ} \;\equiv\; \mathcal{R}_{IJ} + (\Theta^{-1})_{\mathsf{a}'I} \Theta_{J}{}^{\mathsf{a}'} \, . \tag{7b}$$

これを $\mathscr{L}_{\rm kin}^{(2)} + \mathscr{L}_{\rm top}$ (定義は [1]) に代入してみよう:

$$
\begin{aligned}
e^{-1}(\mathscr{L}_{\rm kin}^{(2)} + \mathscr{L}_{\rm top}) \ &= \ e^{-1}\mathscr{L}_{\rm kin}^{(2)}(\widehat{\mathcal{F}}) + e^{-1}\mathscr{L}_{\widehat{\mathcal{J}}} \\
&\quad + \frac{\mathrm{i}}{8} e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\widehat{B}_{\mu\nu}^{\Lambda}\mathcal{F}_{\rho\sigma\Lambda} - \frac{\mathrm{i}}{32}\mathrm{g}^2 e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\Theta^{\Lambda\mathsf{m}'}\Theta_{\Lambda}{}^{\mathsf{n}'}B_{\mu\nu\mathsf{m}'}B_{\rho\sigma\mathsf{n}'} \, .
\end{aligned}
\tag{8a}
$$

ここで右辺第一行の二項はそれぞれ次の様に与えられる:

$$
e^{-1}\mathscr{L}_{\rm kin}^{(2)}(\widehat{\mathcal{F}}) \ \equiv \ -\frac{1}{4}\mathcal{I}_{\Lambda\Sigma}\widehat{\mathcal{F}}_{\mu\nu}^{\Lambda}\widehat{\mathcal{F}}^{\mu\nu\Sigma} - \frac{\mathrm{i}}{8}e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathcal{R}_{\Lambda\Sigma}\widehat{\mathcal{F}}_{\mu\nu}^{\Lambda}\widehat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}^{\Sigma} + \widehat{\mathcal{F}}_{\mu\nu}^{\Lambda}\mathcal{O}_{\Lambda}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}[\mathcal{I}^{-1}]^{\Lambda\Sigma}\mathcal{O}_{\mu\nu\Lambda}\mathcal{O}_{\Sigma}^{\mu\nu} \, ,
\tag{8b}
$$

$$
\begin{aligned}
e^{-1}\mathscr{L}_{\widehat{\mathcal{J}}} \ &\equiv \ \frac{\mathrm{i}}{16}e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}B_{\mu\nu}^{I}\widehat{\mathcal{J}}_{\rho\sigma I} \\
&= \ -\frac{1}{4}[(\mathcal{I} + r\mathcal{I}^{-1}r)^{-1}]^{IJ}\Big\{\widehat{\mathcal{J}}_{\mu\nu I}\widehat{\mathcal{J}}_{J}^{\mu\nu} - \frac{\mathrm{i}}{2}e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(r\mathcal{I}^{-1})_{J}{}^{K}\widehat{\mathcal{J}}_{\mu\nu K}\widehat{\mathcal{J}}_{\rho\sigma I}\Big\} \, .
\end{aligned}
\tag{8c}
$$

ちなみに W_{μ}^{I} は $B_{\mu\nu}^{I}$ の運動方程式を解く前に、テンソルゲージ変換 $\delta B_{\mu\nu}^{I} = 2\mathcal{D}_{[\mu}\Lambda_{\nu]}^{I}$ によって吸収される [7]。このため、$\widehat{\mathcal{F}}_{\mu\nu}^{I} = \frac{1}{2}\widehat{B}_{\mu\nu}^{I} = \frac{\mathrm{g}}{2}\Theta^{I\mathsf{m}'}B_{\mu\nu\mathsf{m}'}$ である。もし $\Theta^{I\mathsf{m}'} \neq 0$ の場合、$B_{\mu\nu\mathsf{m}'}$ は $\mathcal{I}_{IJ}\widehat{\mathcal{F}}_{\mu\nu}^{I}\widehat{\mathcal{F}}^{\mu\nu J}$ を通じて質量項を獲得してしまい、都合よろしくない。そのため $\Theta^{I\mathsf{m}'} = 0$ とする必要がある。この下で $\widehat{\mathcal{J}}_{\mu\nu I}$ の具体形を代入して、場の強さの二次の項を集め直そう:

$$
\begin{aligned}
e^{-1}\mathscr{L}_{\rm V1} \ &\equiv \ e^{-1}\Big[\mathscr{L}_{\rm kin}^{(2)}(\widehat{\mathcal{F}}) + \mathscr{L}_{\widehat{\mathcal{J}}}\Big]_{\mathcal{F}^2} \\
&\equiv \ -\frac{1}{4}\Big[\widehat{\mathcal{I}}^{IJ}\,\widehat{\mathcal{F}}_{\mu\nu I}\widehat{\mathcal{F}}_{J}^{\mu\nu} + 2\widehat{\mathcal{I}}^{I}{}_{V}\,\widehat{\mathcal{F}}_{\mu\nu I}\widehat{\mathcal{F}}^{\mu\nu V} + \widehat{\mathcal{I}}_{UV}\,\widehat{\mathcal{F}}_{\mu\nu}^{U}\widehat{\mathcal{F}}^{\mu\nu V}\Big] \\
&\quad - \frac{\mathrm{i}}{8}e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\Big[\widehat{\mathcal{R}}^{IJ}\,\widehat{\mathcal{F}}_{\mu\nu I}\widehat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma J} + 2\widehat{\mathcal{R}}^{I}{}_{V}\,\widehat{\mathcal{F}}_{\mu\nu I}\widehat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}^{V} + \widehat{\mathcal{R}}_{UV}\,\widehat{\mathcal{F}}_{\mu\nu}^{U}\widehat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}^{V}\Big] \, ,
\end{aligned}
\tag{9a}
$$

$$
\widehat{\mathcal{I}}^{IJ} \ = \ \big[(\mathcal{I} + r\mathcal{I}^{-1}r)^{-1}\big]^{IJ} \, ,
\tag{9b}
$$

