素粒子の理論はなぜローレンツ不変なのか

中西 襄 *1

素粒子の場の量子論は，なぜローレンツ不変でなければならないのかを，重力場の正準量子論に基づいて証明する．ローレンツ的計量符号の存在は一切前提としない．

よく知られているように，Lorentz は光速度不変の実験結果を説明するためにローレンツ変換を提起し，Poincaré はマクスウェル方程式がローレンツ不変であることを発見した．それに対し，Einstein は光速度不変の原理と特殊相対性原理とから思考実験に基づいてローレンツ不変性を論理的に導いた．これによって，なぜ自然法則が慣性系においてローレンツ不変でなければならないのかが明らかになった．しかし，彼の考察はもちろん古典論の範囲でなされており，**ローレンツ不変性が素粒子の理論においても成立しなければならないという根拠を明らかにしていない．**

素粒子の理論がなぜローレンツ不変に定式化されなければならないかは，単なる哲学的意味以上の問題を含んでいる．ポアンカレ対称性の自然な拡張として超対称性 SUSY が提起されて久しい．SUSY に関して多くの理論的研究がなされたが，LHC の実験結果は SUSY に対してすべて否定的である．とはいっても実験によって SUSY を 100% 排除することは永久に不可能であろう．ローレンツ不変性が素粒子の理論に現れる根拠を論理的に示せば，SUSY を素粒子の理論の基本的対称性であるとする仮説がいかに不自然であるかを理論的に明らかにできるのである．すなわち，このことをはっきり認識していれば，多くの研究者が SUSY や超重力，そして超弦理論で多大の無駄な努力をしなくても済んだはずであった．

素粒子の理論は重力を含まない*2．しかし素粒子も重力相互作用するので，コンシステンシーから量子重力の導入は不可避である．重力は時空構造に関連するので，量子重力は通常の素粒子の理論よりも基本的な理論である．したがって論理の構成上からはまず量子重力からスタートすべきである．量子重力の定式化についてはいろいろの立場があるけれども，4 次元時空内で物理的 S 行列のユニタリー性がきちんと言えるのは，BRS 対称性に基づく重力場の共変的正準量子論 [1),2)] 以外にないように思う．ただしここで「共変的」といっているのは，オペレータレベルで明白に一般線形変換 $GL(4)$ 不変性があるという意味である．よく知られているように，作用積分が局所変換不変なままでは量子化できない．一般座標変換すなわち局所並進に対する不変性はゲージ固定項の導入により破

*1 京都大学 (数理解析研究所) 名誉教授. e-mail: nbr-nak@trio.plala.or.jp
*2 重力子は以下では素粒子に含めないことにしておく．

られるが，対応する FP ゴースト項を付け加えることにより局所並進の量子論版である BRS 変換に対して不変になる．このとき，最大限の全域的対称性（すなわち，全域的並進と $GL(4)$) を温存するように，ゲージ条件としてド・ドンデア条件を採用する．重要な点は，**ローレンツ不変性は一切仮定していない**ということである．すなわち，時空に関してミンコフスキー計量のようなものを手で導入することは一切行っていない．

この理論は，ゲージ理論の構成と整合性がよいばかりでなく，「16 次元ポアンカレ的超対称性」と呼ばれる時空と量子場 (局所並進の B 場，FP ゴースト場および反 FP ゴースト場[*3]）の間の対称性を自然に実現している．

「量子アインシュタイン重力はくりこみ不可能だから予言能力がなく，物理的に意味のある理論とはいえない」などという根強い迷信がある[*4]．だがこれは摂動論を盲信したことによる誤解に過ぎない．すなわち，摂動論の出発点である「量子重力場の第 0 近似を古典時空計量と同定する」という仮定が間違っており，そのため摂動論が正しくないというだけの話なのだ．

また正準形式の定式化は時間を特別扱いにしているという批判があるが，$GL(4)$ 不変な理論ではこの問題は自動的に解消される．$GL(4)$ 不変性により時空変数 x^μ の 4 成分 (さらにその任意の一次結合）は全く対等であり，時間は特別な存在ではない．そこで，物理的な時間と区別して，x^0 を「原時間」と呼ぶことにする．正準量子化は，この原時間について行う．

