測定理論から見た超選択則

Superselection rules derived from the measurement theory

谷村 省吾
名古屋大学大学院情報科学研究科

素粒子論研究（電子版） Vol. 14 (2013) No. 5
（2013 年 2 月 12 日 受理）

超選択則は，量子力学の理論に現れる自己共役演算子が，原理的に測定可能な物理量と対応するための必要条件である．わざわざこのような条件を言うのは，測定可能物理量と対応しない自己共役演算子が実際にあるからである．超選択則は天下り的な要請と思われがちだが，本論文では測定過程の力学における対称性の帰結として超選択則を演繹する．また，不確定性関係と超選択則の関係についても検討し，両者は見かけが似ているが論理的には無関係であることを示す.

1 問題提起

1.1 経緯

多くの物理学者にとって**超選択則** (superselection rule) はなじみが薄い概念かもしれない．また，超選択則はいろいろな述べ方があり，基本的な表現と派生的な表現とが混同されることがあり，そのことが超選択則の意味を取り違えるもとになっているようである [1, 2].

超選択則の一つの言い方として「状態ベクトルの重ね合わせの原理の例外的禁止則」という表現がある．例えば,「真空状態と光子 1 個状態の重ね合わせ状態 $|\mathrm{vac}\rangle + |\gamma\rangle$ は実現し得るが, 真空状態と電子 1 個状態の重ね合わせ状態 $|\mathrm{vac}\rangle + |\mathrm{e}\rangle$ は物理的に実現されない．このように, Hilbert 空間の線形性の公理を無制限に使ってはいけない」という言い方が超選択則の「まずい」表現である．歴史的に見ても，Wick, Wightman, Wigner が初めて超選択則を言い出したときには，このようなまずい表現ではなかったのだが [3, 4, 5],「重ね合わせの禁止則」は超選択則の結果の覚え方としては当たっている面があり，それがいつの間にか超選択則の意味内容そのものとすり替えられてしまっている.

私自身の経験では，超選択則の解説は量子力学や場の量子論のごく一部の本でしか見たことがなく，しかも取って付けたようなルールのような印象を受けていた．超選択則の物理学的意義を小嶋泉氏との議論や氏の著作 [6] から知り，DHR 解析 (Doplicher-Haag-Roberts analysis) という理論 [7] で超選択則の数学的位置づけがなされていることも教えていただいたが，それが超選択則の唯一の導出・正当化方法なのだろうかと思っていた.

しかし，代数的量子論について解説記事を書き，量子論全体について考えを整理していく中で，超選択則の意味についても反省する機会を得た．私自身，とくに超選択則の再定式化を目論んで代数的量子論を勉強していたのではないが，代数的量子論と量子測定理論の考え方にな

じんでいくうちに,「超選択則は測定過程という物理的・力学的過程の構造から論理的に導かれるものであり，そういう視点に立てば超選択則の本質が平明に理解できる」と思い立つに至った [8, 9, 10]．本稿では，そういう解説をする．

1.2 物理量の測定可能性と状態の準備可能性

超選択則の導入を動機付けるために，量子力学の普及型の定式化を概観し，物理量の測定に関わる問題点を指摘しよう．通常の量子力学では，物理系の状態は Hilbert 空間の単位ベクトル（単位射線）で表され，測定可能な物理量は Hilbert 空間上の自己共役演算子（$A^\dagger = A$ を満たす演算子 A）で表されることになっている [11]．

ここで,「測定可能な物理量は自己共役演算子で表される」という命題はおおむね妥当だが,物理学の立場から見れば粗雑すぎる主張である．物理学者なら，実際に測られている重要な測定値が自己共役演算子の固有値とも期待値とも言えないような例をいくつも見つけられる．

例えば，各種の素粒子の平均寿命が測定されているが,「素粒子の寿命」を表す自己共役演算子があるわけではない．素粒子の寿命や，複合粒子の励起状態の寿命に関する固有値・固有状態や，異なる寿命の重ね合わせ状態といった概念はナンセンスであり，平均寿命が定義されるだけである．また，素粒子の崩壊モードの分岐比という数値も，実測されてはいるが，自己共役演算子の固有値や期待値ではない．

電子やミュー粒子の異常磁気モーメント（いわゆる $g-2$ 因子）は，理論計算も実測もされているが，$g-2$ という演算子があって，測定するたびに $g-2$ の固有値がある確率分布で検出されるわけではないし，$g-2$ の測定によって波束の収縮が起こっているわけでもない．QED のハミルトニアンに g というパラメータが入っているわけでもないので，$g-2$ の測定は演算子の定義式に含まれるパラメータの推定問題でもない．

また，幾何学的位相と呼ばれるものも測られてはいるが，幾何学的位相を表す自己共役演算子の固有値や期待値を測っているとは言い難い．また，温度や比熱や電気抵抗を表す自己共役演算子や固有値があるとも思えない．例えば，物質の電気伝導度を計算するための中野・久保の公式というものがあるが，単一の自己共役演算子の期待値を計算するのではなく，異なる時刻の電流演算子の積の期待値という，直接に測れるとは思えないような数量を使って電気伝導度を計算している．

このように現実の物理で行われている測定にはじつに多様な様式があり，すべての測定を一律に特徴付けるような公理系は見つかっていない．また，実際に測られているものすべてがいちいち自己共役演算子と直接対応しているわけでもない．このような問題点は Schrödinger のような量子力学の創始者もとっくの昔に気づいており,「ダイヤモンドの結晶の細片の長さの測定とか，二つの結晶面の間の角度の測定とかいったようなごくありふれた操作に対応するエルミート演算子を見つけることは困難だろう」と 1954 年に述べている [12]．つまり，古典力学の世界ではごく普通に測定されているものが，量子力学の Hilbert 空間・演算子という形式に載かっていない．