$$
\widehat{\mathcal{I}}^{I}{}_{V} \ = \ \big[(\mathcal{I} + r\mathcal{I}^{-1}r)^{-1}\big]^{IJ}\Big[-\mathcal{R}_{JV} + (r\mathcal{I}^{-1})_{J}{}^{K}\mathcal{I}_{KV}\Big] \, ,
\tag{9c}
$$

$$
\widehat{\mathcal{I}}_{UV} \ = \ \mathcal{I}_{UV} + \big[(\mathcal{I} + r\mathcal{I}^{-1}r)^{-1}\big]^{IJ}\Big[\big(\mathcal{R}_{IU}\mathcal{R}_{JV} - \mathcal{I}_{IU}\mathcal{I}_{JV}\big) - 2(r\mathcal{I}^{-1})_{J}{}^{K}\mathcal{R}_{I(U}\mathcal{I}_{V)K}\Big] \, ,
\tag{9d}
$$

$$
\widehat{\mathcal{R}}^{IJ} \ = \ -\big[(\mathcal{I} + r\mathcal{I}^{-1}r)^{-1}\big]^{IK}(r\mathcal{I}^{-1})_{K}{}^{J} \, ,
\tag{9e}
$$

$$
\widehat{\mathcal{R}}^{I}{}_{V} \ = \ \big[(\mathcal{I} + r\mathcal{I}^{-1}r)^{-1}\big]^{IJ}\Big[\mathcal{I}_{JV} + (r\mathcal{I}^{-1})_{J}{}^{K}\mathcal{R}_{KV}\Big] \, ,
\tag{9f}
$$

$$
\widehat{\mathcal{R}}_{UV} \ = \ \mathcal{R}_{UV} - \big[(\mathcal{I} + r\mathcal{I}^{-1}r)^{-1}\big]^{IJ}\Big[\big(\mathcal{R}_{IU}\mathcal{R}_{KV} - \mathcal{I}_{IU}\mathcal{I}_{KV}\big)(r\mathcal{I}^{-1})_{J}{}^{K} + 2\mathcal{R}_{I(U}\mathcal{I}_{V)J}\Big] \, .
\tag{9g}
$$

これに $\mathcal{F}_{\mu\nu U}$ が含まれていないのは明らかである。また、$\widehat{\mathcal{I}}^{IJ}$ は大雑把に言って $\mathcal{I}_{IJ}$ の逆である。これは $W_{\mu I}$ の結合定数は、電気的ゲージ場 W_{μ}^{Λ} のそれとは逆冪の関係であることを意味する。この意味で $W_{\mu I}$ を磁気的ゲージ場と呼んでいた。残りの項もまとめておこう:

$$
e^{-1}\mathscr{L}_{\rm V2} \ \equiv \ e^{-1}(\mathscr{L}_{\rm kin}^{(2)} + \mathscr{L}_{\rm top}^{(1)} - \mathscr{L}_{\rm V1})
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mathrm{i}}{8} e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\widehat{B}^{\Lambda}_{\mu\nu}\mathcal{F}_{\rho\sigma\Lambda} - \frac{\mathrm{i}}{32}\mathrm{g}^2 e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\Theta^{\Lambda\mathsf{m}'}\Theta_{\Lambda}{}^{\mathsf{n}'}B_{\mu\nu\mathsf{m}'}B_{\rho\sigma\mathsf{n}'} \\
&\quad + \widehat{\mathcal{F}}^{U}_{\mu\nu}\mathcal{O}^{\mu\nu}_{U} - \frac{1}{2}[\mathcal{I}^{-1}]^{\Lambda\Sigma}\mathcal{O}_{\mu\nu\Lambda}\mathcal{O}^{\mu\nu}_{\Sigma} \\
&\quad + \widehat{\mathcal{I}}^{IJ}\mathcal{O}_{\mu\nu I}\Big[\big(\mathcal{O}^{\mu\nu}_{J} - \mathcal{I}_{JV}\widehat{\mathcal{F}}^{\mu\nu V}\big) + (r\mathcal{I}^{-1})_{J}{}^{K}\big(\widehat{\mathcal{F}}^{\mu\nu}_{K} - \mathcal{R}_{KV}\widehat{\mathcal{F}}^{\mu\nu V}\big)\Big] \\
&\quad + \frac{\mathrm{i}}{2}e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\widehat{\mathcal{I}}^{IJ}\mathcal{O}_{\mu\nu I}\Big[\big(\widehat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma J} - \mathcal{R}_{JV}\widehat{\mathcal{F}}^{V}_{\rho\sigma}\big) - (r\mathcal{I}^{-1})_{J}{}^{K}\big(\mathcal{O}_{\rho\sigma K} - \mathcal{I}_{KV}\widehat{\mathcal{F}}^{V}_{\rho\sigma}\big)\Big]\,. \qquad (10)
\end{aligned}
$$

右辺第一項には $W_{\mu U}$ が含まれる。それは $B_{\mu\nu\mathsf{m}'}$ の運動項を獲得するために使われる。

3.2 共変微分

ここで物質場の共変微分を見ておく。まずはベクトル多重項 [1][3]:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_\mu X^\Lambda &= \mathcal{D}^0_\mu X^\Lambda + \mathrm{g}W^N_\mu T_{(NP)}{}^{\Lambda}X^P \\
&= \mathcal{D}^0_\mu X^\Lambda + \mathrm{g}W^U_\mu\big(T_{U\Gamma}{}^{\Lambda}X^\Gamma + T_U{}^{\Gamma\Lambda}X_\Gamma\big) + \mathrm{g}W_{\mu I}\big(-T^{I\Lambda}{}_{\Gamma}X^\Gamma + T^{I\Gamma\Lambda}X_\Gamma\big)\,, \qquad (11a) \\
\mathcal{D}_\mu \Omega^\Lambda_i &= \mathcal{D}^0_\mu \Omega^\Lambda_i + \mathrm{g}W^N_\mu T_{(NP)}{}^{\Lambda}\Omega^P_i \\
&= \mathcal{D}^0_\mu \Omega^\Lambda_i + \mathrm{g}W^U_\mu\big(T_{U\Gamma}{}^{\Lambda}\Omega^\Gamma_i + T_U{}^{\Gamma\Lambda}\Omega_{i\Gamma}\big) + \mathrm{g}W_{\mu I}\big(-T^{I\Lambda}{}_{\Gamma}\Omega^\Gamma_i + T^{I\Gamma\Lambda}\Omega_{i\Gamma}\big)\,. \qquad (11b)
\end{aligned}
$$