重力場 $g_{\mu\nu}(x)$ だけで局所並進（すなわち一般座標変換）不変な作用積分を書こうとすると，その行列式 $g(x)$ の平方根が必要になる．しかし，オペレータの平方根は不定計量の場の量子論ではその意味付けが不可能なので，四脚場 $h_\mu{}^a(x)$ を重力の基本場とし，

$$g_{\mu\nu}(x) = \xi_{ab} h_\mu{}^a(x) h_\nu{}^b(x)$$

とする．ξ_{ab} のつくる行列は実で正則であるという要請以外任意であるが，2 次形式に関するシルヴェスターの定理により，$GL(4)$ の変換で対角要素が 1 か -1 のみの対角行列にすることができる．$h_\mu{}^a(x)$ の行列式を $h(x)$ とすると，$g(x) = (-1)^N[h(x)]^2$ となる．ただし N は ξ_{ab} の -1 要素の個数である．この $h(x)$ を用いれば，局所並進不変な体積要素 $h(x)d^4x$ を定義できる．

ξ_{ab} をこのように固定しても，$g_{\mu\nu}(x)$ が対称であるため，$h_\mu{}^a(x)$ は余分の 6 自由度をもつ．この自由度に関する変換を「局所内部変換」と呼ぶ．局所並進の 4 自由度と同様に，局所内部変換の 6 自由度は非物理的自由度である．これに対し

[*3] 以下，これらの 3 つの場をまとめて局所並進のゴースト場と呼ぶ．

[*4] このようなウソがいつまでもまかり通っていて，量子アインシュタイン重力をいまだに否定している人が多いのは全く残念なことである．もともと「くりこみ可能」という概念は，より高いエネルギーにおける真の物理を知らなくても，低いエネルギーではその無知をパラメータに閉じ込めることによって実効理論が作れることを意味するのである．したがって，最も高いエネルギーで成立すべき量子重力を摂動論的くりこみ可能な理論に改変するなどというのは，本末転倒も甚だしい．

ゲージ固定項と FP ゴースト項を導入して BRS 不変な作用積分を構成する．このゲージ固定項は局所並進不変であるように選ばなければならない．また全域的内部変換不変性を温存するものとする．この自由度に対応する BRS チャージを用いて九後・小嶋の補助条件を設定することで，それらが非物理的になるようにすることができる．

重力理論を構成するためには，$h_\mu{}^a(x)$ は逆行列を持つと仮定することが必要である．$h_\mu{}^a(x)$ の転置逆行列を $h^\mu{}_a(x)$ と書くとき，ゲージ場 $A_\mu(x)$ は，それを $A_a(x) \equiv h^\mu{}_a(x) A_\mu(x)$ で置き換えれば，スカラー場と考えることができる[*5]．またディラック場やワイル場は，$GL(4)$ のスピノル表現不存在により，もちろんスカラー場である．したがって，四脚場（および局所並進のゴースト場）以外のすべての場は原時空のスカラー場になる．それらは局所内部変換に対して変換してもよいが，この自由度が非物理的であるためには，素粒子場のラグランジァン密度は局所内部変換のもとで不変でなければならない．

正準量子化により，一連の場の方程式と原時間同時刻正準交換関係（反交換関係を含む）が設定される．後者は場の量とその 1 階原時間偏微分に関する原時間同時刻交換関係にあらわに書き直すことができる．また，場の方程式は場の量の 4 次元交換子に関する偏微分方程式に書き換えられ，同時刻交換関係を初期値とする q 数コーシー問題が設定される [4)]．これを解けば，原理的にオペレータ解が得られたことになる．その表現は，それとコンシステントなワイトマン関数（場の量の単純積の真空期待値）の完全系を与えることによってなされる．[*6]

