

# 時間とエネルギーの不確定性関係 — 腑に落ちない関係

谷村 省吾

名古屋大学大学院情報科学研究科

e-mail: tanimura[AT]is.nagoya-u.ac.jp

Uncertainty Relation between Time and Energy — An Uncertain Relation

Shogo Tanimura

*Graduate School of Information Science, Nagoya University, Japan*

(2013年11月27日 受理)

## 概要

量子測定理論の観点から、時間とエネルギーの不確定性関係の簡潔な定式化と無理のない解釈を提示する。とくに、アインシュタインとボーアの論争の題材となった「光子箱」のパラドクスを再検討し、妥当と思われる解釈を提案する。

## 1 序

時間とエネルギーの不確定性関係は、物理的意味や数学的定式化について定説が固まっておらず、歴史上、何度も議論の対象になっている [1, 2, 3]。一方で、近年、量子系の測定過程の分析には、測定の対象となるミクロ系だけを孤立系として記述・分析したり、測定器を半古典論的に扱うのでは不十分であり、ミクロ被測定系とマクロ測定器とを合わせた複合系を量子論的に扱うべきだという理解が、量子論の基礎の研究者の間では広まっている [4]。

本稿では、量子測定理論の観点から、時間・エネルギーの不確定性関係が合理的かつ現実に沿う形で定式化・解釈できることを示す。既存の議論を概観・整理し、とくにアインシュタイン・ボーアの論争に登場した「光子箱」と呼ばれる思考実験をめぐる論争を批判的に再検討する。

結局、時間とエネルギーの不確定性関係は、測定対象であるミクロ量子系のみには内在した性質ではなく、測定過程に依存した概念であり、対象系と測定器の相互作用に要する時間  $\Delta t$  と、2つの系の間でやりとりされるエネルギー移動量の誤差  $\Delta E$  の間のトレードオフ関係  $\Delta t \cdot \Delta E \sim h$  として理解するのが適切であることが結論される。この解釈を採れば「光子箱」のパラドクスも無理なく解消される。また、この分析を通して、有限時間の測定におけるエネルギー誤差と、時間制限のない崩壊過程における自然幅との違いが明確になる。

本稿は、研究としては目新しい部分は少ないが、時間とエネルギーの不確定性関係をどう語るのが適当なのかを考え直す材料にはなるのではないかと思う。

## 2 問題

時間とエネルギーの積は作用 (action) の次元を持つ．時間とエネルギーは

$$\Delta t \cdot \Delta E \gtrsim h \quad (1)$$

という不確定性関係を満たす，と言われることがある．しかし， $\Delta t$  とは何か， $\Delta E$  とは何か，どういう状況を想定してこの式を書いているのか，いかなる根拠でこの式が成り立つのか，といった点は曖昧にされがちである．

時間とエネルギーの不確定性関係は何を表しているのかという疑問は古く，幾度となく議論されており（例えば文献 [1, 2]），いまさら新しい観点から議論をするのが難しいほどである．それでも既存の議論を整理して現代的な観点から解決を探ることには意義があるだろう．最近，測定誤差や，測定行為が系に及ぼす擾乱を定量的に評価して不確定性関係を定式化しなおした小澤正直氏や渡辺優氏・上田正仁氏たちの研究があり [5, 6, 7, 8]，不確定性関係の分析には測定過程の力学的効果を考慮に入れるべきだという意識が高まっていることもあり，そのような観点から時間とエネルギーの不確定性関係も検討したい．

なお，歴史に関する註だが，ハイゼンベルクが初めて位置と運動量の不確定性関係を記した論文の中に，時間とエネルギーの不確定性関係式も書かれている [9]．ハイゼンベルクはシュテルン・ゲルラッハの実験をモデルにして時間とエネルギーの不確定性関係を論じたが，すべてのケースで成立するような一般的な証明は与えなかった．

## 3 素朴な見解

相対論では，時間と空間は時空という概念に統合され，時間・空間は4次元の座標  $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$  の一部として位置づけられる．相対論ではエネルギーと運動量もひとまとまりの物理量として扱われ，4次元ベクトル  $(p^0, p^1, p^2, p^3) = (E/c, p_x, p_y, p_z)$  で記述される．量子論に移行した場合，相対論的共変性から，

$$[\hat{x}^\mu, \hat{p}^\nu] = i\hbar \eta^{\mu\nu} \quad (2)$$

( $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  はミンコフスキー計量) という交換関係が成り立つのではないかと期待するのは自然な発想であろう [10]．空間座標と運動量の間  $\Delta x \cdot \Delta p_x \gtrsim h$  という不確定性関係が成り立つなら，時空座標とエネルギー運動量に関しても

$$\Delta x^\mu \cdot \Delta p^\nu \gtrsim \delta^{\mu\nu} h \quad (3)$$

という関係が成り立つことがナイーブに期待される．が，以下に見るように，この期待は正当化されない．

## 4 否定的な見解

### 4.1 時間は演算子ではない

はい、それはもう何度も言われてきました。議論を形式論に限って、もしも、ハミルトニアン  $\hat{H}$  に対して正準交換関係

$$[\hat{T}, \hat{H}] = i\hbar \quad (4)$$

を満たす自己共役演算子  $\hat{T}, \hat{H}$  があったとしたら、いわゆるハイゼンベルク方程式 [11]

$$\frac{d\hat{T}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{T}, \hat{H}] = 1 \quad (5)$$

の解は  $\hat{T}(t) = \hat{T}(0) + t$  となり、たしかに  $\hat{T}$  には「時間物理量」という呼称がふさわしい。一方で、正準交換関係  $[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar$  を満たす自己共役演算子  $\hat{Q}, \hat{P}$  は粒子の位置あるいは運動量として解釈されるが、 $\hat{Q}, \hat{P}$  のスペクトルは、必ず実数全体になることが証明されている。従って、正準交換関係 (4) を満たす自己共役演算子  $\hat{T}, \hat{H}$  があれば、それらのスペクトルも実数全体である。ところが、ハミルトニアン  $\hat{H}$  のスペクトルはエネルギーと解釈され、エネルギー固有値の離散性やエネルギーの下限値の存在は、現実的なモデルの条件とされている。ゆえに時間演算子と現実的なモデルは両立しない。このことは歴史的に早い時期にパウリが指摘していた [12]。

上に述べた命題の対偶として、正準交換関係 (4) を満たす演算子  $\hat{T}, \hat{H}$  のスペクトルが実数全体ではないとしたら、 $\hat{T}, \hat{H}$  のどちらかは自己共役ではないはずだが、この点については、もう少し精密なことが言えて、新井朝雄氏 [13] は以下のことを証明している：

正準交換関係 (4) を満たす自己共役演算子  $\hat{H}$  と、自己共役とは限らない  $\hat{T}$  があったとして、(i) もしも  $\hat{H}$  のスペクトルが下に有界ならば、 $\hat{T}$  のスペクトルは複素数全体  $\mathbb{C}$  または複素上半平面全体  $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z \geq 0\}$  である。(ii) もしも  $\hat{H}$  のスペクトルが上に有界ならば、 $\hat{T}$  のスペクトルは複素数全体  $\mathbb{C}$  または複素下半平面全体  $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z \leq 0\}$  である。(iii) もしも  $\hat{H}$  のスペクトルが上下ともに有界ならば、 $\hat{T}$  のスペクトルは複素数全体  $\mathbb{C}$  である。

以上は、数学的には明快な結果だが、複素スペクトルを持つ時間演算子の物理的意味は不明である。

### 4.2 時間は系に属する物理量ではない

時間は観測者や時計や座標系が定義するものであって、系に固有の物理量ではない。

時間が各物理系に属する物理量だと考えると、いろいろ無理が生じる。例えば、1 個のミュオンを生成して、しばらく経った後にそのミュオンを見せられたとして、「このミュオンのエネルギーを測れ」と言われれば何らかの測りようがあるが、「このミュオンの生存時間（生まれてからどれだけの時間が経過したか）を測定しろ」と言われても測りようがない。ミュオンの生存時間は、ミュオンを生成した時刻と、ミュオンの崩壊を観測した時刻の差で定義されるものであり、観測者の時計で定義されるものである。時間の経過につれて単調増加あるいは単調減少するような量を一つ一つのミュオンが持っているとは思え