さらに，素粒子の intrinsic parity や strangeness のように，メーターの指針の振れなどから

読み取り実測しているというよりは，保存則と矛盾しないように便宜的に値を割り当てているだけの物理量もある．

そもそも「測る」という概念を規定しないことには測定可能物理量の概念も定まらない．本研究では，測定とは何らかの巨視的装置のメーターのようなものから値を読み取る操作だと規定する．その意味では，intrinsic parity や strangeness のような割り当て型の物理量は測定可能の範疇に入れない方がよさそうである．

ここまでの考察の結論は，**実際に測定されている物理量すべてが自己共役演算子で表されるわけではない**というものである.「測定可能物理量ならば自己共役演算子で表される」という命題が現実には成立しないなら，その逆はどうだろうか？ 数学的には Hilbert 空間上の自己共役演算子は無数に存在するが,「任意の自己共役演算子に対応する測定可能物理量があるか？」という問いが立てられる．そして，この問いは否定的に解かれている．つまり，**任意の自己共役演算子に対応する測定可能物理量が必ずあるわけではない**と答えられている．

奇妙な答えだと思われるかもしれないが，1952 年に Wick, Wightman, Wigner は，この事実を認めざるを得ないと結論したのである [3, 4, 5]．1950 年頃，スピン 0 の粒子についてはスカラーと擬スカラーという intrinsic parity の区別をしなければならないことが知られていたが，電子やニュートリノなどのようなスピン $\frac{1}{2}$ の粒子の intrinsic parity はどうすれば実験データから決められるかということが問題になっていた．ところが Dirac 場の parity 変換には位相因子の分だけ不定性がある．彼らは，なぜ parity 変換の位相因子を実験で決められないのか考え，遡(さかのぼ)って，Dirac 場そのものが実測できない物理量であるからだ，ということに気がついた．そして彼らは測定可能な自己共役演算子の特徴付けとして超選択則を定式化したのである．

また，量子力学の理論に現れる Hilbert 空間上の任意の自己共役演算子は測定可能か？という疑問に似た問いとして，**Hilbert 空間の任意の単位ベクトルは物理系の状態として準備可能か？**という疑問も生じる．これら二つの疑問はどちらも，数学的理論の中にある概念は現実に存在するものと必ず対応がつくか？という型の疑問である．物理量の測定可能性と，物理系状態の準備可能性は，互いに関連し合っているが，状態準備可能性についてはここでは深入りしない．

1.3 超選択則とは何か？

任意の自己共役演算子が必ずしも測定可能物理量を表すわけではないとなると，測定可能な自己共役演算子の特徴を知りたくなるが，この問いに対する部分的な解答が超選択則である．**超選択則は，自己共役演算子が測定可能物理量になるための必要条件である．**

超選択則を定式化すると次のようになる．Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ 上の演算子 J がある．J 自身は自己共役とは限らない．$\mathscr{H}$ 上の自己共役演算子 A について，

$$A \text{ が測定可能物理量を表す} \quad \Rightarrow \quad [A, J] = 0 \tag{1}$$

という命題が演算子 J に伴う超選択則である．対偶として，

$$[A, J] \neq 0 \quad \Rightarrow \quad A \text{ は測定可能物理量ではない} \tag{2}$$

が言える．演算子 J を一つ決めるごとに，超選択則が一つ設けられる．この J を**超選択チャージ** (superselection charge) という．

強調しておくが，$[A, J] = 0$ であることは A が測定可能であるための必要条件であって，十分条件ではない．測定可能物理量の必要十分条件はまだわかっていないのが物理学の実情である．

以下の議論で明らかになることだが，じつは物理系と測定器の相互作用次第でさまざまな超選択チャージと超選択則がある．こう言うと，超選択則は，その場次第の，取って付けたような規則と思われそうだが，測定過程の力学の対称性を考えれば，超選択則の存在理由がわかるし，むしろ，測定場面に依存して定まることが超選択則の本質である．そのことは本研究の主定理として述べる．

2　間接測定モデル・完全相関・共変的指針・孤立保存則

主定理を述べるための準備として，間接測定モデル・完全相関・共変的指針・孤立保存則という四つの概念を導入する．

2.1　間接測定モデル

まず間接測定という考え方を確認する．我々が実験で物理量を測るときは，ミクロの対象系の物理量の値を直接知るのではなく，測定器と呼ばれるもう一つの系を持って来て，対象系と相互作用させ，測定器のメーターの値を読み取って，対象系の物理量の値を推定している．

例えば電子の電荷を測定する Millikan の実験では，電子の電荷を直接測っているのではなく，イオン化した油滴の電場中・空気中での速度を測って，それらの測定値から油滴の電荷の値を割り出している．つまり，電場から電子が運動量をもらい，電子から油滴が運動量をもらうといった相互作用の結果生じた油滴の運動状態の変化を観察して，間接的に電子の電荷を推定している．

虚心坦懐に考えてみれば，どのような物理的測定も相互作用を利用した間接測定である．何かを測るとき，我々は，ものに光を当てるとか，ものをばねに吊るすとか，ものに電場や磁場を印加するとか，測ろうとする対象に対して何らかの働きかけをしている．そして，光子が対象系に吸収・散乱されるとか，光子が光電効果で電子をたたき出すとか，荷電粒子が周囲の原子に電離作用を及ぼすとか，対象系と測定系の間の相互作用によって測定器の状態に変化が生じ，その変化を読み取ることを通して我々は対象系の物理量の値を知る．

そのような測定過程は，間接測定モデルという形で定式化される．対象系も測定器も，究極的には量子力学に支配されているミクロな構成要素から成るシステムであるから，対象系も測定器もともに量子力学で記述してよいだろう．

なお，マクロ系である測定器は量子力学に従うとは限らないと主張する人がいるかもしれないが，そのような人を安心させるために，対象系が type I の von Neumann 代数で記述されるならば，測定値の統計的法則は量子力学の間接測定モデルを用いて記述できることを小澤正直氏は証明している [13]．しかし，現実の対象系も測定器も原子や電子でできているのだから量