重力場の共変的正準量子論では，多くの対称性が存在する．そしてその対称性の生成子を，ネーターの定理に従って構成できる．生成子と場の量との交換子は，原時間同時刻交換関係を用いてすべて計算することができる．局所並進に対応する BRS チャージと局所内部変換に対応する BRS チャージは九後・小嶋の補助条件設定のため必要だが，以下の考察に関係ないので省略する．問題とする対称性の生成子は，並進の生成子 P_μ と原時空 $GL(4)$ の生成子 $\hat{M}^\mu{}_\nu$ と内部対称性の生成子 $M^{ab}(= -M^{ba})$ である．素粒子場を一般的に $\varphi_A(x)$ と書くことにすると[*7]，交換関係は

$$
\begin{aligned}
i[P_\mu,\ h_\lambda{}^c(x)] &= \partial_\mu h_\lambda{}^c(x), \\
i[P_\mu,\ \varphi_A(x)] &= \partial_\mu \varphi_A(x); \\
i[\hat{M}^\mu{}_\nu,\ h_\lambda{}^c(x)] &= x^\mu \partial_\nu h_\lambda{}^c(x) + \delta^\mu{}_\lambda h_\nu{}^c(x), \\
i[\hat{M}^\mu{}_\nu,\ \varphi_A(x)] &= x^\mu \partial_\nu \varphi_A(x);
\end{aligned}
$$

[*5] この立場での直接の量子化は，最近具体的に遂行された [3)]．

[*6] アインシュタイン定数 κ がゼロの極限では，素粒子場がない場合のワイトマン関数の完全系を具体的に構成できる．$\kappa = 0$ 近似では四脚場同士は 4 次元的に可換だが，それと非可換な場が存在するので，それは c 数ではない．したがって，第 0 近似が c 数であると仮定する摂動論が誤りであることは，具体的に確認できるわけである [4)]．

[*7] 局所並進のゴースト場もこれに準ずる．

$$i[M^{ab},\ \ h^c_\lambda(x)] = \xi^{ac}h^b_\lambda(x) - \xi^{bc}h^a_\lambda(x),$$
$$i[M^{ab},\ \ \varphi_A(x)] = (\sigma_A{}^B)^{ab}\varphi_B(x)$$

である．ここに，$\xi^{ab}=\xi_{ab}$．また $(\sigma_A{}^B)^{ab}$ は，大域的内部変換に対する素粒子場の変換行列を表す．上の結果は，実際に計算した結果であるが，理論がコンシステントであれば当然成立が期待されるものと一致している．同様に，生成子間の交換関係も期待通りのものとなる．とくに，P_μ と $\hat{M}^\mu{}_\nu$ は M^{ab} と可換である．

ここで真空 $|0\rangle$ を導入し，オペレータの表現を決める．**並進 P_μ の不変性は自発的に破れていないものとする．**すなわち，$P_\mu|0\rangle=0$ とする．そうすると，P_μ の交換子の真空期待値はゼロになるから，$\langle 0|\partial_\mu h^c_\lambda(x)|0\rangle=0$，$\langle 0|\partial_\mu\varphi_A(x)|0\rangle=0$ となる．つまり，すべての場の量の真空期待値は x^μ に依存しない．ゆえに，

$$u_\mu{}^a \equiv \langle 0|h^a_\mu(x)|0\rangle$$

とおけば，$u_\mu{}^a$ は定数である．したがって，四脚場を含む交換子の真空期待値は，

$$i\langle 0|[\hat{M}^\mu{}_\nu,\ h^c_\lambda(x)]|0\rangle = \delta^\mu_\lambda u^c_\nu,$$
$$i\langle 0|[M^{ab},\ \ h^c_\lambda(x)]|0\rangle = \xi^{ac}u^b_\lambda - \xi^{bc}u^a_\lambda$$

となる．四脚場の逆行列の存在は仮定したから，アインシュタイン定数 κ がゼロの場合は四脚場の真空期待値の逆行列も存在することになる．したがって，$\kappa\neq 0$ の場合もジェネリックな状況として逆行列を持つと考えてよいであろう．すなわち，$\det u_\mu{}^a\neq 0$ とする．このとき，上式から $\hat{M}^\mu{}_\nu$ の全成分，M^{ab} の全独立成分が自発的に破れていることがわかる．前者の対称部分の南部・ゴールドストーン粒子が重力子に他ならない．したがって，重力子の質量は正確にゼロであることが予言される．