ないし、そのようにミューオンに付随する量を実験者が測って時刻を決定しているわけではない。

また、複数の同種粒子を異なる時刻に生成したとして、各粒子の生存時間の経過に伴って値が変化する物理量を各粒子が持っていたとしたら、同種粒子を区別できる（新しい粒子と古い粒子を区別できる）ことになってしまう。しかし、現実はそうはなっていない。

また、もしも時間が演算子で表されたとしても、時間の固有状態とか、時間の重ね合わせ状態といったものが、物理的に何を表しているのかわからない。

普通に考えれば、時間は観測者に属する古典的パラメータである。時計という標準的な力学系の往復・繰り返し運動によってカウントされ、一般の物理系の運動を記述するために参照されるパラメータが時間である、というのがいまのところ物理学者に定着している時間観であろう。

## 5 肯定的かつ数学的に正しい見解

### 5.1 物理量変化の時間スケール

時間演算子を導入するのはやめにして、任意の物理量  $\hat{A}$  のハイゼンベルク方程式を考える：

$$i\hbar\dot{\hat{A}} = i\hbar\frac{d\hat{A}}{dt} = [\hat{A}, \hat{H}] \quad (6)$$

また、規格化された状態ベクトル  $\psi$  に対する期待値を  $\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$ 、標準偏差を  $\sigma(\hat{A}) = \langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle^{1/2}$  と書く。ロバートソンの不等式 [14]（多くの教科書で不確定性関係を表すとされている式）より

$$\sigma(\hat{A})\sigma(\hat{H}) \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle| = \frac{\hbar}{2} |\langle \dot{\hat{A}} \rangle| \quad (7)$$

を得る。ここで、

$$\tau(\hat{A}) := \frac{\sigma(\hat{A})}{|\langle \dot{\hat{A}} \rangle|} \quad (8)$$

とおいたものを物理量  $A$  の変化の典型的な時間スケールと呼ぶ。そう定めれば、(7) は

$$\tau(\hat{A})\sigma(\hat{H}) \geq \frac{1}{2}\hbar \quad (9)$$

と書ける。これを、物理量変化に要する時間とエネルギーゆらぎの関係式と呼ぼう。ヤンマーによれば、この式を最初に導いたのはマンデルスタムとタムだそうである [15]。これは時間とエネルギーの不確定性関係のようにも見えるが、 $\tau(\hat{A})$  は「物理量  $A$  の値が有意に変化するのにかかる時間」であって、「時間の不確定性」と見なせるようなものではない。

とくにエネルギー固有状態では、 $\sigma(\hat{H}) = 0$  であり、形式的に  $\tau(\hat{A}) = \infty$  となるが、これはエネルギー固有状態 = 定常状態の自然な性質として理解できる。

逆に、エネルギーの不確定性  $\sigma(\hat{H})$  が大きい場合は、状態も物理量の値も速く変化し、変化時間  $\tau(\hat{A})$  が短くなる。このことも物理的直観に合う。

## 5.2 状態変化の時間スケール

シュレーディンガー方程式

$$i\hbar\dot{\psi} = i\hbar\frac{d}{dt}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle \quad (10)$$

からも不確定性関係らしい式が導ける． $\langle\psi|\psi\rangle = 1$  とし，

$$v^2(\psi) := \langle\dot{\psi}|\left(1 - |\psi\rangle\langle\psi|\right)|\dot{\psi}\rangle \quad (11)$$

という実数値を定義し， $v(\psi) \geq 0$  を状態変化の物理的速さと呼ぶ．これは幾何学的には複素射影空間のフビニ・スタディ計量というものに相当する．これは以下のようにも導出できる．純粋状態の密度行列  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  の時間微分は

$$\dot{\rho} = |\dot{\psi}\rangle\langle\psi| + |\psi\rangle\langle\dot{\psi}| \quad (12)$$

である．規格化条件  $\langle\psi|\psi\rangle = 1$  から

$$\langle\dot{\psi}|\psi\rangle + \langle\psi|\dot{\psi}\rangle = 0 \quad (13)$$

であることに注意して，状態変化の速さの目安となる量として  $\text{Tr}(\dot{\rho}\dot{\rho})$  を計算すると

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\dot{\rho}\dot{\rho}) &= \text{Tr}\left(|\dot{\psi}\rangle\langle\psi| + |\psi\rangle\langle\dot{\psi}|\right)\left(|\dot{\psi}\rangle\langle\psi| + |\psi\rangle\langle\dot{\psi}|\right) \\ &= 2\langle\dot{\psi}|\dot{\psi}\rangle\langle\psi|\psi\rangle + \langle\psi|\dot{\psi}\rangle\langle\psi|\dot{\psi}\rangle + \langle\dot{\psi}|\psi\rangle\langle\dot{\psi}|\psi\rangle \\ &= 2\left(\langle\dot{\psi}|\dot{\psi}\rangle - \langle\dot{\psi}|\psi\rangle\langle\psi|\dot{\psi}\rangle\right) \\ &= 2v^2(\psi) \end{aligned} \quad (14)$$

となる．

速さの定義式 (11) にシュレーディンガー方程式 (10) を代入すると

$$\begin{aligned} v^2(\psi) &= \frac{1}{\hbar^2}\langle\psi|\hat{H}\left(1 - |\psi\rangle\langle\psi|\right)\hat{H}|\psi\rangle \\ &= \frac{1}{\hbar^2}\left(\langle\hat{H}^2\rangle - \langle\hat{H}\rangle^2\right) \\ &= \frac{1}{\hbar^2}\sigma(\hat{H})^2 \end{aligned} \quad (15)$$

を得る．ここで

$$\tau(\psi) := \frac{1}{v(\psi)} \quad (16)$$

とおいたものを状態  $\psi$  の変化の典型的な時間スケールと呼ぶ．互いに直交する任意の2つの単位ベクトルは，フビニ・スタディ計量に関して距離  $\pi/2$  だけ離れているので，状態の変化の典型的な時間スケールとしては， $T = (\pi/2)/v(\psi)$  を選ぶ方がより合理的かもしれない．しかし，あくまで目安の時間を定めただけなので，(16) の定義を採用すると，(15) は

$$\tau(\psi)\sigma(\hat{H}) = \hbar \quad (17)$$

となり，不確定性関係ばい等式になる．これを状態変化に要する時間とエネルギーゆらぎの関係式と呼ぼう．これも簡単明瞭な式なので，おそらく多くの人によって独立に再発見され

ているだろうが，アナンダンとアハラノフの論文は明確にフビニ・スタディ計量に言及しているという特徴がある [16] .

関係式 (9) や (17) は，エネルギー値の統計的ばらつきが大きいと他の物理量や状態の変化は速くなり，逆に，エネルギーの値の統計的ばらつきが小さいと他の物理量や状態の変化は遅くなる（定常状態に近づく）という，孤立量子系の力学的性質を表している .

しかし，変化時間スケールとエネルギーゆらぎの関係式 (9) や (17) には，「エネルギーを正確に測ろうとしたことが時計を乱す」とか「時間の測定行為がエネルギー値に不測の変化を及ぼす」というような意味内容はない .  $\tau$  は時間の測定誤差を表しているわけではないし， $\tau$  も  $\sigma(\hat{H})$  も測定作用によって系が受ける反作用みたいなものを表しているわけではない . これらの式は，測定器とは何の関わりもない，閉じた量子系固有の性質を表している .