子力学の適用を疑う必要はないであろう．ゆえに，本研究では，小澤氏の間接測定モデル表現定理に頼らず，対象系も測定器も量子力学を用いて記述するアプローチを採る．

間接測定モデル (indirect measurement model) とは以下のようなものである．対象系は Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ と，測定の対象となる自己共役演算子 A あるいは B を持っているとする．測定器は Hilbert 空間 $\mathscr{K}$ と，直接読み取り可能な物理量を表す自己共役演算子 M を持っているとする．このような M を指針量 (meter, indicator, pointer) と呼ぶ．対象系と測定器の初期状態は独立に準備され，それぞれ $\mathscr{H}$, $\mathscr{K}$ 上の密度行列 ρ, μ で表されるとする．対象系と測定系を併せた複合系の時間発展は測定過程 (measurement process) と呼ばれ，テンソル積空間 $\mathscr{H} \otimes \mathscr{K}$ 上のユニタリ演算子 U で記述される．測定過程後の指針量 $U^\dagger M U$ を状態 $\rho \otimes \mu$ に関して読み取る際の，読み取り値の出現確率と読み取り後の対象系の状態は，Born の確率則によって決まる．すなわち，M のスペクトル分解を

$$M = \int \lambda\, E_M(d\lambda) \tag{3}$$

とすると，測定過程後に M の読み取り値が実数区間 $\Delta \subset \mathbb{R}$ に入る得る確率は

$$P(\Delta) = \mathrm{Tr}_{\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}} \left\{ (I_{\mathscr{H}} \otimes E_M(\Delta)) U (\rho \otimes \mu) U^\dagger \right\} \tag{4}$$

に等しく，この値を得た後の対象系の状態は $\mathscr{H}$ 上の密度行列

$$\rho(\Delta) = \frac{1}{P(\Delta)}\, \mathrm{Tr}_{\mathscr{K}} \left\{ (I_{\mathscr{H}} \otimes E_M(\Delta)) U (\rho \otimes \mu) U^\dagger \right\} \tag{5}$$

で与えられる，とするのが間接測定モデルである．ここで $\mathrm{Tr}_{\mathscr{K}}$ は Hilbert 空間 $\mathscr{K}$ に関する部分トレースである．

2.2　完全相関

よい間接測定は，測定前の対象系の物理量 A の値と測定過程後の測定器の指針量 $U^\dagger M U$ の値が等しくなる，あるいは近い値になるようなものだが，二つの物理量の値が等しいとはどういうことか熟慮する必要がある．考え方としては，間接測定は $A = U^\dagger M U$ とすることを目指すのだが，系の状態に無関係に両者が等しいことを要請するのは過剰な要求である．状態を決めれば，物理量のスペクトル値の一部分が測定値として顕在化するが，すべてのスペクトル値が顕在化するわけではない．出現確率 0 のスペクトル値に関してまで A と $U^\dagger M U$ が等しくなっている必要はない．

また，量子系に対する測定は，同一状態の系を多数用意して測定を行って得られた測定データを統計処理して平均やモーメントなどの統計値を求めることが多い．もう少し詳しく見ると，繰り返し測定のもとで被測定量 A と指針量 $U^\dagger M U$ の統計的性質が近ければよいという類の測定（統計的推測を目的とする測定）と，一回一回の測定ごとに A の出現値と $U^\dagger M U$ の読み取り値とが一致していることが望ましい測定（一回起の個別事象を正確に捉えることを目的とする測定）がある．

被測定量 A の値の確率分布から決まる統計値と指針量 $U^\dagger MU$ の値の確率分布から決まる統計値とが一致していればよいという測定の例として NMR（核磁気共鳴）による核スピンの測定が挙げられる．NMR の場合は，A は原子核のスピンであり，M は核磁気の変動で誘導された電流などである．この場合，はじめから多数の原子核のスピンの平均値を測定しているのであって，個々の原子核のスピンを測っているのではない．また，近年注目を集めている Aharonov, Albert, Vaidman の弱値 (weak value) という数量も，一回一回の測定ごとに値が定義されるものではなく，多数の測定データの統計処理によってのみ定義される統計値である [14, 15].

一方で，個別の系に対する一回一回の測定において被測定量 A の値と指針量 $U^\dagger MU$ の値とが一致していてほしいという測定もある．Millikan の実験で，一個一個の油滴の電荷を知りたいというような実験がこれにあたる．この場合は，すべての油滴の平均電荷を求めることは意味をなさない．しかし，このような状況においても出現確率 0 のスペクトル値についてまで A と $U^\dagger MU$ とが等しくなっている必要はない.

この種の「一回ごとの測定値の等号」に相当する概念として，小澤正直氏は**完全相関** (perfect correlation) という概念を導入した [16, 17]．Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ 上の 2 つの自己共役演算子 A, B がスペクトル分解

$$A = \int \lambda\, E_A(d\lambda), \qquad B = \int \lambda\, E_B(d\lambda) \tag{6}$$

を持つとする．ここで E_A, E_B はそれぞれのスペクトル測度である．密度行列 ρ で表される状態において，任意の Borel 集合 $\Delta \subset \mathbb{R}$ に対して

$$E_A(\Delta)\rho = E_B(\Delta)\rho \tag{7}$$

が成り立つならば，状態 ρ において A と B が**完全相関**にある (perfectly correlated in the state ρ) と言う ([16] Theorem 3.2)．この関係が成り立っていれば，状態 ρ において A と B の結合確率分布が定義できるという意味で A, B は同時測定可能であり，A の測定値が Δ 内にあれば B の測定値も Δ 内にあり，その逆も言える．この関係を

$$A =_\rho B \tag{8}$$

と書く．完全相関は (i) 反射律：$A =_\rho A$, (ii) 対称律：$A =_\rho B \Rightarrow B =_\rho A$, (iii) 推移律：$A =_\rho B$, $B =_\rho C \Rightarrow A =_\rho C$ を満たす．従って，完全相関は物理量の同値関係である ([16] Theorem 4.2).