以下，原時空に依存しない量の添え字には，$\alpha,\beta,...$ を用いることにする．$u_\gamma{}^\alpha$ の転置逆行列を $v^\gamma{}_\beta$ とする（すなわち $u_\gamma{}^\alpha v^\gamma{}_\beta=\delta^\alpha{}_\beta$）．ここで

$$\tilde{M}^{\alpha\beta} \equiv (\xi^{\beta\gamma}u_\delta{}^\alpha v^\varepsilon{}_\gamma - \xi^{\alpha\gamma}u_\delta{}^\beta v^\varepsilon{}_\gamma)\hat{M}^\delta{}_\varepsilon + M^{\alpha\beta}$$

を考えると，

$$\langle 0|[\tilde{M}^{\alpha\beta},\ h^c_\lambda(x)]|0\rangle = 0$$

であることが確かめられる．$\tilde{M}^{\alpha\beta}$ と素粒子場の交換子の真空期待値については，$\langle 0|[\hat{M}^\mu{}_\nu,\ \varphi_A(x)]|0\rangle=0$ であり，また M^{ab} の素粒子場による自発的対称性の破れの可能性[*8]は存在理由がないので考慮外とすると，$\tilde{M}^{\alpha\beta}$ は自発的に破れていない対称性の生成子であることがわかる．$\tilde{x}^\alpha\equiv u_\mu{}^\alpha x^\mu$（したがって $\tilde{\partial}^\alpha\equiv\xi^{\alpha\beta}v^\mu{}_\beta\partial_\mu$）

[*8] 通常の自発的対称性の破れではないが，もし複素ゴーストの場が存在すると，物理的ユニタリー性に矛盾することなくローレンツ不変性が破れることが知られている [5]．

とおくと，

$$i[\tilde{M}^{\alpha\beta},\ \tilde{\varphi}_A(\tilde{x})] = (\tilde{x}^\alpha\tilde{\partial}^\beta - \tilde{x}^\beta\tilde{\partial}^\alpha)\tilde{\varphi}_A(\tilde{x}) + ({\sigma_A}^B)^{ab}\tilde{\varphi}_B(\tilde{x})$$

を得る．ただし，$\varphi_A(x) \equiv \tilde{\varphi}_A(\tilde{x})$ とおいた*9．

さて，以上ではまだ ξ_{ab} の対角要素の何個が -1 なのかは決まっていなかった．次に，これがミンコフスキー計量 η_{ab} でなければならないことを示そう．$\tilde{M}^{\alpha\beta}$ による対称性の不変距離は

$$s \equiv \xi_{\alpha\beta}(\tilde{x}^\alpha - \tilde{y}^\alpha)(\tilde{x}^\beta - \tilde{y}^\beta)$$

である．**もし $\xi_{\alpha\beta}$ が $\eta_{\alpha\beta}$ でなかったならば，$\tilde{x}^0$ と同じ計量符号を持つ別な次元が存在するから**，任意の原時空 $x^\alpha - y^\alpha$ を，s を不変に保つ線形変換（回転）によって超平面 $\tilde{x}^0 - \tilde{y}^0 = 0$ 上にもって行くことできる．

ところで，（B 場以外の）任意の 2 つの場の量を $\Phi(x)$，$\Phi'(x)$ と書くと，その原時間同時刻交換関係は

$$[\Phi(x),\ \Phi'(y)]_\mp = 0 \quad \text{for} \ \ x^0 = y^0$$

である．すなわち，

$$[\tilde{\Phi}(\tilde{x}),\ \tilde{\Phi}'(\tilde{y})]_\mp = 0 \quad \text{for} \ \ \tilde{x}^0 - \tilde{y}^0 = 0$$

である．s を不変にする線形変換は自発的に破れていないから，そのもとで $\langle 0|[\tilde{\Phi}(\tilde{x}),\ \tilde{\Phi}'(\tilde{y})]_\mp|0\rangle$ は不変である．ゆえに上の結果から，それは $x^\alpha - y^\alpha$ の任意の値でゼロ，すなわち $\tilde{x}^\alpha - \tilde{y}^\alpha$ の任意の値でゼロになることがわかる．エネルギーの正値性条件を満たすそれとコンシステントな表現は，

$$\langle 0|\tilde{\Phi}(\tilde{x})\tilde{\Phi}'(\tilde{y})|0\rangle = 0$$

となる [4)][*10]．つまりそのような理論は，すべての（B 場を含まない）2 点関数が恒等的にゼロだから，トリヴィアルである．したがってノントリヴィアルな理論が得られるためには，$\xi_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ でなければならない．