### 5.3 量子推定理論における不確定性関係

量子推定理論の立場からも類似の関係式（不等式）が導かれる [17] . 少し一般性を持たせて，必ずしもハミルトニアンとは限らない自己共役演算子  $\hat{L}$  で生成されるユニタリ演算子で状態ベクトルを変換する状況を考える :

$$|\psi_\theta\rangle := e^{-i\hat{L}\theta/\hbar}|\psi\rangle \quad (18)$$

この状態の系に何らかの測定を施して  $\theta$  の値を推定したいという問題を考える . その目的のために適当な自己共役物理量  $\hat{S}$  の期待値  $\langle\hat{S}\rangle_\theta := \langle\psi_\theta|\hat{S}|\psi_\theta\rangle$  を測定する . 任意の実数  $\theta$  に対して

$$\langle\psi_\theta|\hat{S}|\psi_\theta\rangle = \theta \quad (19)$$

が成り立つならば， $\hat{S}$  を不偏推定量 (unbiased estimator) という . 条件を緩めて，ある実数  $\theta_0$  と正の実数  $\varepsilon$  が存在して， $\theta_0 - \varepsilon < \theta < \theta_0 + \varepsilon$  を満たす任意の実数  $\theta$  に対して (19) が成り立つならば， $\hat{S}$  を局所不偏推定量 (local unbiased estimator) という .

局所不偏推定量  $\hat{S}$  に対して

$$\langle(\hat{S} - \theta)^2\rangle_\theta := \langle\psi_\theta|(\hat{S} - \theta)^2|\psi_\theta\rangle \quad (20)$$

を推定誤差と呼ぶのは自然な定義である . このとき次の関係式が成り立つ :

$$\langle(\hat{S} - \theta)^2\rangle_\theta \cdot \langle(\hat{L} - \langle\hat{L}\rangle)^2\rangle_\theta \geq \left(\frac{1}{2}\hbar\right)^2 \quad (21)$$

つまり，物理量  $\hat{L}$  の値の統計的ゆらぎ（標準偏差）が小さいと  $\theta$  の推定誤差が大きくなるというトレードオフの関係がある . これを推定における不確定性関係と呼ぶ .

極端な場合として， $\hat{L}$  の標準偏差がゼロならば，状態  $\psi$  は  $\hat{L}$  の固有状態であり，(18) で定めた状態  $|\psi_\theta\rangle = e^{-i\hat{L}\theta/\hbar}|\psi\rangle$  は  $\theta$  の値によらず一定の状態である . したがって，状態  $|\psi_\theta\rangle$  をいくら観測しても  $\theta$  の値を一意的に推定できるはずがない . このことは，形式的に「 $\langle(\hat{L} - \langle\hat{L}\rangle)^2\rangle_\theta = 0$  ならば  $\langle(\hat{S} - \theta)^2\rangle_\theta = \infty$ 」という関係で特徴付けられる .

変換の生成子としてハミルトニアン  $\hat{L} = \hat{H}$  , 変換パラメータとして時間  $\theta = t$  をあてはめれば, (21) は, 時間の推定誤差とエネルギーの標準偏差の間の不確定性関係と解釈できる. ただし, 時間パラメータ  $t$  に対する (局所) 不偏推定量  $\hat{S} = \hat{T}$  があればの話である.

不等式 (21) の証明は簡単である. 任意の自己共役演算子  $\hat{A}, \hat{B}$  に対してロバートソンの不等式

$$\langle \hat{A}^2 \rangle \cdot \langle \hat{B}^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|^2 \quad (22)$$

が成り立つことは既知とする. 状態ベクトルとして  $|\psi_\theta\rangle = e^{-i\hat{L}\theta/\hbar}|\psi\rangle$  を採り, 演算子として  $\hat{A} = \hat{S} - \theta\hat{1}$ ,  $\hat{B} = \hat{L} - \langle \hat{L} \rangle \hat{1}$  を当てはめれば, (22) の左辺は (21) の左辺と一致し, (22) の右辺の交換子は  $[\hat{S}, \hat{L}]$  となる. 一方で, (19) の不偏性条件

$$\langle \psi | e^{i\hat{L}\theta/\hbar} \hat{S} e^{-i\hat{L}\theta/\hbar} | \psi \rangle = \theta \quad (23)$$

を  $\theta$  で微分して  $\theta = \theta_0$  とおけば,

$$-\frac{i}{\hbar} \langle [\hat{S}, \hat{L}] \rangle_{\theta_0} = 1 \quad (24)$$

すなわち  $\langle [\hat{S}, \hat{L}] \rangle_{\theta_0} = i\hbar$  を得る. こうして不等式 (21) が導かれる.

推定問題の不確定性不等式 (21) のよいところは, 推定したい量が古典的パラメータ  $\theta$  であり, それ自体が演算子である必要はないところだ. 状態  $|\psi_t\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar}|\psi\rangle$  の時間  $t$  の値を推定したいという問題は, まさにこの定式化にあてはまる. また, 時間とエネルギーの関係だけでなく, 角度と角運動量, 位相と粒子数の不確定性関係も同形の式で扱えそうに思える.

しかし, 実際には, 推定問題の不確定性不等式 (21) は万能ではない. この定式化では, 時間・エネルギーの正準交換関係 (4) が, 不偏性条件  $\langle [\hat{T}, \hat{H}] \rangle = i\hbar$  という期待値に関する条件に緩められているが, 実質的には, これは演算子の関係式  $[\hat{T}, \hat{H}] = i\hbar$  の要請と大した違いはない. そのような都合のよい時間推定演算子  $\hat{T}$  が存在しないことは先に見たとおりである. あくまでも, 不確定性不等式 (21) は, 不偏推定量  $\hat{S}$  があれば成り立つ話であって, そのような都合のよい量があるとは限らない.

#### 5.4 波束の不確定性関係

もっと安直に, 時間の関数  $g(t)$  で表される波動的な量があったとして, その平均時刻  $\bar{t}$  と時間幅  $\Delta t$  を

$$\bar{t} := \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t |g(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt}, \quad (\Delta t)^2 := \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (t - \bar{t})^2 |g(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt} \quad (25)$$

で定める. また,  $g(t)$  のフーリエ変換

$$G(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} g(t) dt \quad (26)$$

によって, 平均周波数  $\bar{\omega}$  と周波数幅  $\Delta\omega$  を

$$\bar{\omega} := \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega |G(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega}, \quad (\Delta\omega)^2 := \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \bar{\omega})^2 |G(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega} \quad (27)$$

で定めれば，フーリエ変換の性質として

$$\Delta t \Delta \omega \geq \frac{1}{2} \quad (28)$$

が成り立つ．つまり， $\Delta t$  程度の継続時間を持つ波束は，スペクトルにおいて  $\Delta \omega$  程度の広がりを持つ．これは波束の継続時間と周波数の帯域幅の関係式と呼ぶのが適当だろう．

周波数を  $\hbar \omega = E$  でエネルギーに読み替えて，(28) 式を時間とエネルギーの不確定性関係と呼ぶこともなくはないが（実際，ボーアはこれが不確定性関係の根拠だと考えていたふしがある [18]），これは，量子論的性質というよりは，音波でも成り立つ古典的波動の性質であり，測定過程とも無関係な，波動そのものの性質である．

## 6 アインシュタイン・ボーアの光子箱

### 6.1 アインシュタインの問題提起

これは 1930 年のソルヴェイ会議でアインシュタインが提起したとされる問題である [18]．図 1 のように箱の中に設置された時計は，箱の出口のシャッターを制御・監視している．箱には光子を閉じ込めておく．いろいろなエネルギーを持った複数の光子が箱に入っていると考える．そして，箱の重さ  $M_0$  を測る．時刻  $t_0$  にシャッターを開け，時刻  $t_1$  にシャッターを閉める．シャッターが開いている間に箱から光子が出て行く．シャッターを開閉する時刻は時計で測っておく．光子が出て行った後，箱の重さ  $M_1$  を測り直す．シャッターの開閉前後の箱の質量の差  $M_0 - M_1$  から

$$E = (M_0 - M_1)c^2 \quad (29)$$

により，出て行った光子のエネルギー  $E$  がいくらかでも正確に推定できる．また，シャッターの開放時間を  $\Delta t = t_1 - t_0$  とすると，これはいくらかでも短くできる．これは不確定性関係に反するのではないか？というのがアインシュタインが提起した問題である．

### 6.2 ボーアの反論

箱をばね秤に吊るして箱の重さを測ることにする．ばね秤の測定精度は  $\Delta m$  の程度だとする．つまり， $\Delta m$  よりも大きな質量変化は検出できるとする．