$\mathcal{D}^0_\mu$ は、共形超重力理論であるために内蔵される他の「ゲージ場」(ω^{ab}_μ, b_μ, A_μ, $\mathcal{V}_\mu{}^i{}_j$) による共変微分である。$\Theta^{U\mathsf{a}} = 0$ のために $T^U{}_N{}^P = 0$ となるので、$W_{\mu U}$ は共変微分に寄与しなくなる。ハイパー多重項 [1] についてもみておく:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_\mu \phi^A &= \mathcal{D}^0_\mu\phi^A - \mathrm{g}W^M_\mu k^A{}_M \\
&= \mathcal{D}^0_\mu\phi^A - \mathrm{g}W^U_\mu\Theta_U{}^{\mathsf{m}'}k^A{}_{\mathsf{m}'} - \mathrm{g}W_{\mu U}\Theta^{U\mathsf{m}'}k^A{}_{\mathsf{m}'}\,, \qquad (12a) \\
\mathcal{D}_\mu A_i{}^\alpha &= \mathcal{D}^0_\mu A_i{}^\alpha - \mathrm{g}W^M_\mu (T_M)^\alpha{}_\beta A_i{}^\beta \\
&= \mathcal{D}^0_\mu A_i{}^\alpha - \mathrm{g}W^U_\mu\Theta_U{}^{\mathsf{m}'}(t_{\mathsf{m}'})^\alpha{}_\beta A_i{}^\beta - \mathrm{g}W_{\mu U}\Theta^{U\mathsf{m}'}(t_{\mathsf{m}'})^\alpha{}_\beta A_i{}^\beta\,, \qquad (12b) \\
\mathcal{D}_\mu \zeta^\alpha &= \mathcal{D}^0_\mu\zeta^\alpha - \mathrm{g}W^M_\mu (T_M)^\alpha{}_\beta\zeta^\beta \\
&= \mathcal{D}^0_\mu\zeta^\alpha - \mathrm{g}W^U_\mu\Theta_U{}^{\mathsf{m}'}(t_{\mathsf{m}'})^\alpha{}_\beta\zeta^\beta - \mathrm{g}W_{\mu U}\Theta^{U\mathsf{m}'}(t_{\mathsf{m}'})^\alpha{}_\beta\zeta^\beta\,, \qquad (12c)
\end{aligned}
$$

ベクトル多重項の場合と異なり、磁気的ゲージ場 $W_{\mu U}$ が結合している。しかしこのゲージ場は、(9a) にはどこにも運動項がなかったので、積分して追い出すことができる。

3.3 磁気的ゲージ場 $W_{\mu U}$ を追い出す

可換ゲージ群に限定すると、必ず $\mathrm{g}W_{\mu U}\Theta^{U\mathsf{m}'}$ という組み合わせでのみ磁気的ゲージ場が寄与することがわかる。$\mathscr{L}_{\mathrm{V2}}$ (10) と、(12) を通じての $\mathscr{L}_{\mathrm{H,conf}}$ のみの寄与である:

$$
W^{\mathsf{m}'}_\mu \equiv \mathrm{g}W_{\mu U}\Theta^{U\mathsf{m}'}\,, \qquad (13a)
$$

[3] $X_\Lambda = F_\Lambda = F_{\Lambda\Sigma}X^\Sigma$, $\Omega_{i\Lambda} = F_{\Lambda\Sigma}\Omega^\Sigma_i$ である。

$$
\begin{aligned}
0 &\equiv \frac{\delta(e^{-1}\mathscr{L})}{\delta W_\mu^{\mathsf{m}'}} = \frac{\delta}{\delta W_\mu^{\mathsf{m}'}}\Big[e^{-1}(\mathscr{L}_{\mathrm{V2}} + \mathscr{L}_{\mathrm{H,conf}})\Big] \\
&= \frac{\mathrm{i}}{12} e^{-1} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} H_{\nu\rho\sigma\mathsf{m}'} + J^\mu_{\mathsf{m}'} - \mathcal{M}_{\mathsf{m}'\mathsf{n}'} W^{\mu\mathsf{n}'} \,. \qquad (13b)
\end{aligned}
$$

ここで、変分によって登場した場は次の様にして定められる:

