佐々木構造の変形と超重力理論の厳密解

安井　幸則　(大阪市立大学)

◇ フラックスを含む SUGRA 時空の分類

- 高次元ブラックホール時空の隠れた対称性

Houri-Kubiznak-Warnick-Y.Y. arXiv:1203.0393

- 佐々木構造の変形

Houri-Takeuchi-Y.Y. arXiv:1207.0247

◇ 背景

(A) D 次元 Ads Kerr ブラックホール時空 $R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$

	mass	rotation	NUT	Λ	parameter
Myers-Perry (1986)	◯	◯	×	0	1+[(D-1)/2]
Gibbons-Lü-Page-Pope (2004)	◯	◯	×	non-zero	2+[(D-1)/2]
Chen-Lü-Pope (2006)	◯	◯	◯	non-zero	D

- 隠れた対称性 = Conformal Killing-Yano tensor (CKY)

Tachibana-Kashiwada (1968)

- D 次元 AdS Kerr 時空は CKY を許すただ一つの解

Houri-Oota-Y.Y., Krtous-Frolov-Kubiznak (2007)

(B) 佐々木多様体=Kähler 多様体の奇数次元類似物

- Toric Sasaki-Einstein 多様体 $M_5 = Y^{pq},\ L^{abc},\ M_7 = \cdots$

  Gauntlett et.al(2004), Cvetic et.al (2005)

$$AdS_5 \times M_5 \quad \text{in IIB}, \qquad AdS_4 \times M_7 \quad \text{in M}$$

- 隠れた対称性= Hamiltonian 2-form

  Apostolov-Calderbank et.al (2004)

(A) $\Longrightarrow$ (B): Euclid 化+“BPS 極限”

Hashimoto-Sakaguchi-Y.Y. (2004)

$\diamond$ Generalized Conformal Killing-Yano tensor (GCKY)

GCKY $\supset$ CKY + Hamiltonian 2-form

Kubiznak-Kunduri-Y.Y. (2009)

GCKY=超重力理論のブラックホール時空の隠れた対称性

- D=5 Minimal Gauged SUGRA [Chong-Cvetic-Lü-Pope 2005]
- ヘテロ型SUGRA [4次元: Sen 1992, 任意次元：Chow 2010]
- D=6,7 Gauged SUGRA [Chow 2008,2009]

◇ 目次

1. 変形されたSasaki多様体 (Sasaki with torsion)

   GCKYを許す奇数次元時空

2. 具体的な例題

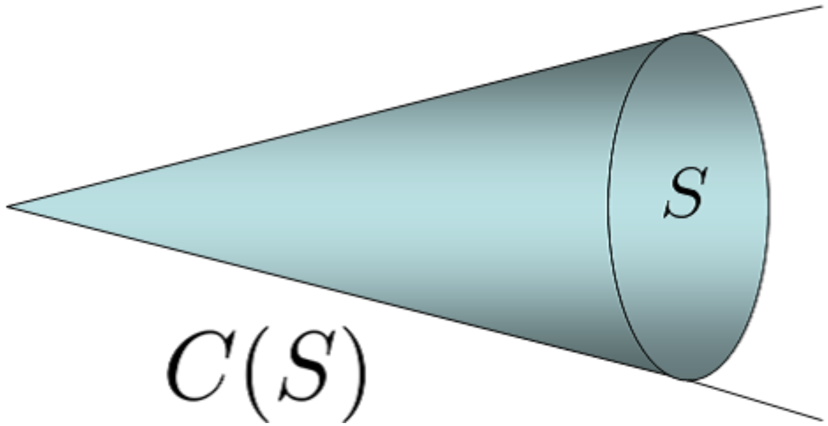
3. 5-dim. minimal gauged SUGRA　および　11-dim. SUGRAの厳密解

   Y^{pq}, L^{abc}の拡張

4. GCKY時空の分類問題の現状まとめ

1. 変形されたSasaki多様体

定義： 錐 $(C(S), \bar{g} = dr^2 + r^2 g)$ がKäher with torsion (KT) となるRiemann多様体 (S, g) をSasaki with torsion (ST) と呼ぶ