箱の位置（＝ばね秤の目盛りの位置） $q$  と，箱の運動量  $p$  の間には

$$\Delta p \sim \frac{h}{\Delta q} \quad (30)$$

という不確定性関係がある．ばね秤の読み取りには時間  $T$  を要するとする．この運動量の不確定性のせいで，重さの読み取り値を狂わされないようにするためには，秤の分解能で決まる力積よりも運動量不確定が小さいことが必要である：

$$\Delta p \sim \frac{h}{\Delta q} < T \Delta m g \quad (31)$$



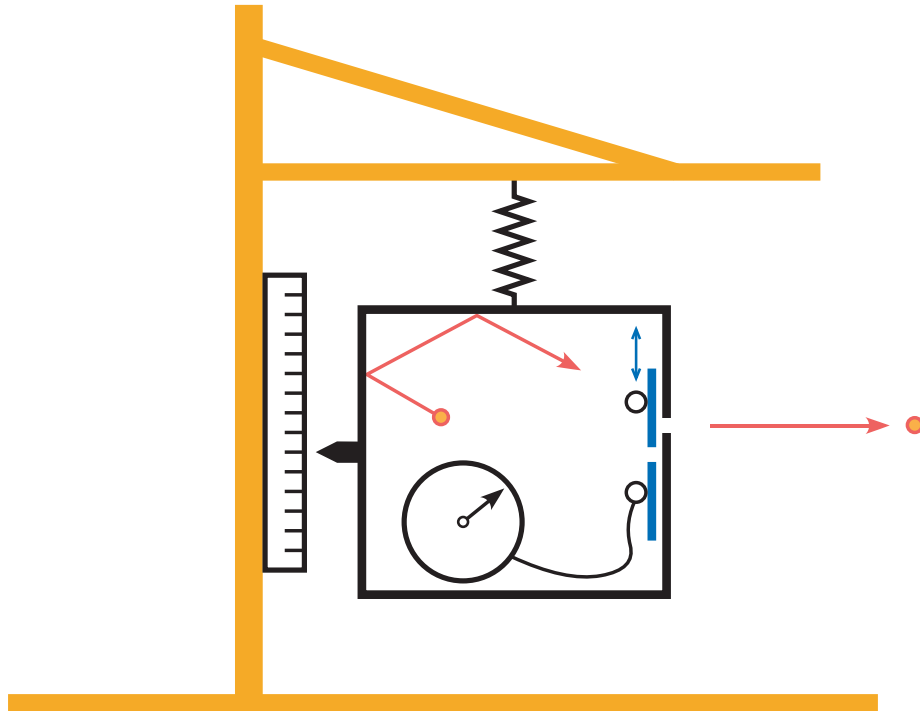


図 1: アインシュタイン・ボーアの光子箱．箱の中には光子が閉じ込められている．箱のシャッターを開けると光子が箱の外に出て行く．シャッターの開閉時刻は時計で測る．また，箱の重さはばね秤で測る．

言い換えると，運動量の不確定性が秤の読みを誤らせるのを防ぐためには

$$\frac{h}{g \Delta q \Delta m} < T \quad (32)$$

でなくてはならない．箱の位置の不確定量  $\Delta q$  や秤の検出質量  $\Delta m$  を小さくしたければ，質量測定に要する時間  $T$  は長くしなければならない．

一方で，一般相対論によれば，弱い重力場においては，重力ポテンシャルを  $\phi$  とすると時空計量は

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (33)$$

で与えられる．このことから，重力場内の局所的な時間経過  $d\tau$  は，遠方の時間経過  $dt$  と

$$d\tau = \left(1 + \frac{\phi}{c^2}\right)dt \quad (34)$$

で関係付けられ，ポテンシャル  $\phi$  が負であるような場所では時間の経過が遅れる（いわゆる赤方偏移）．地表近くでは重力ポテンシャルは  $\phi = gq$  で与えられる．箱の位置（＝時計の位置）が  $\Delta q$  だけずれば，時計の進みは

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{c^2} \Delta\phi = \frac{1}{c^2} g \Delta q \quad (35)$$

の分だけ変化する．これと (31) を併せると，

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{c^2} g \Delta q &> \frac{1}{c^2} g \frac{h}{Tg \Delta m} = \frac{h}{Tc^2 \Delta m} \\ \Delta T &> \frac{h}{c^2 \Delta m} \end{aligned} \quad (36)$$

を得る．質量の読み取り精度  $\Delta m$  はエネルギーの測定精度  $\Delta E = \Delta mc^2$  に換算されるので，この式は時間とエネルギーの不確定性関係

$$\Delta T \Delta E > h \quad (37)$$

を再現する．よって，アインシュタインの方法では，時間とエネルギーの不確定性関係の制約を突破することはできない．

### 6.3 ボーアの反論は反論になっているか？

ボーアの反論は，アインシュタインの一般相対論を逆手にとってアインシュタインをやり込めたとして喝采を受けることがあるが [1]，そう言ってよいであろうか？ いくつか疑問点を指摘したい．

まず第一に，アインシュタインが打破したと思った不確定性関係と，ボーアが擁護したと思った不確定性関係が同じ内容なのかという点が疑問である．アインシュタインとしては，不確定性関係とは，光子が箱から出た時刻と光子のエネルギーは同時に正確には決められないという関係を指しているつもりであったように見受けられる．光子の発射時刻にはシャッターの開閉の時間間隔  $\Delta t = t_1 - t_0$  の分だけ不確定性があり，これと光子のエネルギーの測定精度  $\Delta E$  が  $\Delta t \cdot \Delta E \gtrsim h$  という関係を満たすはずだという主張こそがアインシュタインが理解していた不確定性関係であった．そして，光子箱は，光子のエネルギーを直接測らなくても，箱の質量を測ることによって，光子に対して何の擾乱も与えることなく，光子のエネルギーを好きなだけ正確に測れるための仕掛けであった．つまり，アインシュタインにとっての光子箱は，エネルギーの不確定性  $\Delta E$  も発射時刻の不確定性  $\Delta t$  もゼロに近づけることを可能にし，不確定性関係を打破する装置であった．

一方で，ボーアは，箱の重量の測定に要する時間を  $T$  とし，この所要時間  $T$  に  $\Delta T$  程度の不確定性が伴うとした．ボーアの考察は，シャッターの開閉以前にばね秤の目盛りを読み取る際の誤差を問題にしており，彼の考察に出て来る  $\Delta q$  も  $\Delta p$  も  $\Delta m$  も  $\Delta T$  もシャッターの開放時間  $\Delta t = t_1 - t_0$  とは無関係である．そもそもボーアは，ばね秤の機構のみを分析しており，光子の発射という事象をまったく考慮していない．ボーアは，ばね秤の目盛りの読み取りに要する時間  $T$  の不確定性  $\Delta T$  と，目盛りの読み取り精度に由来するエネルギーの測定精度  $\Delta E$  との間に  $\Delta t \cdot \Delta E \gtrsim h$  という関係が成立するという主張こそ不確定性関係であると解し，これを証明したつもりでいる．ボーアの論を真に受けるなら，光子が箱から出る・出ないに関係なく，秤と時計に不確定性関係が内在していることになる．実際，ボーアは「光子のエネルギーを正確に測定する手段としてこの装置を使用すれば，その光子の出るゆく時刻の制御ができなくなる」と書いている ([18] p.250)．つまり，ボーアは，一般相対論効果によって秤の読み取り時間  $T$  に不定性が生じる結果としてシャッターを開ける時刻  $t_0$

にも不定性が生じると考えているようである。しかし、時計の変位によって時計が置かれた重力場が変化することが問題になるのなら、はじめから時計を地面に固定しておいて、時計とシャッターを柔軟な導線か何かでつないでおけばよいではないか。箱の中に時計を入れておかねばならない必然性はない。

もう一つ、ボーアが想定しているばね秤の機構について文句をつけるなら、ボーアは条件(31)の考察において、読み取り時間  $T$  の間に箱が重力場から受ける力積  $Tmg$  を問題にし、箱の運動量の不確定性  $\Delta p$  が力積の測定分解能  $T\Delta mg$  よりも小さいことを要請しているが、ばね秤とは、そんなふうに時間をかけて重力の力積を測ることによって質量を推測するものだろうか？ 普通のばね秤は、ばねの復元力と重力の釣り合いによって、力積ではなく力そのものを測る仕掛けではないのか、という気がする。