$$
\begin{aligned}
H_{\mu\nu\rho\mathsf{m}'} &\equiv 3\partial_{[\mu} B_{\nu\rho]\mathsf{m}'} \,, & (13c) \\
\mathcal{M}_{\mathsf{m}'\mathsf{n}'} &\equiv g_{AB}\, k^A{}_{\mathsf{m}'} k^B{}_{\mathsf{n}'} \,, & (13d) \\
J^\mu_{\mathsf{m}'} &\equiv J^{\mu(1)}_{\mathsf{m}'} + \big[J^{\mu(2)}_{\mathsf{m}'} + J^{\mu(3)}_{\mathsf{m}'} + (\text{h.c.})\big] + J^{\mu(4)}_{\mathsf{m}'} \,, & (13e) \\
J^{\mu(1)}_{\mathsf{m}'} &\equiv g_{AB} k^A{}_{\mathsf{m}'} \widehat{\mathcal{D}}^\mu \phi^B \,, \quad (\widehat{\mathcal{D}}_\mu :\ \mathcal{D}_\mu \text{ から } W_\mu^{\mathsf{m}'} \text{ 部分を抜き去ったもの}) \,, & (13f) \\
J^{\mu(2)}_{\mathsf{m}'} &\equiv G_{\overline{\alpha}\beta} (t_{\mathsf{m}'})^\beta{}_\gamma \big(\overline{\zeta^\alpha} \gamma^\mu \zeta^\gamma\big) \,, & (13g) \\
J^{\mu(3)}_{\mathsf{m}'} &\equiv -g_{AB} k^A{}_{\mathsf{m}'} \overline{\gamma}^{iB}_\alpha \big(\overline{\zeta}^\alpha \gamma^\rho \gamma^\mu \psi_{\rho i}\big) \,, & (13h) \\
J^{\mu(4)}_{\mathsf{m}'} &\equiv -\frac{1}{2} e^{-1} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{ik} J^{kj}{}_{AB} \big(\overline{\psi}^i_\nu \gamma_\rho \psi_{\sigma j}\big) \chi^A k^B{}_{\mathsf{m}'} \,. & (13i)
\end{aligned}
$$

abelian $T_{[MN]}{}^P = 0$ のとき、(2) によると $f_{\mathsf{m}'\mathsf{n}'}{}^{\mathsf{p}} = 0$ となる。これは m'-方向の isometry group が abelian になることを意味する。これにより、[3] のように Killing vectors $k^A{}_{\mathsf{m}'}$ を

$$
k^A{}_{\mathsf{m}'} = (k^{A'}{}_{\mathsf{m}'}, k^{\widehat{A}}{}_{\mathsf{m}'}) \equiv (\delta^{A'}_{\mathsf{m}'}, 0) \,, \qquad (14)
$$

のようにできる。これにより $W_\mu^{\mathsf{m}'}$ と inverse matrix $\mathcal{M}^{\mathsf{m}'\mathsf{n}'}$ が与えられる:

$$
\begin{aligned}
W^{\mu\mathsf{m}'} &= \mathrm{g} W^\mu_U \Theta^{U\mathsf{m}'} = \mathcal{M}^{\mathsf{m}'\mathsf{n}'} \Big[\frac{\mathrm{i}}{12} e^{-1} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} H_{\nu\rho\sigma\mathsf{n}'} + J^\mu_{\mathsf{n}'}\Big] \,, & (15a) \\
\mathcal{M}^{\mathsf{m}'\mathsf{n}'} &\equiv (g_{AB} k^A{}_{\mathsf{m}'} k^B{}_{\mathsf{n}'})^{-1} = (g_{A'B'} \delta^{A'}_{\mathsf{m}'} \delta^{B'}_{\mathsf{n}'})^{-1} \,. & (15b)
\end{aligned}
$$

さて、(15) を用いて $B_{\mu\nu\mathsf{m}'}$ の運動項を獲得しよう:

$$
\begin{aligned}
e^{-1}(\mathscr{L}_{\mathrm{V2}} + \mathscr{L}_{\mathrm{H,conf}}) &= e^{-1}\mathscr{L}_0 + \frac{\mathrm{i}}{12} e^{-1} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} H_{\nu\rho\sigma\mathsf{m}'} W_\mu^{\mathsf{m}'} + J^\mu_{\mathsf{m}'} W_\mu^{\mathsf{m}'} - \frac{1}{2} W_\mu^{\mathsf{m}'} \mathcal{M}_{\mathsf{m}'\mathsf{n}'} W^{\mu\mathsf{n}'} \\
&= e^{-1}\mathscr{L}_0 - \frac{1}{2\cdot 4!} H_{\mu\nu\rho\mathsf{m}'} \mathcal{M}^{\mathsf{m}'\mathsf{n}'} H^{\mu\nu\rho}_{\mathsf{n}'} + \frac{\mathrm{i}}{12} e^{-1} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} J_{\mu\mathsf{m}'} \mathcal{M}^{\mathsf{m}'\mathsf{n}'} H_{\nu\rho\sigma\mathsf{n}'} \\
&\quad + \frac{1}{2} J_{\mu\mathsf{m}'} \mathcal{M}^{\mathsf{m}'\mathsf{n}'} J^\mu_{\mathsf{n}'} \,. \qquad (16a)
\end{aligned}
$$

ここで $\mathscr{L}_0$ は $W_\mu^{\mathsf{m}'}$ が寄与しない部分を表す。まずこの表記により、補助場であったテンソル場 $B_{\mu\nu\mathsf{m}'}$ が運動項を獲得したことがわかる。さらに $J_{\mu\mathsf{m}'} \mathcal{M}^{\mathsf{m}'\mathsf{n}'} J^\mu_{\mathsf{n}'}$ 項から、$\phi^{A'}$ が力学自由度を失ったことが分かる。具体的に $(J^{(1)})^2$-項を評価しよう:

$$
\frac{1}{2} J^{(1)}_{\mu\mathsf{m}'} \mathcal{M}^{\mathsf{m}'\mathsf{n}'} J^{\mu(1)}_{\mathsf{n}'} = \frac{1}{2} \big(g_{AC} k^C{}_{\mathsf{m}'} \widehat{\mathcal{D}}_\mu \phi^A\big) \mathcal{M}^{\mathsf{m}'\mathsf{n}'} \big(g_{BD} k^D{}_{\mathsf{n}'} \widehat{\mathcal{D}}^\mu \phi^B\big)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\widehat{\mathcal{D}}_\mu\phi^A\widehat{\mathcal{D}}^\mu\phi^B\Big[g_{A\mathsf{m}'}\mathcal{M}^{\mathsf{m}'\mathsf{n}'}g_{\mathsf{n}'B}\Big]\,, && (17\text{a}) \\
\therefore\quad e^{-1}\mathscr{L}_{(\widehat{\mathcal{D}}\phi)^2} &\equiv -\frac{1}{2}g_{AB}\widehat{\mathcal{D}}_\mu\phi^A\widehat{\mathcal{D}}^\mu\phi^B + \frac{1}{2}J^{(1)}_{\mu\mathsf{m}'}\mathcal{M}^{\mathsf{m}'\mathsf{n}'}J^{\mu(1)}_{\mathsf{n}'} \equiv -\frac{1}{2}\mathcal{G}_{AB}\widehat{\mathcal{D}}_\mu\phi^A\widehat{\mathcal{D}}^\mu\phi^B\,, && (17\text{b}) \\
\mathcal{G}_{AB} &= g_{AB} - g_{A\mathsf{m}'}\mathcal{M}^{\mathsf{m}'\mathsf{n}'}g_{\mathsf{n}'B}\,. && (17\text{c})
\end{aligned}
$$