GNS (Gelfand-Naimark-Segal) 表現 [18] を使えば完全相関は以下のように表される．密度行列 ρ に伴う状態 (state) $\omega_\rho : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ を

$$\omega_\rho(A) := \mathrm{Tr}_{\mathscr{H}}(A\rho), \qquad A \in \mathscr{A} \tag{9}$$

という線形関数と定める．ここで $\mathscr{A}$ は測定可能物理量を表す有界演算子全体がなす代数である（いま，何が測定可能かということを問題にしている最中なのだが，仮に測定可能な物理量全体の集合が定まっていて，それが代数をなしていると仮定している）．二つの物理量 A, B で

生成される部分代数 $\mathscr{G}(A,B)$ に状態 ω_ρ の定義域を制限して，代数 $\mathscr{G}(A,B)$ の GNS 表現を π_ρ とすると，A と B の完全相関は

$$\pi_\rho(A) = \pi_\rho(B) \tag{10}$$

であることと同値である．

例えば次の 4 次行列と密度行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \rho = |\psi\rangle\langle\psi| \tag{11}$$

$(c_1, c_2 \neq 0)$ について $\mathscr{G}(A,B)$ の GNS 表現は，表現空間 $\mathscr{H}_\rho = \mathbb{C}^2$ 上の

$$\pi_\rho(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \pi_\rho(B) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \tag{12}$$

となる．この状態 ρ についての完全相関は $\pi_\rho(A) = \pi_\rho(B)$ を意味する．$A \neq B$ であっても $\pi_\rho(A) = \pi_\rho(B)$ となることはあり得る．

間接測定モデルにおいて，対象物理量 A と測定過程後の指針量 $U^\dagger MU$ の「一回ごとの測定値の等号」を定めるにはこうすればよい．対象系と測定器の合成系の Hilbert 空間 $\mathscr{H} \otimes \mathscr{K}$ 上の演算子 $A \otimes I_{\mathscr{K}}$ と $U^\dagger(I_{\mathscr{H}} \otimes M)U$ が生成する代数を $\mathscr{G}$ とおき，対象系と測定器の初期状態の密度行列をそれぞれ ρ, μ として，複合系の状態 $\nu = \rho \otimes \mu$ に関する $\mathscr{G}$ の GNS 表現を $\pi_\nu : \mathscr{G} \to \boldsymbol{B}(\mathscr{H}_\nu)$ としたとき，

$$\pi_\nu(A \otimes I_{\mathscr{K}}) = \pi_\nu(U^\dagger(I_{\mathscr{H}} \otimes M)U) \tag{13}$$

が成り立てばよい．このとき A と $U^\dagger MU$ の出現値はつねに一致するので，状態 ν における測定値に関しては A と $U^\dagger MU$ は等しいと言える．このことを

$$A =_\nu U^\dagger MU \tag{14}$$

と書く．

ただし，実際の実験では，測定器の初期状態 μ は一定にして実験を繰り返すが，対象系の状態 ρ はいろいろなものを用意するのが普通である．というよりも，対象系の状態が完全にわかっているなら，そもそも測定する必要もないのが普通である．従って，後に一般の測定を考える際は，測定器の初期状態 μ は一定に固定し，対象系の状態 ρ は任意に取り得る状況を扱う．

2.3 共変的指針

次に共変性の概念を説明する．ここで言う共変性とは対象系の物理量と測定器の物理量の共変性・連動性である．そもそも，対象物理量の値を直接知り得ないときに，測定器の読み取り値が対象物理量の値に等しいことを我々はいかにして確信するか？

例えば，体重計の針が 50kg の目盛りを指していても，その人が水 1kg を飲んで体重が 1kg 増したはずのときに針があいかわらず 50kg の目盛りを指したままであれば，そのような測定

器は体重を測っているとは言えないだろう．また，ある装置が光の偏光方向を測っていると言うからには，光源装置を 30 °回転させれば偏光の測定値も 30 °分の回転を示さなければならないだろう．測定値が光源の回転に連動しないならば，この測定値は偏光とは関係ない他の物理量の値を示していると我々は判断するだろう．

このように，測られるべきものが変化すれば，メーターの読み取り値もそれに応じて変化しなくてはならない，それらの間に首尾一貫した相関関係があってはじめて，そのメーターは直接には見えない対象の属性を間接的に測っていると言える．

そのような共変性は以下のように定式化される [8, 9]．例として Lie 群的な滑らかな対称性を挙げる．$\mathscr{H}$ 上の自己共役演算子 J と，$\mathscr{K}$ 上の自己共役演算子 L があり，それぞれユニタリ演算子 $e^{iJ\theta}$ と $e^{iL\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$) を生成しているとする．このとき物理量 A は $A \mapsto e^{-iJ\theta} A\, e^{iJ\theta}$，$M$ は $M \mapsto e^{-iL\theta} M\, e^{iL\theta}$ という変換を受ける．測定器の物理量 M と測定過程 U が

$$e^{-iJ\theta} U^\dagger M U e^{iJ\theta} \ =_\nu \ U^\dagger e^{-iL\theta} M e^{iL\theta} U \tag{15}$$

を満たすとき，M を**共変的指針量** (covariant indicator) という．例えば「光源を角度 θ だけ向きを変えてから測定器にかけたなら（左辺），測定値にも回転角 θ に相当する変化を生じなければならない（右辺）」という要請を形式化したのが上式である．ここで $=_\nu$ は，対象系と測定器の初期状態の密度行列をそれぞれ ρ, μ として，複合系の状態 $\nu = \rho \otimes \mu$ に関する完全相関を表す．

なお，上では J によって生成される 1 パラメータ変換群に関する共変性を定義したが，離散群や非可換群に関する共変性も同様に定義される．

2.4 孤立保存則

測定過程とは，対象系と測定器を実験者が意図的に相互作用させるものだが，現実の物理系はどのような相互作用でもできるわけではない．むしろ，現実世界で起こり得る相互作用は角運動量保存則や電荷保存則など種々の保存則の制約を受けている．究極的には自然界には四種の相互作用しかないので，どんな相互作用ハミルトニアンでも実現できるわけではない．