第二に、重力の理論と量子論との整合性が疑問である。非相対論的量子力学は、一般相対論のような一般座標変換で不変な形式ではないので、むしろ一般相対論との整合性は悪いように思える。今日でも、曲がった時空上の場の量子論は、完成しているというよりは、研究の対象だと言うべきであろう。つまり、ボーアは、当時においても現代においても正当化されていない大道具を持ち出してアインシュタインに反論している。また、時間とエネルギーの不確定性関係は一般相対論を動員しないと証明できないのか？ という疑問も残る。ニュートン重力理論では重力による時計の遅れを説明できないので、ボーアの論証は、ニュートン重力理論と量子力学は両立しないことを匂わせるが、そういう実験事実があるわけではない。むしろ、量子力学的粒子に対する重力の影響はニュートン重力理論の範囲で説明できることが、その後の実験で確認されている [19]。

第三に、この論争は、箱の中に時計と光子を入れてばね秤に吊るした光子箱という特殊なモデルに考察を限定しているが、このモデルで時間とエネルギーの不確定性関係が救われたとしても、すべてのケースについて時間とエネルギーの不確定性関係が成立することが証明されたわけではない。

私個人の感想としては、ボーアの反論は議論のすり替え・筋違いとしか思えない。これではとてもアインシュタインに対する反論になっていないと私は思う。また、ボーアの論証は時間とエネルギーの不確定性関係の、一般的な、正当な証明になっているとは言えないと思う。最近の解説記事 [20] でも、こういった疑問に答えてくれていないのは残念である。

## 6.4 ボーアの他の人の議論

ボーアの反論に満足していない物理学者は私の他にもいて、それなりにもっともらしい議論を展開している。皆さんも納得が行くかどうか、以下の考察を読んでみてほしい。

### 6.4.1 シャッター速度効果による説明

これは光子箱以前にアインシュタイン自身が考案したモデルに基づく考察である。ここでは  $q, p$  はシャッターの位置と運動量を表すとし、これらの間には  $\Delta q \Delta p > h$  という不確定性関係がある。シャッターが速度  $v$  で動けば、このシャッターが光子を蹴飛ばして光子にエネルギーを与える可能性があるが、そのエネルギーには  $\Delta E = v\Delta p$  程度の不確定性がある

る．また，シャッターが光子の経路を開閉する時間には  $\Delta t = \Delta q/v$  程度の不確定性がある．よって，

$$h < \Delta q \Delta p = \frac{\Delta q}{v} v \Delta p = \Delta t \Delta E \quad (38)$$

が導かれる．シャッター速度  $v$  を大きくすれば，時間の精度  $\Delta t = \Delta q/v$  は小さくなるが，シャッターが光子を強く蹴飛ばすことになり，エネルギーの擾乱  $\Delta E = v \Delta p$  は大きくなる．

#### 6.4.2 ローレンツ変換による説明

これはヤンマーが示した議論である [1]．アインシュタインの光子箱の質量を，重力を使って測るのではなく，慣性質量で測ることにする．つまり，箱の運動状態を観測することによって箱の質量を推定することにする．測定に要する時間を  $T$  とする．箱の速度の不確定性  $\Delta v$  は箱の位置の不確定性  $\Delta q$  に  $\Delta q = T \Delta v$  で関係付けられる．箱の外の観測者の経過時間  $T'$  と箱の固有時間  $T$  は

$$T' = \frac{T}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (39)$$

で関係付けられ，速度の不確定性は

$$\Delta t = T \times \frac{v \Delta v}{c^2} \quad (40)$$

の程度の時間不確定性を伴う．

また，箱の運動量不確定性  $\Delta p$  は質量の不確定性  $\Delta m$  に  $\Delta p = \Delta m v$  で関係付けられ，エネルギー不確定性に  $\Delta m c^2 = \Delta E$  で関係付けられる．

以上の等式をたどると，

$$h < \Delta q \cdot \Delta p = T \Delta v \cdot \Delta m v = T \frac{v \Delta v}{c^2} \cdot \frac{c^2}{v} \cdot \Delta m v = T \frac{v \Delta v}{c^2} \cdot \Delta m c^2 = \Delta t \Delta E \quad (41)$$

が導かれる．この導出は，一般相対論に頼らず，特殊相対論の枠組みで位置と運動量の不確定性関係から時間とエネルギーの不確定性関係を導くという利点がある．

#### 6.4.3 それでも出て来る批判

後知恵的に気がつくことだが， $\Delta q \Delta p > h$  と  $\Delta t \Delta E > h$  は物理次元が整合しているので，次元解析の意味で整合した式変形をやれば，(38) や (41) のような導出は，どうしてもやりようがあるように思える．つまり，適当なモデルを立てて，それらしく式変形すれば，いつかは  $\Delta q \Delta p > h$  から  $\Delta t \Delta E > h$  にたどり着くように見える．

ローレンツ変換を持ち出したヤンマーの議論にしても，箱の慣性質量を測る具体的な方法が示されておらず，箱の位置の不確定性  $\Delta q$  を速度の不確定性  $\Delta v$  と時間の不確定性  $\Delta t$  に結び付ける論理の連鎖は，いまひとつ不明瞭である．

しかも，これらの分析は，シャッターや箱など測定器の位置と運動量の不確定性関係を用いてはいるが，光子という対象系の量子性はまったく考慮していない．つまり，(38) も (41) も，測定器そのものの性質であり，測定の対象となるミクロ系には関係のない性質である．

## 7 測定理論から見た時間・エネルギーの不確定性関係

### 7.1 測定モデルの摂動解析

本稿第5節では，孤立した量子系に関する厳密な分析を列挙し，第6節では対象系と測定器に関する半古典的とも言える分析（実質的には，測定器だけにに関する分析）を紹介した．そういったやり方では中途半端な分析しかできないように見えるので，初めから対象系と測定器系を合わせた複合系を扱い，一般的な測定モデルを量子論的に分析することにする．結果的には，エネルギーの測定誤差と，測定に要する時間との関係 (60) という形で時間とエネルギーの不確定性関係が導出される．

本稿の大半を書いた後で改めて文献を調べて気づいたのだが，実質的にはこの分析はランダウとパイエルスによる分析 [21, 22, 23] とほぼ同じである．それでも，対象系と測定器系を正しく同定して量子論に忠実に記述・推論すれば誰がやっても同じ結論にたどりつくことがわかるのは意味があることだし，モデルの詳細を変更すれば定量的な結果がどう変わるかを推論する手順は有用であろう．

対象系 (object system) のヒルベルト空間，初期状態ベクトル，ハミルトニアンを  $\mathcal{H}_s, \psi_s, \hat{H}_s$  とする．測定器 (apparatus, measuring system) のヒルベルト空間，初期状態ベクトル，ハミルトニアンを  $\mathcal{H}_a, \psi_a, \hat{H}_a$  とする．対象系と測定器を併せた全系の時間発展はハミルトニアン

$$\hat{H} = \hat{H}_s + \hat{H}_a + \hat{V} \quad (42)$$

で記述されるとする． $\hat{V}$  はいわゆる相互作用ハミルトニアンである．系の時間発展は相互作用表示で記述することにする．つまり，任意の物理量  $\hat{A}$  は

$$i\hbar \frac{d\hat{A}}{dt} = [\hat{A}, \hat{H}_s + \hat{H}_a] \quad (43)$$

に従って変化する．相互作用ハミルトニアン  $\hat{V}(t)$  も

$$i\hbar \frac{d\hat{V}}{dt} = [\hat{V}, \hat{H}_s + \hat{H}_a] \quad (44)$$

に従って変化する．この方程式の形式解は

$$\hat{V}(t) = e^{i(\hat{H}_s + \hat{H}_a)t/\hbar} \hat{V}(0) e^{-i(\hat{H}_s + \hat{H}_a)t/\hbar} = e^{i(\hat{H}_s + \hat{H}_a)t/\hbar} \hat{V} e^{-i(\hat{H}_s + \hat{H}_a)t/\hbar} \quad (45)$$