つまり $\phi^{A'}$ が $B_{\mu\nu\mathsf{m}'}$ に双対変換されたことを意味している。

4 まとめと議論

4.1 まとめ

Embedding tensors を具体的に固定する前と後での dynamical/auxiliary fields の変遷をまとめる:

fields		固定前	固定後	個数
W_μ^Λ	W_μ^I	dynamical	(gauged away by $\delta B^I_{\mu\nu}$)	$n_{\rm T}$
	W_μ^U	dynamical	dynamical	$(n_{\rm V}+1)-n_{\rm T}$
$W_{\mu\Lambda}$	$W_{\mu I}$	auxiliary	dynamical	$n_{\rm T}$
	$W_{\mu U}$	auxiliary	(integrated-out to make $B_{\mu\nu\mathsf{m}'}$ dynamical)	$(n_{\rm V}+1)-n_{\rm T}$
$B_{\mu\nu\mathsf{a}}$	$B_{\mu\nu\mathsf{a}'}$	auxiliary	(integrated-out to make $W_{\mu I}$ dynamical)	$n_{\rm T}$
	$B_{\mu\nu\widehat{\mathsf{a}}}$	auxiliary	(decoupled)	$n_{\mathsf{a}}-n_{\rm T}$
$B_{\mu\nu\mathsf{m}}$	$B_{\mu\nu\mathsf{m}'}$	auxiliary	dynamical	$n_{\rm T}$
	$B_{\mu\nu\widehat{\mathsf{m}}}$	auxiliary	(decoupled)	$n_{\mathsf{m}}-n_{\rm T}$
ϕ^A	$\phi^{A'}$	dynamical	(dualized to $B_{\mu\nu\mathsf{m}'}$)	$n_{\rm T}$
	$\phi^{\widehat{A}}$	dynamical	dynamical	$4(n_{\rm H}+1)-n_{\rm T}$

$\mathsf{a}=1,\ldots,n_{\mathsf{a}}$ with $n_{\mathsf{a}}=\dim G_{\rm symp}$, $\mathsf{m}=1,\ldots,n_{\mathsf{m}}$ with $n_{\mathsf{m}}=\dim G_{\rm hyper}$

さらに、ここまでの解析で得られた conformal Lagrangian の各項を明記して整理しよう:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}_{\rm total} &= \mathscr{L}^{(1)}_{\rm kin} + \mathscr{L}_{\rm aux} + \mathscr{L}_{\rm conf} + \mathscr{L}^{(1)}_{\rm H,conf} + \mathscr{L}_{\rm g} + \mathscr{L}_{\rm g^2} \\
&\quad + \mathscr{L}_{\rm V1} + \mathscr{L}^{(2)}_{{\rm H,conf},J} + \mathscr{L}_B + \mathscr{L}_{JH} + \mathscr{L}_{J2} + \mathscr{L}_{{\rm V2}-W}\,, && (18\text{a}) \\
e^{-1}\mathscr{L}^{(1)}_{\rm kin} &= -\mathrm{i}\Omega_{MN}\mathcal{D}_\mu X^M\mathcal{D}^\mu\overline{X}^N + \frac{\mathrm{i}}{4}\Omega_{MN}\Big[\overline{\Omega}^{iM}\not{\mathcal{D}}\Omega^N_i - \overline{\Omega}^M_i\not{\mathcal{D}}\Omega^{iN}\Big] \\
&\quad - \frac{\mathrm{i}}{2}\Omega_{MN}\Big[\overline{\psi}{}^i_\mu\not{\mathcal{D}}\overline{X}^M\gamma^\mu\Omega^N_i - \overline{\psi}_{\mu i}\not{\mathcal{D}}X^M\gamma^\mu\Omega^{iN}\Big]\,, && (18\text{b}) \\
e^{-1}\mathscr{L}_{\rm aux} &= \frac{1}{8}N^{\Lambda\Sigma}\Big[N_{\Lambda\Gamma}Y^\Gamma_{ij} + \frac{\mathrm{i}}{2}\big(F_{\Lambda\Gamma\Pi}\overline{\Omega}{}^\Gamma_i\Omega^\Pi_j - \overline{F}_{\Lambda\Gamma\Pi}\overline{\Omega}{}^{k\Gamma}\Omega^{l\Pi}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{jl}\big)\Big]
\end{aligned}
$$

$$\times\Big[N_{\Sigma\Xi}Y^{ij\Xi}-\frac{\mathrm{i}}{2}\big(\overline{F}_{\Sigma\Xi\Delta}\overline{\Omega}^{i\Xi}\Omega^{j\Delta}-F_{\Sigma\Xi\Delta}\overline{\Omega}^{\Xi}_{m}\Omega^{\Delta}_{n}\varepsilon^{im}\varepsilon^{jn}\big)\Big]\,, \tag{18c}$$