とくに電荷保存則は特異な保存則である．電子などの素粒子は固有の電荷を持っており，素粒子の合体・崩壊など，素粒子そのものが他の粒子に転化するときのみ，その粒子が担う電荷が変化し得る．ところが，電子から電荷をはぎ取ってしまったら，それはもはや電子ではないし，正電荷を持つパイメソンから電荷を奪えば，それはもはや正パイメソンではない．電荷はミクロ系から漏れ出ることも付け足されることもない．この意味で，電荷はミクロ系だけで閉じた，孤立的な保存量だと言える．そのような孤立的保存則が超選択則を導くのである．

そこで，測定過程における保存則を定式化しよう [8, 9]．測定過程を表すユニタリ演算子 U と上述の変換を生む演算子 J, L が

$$U^\dagger (J + L) U = J + L \tag{16}$$

を満たすとき，$J + L$ は加法的保存量だという．また，

$$U^\dagger J U = J \tag{17}$$

が成り立つとき（$U^\dagger LU = L$ は成り立たなくてもよい），測定過程 U は J の**孤立保存則** (isolated conservation law) を許容すると言う．

以上の，間接測定モデル・完全相関・共変的指針・孤立保存則の定義から超選択則は導かれる．それを主定理として述べよう．

3　主定理

測定過程が対象系の物理量 J の孤立保存則を許容し，対象系の物理量 A が対象系の任意の初期状態において共変的に測定可能な量ならば，$[A, J] = 0$ が成り立つ．言い換えると，測定過程における孤立保存量 J は超選択チャージになり，測定可能量 A は J が生成する変換群の不変量でなければならない．

仮定の説明：対象系と測定系を併せた複合系の初期状態を $\nu = \rho \otimes \mu$ とする．間接測定系 $(\mathscr{K}, \mu, U, M)$ によって物理量 A が測れることは，測定過程前の A と測定過程後の指針量 M の完全相関

$$A \ =_\nu \ U^\dagger MU \tag{18}$$

の成立を意味する．A が M で共変的に測定可能という要請には，対象系の量 A を J で変動させた値は指針量 M を L で変動させた値と完全相関するという条件も含める：

$$e^{-iJ\theta} A\, e^{iJ\theta} \ =_\nu \ U^\dagger e^{-iL\theta} M e^{iL\theta} U. \tag{19}$$

いま，対象系と測定器の合成系の初期状態を $\nu = \rho \otimes \mu$ としている．通常の実験において，測定器の初期状態 μ は毎回同じ基準状態に準備するが，対象系の状態 ρ はいろいろ変えてみるのが普通なので，共変性条件 (15) と被測定量と指針量の相関条件 (19) は対象系の任意の状態 ρ に対して成立することを要請する．孤立保存則 (17) は力学法則の性質なので，系の初期状態によらず成立するものとする．

証明：完全相関は推移律を満たしているので，(19) と (15) より

$$e^{-iJ\theta} A\, e^{iJ\theta} \ =_\nu \ U^\dagger e^{-iL\theta} M e^{iL\theta} U \ =_\nu \ e^{-iJ\theta} U^\dagger MU e^{iJ\theta} \tag{20}$$

が言える．さらに孤立保存則 (17) より U と J は可換だから

$$e^{-iJ\theta} U^\dagger MU e^{iJ\theta} \ =_\nu \ U^\dagger e^{-iJ\theta} M e^{iJ\theta} U \tag{21}$$

が従う．ところが J は対象系の物理量で，M は測定器の物理量なので，J と M は可換であり，

$$U^\dagger e^{-iJ\theta} M e^{iJ\theta} U \ =_\nu \ U^\dagger MU \tag{22}$$

が従う．以上 (20), (21), (22) より

$$e^{-iJ\theta} A\, e^{iJ\theta} \ =_\nu \ U^\dagger MU \tag{23}$$

を得るが，右辺はパラメータ θ に依らないので，

$$e^{-iJ\theta} A\, e^{iJ\theta} \;=_\nu\; A \tag{24}$$

が言える．$\nu = \rho \otimes \mu$ は対象系の密度行列 ρ と測定器の密度行列 μ のテンソル積だが，A も J も対象系だけに属する物理量であり，この関係式が任意の測定器状態 ρ で成り立つのだから，結局，

$$e^{-iJ\theta} A\, e^{iJ\theta} = A \tag{25}$$

であり，$[A, J] = 0$ が従う（証明終わり）．

主定理の内容の確認：測定過程においてミクロ系だけで閉じた保存則があると，その保存量に対して非可換な物理量は系の外から測れない，というのがこの定理の主張である．「測れている」と言えるためには，被測定量が群作用によって変化するとき指針量の読み取り値も連動して変化することが必要である．もしも群作用に伴う保存量が，測定過程においてミクロ系側だけで閉じた孤立保存量になっていると，連動性が保証できるという意味で外部から測れる量は，孤立保存量に対して可換な量に限られる，という主張が超選択則である．

注意：主定理の内容を，「孤立保存量は外に漏れないので，孤立保存量は外部から測れない」とう意味に受け取る人がたまにいるが，それは誤解である．正しくは「孤立保存量と非可換な量は測れない」である．孤立保存量 J 自体は J と可換なので測れてもおかしくない．実際，電荷は孤立保存量だが，さまざまな手段で測られている．一方で，QCD のカラーチャージは，それ自体が孤立保存量であり，互いに非可換なので，カラーチャージは測定不能になっている [8, 9, 10, 19]．

4　超選択則の物理的意義

4.1　不確定性関係との関係

超選択則も不確定性関係も測定の限界に関わる法則だが，ナイーブには超選択則は不確定性関係の極端なケースのようにも見える．ある物理量 A の値をなるべく小さな誤差で測ろうとすると，A と非可換な物理量 J の値に大きな擾乱を与えてしまう，逆に J の擾乱を小さく抑えると A の大きな測定誤差を避けられない，というのが不確定性関係の内容だとしよう．それに比して言えば，超選択則は，物理量 J が保存量になっていて J の擾乱がつねにゼロであるような状況では，J に非可換な A を測ろうとしても全然測定できない，と言っている．A を測定できないのは，A の測定誤差が大きいからだろうか？