である． $\hat{V}(0) = \hat{V}$  と書いた．そして全系の状態ベクトル  $|\xi(t)\rangle$  は

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\xi(t)\rangle = \hat{V}(t) |\xi(t)\rangle \quad (46)$$

に従う．この微分方程式の解は形式的に

$$|\xi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\xi(0)\rangle, \quad \hat{U}(t) = \mathcal{T} \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_0^t \hat{V}(u) du \right] \quad (47)$$

と書かれる．ここで  $\mathcal{T}$  は時間順序積を表す．とくに初期状態が  $|\xi(0)\rangle = |\psi_s^i \otimes \psi_a^i\rangle$  の場合に興味がある．時間  $t$  の過程の後に，測定器の射影演算子  $\hat{\Pi}_a^f$  で特徴付けられる測定結果を得る確率は

$$P_a = \langle \psi_s^i \otimes \psi_a^i | \hat{U}(t)^\dagger (1 \otimes \hat{\Pi}_a^f) \hat{U}(t) | \psi_s^i \otimes \psi_a^i \rangle \quad (48)$$

で与えられる．また，対象系の射影演算子  $\hat{\Pi}_s^f$  と測定器の射影演算子  $\hat{\Pi}_a^f$  で特徴付けられる測定結果を得る確率は

$$P_{s,a} = \langle \psi_s^i \otimes \psi_a^i | \hat{U}(t)^\dagger (\hat{\Pi}_s^f \otimes \hat{\Pi}_a^f) \hat{U}(t) | \psi_s^i \otimes \psi_a^i \rangle \quad (49)$$

で与えられる．とくに終状態が  $\hat{\Pi}_s^f = |\psi_s^f\rangle\langle\psi_s^f|$ ， $\hat{\Pi}_a^f = |\psi_a^f\rangle\langle\psi_a^f|$  で与えられる場合は，

$$P_{s,a} = \left| \langle \psi_s^f \otimes \psi_a^f | \hat{U}(t) | \psi_s^i \otimes \psi_a^i \rangle \right|^2 \quad (50)$$

となる．これに (47) の  $\hat{U}(t)$  の指数関数の展開式を代入して， $\hat{V}$  について 0 次の項が  $\langle \psi_s^f \otimes \psi_a^f | 1 | \psi_s^i \otimes \psi_a^i \rangle = 0$  だとして，1 次の項だけを残し，(45) を代入すれば

$$\begin{aligned} P_{s,a} &= \left| \langle \psi_s^f \otimes \psi_a^f | \left( -\frac{i}{\hbar} \int_0^t \hat{V}(u) du \right) | \psi_s^i \otimes \psi_a^i \rangle \right|^2 \\ &= \left| \langle \psi_s^f \otimes \psi_a^f | \left( -\frac{i}{\hbar} \int_0^t e^{i(\hat{H}_s + \hat{H}_a)u/\hbar} \hat{V} e^{-i(\hat{H}_s + \hat{H}_a)u/\hbar} du \right) | \psi_s^i \otimes \psi_a^i \rangle \right|^2 \end{aligned} \quad (51)$$

を得る．さらに，初期状態・終状態はそれぞれエネルギー固有状態

$$\begin{aligned} \hat{H}_s |\psi_s^i\rangle &= E_s^i |\psi_s^i\rangle, & \hat{H}_a |\psi_a^i\rangle &= E_a^i |\psi_a^i\rangle \\ \hat{H}_s |\psi_s^f\rangle &= E_s^f |\psi_s^f\rangle, & \hat{H}_a |\psi_a^f\rangle &= E_a^f |\psi_a^f\rangle \end{aligned} \quad (52)$$

だとすると，遷移確率は

$$\begin{aligned} P_{s,a} &= \left| \frac{1}{\hbar} \langle \psi_s^f \otimes \psi_a^f | \hat{V} | \psi_s^i \otimes \psi_a^i \rangle \int_0^t e^{i(E_s^f + E_a^f - E_s^i - E_a^i)u/\hbar} du \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\hbar} \langle \psi_s^f \otimes \psi_a^f | \hat{V} | \psi_s^i \otimes \psi_a^i \rangle \frac{e^{i(E_s^f + E_a^f - E_s^i - E_a^i)t/\hbar} - 1}{i(E_s^f + E_a^f - E_s^i - E_a^i)/\hbar} \right|^2 \\ &= \left| \langle \psi_s^f \otimes \psi_a^f | \hat{V} | \psi_s^i \otimes \psi_a^i \rangle \right|^2 \times \frac{4 \sin^2 \left( \frac{1}{2\hbar} (E_s^f + E_a^f - E_s^i - E_a^i) t \right)}{(E_s^f + E_a^f - E_s^i - E_a^i)^2} \\ &= \left| \langle \psi_s^f \otimes \psi_a^f | \hat{V} | \psi_s^i \otimes \psi_a^i \rangle \right|^2 \times \frac{4\pi t}{(2\hbar)^2} \times \frac{\sin^2 \left( t(E_s^f + E_a^f - E_s^i - E_a^i)/(2\hbar) \right)}{\pi t (E_s^f + E_a^f - E_s^i - E_a^i)^2 / (2\hbar)^2} \end{aligned} \quad (53)$$

となる．関数 (図 2)

$$F_\alpha(x) = \frac{\sin^2(\alpha x)}{\pi \alpha x^2} \quad (54)$$

は  $\alpha \rightarrow \infty$  の極限で  $F_\alpha(x) \rightarrow \delta(x)$  になる．上の式との対応付けは

$$\alpha \leftrightarrow t, \quad x \leftrightarrow \frac{1}{2\hbar} (E_s^f + E_a^f - E_s^i - E_a^i) \quad (55)$$

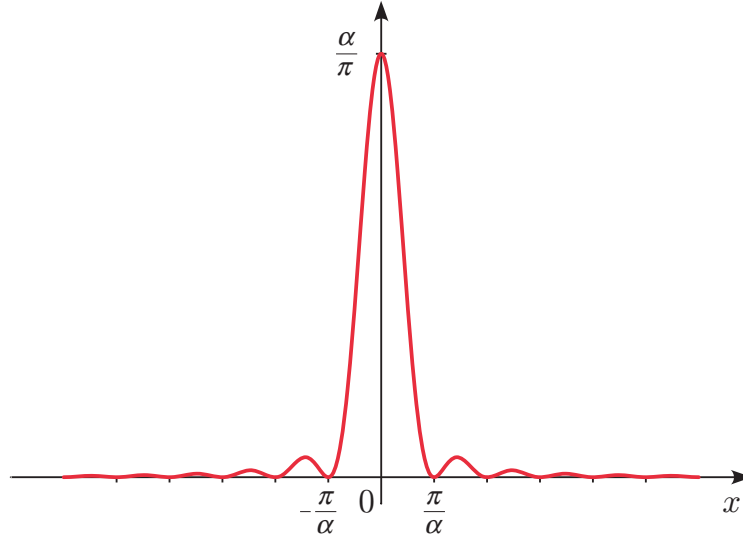


図 2: 遷移確率のプロファイル関数  $F_\alpha(x) = \frac{\sin^2(\alpha x)}{\pi \alpha x^2}$  のグラフ. 変数  $x$  はエネルギー非保存の大きさ  $x = \frac{1}{2\hbar} \Delta E$  を表し, パラメータ  $\alpha$  は相互作用時間  $t$  に等しい.

で与えられる. (53) の両辺を  $t$  で割って  $t \rightarrow \infty$  の極限をとれば

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} P_{s,a} &= \left| \langle \psi_s^f \otimes \psi_a^f | \hat{V} | \psi_s^i \otimes \psi_a^i \rangle \right|^2 \times \frac{4\pi}{(2\hbar)^2} \delta\left(\frac{E_s^f + E_a^f - E_s^i - E_a^i}{2\hbar}\right) \\ &= \left| \langle \psi_s^f \otimes \psi_a^f | \hat{V} | \psi_s^i \otimes \psi_a^i \rangle \right|^2 \times \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_s^f + E_a^f - E_s^i - E_a^i) \end{aligned} \quad (56)$$

を得る. これはフェルミの黄金則であり, デルタ関数の引数はエネルギー保存則  $E_s^f + E_a^f = E_s^i + E_a^i$  を意味する.