$$\begin{aligned}
e^{-1}\mathscr{L}_{\rm conf} \;=\;& \frac{1}{6}K\Big[R+\Big(e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\overline{\psi}^{i}_{\mu}\gamma_{\nu}\mathcal{D}_{\rho}\psi_{\sigma i}-\overline{\psi}^{i}_{\mu}\psi^{j}_{\nu}T^{\mu\nu}{}_{ij}+(\text{h.c.})\Big)\Big]\\
&-K\Big[D+\frac{1}{2}\overline{\psi}^{i}_{\mu}\gamma^{\mu}\chi_{i}+\frac{1}{2}\overline{\psi}_{\mu i}\gamma^{\mu}\chi^{i}\Big]\\
&-\Big[K_{\Lambda}\Big(\frac{1}{4}e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\overline{\psi}_{\mu i}\gamma_{\nu}\psi^{i}_{\rho}\mathcal{D}_{\sigma}X^{\Lambda}+\frac{1}{48}\overline{\psi}_{\mu i}\gamma^{\mu}\gamma_{\rho\sigma}\Omega^{\Lambda}_{j}T^{\rho\sigma ij}\Big)+(\text{h.c.})\Big]\\
&-\Big[K_{\Lambda}\Big(\frac{1}{3}\overline{\Omega}^{\Lambda}_{i}\gamma^{\mu\nu}\mathcal{D}_{\mu}\psi^{i}_{\nu}-\overline{\Omega}^{\Lambda}_{i}\chi^{i}\Big)+(\text{h.c.})\Big]\,,
\end{aligned} \tag{18d}$$

$$\begin{aligned}
e^{-1}\mathscr{L}^{(1)}_{\rm H,conf} \;=\;& \frac{1}{6}\chi\Big[R+\Big(e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\overline{\psi}^{i}_{\mu}\gamma_{\nu}\mathcal{D}_{\rho}\psi_{\sigma i}-\frac{1}{4}\overline{\psi}^{i}_{\mu}\psi^{j}_{\nu}T^{\mu\nu}{}_{ij}+(\text{h.c.})\Big)\Big]\\
&+\frac{1}{2}\chi\Big[D+\frac{1}{2}\overline{\psi}^{i}_{\mu}\gamma^{\mu}\chi_{i}+\frac{1}{2}\overline{\psi}_{\mu i}\gamma^{\mu}\chi^{i}\Big]-\frac{1}{4}W_{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta}\,(\overline{\zeta^{\alpha}}\gamma_{\mu}\zeta^{\beta})(\overline{\zeta^{\gamma}}\gamma^{\mu}\zeta^{\delta})\\
&-\chi_{A}\Big[\gamma^{A}_{i\overline{\alpha}}\Big(\frac{2}{3}\overline{\zeta^{\alpha}}\gamma^{\mu\nu}\mathcal{D}_{\mu}\psi^{i}_{\nu}+\overline{\zeta^{\alpha}}\chi^{i}-\frac{1}{6}\overline{\zeta^{\alpha}}\gamma_{\mu}\psi_{\nu i}T^{\mu\nu ij}\Big)+(\text{h.c.})\Big]\\
&+\Big[\frac{1}{16}\overline{\Omega}_{\alpha\beta}\overline{\zeta}^{\alpha}\gamma^{\mu\nu}T_{\mu\nu ij}\varepsilon^{ij}\zeta^{\beta}-\frac{1}{2}\overline{\zeta}^{\alpha}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\psi_{\mu i}\big(\overline{\psi}^{i}_{\nu}G_{\alpha\overline{\beta}}\zeta^{\overline{\beta}}+\varepsilon^{ij}\overline{\Omega}_{\alpha\beta}\overline{\psi}_{\nu j}\zeta^{\beta}\big)+(\text{h.c.})\Big]\,,
\end{aligned} \tag{18e}$$

$$\begin{aligned}
e^{-1}\mathscr{L}_{\rm g} \;=\;& -\frac{1}{2}\mathrm{g}\Big[\mathrm{i}\Omega_{MQ}T_{PN}{}^{Q}\varepsilon^{ij}\overline{X}^{N}\overline{\Omega}^{M}_{i}\big(\Omega^{P}_{j}+\gamma^{\mu}\psi_{\mu j}X^{P}\big)+(\text{h.c.})\Big]\\
&+2\mathrm{g}\Big[k_{AM}\gamma^{A}_{i\overline{\alpha}}\varepsilon^{ij}\overline{\zeta^{\alpha}}\big(\Omega^{M}_{j}+\gamma^{\mu}\psi_{\mu j}X^{M}\big)+(\text{h.c.})\Big]\\
&+\mathrm{g}\Big[\mu^{ij}{}_{M}\overline{\psi}_{\mu i}\big(\gamma^{\mu}\Omega^{M}_{j}+\gamma^{\mu\nu}\psi_{\nu j}X^{M}\big)+(\text{h.c.})\Big]\\
&+2\mathrm{g}\Big[\overline{X}^{M}T_{M}{}^{\gamma}{}_{\alpha}\overline{\Omega}_{\beta\gamma}\overline{\zeta}^{\alpha}\zeta^{\beta}+X^{M}T_{M}{}^{\overline{\gamma}}{}_{\overline{\alpha}}\Omega_{\overline{\beta}\overline{\gamma}}\overline{\zeta^{\alpha}}\zeta^{\overline{\beta}}\Big]\\
&-\frac{1}{4}\mathrm{g}\Big[F_{\Lambda\Sigma\Gamma}\mu^{ij\Lambda}\overline{\Omega}^{\Sigma}_{i}\Omega^{\Gamma}_{j}+\overline{F}_{\Lambda\Sigma\Gamma}\mu_{ij}{}^{\Lambda}\overline{\Omega}^{i\Sigma}\Omega^{j\Gamma}\Big]\\
&+\mathrm{g}\,Y^{ij\Lambda}\Big[\mu_{ij\Lambda}+\frac{1}{2}(F_{\Lambda\Sigma}+\overline{F}_{\Lambda\Sigma})\mu_{ij}{}^{\Sigma}\Big]\,,
\end{aligned} \tag{18f}$$