しかし，本研究では，A の測定ができる・できないということを，物理量 A と指針量 M の群作用共変性のある・なしによって特徴付けている．A の測定誤差の大小が，測定の可否と直結しているわけではない．例えば，測定誤差（真の値と読み取り値の差）がつねに+10kg あったとしても，人の体重変化に応じてちゃんと針が動くような体重計なら，むしろ正確な測定器と言える．この意味での誤差が+100kg であっても，+1000kg であっても，体重計としての用は

なしていると言うのが普通であろう．この場合は，体重計に何も載せない状態でメーターのゼロ点を合わせ，標準おもりを載せた状態でメーターのスケールを合わせ直して，測定器を校正すればよいだけの話である．つまり,「真の値と読み取り値の差が大きいこと」がただちに「測定不可能」を意味するわけではない．

「超選択則は不確定性関係の特殊ケースであるから，超選択則を証明したところで物理学上の新しい知見にはならない」という批判があるが，はたして，超選択則は不確定性関係の論理的帰結だろうか？　また，超選択則の物理的内容は不確定性関係に包含されているだろうか？以下，この点について数式を書きながら丁寧に議論しよう．

不確定性関係にはいろいろなバージョンがあるが，そのうちの一つとして，保存量に対して非可換な量の測定精度の限界を与える不等式がある．これは Wigner-Araki-Yanase (WAY) の定理を小澤氏が定量的関係式に仕上げたものである [20, 21, 22]．この WAY-小澤の定理を見直し，これが超選択則を導くか検討しよう．

対象系と測定器がユニタリ演算子 U で記述される相互作用をし，対象系の物理量 A を，測定器の指針量 M で測るという間接測定モデルにおいて，平均誤差を

$$\varepsilon(A) := \sqrt{\langle (U^\dagger M U - A)^2 \rangle} \tag{26}$$

と定めるのが小澤流の誤差の定義である．ここで物理量の期待値は，対象系と測定器の合成系の初期状態 $\nu = \rho \otimes \mu$ に関して定める．物理量 J の標準偏差は，通常の統計学と同様に

$$\sigma(J) := \sqrt{\langle (J - \langle J \rangle)^2 \rangle} \tag{27}$$

で定める．また，測定過程において，(16) のような総和量の保存則

$$U^\dagger (J + L) U = J + L \tag{28}$$

が成り立つと仮定する．ここで J は対象系の物理量，L は測定器の物理量である．また，$[L, M] = 0$ とする．このとき

$$\varepsilon(A)^2 \ \geq \ \frac{\left| \langle [A, J] \rangle \right|^2}{4\{\sigma(J)^2 + \sigma(L)^2\}} \tag{29}$$

が成り立つというのが WAY-小澤の定理である．

この定理からどうやって超選択則が導かれるのか？　超選択則が前提とする状況は，総和量保存則 (28) が孤立保存則 $U^\dagger J U = J$ で置き換えられた状況である．言い換えると，J の擾乱がゼロであるような状況である．しかし，そのような仮定を追加したところで，式 (29) の形を変えられるわけでもなく，超選択則が導かれるわけでもない．

あるいは，こうすれば超選択則ぽく見せることもできる.「(29) の右辺の分母がゼロで，分子がゼロでなければ，測定誤差 $\varepsilon(A)$ が発散する．これは A の測定が不可能であることを意味する」という論法だ．確かにこれは超選択則のようではあるが，(29) の右辺の分母がノンゼロで，分子がゼロであるような状況になっても，つまり，WAY-小澤の公式 (29) によれば A を誤差ゼロで測れてもよさそうな状況でも，相変わらず超選択則は物理量 A の共変的測定ができないことを主張する．

例えば，荷電ボソン場 ϕ は電荷演算子 J が生成するゲージ変換

$$e^{-iJ\theta}\,\phi\,e^{iJ\theta} = e^{i\theta}\phi \tag{30}$$

を受ける．これは

$$[J,\,\phi] = -\phi, \qquad [J,\,\phi^\dagger] = \phi^\dagger \tag{31}$$

と同値であり，ボソン場の実部を $A = \frac{1}{2}(\phi + \phi^\dagger)$，虚部を $B = \frac{1}{2i}(\phi - \phi^\dagger)$ とすれば

$$[J,\,A] = -iB, \qquad [J,\,B] = iA \tag{32}$$

を意味する．この場合，J の孤立保存量に伴う超選択則は，荷電ボソン場の絶対値 $\phi^\dagger\phi$ は測れてもよいが，場の実部・虚部をそれぞれ測ることはできないと言う．これは，荷電場の位相は測定不可能と言っているのと同じことである．系の初期状態としてボソン場の虚部 B の期待値がゼロであるような状態を選べば，$\langle [A, J] \rangle = 0$ が成り立ち，WAY-小澤の公式 (29) を見る限り A を誤差ゼロで測れてもよさそうに見えるが，超選択則の結論は変わらず，ゲージ可変量としてのボソン場の実部は測ることはできない．また，(29) の右辺の分母・分子がともにノンゼロであっても，ボソン場のゲージ共変測定は不可能という超選択則の結論は変わらない．

超選択則における「測定不可能」とは「測定誤差がノンゼロ」とか「測定誤差が無限大」のことではない．つねに目盛りが 50kg を指している体重計は，小澤の誤差 (26) の定義によればいつでも誤差は有限であるし，たまたま体重計に載った人が本当に体重 50kg であれば偶然誤差ゼロになることもあるが，そんな体重計で体重が測れていると言う人はいないだろう．体重が変われば体重計の目盛りが動くことが，体重が測れるための必要条件である．

以上の考察から，WAY-小澤の不確定性関係で導入されている誤差と，超選択則で定式化されている測定可能性は，あまり関係のない概念であり，超選択則は WAY-小澤の不確定性関係の論理的帰結ではないことがわかる．

4.2 DHR 解析との関係

DHR 解析は，代数的相対論的場の量子論の中で成立する理論であり，測定可能な局所物理量の代数 $\mathscr{A}$ と物理的状態の選出基準与えられたとき，超選択則チャージの群を同定する [6, 7].