KTとは

- 一般にKählerではない
- Riemann計量と複素構造とトーションの組　(g, J, T)

計量gは複素構造Jと両立： $g(JX, JY) = g(X, Y)$

トーションTは $\nabla^T g = 0, \quad \nabla^T J = 0$ から一意的にさだまる3-形式

(Bismut トーション 1989)

- 特に$T = 0$のときKTはKähler $\Longrightarrow$ Sasaki with torsion (ST) はSasakiになる

◇ KT ⊂ ST ⊂ KT

右のKT: 錐のKT (1次元上)

左のKT: LocalなKT (1次元下)

KT錐からST上に種々の構造が誘導される

1. Killing vector : $\xi = J(r\partial_r)$ (Reeb vector)

2. GCKY : $\eta \equiv$ dual 1-form of ξ で生成

3. Almost Normal Contact 構造 : (ξ, η, Φ) (ベクトル, 1-形式, (1,1)-テンソル)

$$\eta(\xi) = 1, \qquad \Phi \circ \Phi = -1 + \eta \otimes \xi$$

$$J(X) = \Phi(X) - r\eta(X)\partial_r \quad \text{(錐に複素構造)}$$

- 1960-70年代に研究されたSasaki多様体の拡張

quasi-Sasaki, nealy-Sasaki, trans-Sasaki, α-Sasaki 等々に対しKT錐から統一的視点を提供.

Conti-Madsen arXiv：1207.3072

定義：Sasaki with torsion (ST)とは, Almost Normal Contact 構造 (ξ, η, Φ) を許し, かつξがKillingとなるRiemann多様体

- ST の両者の定義は同値
- 両者のトーション接続は異なる

  前者はKTを保つトーション接続（Bismut 接続), 後者はAlmost Normal Contact 構造を保つトーション接続(Friedrich-Ivanov 2003)
- 奇数次元のany connected compact Lie groupはST (cf. SU(2) for Sasaki)
- ST reduction （G-moment mapの構成）

Halmagyi-Pilch-Warner [1207.4325],

Gabella-Martelli-Passaias-Sparks [1207.3082]

New SUSY solutions $AdS_4 \times S^7_\lambda$ with flux in M theory

彼らの S^7_λ は $\lambda = 1/\sqrt{2}, \sqrt{3/2}$ で ST である

ST は

- **定義が簡単**
- **SUGRA 解の “Ansatz”**
- **幾何学的にも興味深い**

2. Sasaki with torsion (ST) の例題

2n次元AdS BH (Gibbons-Lü-Page-Pope 2005)

Euclid + “BPS” 極限

$$g^{(2n)} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\mathrm{d}x_\mu^2}{Q_\mu} + \sum_{\mu=1}^{n} Q_\mu \left(\sum_{k=1}^{n} \sigma_{k-1}(\hat{x}_\mu) d\psi_k \right)^2$$

$$Q_\mu = \frac{X_\mu(x_\mu)}{U_\mu}, \quad U_\mu = \prod_{\nu \neq \mu} (x_\mu - x_\nu)$$

σ_k は基本対称多項式 $\sigma_0 = 1, \quad \sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \cdots$

◇ Hamiltonian 2-form を許す一意的なトーリック Kähler metric

(Apostolov et.al 2004)

1次元加えて$D = 2n + 1$次元計量

$$g^{(2n+1)} = g^{(2n)} + \eta \otimes \eta, \quad \eta = \sum_{k=0}^{n} \sigma_k d\psi_k + A$$

ここでAは1-formで1変数の任意関数N_μを含む

$$A = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{N_\mu}{U_\mu} \sum_{k=1}^{n} \sigma_{k-1}(\hat{x}_\nu) d\psi_k, \quad N_\mu = N_\mu(x_\mu)$$

♣ $A = 0$のときηはContact形式, $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$

$\Longrightarrow$ Sasaki-Einstein計量 Y^{pq}, L^{abc} $(n = 2)$

♣ $A \neq 0$のときηはAlmost Contact形式, $\eta \wedge (d\eta)^n = 0$ on some points

$\Longrightarrow$ Sasaki with torsion 計量 (錐がKT)