$$\begin{aligned}
e^{-1}\mathscr{L}_{\mathrm{g}^2} \;=\;& \mathrm{i}\mathrm{g}^{2}\Omega_{MN}\big(T_{PQ}{}^{M}X^{P}\overline{X}^{Q}\big)\big(T_{RS}{}^{N}\overline{X}^{R}X^{S}\big)-2\mathrm{g}^{2}k^{A}{}_{M}k^{B}{}_{N}g_{AB}X^{M}\overline{X}^{N}\\
&-\frac{1}{2}\mathrm{g}^{2}N_{\Lambda\Sigma}\,\mu_{ij}{}^{\Lambda}\,\mu^{ij\Sigma}\,,
\end{aligned} \tag{18g}$$

$$\begin{aligned}
e^{-1}\mathscr{L}_{\rm V1} \;=\;& -\frac{1}{4}\Big[\widehat{\mathcal{I}}^{IJ}\,\widehat{\mathcal{F}}_{\mu\nu I}\widehat{\mathcal{F}}^{\mu\nu}_{J}+2\widehat{\mathcal{I}}^{I}{}_{V}\,\widehat{\mathcal{F}}_{\mu\nu I}\widehat{\mathcal{F}}^{\mu\nu V}+\widehat{\mathcal{I}}_{UV}\,\widehat{\mathcal{F}}^{U}_{\mu\nu}\widehat{\mathcal{F}}^{\mu\nu V}\Big]\\
&-\frac{\mathrm{i}}{8}e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\Big[\widehat{\mathcal{R}}^{IJ}\,\widehat{\mathcal{F}}_{\mu\nu I}\widehat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma J}+2\widehat{\mathcal{R}}^{I}{}_{V}\,\widehat{\mathcal{F}}_{\mu\nu I}\widehat{\mathcal{F}}^{V}_{\rho\sigma}+\widehat{\mathcal{R}}_{UV}\,\widehat{\mathcal{F}}^{U}_{\mu\nu}\widehat{\mathcal{F}}^{V}_{\rho\sigma}\Big]\,,
\end{aligned} \tag{18h}$$

$$\begin{aligned}
e^{-1}\mathscr{L}^{(2)}_{{\rm H,conf},J} \;=\;& -\frac{1}{2}\mathcal{G}_{AB}\widehat{\mathcal{D}}_{\mu}\phi^{A}\widehat{\mathcal{D}}^{\mu}\phi^{B}+\Big[-G_{\overline{\alpha}\beta}\overline{\zeta^{\alpha}}\widetilde{\not{\mathcal{D}}}\zeta^{\beta}+\mathcal{G}_{AB}\overline{\gamma}^{iB}_{\alpha}\big(\overline{\zeta}^{\alpha}\gamma^{\rho}\gamma^{\mu}\psi_{\rho i}\big)\widehat{\mathcal{D}}_{\mu}\phi^{A}+(\text{h.c.})\Big]\\
&-\frac{1}{2}e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{ik}\,\mathcal{J}^{kj}{}_{AB}\big(\overline{\psi}^{i}_{\mu}\gamma_{\nu}\psi_{\rho j}\big)\chi^{A}\widehat{\mathcal{D}}_{\sigma}\phi^{B}\,,
\end{aligned} \tag{18i}$$

$$e^{-1}\mathscr{L}_B = -\frac{1}{2\cdot 4!}H_{\mu\nu\rho\mathsf{m}'}\mathcal{M}^{\mathsf{m}'\mathsf{n}'}H^{\mu\nu\rho}_{\mathsf{n}'}\,, \tag{18j}$$

$$e^{-1}\mathscr{L}_{JH} = \frac{\mathrm{i}}{12}e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}J_{\mu\mathsf{m}'}\mathcal{M}^{\mathsf{m}'\mathsf{n}'}H_{\nu\rho\sigma\mathsf{n}'}\,, \tag{18k}$$

$$e^{-1}\mathscr{L}_{J2} = \frac{1}{2}\Big[\big(J^{(2)}_{\mu\mathsf{m}'} + J^{(3)}_{\mu\mathsf{m}'} + (\text{h.c.})\big) + J^{(4)}_{\mu\mathsf{m}'}\Big]\mathcal{M}^{\mathsf{m}'\mathsf{n}'}\Big[\big(J^{\mu(2)}_{\mathsf{n}'} + J^{\mu(3)}_{\mathsf{n}'} + (\text{h.c.})\big) + J^{\mu(4)}_{\mathsf{n}'}\Big]\,, \tag{18l}$$

$$\begin{aligned} e^{-1}\mathscr{L}_{\mathrm{V2}-W} = {} & \widehat{\mathcal{F}}^U_{\mu\nu}\mathcal{O}^{\mu\nu}_U - \frac{1}{2}[\mathcal{I}^{-1}]^{\Lambda\Sigma}\mathcal{O}_{\mu\nu\Lambda}\mathcal{O}^{\mu\nu}_{\Sigma} \\ & + \widehat{\mathcal{I}}^{IJ}\mathcal{O}_{\mu\nu I}\Big[\big(\mathcal{O}^{\mu\nu}_J - \mathcal{I}_{JU}\widehat{\mathcal{F}}^{\mu\nu U}\big) + (r\mathcal{I}^{-1})_J{}^K\big(\widehat{\mathcal{F}}^{\mu\nu}_K - \mathcal{R}_{KU}\widehat{\mathcal{F}}^{\mu\nu U}\big)\Big] \\ & + \frac{\mathrm{i}}{2}e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\widehat{\mathcal{I}}^{IJ}\mathcal{O}_{\mu\nu I}\Big[\big(\widehat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma J} - \mathcal{R}_{JU}\widehat{\mathcal{F}}^U_{\rho\sigma}\big) - (r\mathcal{I}^{-1})_J{}^K\big(\mathcal{O}_{\rho\sigma K} - \mathcal{I}_{KU}\widehat{\mathcal{F}}^U_{\rho\sigma}\big)\Big] \\ & - \frac{\mathrm{i}}{32}\mathrm{g}^2 e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\Theta^{U\mathsf{m}'}\Theta_U{}^{\mathsf{n}'}B_{\mu\nu\mathsf{m}'}B_{\rho\sigma\mathsf{n}'}\,. \end{aligned} \tag{18m}$$