一方で，本研究で扱った量子系は相対論的量子場に限定しておらず，あらかじめ測定可能物理量の集合が定まっていると仮定したわけでもない．むしろ先に対象系の Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ と測定器 Hilbert 空間 $\mathscr{K}$ と物理的に動員可能な測定過程 U の対称性が決まっているときに，この測定過程を通してどれだけの対象系演算子が測定器の側から見えるか？という問題の立て方をしている．

つまり，DHR 解析は測定器の概念なしに対象系の内的構造だけで超選択則を特徴付けているのに対して，本研究は，測定器という外部系の働きかけによって測定可能量を特徴付けている．我々のアプローチが DHR 解析と整合しているかという点は，要チェック事項であるし，物理学としても興味深い点ではあるが，本研究で示したことが「DHR 解析のたんなる言い換えにすぎない」という批判ないし懸念はあたっていないと思われる．

4.3　保存則の普遍性の問題

我々が示した命題は,「測定過程がこれこれの対称性（孤立保存則）を持っていれば，これこれの超選択則が導かれ，測定可能物理量はこの対称性の不変量に限定される」という形である．例えば，測定過程が対象系の全運動量の孤立保存則を許容すれば，測定可能量は並進不変量だけに限られる．測定過程が対象系の全電荷の孤立保存則を許容すれば，測定可能量はゲージ不変量だけに限られる．

本研究の結論に対して「電荷保存則はただの経験則であり，普遍的に成り立つことが証明されていないのだから，ここに示された結論には意味がない」という批判も受けたが，それは物理学としてまともな批判であろうか？　電荷保存則は経験則である．しかも電磁気学やゲージ理論の基本原理であり，電荷保存則が破れたら電磁気学や素粒子の標準理論は総崩れになってしまうくらいに，電荷保存則は物理学の根幹に食い込んでいる．確かに電荷保存則は量子力学の一般公理から証明できる命題ではないが，物理学には量子力学だけではなく電磁気学やゲージ理論もあるのである．そちらの物理学も尊重していただかないと困る.「電荷保存則は経験則だから電荷保存則の普遍性は信用できない．実験家が努力すれば電子の（相対位相だけでなく絶対的な）位相も測れるはずだ」と主張する人は，電荷保存則を破って電子の Dirac 場の位相を測る装置の実装方法を示すべきであろう．ちなみに，光子数は保存しないので，電磁波は相対位相だけでなく絶対位相が測れる．

本研究は，すべての系に共通な超選択則チャージがあるという結論を導こうとしているのではなく，超選択則は対象系とそれに関わる測定器・測定過程ごとに形を変えて成立する法則だということを示している．普遍的なのは，力学系の対称性と測定可能量の双対的な関連の仕方である．どのような対称性があるかという問題は個別の問題とし，超選択則の普遍的な部分と個別的問題とを分節したことが本研究の意義である．

4.4　超選択則の他の物理的意義

超選択則は，カラーの観測不可能性や，対称性の自発的破れや，階層性の起源とも深く関わっているが，それらの点に関しては別のところですでに論じたので [8, 9, 10, 19]，ここでは繰り返さない．ただ，カラーチャージが測定不可能であることは，カラーを持ったハドロンの非存在を論理的には含意しないので，この議論だけでカラー閉じ込めが証明されたとは主張しない．

また，量子と古典の境界がどのように定まるかという問題に関しても超選択則は重要な役割を果たしている [23, 24]．量子情報科学・量子計算機理論においても量子系の測定・制御の限界は問題になるので，情報理論的観点からも超選択則は最近注目されている [25, 26]．

量子測定理論に関して言えば，小澤氏の論文 [13] では，non-relativistic quantum mechanics without any superselection rules と称して超選択則のない系に議論を限ることを宣言し ([13] p.354)，Any observable A can be precisely measured in any state ρ で何でも測れると仮定し (同 p.355)，Realizability postulate と称してどんな間接測定モデルも物理的に実現できると仮定している (同 p.375)．もちろん数学の論文としては，すべての仮定を書くのがマナーだが，物理としては「Realizability postulate が書かれているから実現可能だ」とは言えないであろう．

とくに間接測定モデルは数学的には存在しても，実際の物理実験では任意の相互作用ハミルトニアンを実現できるわけではない．この点を無視して realizability postulate を言い張るのは物理学の議論としては説得力がないように思える．現実系のハミルトニアンでは孤立保存則を避けられないとき，超選択則が立ち現れるのである．そのように間接測定の理論を利用すれば物理学として有効な議論ができると思われる．むしろ [13] の議論は，超選択則がないという仮定から無理が生じることを示すことによって，背理法的に超選択則をサポートしていると見た方がよい．

5　結論

主定理の内容を繰り返す．

測定対象となる系と測定器があり，両者の相互作用ユニタリ変換 U が対象系の物理量 J を

$$U^{\dagger} J U = J \tag{33}$$

の意味で保存するとする．このとき，対象系の物理量 A の値に対して共変的に測定器の読み取り値が変動するという意味で A が測定可能ならば

$$[A, J] = 0 \tag{34}$$

である．つまり，測定可能量 A は，孤立保存量 J が生成する変換に関して不変量でなければならない．

謝辞：本稿は，2011 年 10 月 31 日〜11 月 2 日に数理解析研究所で開催された研究集会「幾何学的力学系の新展開」，2012 年 1 月 5〜7 日に基礎物理学研究所で開催された研究会「物理と情報の階層構造―情報を接点とした諸階層の制御と創発 (YITP-W-11-25)」，2012 年 3 月 5, 6 日に名古屋大学で開催された「第 7 回科学基礎論春のセミナー」，2012 年 3 月 14, 15 日に東京大学駒場で開催された「超選択則討論会」[27]，2012 年 3 月 16, 17 日に KEK で開催された研究会「量子論の諸問題と今後の発展 (QMKEK4)」の講演内容を整理したものである．これらの発表の機会を与えて下さった世話人の方々に感謝している．