2種類の隠れた対称性 (GCKY)

- 一つは一般の Sasaki with torsion (ST) に存在
- もう一つは AdS Kerr の CKY に由来するもの

$\Longrightarrow$ 測地線方程式, Klein-Gordon 方程式 (Dirac 方程式）の変数分離を引き起こす

$\diamond$ 反対称 rank-p Conformal Killing-Yano (CKY) (立花-柏田 1968):

$$\nabla_a h_{bc_1\cdots c_{p-1}} + \nabla_b h_{ac_1\cdots c_{p-1}} = 2g_{ab}\xi_{c_1\cdots c_{p-1}} + \sum_{i=1}^{p-1}(-1)^i g_{c_i(a}\xi_{b)c_1\cdots\hat{c_i}\cdots c_{p-1}}$$

$$\xi_{c_1\cdots_{p-1}} = \frac{1}{D-p+1}\nabla^a h_{ac_1\cdots c_{p-1}}$$

トーションT $T=(T_{abc})$ を持つ接続 $(\Gamma^T)^a{}_{bc}=\Gamma^a{}_{bc}+T^a{}_{bc}$ で CKY 方程式の共偏微分をおきかえる

$\Longrightarrow$ **一般化された CKY (GCKY)**

◇ **トーションの選択は？**

(A) KT 錐の Bismut トーション

$$T_B=2\sum_{\mu=1}^{n}\partial_\mu H e^\mu\wedge e^{\hat\mu}\wedge\eta,\quad H=\sum_{\mu=1}^{n}\frac{N_\mu}{U_\mu}$$

このとき GCKY として

$$\alpha^{(k)}\equiv(d\eta)^k,\quad \eta\wedge(d\eta)^k\quad(k=0,1,\cdots,n)$$

$\alpha^{(k)}$ は Special GCKY(一般化された Killing spinor の 2 次形式)

(B) 新しいトーション

$$T = T_B + 2\omega \wedge \eta + \sum_{\mu \neq \nu} \frac{1}{\sqrt{x_\mu} + \sqrt{x_\nu}} \left(\frac{Q_\nu}{x_\nu} \right)^{1/2} e^\mu \wedge e^{\hat{\mu}} \wedge e^{\hat{\nu}}$$

(a) $\beta^{(k)} \equiv \eta \wedge h^k \quad (k = 1, \cdots, n)$ は GCKY

ここで $h \equiv \sum_{\mu=1}^{n} \sqrt{x_\mu} e^\mu \wedge e^{\hat{\mu}}$

(b) $f^{(k)}_{ab} \equiv \beta^{(k)}_{a\cdots}\beta^{(k)}_{b\cdots} \quad (k = 1, \cdots, n)$ は Killing テンソル（一般化されたカーター定数）

3. SUGRAの厳密解

3-1. 5-dim. Minimum Gauged Supergravity

$$\mathcal{L}_5 = *(R-\Lambda) - \frac{1}{2}F_{(2)} \wedge *F_{(2)} + \frac{1}{3\sqrt{3}}F_{(2)} \wedge F_{(2)} \wedge A_{(1)}$$

運動方程式は

$$R_{ab} = -4g_{ab} + \frac{1}{2}\left(F_{(2)ac}F_{(2)b}{}^{c} - \frac{1}{6}g_{ab}F_{(2)cd}F_{(2)}{}^{cd}\right)$$

$$d * F_{(2)} - \frac{1}{\sqrt{3}}F_{(2)} \wedge F_{(2)} = 0$$

◇ Ansatz :未知関数 $X(x), Y(y)$

$$g^{(5)} = \text{5-dim. ST}$$

$$= \frac{x-y}{X-Y}dx^2 + \frac{y-x}{Y-X}dy^2 + \cdots$$

$$F_{(2)} = *T_B$$

◇ 解 (パラメータ $c_1, c_2, b_1, b_2, Q_1, Q_2$)

$$X(x) = -4x^3 + c_2x^2 + c_1x + b1 - 8Q_1x, \quad Y(y) = -4y^3 + c_2y^2 + c_1y + b2 - 8Q_2y$$