途中で登場する表記で、[1] では定義されないものは次の通り:

$$-G_{\overline{\alpha}\beta}\overline{\zeta^{\alpha}}\widetilde{\not{\mathcal{D}}}\zeta^{\beta} \equiv -G_{\overline{\alpha}\beta}\overline{\zeta^{\alpha}}\widehat{\not{\mathcal{D}}}\zeta^{\beta} + J^{(1)}_{\mu\mathsf{m}'}\mathcal{M}^{\mathsf{m}'\mathsf{n}'}J^{\mu(2)}_{\mathsf{n}'}\,, \tag{19a}$$

$$\mathcal{J}^{kj}{}_{AB} \equiv J^{kj}{}_{AB} - J^{kj}{}_{A\mathsf{m}'}\mathcal{M}^{\mathsf{m}'\mathsf{n}'}g_{\mathsf{n}'B}\,. \tag{19b}$$

Superconformal symmetry をゲージ固定して、ベクトル多重項とハイパー多重項から適当な数だけ compensating fields を選び出して追い出せば、Poincaré 超重力理論になる (その具体的な処方箋は長くて煩雑なだけなので、ここでは省略)。その時の力学的テンソル場 $B_{\mu\nu\mathsf{m}'}$ は、[4] で議論されたものとみなすことができる。

なお、ここの議論では、スカラー場の住む空間について以外は、local supersymmetry についてさほど深刻に扱わなくても良かった。そのため global supersymmetry についても同様の議論が展開できるだろう。ちなみに global supersymmetry を用いた 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論に embedding tensor を用いた再定式化は、[8] で展開されている。

4.2 議論

元々 $4(n_{\mathrm{H}}+1)$ 個あった ϕ^A のうち、$\phi^{A'}$ が $B_{\mu\nu\mathsf{m}'}$ になった。これらは スカラーテンソル多重項 (もしくは線形多重項) に属すと考えられる [3]。残りは $4(n_{\mathrm{H}}+1)-n_{\mathrm{T}}$ 個ある。さて、まだ共形超重力であるので、[5] で議論される様に一部は hyper-Kähler cone に値をとり、一部は cone over $(3n_{\mathrm{T}}-1)$-dimensional space に値をとるはずである:

$$\phi^A:\quad 4(n_{\mathrm{H}}+1)\ \text{scalars (HKC)} \ = \left\{\begin{array}{ll} \phi^{A'} \ \to \ B_{\mu\nu\mathsf{m}'}: & n_{\mathrm{T}}\ \text{tensors} \\ \phi^{\widehat{A}} \ \to & \left\{\begin{array}{ll} \phi^{\check{A}}: & (3n_{\mathrm{T}}-1)+1\ \text{scalars} \ \to \ L^{ij}_{\mathsf{m}'}(?) \\ \phi^{\widetilde{A}}: & 4(n_{\mathrm{H}}+1)-4n_{\mathrm{T}}\ \text{scalars (HKC)} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

[5] では off-shell なスカラーテンソル多重項を用いているが、[1] で述べられているように、ここの議論でのテンソル場は on-shell である[4]。このため、(18) からスカラーテンソル多重項を「綺麗に」読み取るのは難しい。これは、最初の $4(n_{\rm H}+1)$-次元の hyper-Kähler cone を $4(n_{\rm H}+1-n_{\rm T})$-次元の hyper-Kähler cone と $3n_{\rm T}$-次元の cone geometry に「綺麗に」分割することが容易ではないことと相関がある。

4.3 フラックスコンパクト化との関連

Embedding tensors $\Theta_M{}^{\mathsf{a}}$, $\Theta_M{}^{\mathsf{m}}$ の値ごとに gauged supergravity の様相が異なることと、高次元超重力理論のコンパクト化で登場するフラックスの期待値が 4 次元の deformation parameters となる [10] ことは、深い関係があるだろうと考えられている。しかし現在のところ、フラックスコンパクト化のシナリオにおいて、非可換ゲージ群と結合する超重力理論は導出できていない。この状況を打開するため、フラックスの期待値と embedding tensor (の一部) を同一視し、G_0 変換を施すことで、既存のフラックスコンパクト化では見えなかった構造を見出そうとするのが大きな目標である。今回の議論はこの課題の基礎的な構造を理解することであった。

謝辞

この課題を進めるにあたり、様々なレベルで議論に付き合って下さった Bernard de Wit さんと Maaike van Zalk さん (ユトレヒト大学) に感謝致します。

References

[1] B. de Wit and M. van Zalk, JHEP **1110** (2011) 050 [arXiv:1107.3305 [hep-th]].

[2] H. Samtleben, Class. Quant. Grav. **25** (2008) 214002 [arXiv:0808.4076 [hep-th]].

[3] U. Theis and S. Vandoren, JHEP **0304** (2003) 042 [hep-th/0303048].

[4] R. D'Auria, L. Sommovigo and S. Vaula, JHEP **0411** (2004) 028 [arXiv:hep-th/0409097].

[5] B. de Wit and F. Saueressig, JHEP **0609** (2006) 062 [arXiv:hep-th/0606148].

[6] B. de Wit, B. Kleijn and S. Vandoren, Nucl. Phys. B **568** (2000) 475 [arXiv:hep-th/9909228].

[7] B. de Wit, H. Samtleben and M. Trigiante, JHEP **0509** (2005) 016 [arXiv:hep-th/0507289].

[8] M. de Vroome and B. de Wit, JHEP **0708** (2007) 064 [arXiv:0707.2717 [hep-th]].

[9] B. de Wit and H. Samtleben, JHEP **0808** (2008) 015 [arXiv:0805.4767 [hep-th]].

[10] D. Cassani, JHEP **0806** (2008) 027 [arXiv:0804.0595 [hep-th]].

[4] on-shell 条件を課さないと tensor hierarchy [9] が深刻になる。