$t$  が有限時間であれば, この意味でのエネルギー保存則は成立しない. つまり, 遷移確率のプロファイル関数  $F_t(x)$  は, デルタ関数的に無限に狭く尖っておらず, 広がりを持っており, その分, エネルギーの「ぼやけ」を生じる. (53) の  $\sin$  関数の零点は

$$t(E_s^f + E_a^f - E_s^i - E_a^i)/(2\hbar) = \pi \quad (57)$$

である. つまり, 短時間ならば

$$t(E_s^f + E_a^f - E_s^i - E_a^i) \simeq 2\pi\hbar = h \quad (58)$$

の程度の「エネルギー保存則の破れ」があってもよい, と解釈できる. もちろん全エネルギー  $\hat{H}$  は真の保存量であるが, いまは無摂動ハミルトニアン  $\hat{H}_s + \hat{H}_a$  だけの固有値に注目したので, 保存則が破れているように見えたのである.

## 7.2 相互作用時間とエネルギー-移動量の不確定性関係

以上の結果は次のように解釈できる. 測定器のエネルギー値は誤差ゼロで測れるとする. もしもエネルギー保存則  $E_s^f + E_a^f = E_s^i + E_a^i$ , すなわち

$$E_s^f - E_s^i = -(E_a^f - E_a^i) \quad (59)$$

が成立していれば，相互作用の前後での測定器のエネルギー変化  $E_a^f - E_a^i$  から対象系のエネルギー変化  $E_s^f - E_s^i$  を決定できる．さらに，対象系の初期状態のエネルギー値  $E_s^i$  も知っていれば，終状態のエネルギー値  $E_s^f$  を推測できる．このような手続きで対象系のエネルギーを測定する状況を考えるのである．

ところが，測定相互作用をさせる時間  $t$  が有限だと，保存則 (59) は厳密には成り立たず，(58) に示したようにエネルギー測定値は

$$E_s^f - E_s^i \pm \frac{\hbar}{t} \simeq -(E_a^f - E_a^i) \quad (60)$$

程度の幅を持つ．それゆえに，測定器のエネルギー変化を正確に読み取ったとしても，対象系のエネルギーは正確に測れず，ボケて見える．少々長ったらしくなるが，これは相互作用時間とエネルギー移動量の不確定性関係と呼ぶのが適当そうである．

### 7.3 光子箱論争の解決

アインシュタインとボーアの論争のたねになった光子箱のパズルはどう解決されるのか？ この場合，箱の外に出た光子のエネルギーを，箱の重量計測で推定しようとしているので，「箱の外の電磁場」が間接的にエネルギーを推定される対象系 (object system) であり，「箱・ばね秤・重力源としての地球および箱内部の電磁場」が直接に目盛りを読み取られる測定器 (apparatus) である．シャッターの開閉が箱の内外の相互作用のスイッチのオンオフに相当する．従って，この場合，(53) 式中の  $t$  はシャッターの開放時間に等しい．

シャッターの開閉前後で箱のエネルギーをいかなる方法で測ってもよいが，箱のエネルギー損失  $E_a^i - E_a^f$  と，光子が持ち去るエネルギー  $E_s^f - E_s^i$  は必ずしも一致しないことを (53) や (60) 式は物語っている．シャッターの開放時間が短ければ短いほど，この不一致は大きくなる．アインシュタインは箱の重さ（すなわち  $E_a^i$  と  $E_a^f$ ）を正確に測れると仮定したが，そうしたところで，出た光子のエネルギーを正確に測ったことにはならないのである．アインシュタインが提起したパズルは，不確定性関係が間違っていることを立証するものではなく，不確定性関係を顕在化させるデモンストレーションだったのである．

ただ，このように片が付いてしまうと，的外れなボーアの考察が形だけは正しい結果を与えていたのはなぜかという疑問が残る．

### 7.4 励起状態の寿命とエネルギースペクトルの自然幅

時間とエネルギーの不確定性関係の，もう一つ別の現れ方として，スペクトルの自然幅とか崩壊幅と呼ばれるものがある．これを定式化して，先に述べた相互作用時間とエネルギー移動量の不確定性関係 (60) と比較検討しよう．

対象系として原子を想定し，電磁場を含めた測定器が原子と相互作用している状況を想定する．原子の初期状態は励起状態であり，原子が光子を放出して基底状態に遷移する確率を摂動の 1 次近似で計算する．原子が励起状態に留まる確率は時間とともに小さくなるが，それを現象論的に状態ベクトルの“ノルムの減衰”という形で定式化する：

$$|\psi_s^i(t)\rangle := e^{-i\hat{H}_s t/\hbar} |\psi_s^i\rangle = e^{-i(E_s^i t/\hbar) - (\Gamma t/2\hbar)} |\psi_s^i\rangle. \quad (61)$$



こう定めると

$$\langle \psi_s^i(t) | \psi_s^i(t) \rangle = e^{-\Gamma t/\hbar} \langle \psi_s^i(0) | \psi_s^i(0) \rangle = e^{-t/\tau} \langle \psi_s^i(0) | \psi_s^i(0) \rangle \quad (62)$$

となる． $\tau := \hbar/\Gamma > 0$  は励起状態の平均寿命である．もちろん， $\hat{H}_s$  が自己共役演算子ならば，その固有値は実数のはずで，状態ベクトルのノルムは保たれるはずなのだが，放射された光子が観測されるたびに原子の励起状態の存在確率が減ることを結論先取りのに

$$\hat{H}_s |\psi_s^i\rangle = \left( E_s^i - i\frac{1}{2}\Gamma \right) |\psi_s^i\rangle \quad (63)$$

のような複素固有値で表現したのだ．

減衰状態 (61) を遷移確率の 1 次摂動計算 (51) に代入すると

$$\begin{aligned} P_{s,a} &= \left| \langle \psi_s^f \otimes \psi_a^f | \left( -\frac{i}{\hbar} \int_0^t e^{i(\hat{H}_s + \hat{H}_a)u/\hbar} \hat{V} e^{-i(\hat{H}_s + \hat{H}_a)u/\hbar} du \right) | \psi_s^i \otimes \psi_a^i \rangle \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\hbar} \langle \psi_s^f \otimes \psi_a^f | \hat{V} | \psi_s^i \otimes \psi_a^i \rangle \int_0^t e^{i(E_s^f + E_a^f - E_s^i - E_a^i + i\Gamma/2)u/\hbar} du \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\hbar} \langle \psi_s^f \otimes \psi_a^f | \hat{V} | \psi_s^i \otimes \psi_a^i \rangle \frac{e^{i(E_s^f + E_a^f - E_s^i - E_a^i + i\Gamma/2)t/\hbar} - 1}{i(E_s^f + E_a^f - E_s^i - E_a^i + i\Gamma/2)/\hbar} \right|^2 \end{aligned} \quad (64)$$

を得る．これは長時間  $t \rightarrow \infty$  の極限で

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{s,a} = \left| \langle \psi_s^f \otimes \psi_a^f | \hat{V} | \psi_s^i \otimes \psi_a^i \rangle \right|^2 \times \frac{1}{(E_s^f + E_a^f - E_s^i - E_a^i)^2 + (\Gamma/2)^2} \quad (65)$$

となる．これをエネルギー非保存量

$$\Delta E := E_s^f + E_a^f - E_s^i - E_a^i \quad (66)$$

の関数とみれば，(65) はローレンツ分布関数であり，半値幅は  $\Gamma$  に等しい (図 3)．つまり

$$\Delta E \simeq \Gamma \quad (67)$$

程度の「エネルギー保存則の破れ」が起きているように見える．このことを

$$\tau \cdot \Delta E \simeq \frac{\hbar}{\Gamma} \cdot \Gamma = \hbar \quad (68)$$