3-2. 11-dim. Supergravity

$$\mathcal{L}_{11} = *R - \frac{1}{2}F_{(4)} \wedge *F_{(4)} + \frac{1}{6}F_{(4)} \wedge F_{(4)} \wedge A_{(3)}$$

運動方程式は

$$R_{ab} = \frac{1}{12}\left(F_{(4)acde}F_{(4)b}{}^{cde} - \frac{1}{144}g_{ab}F_{(4)cdef}F_{(4)}{}^{cdef}\right)$$

$$d * F_{(4)} - \frac{1}{\sqrt{3}}F_{(4)} \wedge F_{(4)} = 0$$

◇ Ansatz :未知関数 $X_\mu(x_\mu)$ $(\mu = 1, 2, \cdots, 5)$

$$X_\mu = \sum_{i=1}^{5} c_i x_\mu^i + b_\mu \qquad (c_i,\ b_\mu \text{は任意定数})$$

3-3. 大域的な構造

Sasaki-Einstein 多様体　Y^{pq} (Gautlett, et.al 2004)

- T^3 作用 (トーリック)
- Kähler 商　$C^3//U(1) = S^2 \times S^3$
- トーリックデータから Reeb ベクトルの決定

  Z-minimization or a-maximization
- トーリックデータから Sasaki-Einstein 多様体　(Futaki-Ono-Wang 2006)

$\Longrightarrow$ トーリック ST 多様体 (Y^{pq} の一般化)

5次元SUGRA解: $g_5 = g_4 + F(x)(d\alpha - f(x)(d\psi - \cos\theta d\phi)^2$

$$g_4 = (\xi - x)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + \frac{dx^2}{Q(x)} + \frac{4\xi^2 Q(x)}{F(x)}(d\psi - \cos\theta d\phi)^2$$

$$Q(x) = \frac{4x^3 + (1 - 12\xi)x^2 + (8q - 2\xi + 12\xi^2)x + k}{\xi - x}$$

$$F(x) = Q(x) + 4\left(x + \frac{q}{x - \xi}\right)^2$$

$$f(x) = \frac{Q(x) + 4\left(x + \frac{q}{x-\xi}\right)\left(x - \xi + \frac{q}{x-\xi}\right)}{F(x)}$$

◇ q, ξ, k はパラメータ

適切にパラメータを選ぶと

- g_4 は S^2 上の S^2 束に拡張 (Chern number n)
- g_5 は S^2 上の S^2 束上の S^1 束$=\mathrm{S}^2 \times \mathrm{S}^3$ (Chern number p, q)

◇ **合計 3 つの整数 (n, p, q) を含む計量 Y^{npq}**

- Infinite series of simply connected spin ST
- $Y^{2pq} = Y^{pq}$
- ST を保つ T^3-作用がある (トーリック)

4. GCKY時空の分類問題まとめ

(I) Conformal Killing-Yano (CKY)

=真空の高次元ブラックホール時空の隠れた対称性

- Kerr-NUT AdS 時空の一意性
- 底空間にKähler, ファイバーにKerr-NUT AdS 時空

(II) Generalized CKY =超重力理論の隠れた対称性

(a) 偶数次元

- Hamiltonian 2-form を許すKähler多様体 (Apostolov et.al)
- Carged Kerr ブラックホール時空 (Houri-Kubiznak-Warnick-Y.Y)
- Kähler with torsion (KT), Calabi-Yau with torsion (CT) (同上)

(b) **奇数次元**

- Almost Normal Contact (Friedrich Ivanov)
- Sasaki with torsion (ST) (**今回の話**)

◇ GCKY **は** Killing **では捕えることのできない新しい対称性**

◇ **超重力理論の厳密解に** "Ansatz" **を提供**

◇ $AdS_5 \times ST_5$ in IIB, $AdS_4 \times ST_7$ in M