本稿は本来ならば 2012 年 1 月の基礎物理学研究所研究会報告（2012 年 12 月 2 日発行）に収められるべき原稿であったが，私の無精のため，掲載しめきりに間に合わなかった．とくにこの研究会の実現のために尽力して下さった鹿野豊氏，小嶋泉氏，森川雅博氏にこの場をお借りしてお礼を申し上げ，私の原稿遅刻についてお詫び申し上げたい．

本研究は日本学術振興会科学研究補助費 Nos. 22540281, 22540410 の支援を受けていました．

参考文献

[1] 超選択則を誤解している本や論文の例：湯川秀樹, 豊田利幸 編著「量子力学 I」岩波書店 (1978) 4.6 節．同「量子力学 II」16.1 節の記述も微妙．Y. Aharonov and L. Susskind, “Charge superselection rule,” Phys. Rev. **155**, 1428 (1967). C. Cisneros, R. P. Martínez-y-Romero, H. N. Núñez-Yépez, and A. L. Salas-Brito, “Limitations on the superposition principle: superselection rules in non-relativistic quantum mechanics,” Eur. J. Phys. **19**, 237 (1998).

[2] 超選択則と混合状態に関する誤解を正す議論を小嶋泉氏が展開している：大矢雅則, 小嶋泉 編著「量子情報と進化の力学」牧野書店 (1996) 第 I 部第 2 章．小嶋泉『量子論の基礎概念：その物理的解釈と超選択則』数理科学 2002 年 7 月号 p.36.

[3] G. C. Wick, A. S. Wightman, and E. P. Wigner, “The intrinsic parity of elementary particles,” Phys. Rev. **88**, 101 (1952).

[4] G. C. Hegerfeldt, K. Kraus, and E. P. Wigner, “Proof of the fermion superselection rule without the assumption of time reversal invariance,” J. Math. Phys. **9**, 2029 (1968).

[5] A. S. Wightman, “Superselection rules; old and new,” IL Nuovo Cim. **110B**, 751 (1995).

[6] 小嶋 泉『だれが量子場を見たか』, 同題の講演集 pp.65-107, 日本評論社 (2004).

[7] S. Doplicher, R. Haag, and J. E. Roberts, “Fields, observables and gauge transformations I, II,” Commun. Math. Phys. **13**, 1 (1969); **15**, 173 (1969).

[8] 谷村省吾「21 世紀の量子論入門」雑誌『理系への数学』（現代数学社）の連載記事：「第 17 回：計量と次元解析と超選択則」2011 年 9 月号 pp.41-47. 「第 18 回：有向量とパリティと超選択則」2011 年 10 月号 pp.42-48. 「第 19 回：ゲージ超選択則の力学的由来」2011 年 11 月号 pp.47-53.

[9] S. Tanimura, “Superselection rules from measurement theory,” arXiv: 1112.5701 (2011).

[10] 谷村省吾「量子論における超選択則の力学的起源とカラーの閉じ込め」数理解析研究所講究録（ネット閲覧可）1774 号 100-117 (2012).

[11] J. v. ノイマン（井上健他 共訳）「量子力学の数学的基礎」みすず書房 (1957). 自己共役演算子と測定可能量の関係は IV.2 節, p.250, 測定のモデルは VI.3 節, p.350 で論じられている．

[12] E. Schrödinger, “Measurement of length and angle in quantum mechanics,” Nature **173**, 442 (1954). マックス・ヤンマー（井上健 訳）「量子力学の哲学（上）」紀伊國屋書店 (1983) p.239.

[13] M. Ozawa, “Uncertainty relations for noise and disturbance in generalized quantum measurements,” Ann. Phys. **311**, 350 (2004).

[14] Y. Aharonov and D. Rohrlich, Quantum Paradoxes (Wiley-VCH, 2005), Chapter 11. Superselection Rules (pp. 149-159), Chapter 16. Weak Values (pp. 225-248).

[15] Y. Aharonov, D. Z. Albert, and L. Vaidman, “How the result of a measurement of a component of the spin of a spin-$\frac{1}{2}$ particle can turn out to be 100,” Physical Review Letters **60**, 1351 (1988).

[16] M. Ozawa, “Quantum perfect correlations,” Ann. Phys. **321**, 744 (2006).

[17] 小澤正直「非可換観測量の同時測定可能性」数理解析研究所講究録（ネット閲覧可）**1565**, 133 (2007).

[18] I. E. Segal, "Irreducible representations of operator algebras," Bull. Amer. Math. Soc. **53**, 73 (1947).

[19] 古田彩「"測れる"って何？—"存在する" と "見える" の間のギャップは意外に大きい」日経サイエンス 2012 年 7 月号 pp.16-18.

[20] E. P. Wigner, "Die Messung quantenmechanischer Operatoren," Z. Phys. **133**, 101 (1952).

[21] H. Araki and M. M. Yanase, "Measurement of quantum mechanical operators," Phys. Rev. **120**, 622 (1960).

[22] M. Ozawa, "Conservation laws, uncertainty relations, and quantum limits of measurements," Phys. Rev. Lett. **88**, 050402 (2002).

[23] I. Ojima, "Micro-Macro duality in quantum physics", pp.143-161 in *Proc. Intern. Conf. on Stochastic Analysis, Classical and Quantum*, World Scientific (2005); arXiv: math-ph/0502038.

[24] 谷村省吾「量子古典対応—量子化の技法，古典系創発の機構」数理科学 2012 年 4 月号 pp.19-25.

[25] A. Kitaev, D. Mayers, and J. Preskill, "Superselection rules and quantum protocols," Phys. Rev. A **69**, 052326 (2004).

[26] S. D. Bartlett, T. Rudolph, and R. W. Spekkens, "Reference frames, superselection rules, and quantum information," Rev. Mod. Phys. **79**, 555 (2007).

[27] 超選択則討論会（2012 年 3 月 14〜15 日）の講演資料：URL http://kwkbtr.info/ssr/ （2013 年 2 月 12 日閲覧）.