$\tilde{x}^0$ を「物理的時間」，$\tilde{x}^\alpha$ を「物理的時空」と呼ぶ．このとき，$\tilde{M}^{\alpha\beta}$ は物理的時空におけるローレンツ変換であり，P_μ と合わせて，ポアンカレ群を生成する．このように，**素粒子の理論のポアンカレ不変性は，並進が自発的に破れていない場合に $GL(4)$ の自発的破れの結果現れる二次的対称性である**．したがって，SUSY や超重力において想定されているようにポアンカレ不変性を基本的対称性と考えるのは，不自然であることがわかる．

---

*9 ここまでの議論は，今までに何度か発表してきた議論 [6)] と本質的には同じである．

*10 交換子の真空期待値がゼロということは，2 点ワイトマン関数を変数 $\tilde{x}^0 - \tilde{y}^0$ について複素平面に解析接続したとき，下半面で正則な解析関数と上半面で正則な解析関数が実軸上で一致するということであるから，無限遠でゼロならば，その解析関数は恒等的にゼロでなければならない．

なお，ここで得られた結果は，「素粒子場のみで構成される作用積分がポアンカレ不変である」という命題と同義ではないことに注意しておこう．この命題が得られるためには，さらに $\langle 0|h^{\mu}{}_{a}(x)|0\rangle = v^{\mu}{}_{a}$ が成立することが必要である．この場合は，四脚場をすべてその真空期待値に置き換えると，明白にポアンカレ不変な素粒子場の作用積分が得られる．つまり，**重力場の量子補正を無視した近似においてのみ素粒子の理論の明白なポアンカレ不変性が正当化される**のである．

最後に，並進が自発的に破れた場合を考えよう．このとき $\langle 0|g_{\mu\nu}(x)|0\rangle$ は定数ではないから，曲がった背景時空が存在することになる[*11]．もちろん，エネルギー・運動量の保存則もローレンツ不変性も破れる．ビッグバン宇宙論の時空を背景時空と見なすならば，宇宙の始まりの時刻はずらせられないので，宇宙開闢時にはエネルギー保存則は自発的に破れる．したがって，無から有（宇宙）が生ずる可能性があるわけである．他方，空間方向の並進は自発的に破れていないとすれば，空間 3 次元についてはユークリッド不変である．したがって，宇宙の一様等方性は，インフレーションを仮定しなくても説明できるであろう．

$\kappa = 0$ の場合を考えると，四脚場同士，したがって，重力場同士は任意の時空点で可換であり[*12]，重力場の任意の関数 $F(g_{\mu\nu}(x))$ に対し，

$$\langle 0|F(g_{\mu\nu}(x))|0\rangle = F(\langle 0|g_{\mu\nu}(x)|0\rangle)$$

が成立する [4]．したがって，背景場 $\langle 0|g_{\mu\nu}(x)|0\rangle$ は，真空中のアインシュタイン方程式を満たす．このように，古典アインシュタイン重力は並進の自発的破れとして理解することができる．もちろん $\kappa \neq 0$ の場合は，真空期待値によって古典理論を再生することはできない．実際，量子アインシュタイン方程式は，それを共変成分で書くか，混合成分で書くか，反変成分で書くかによって，その真空期待値がみな異なるのである．

文　献

1) N. Nakanishi, Publication RIMS **19** 1095 (1983).

2) N. Nakanishi and I. Ojima, *Covariant Operator Formalism of Gauge Theories and Quantum Gravity*(World Scientific, 1990), Chap. 5.

3) R. Yoshida, Asia Univ. J. Soc. Gen. Res. **20** 53 (2013).

4) N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. **111** 301 (2004).

5) N. Nakanishi, Phys. Rev. **D 5** 1968 (1972).

6) たとえば，文献 1),2) や中西　襄，数理解析研究所講究録 **1524** 50 (2006).

[*11] 背景時空の存在が理論の前提ではないことは，物理学の基礎理論としての必須条件である．

[*12] c 数でない場が全時空点で可換であることは，不定計量の場の量子論では可能であることに注意．