と書いて，励起状態の寿命とエネルギースペクトル幅の不確定性関係と呼ぶのは理にかなっている． $\Gamma$  は自然幅とか崩壊幅と呼ばれる．

具体的に，原子が対象系で光子が測定系という場合を想定しよう．原子がエネルギー  $E^{\text{ex}}$  の励起状態からエネルギー  $E^{\text{gr}}$  の基底状態に遷移するときエネルギー  $\hbar\omega$  の光子を放出するという場面において，励起状態の寿命が短いと，原子の準位のエネルギー差と光子のエネルギーとが厳密には一致せず，

$$\hbar\omega \simeq E^{\text{ex}} - E^{\text{gr}} \pm \frac{1}{2}\Gamma \quad (69)$$

の程度の幅があることを上の議論は意味している．より定量的には，原子が放射する光のエネルギー分布は (65) に示したように

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{s,a}(\omega) = \left| \langle \psi_s^f \otimes \psi_a^f | \hat{V} | \psi_s^i \otimes \psi_a^i \rangle \right|^2 \times \frac{1}{(\hbar\omega + E^{\text{gr}} - E^{\text{ex}})^2 + (\Gamma/2)^2} \quad (70)$$

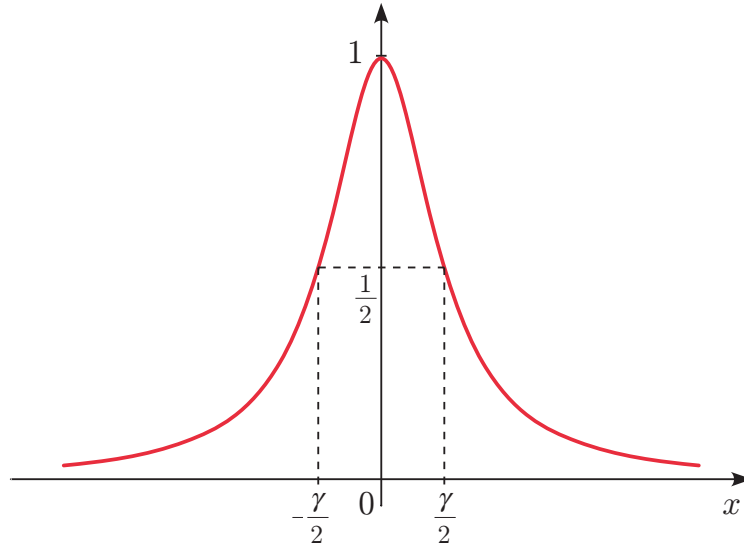


図 3: 励起原子から自然放射される光子のエネルギースペクトルのプロファイルはローレンツ分布関数  $\frac{1}{x^2+(\gamma/2)^2}$  .

のローレンツ分布に従う．つまり，原子が出す光は完全にシャープな線スペクトルにはならず，ボケて見える．これがスペクトルの自然幅とか崩壊幅と呼ばれるものである．極端に寿命の短い励起状態なら，つまり，崩壊幅  $\Gamma$  がエネルギー差  $E^{\text{ex}} - E^{\text{gr}}$  に匹敵するくらい大きければ，光子を吸収してでも基底状態に遷移することが起こり得る．

### 7.5 時間に陽に依存する結合係数

相互作用時間とエネルギー移動量の不確定性関係 (58) と，励起状態の寿命とエネルギースペクトル幅の不確定性関係 (68) は似ているが，厳密には，相互作用をオンオフすることによって生じるエネルギー測定値の不確定性（人工幅）と，相互作用をオンのままにしている生ずるエネルギー値の不確定性（自然幅）は，別物と考えるべきであろう．しかも，(58) と (68) のどちらにしても，厳密に成り立つ不等式になっているわけではない．どちらも (53) や (65) のような遷移確率分布の広がり具合の目安についての式であるし，出所は 1 次の摂動近似である．

このように，時間とエネルギーの不確定性関係は，問題の立て方や不確定性の定義が何通りもあり，すべての場合に通用するような定義と厳密な関係式を与えるのが難しい．

そうではあるが，多少は一般性を持ったモデルで時間とエネルギーの不確定性関係を導いておこう．対象系と測定器のハミルトニアン (42) を少し一般化して

$$\hat{H} = \hat{H}_s + \hat{H}_a + g(t)\hat{V} \quad (71)$$

のように，相互作用ハミルトニアンの係数  $g(t)$  が陽に時間依存しているモデルを考える． $g(t)$  を対象系と測定器の結合係数と呼ぶ． $g(t)$  の関数形によって，測定器のオンオフを調整できる．そうすると，1 次摂動による遷移確率の計算 (53) は

$$P_{s,a}(t) = \left| \frac{1}{\hbar} \langle \psi_s^f \otimes \psi_a^f | \hat{V} | \psi_s^i \otimes \psi_a^i \rangle \int_0^t g(u) e^{i(E_s^f + E_a^f - E_s^i - E_a^i)u/\hbar} du \right|^2 \quad (72)$$

となる．無限時間極限における遷移確率は

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{s,a}(t) = \left| \frac{1}{\hbar} \langle \psi_s^f \otimes \psi_a^f | \hat{V} | \psi_s^i \otimes \psi_a^i \rangle G(E_s^f + E_a^f - E_s^i - E_a^i) \right|^2 \quad (73)$$

となる．ここで，

$$G(E) = \int_0^\infty g(u) e^{iEu/\hbar} du \quad (74)$$

とおいた．つまり，遷移確率はエネルギー保存則の破れの度合いを表す変数  $E = E_s^f + E_a^f - E_s^i - E_a^i$  の関数であり，その関数形は，時間依存した結合係数  $g(t)$  の（半直線上の）フーリエ変換で与えられる．フーリエ変換の性質から， $g(t)$  の裾野が広がっていれば（結合係数をオンにしている時間が長ければ）， $G(E)$  は狭く鋭い分布になる（エネルギーの不確定幅が小さくなる）し，逆に， $g(t)$  が  $t$  に関して急速に減少するならば（結合係数をオンにしている時間が短ければ）， $G(E)$  は広い分布になる（エネルギーの不確定幅が大きくなる）という意味の不確定性関係をこの式は表している．

しかし，半直線上のフーリエ変換であるがゆえに，時間幅とエネルギー幅の定量的関係を言うのは難しい． $g(t)$  は  $t \geq 0$  でのみ定義された関数であり， $t < 0$  に対しては  $g(t) = 0$  とおくことによって定義域を実数全体に拡張できるが，そうしたところで，一般には  $g(t)$  は 2 回微分可能関数にはならないので，ロバートソンの不等式を適用できないのである．

相互作用が無限の過去から無限の未来まで続いていて，結合係数  $g(t)$  が  $-\infty < t < \infty$  にわたって定義されているなら， $g(t)$  と  $G(E)$  が全実数上のフーリエ変換で関係づけられ，波束の不確定性関係 (28) と同形の時間とエネルギーの不確定性が成り立つ．

また， $g(t)$  が実数値であることから，

$$G(-E) = \int_0^\infty g(u) e^{-iEu/\hbar} du = G(E)^* \quad (75)$$

が言えて， $|G(-E)|^2 = |G(E)|^2$  となるので， $E = E_s^f + E_a^f - E_s^i - E_a^i$  の関数としては (73) のプロファイルは対称である．ただ，実際には，行列要素  $\langle \psi_s^f \otimes \psi_a^f | \hat{V} | \psi_s^i \otimes \psi_a^i \rangle$  が  $E_s^f, E_a^f, E_s^i, E_a^i$  の非自明な関数なので，実験で得られるエネルギースペクトルは  $E = E_s^f + E_a^f - E_s^i - E_a^i$  の偶関数にはならない．

## 7.6 時間依存する結合係数の干渉効果

こんな実験ができるかどうかかわからないが，相互作用ハミルトニアン  $\hat{H}$  の 2 つの項の時間依存性を制御できれば，次のような干渉効果を見ることができる．対象系と測定器のハミルトニアン (71) をさらに一般化して

$$\hat{H} = \hat{H}_s + \hat{H}_a + g_1(t)\hat{V}_1 + g_2(t)\hat{V}_2 \quad (76)$$

のように，相互作用ハミルトニアンに 2 つの項  $\hat{V}_1, \hat{V}_2$  があり，それぞれの係数  $g_1(t), g_2(t)$  を独立に変化させ得るモデルを考える．この場合，1 次摂動遷移確率 (72) は

$$\begin{aligned} P_{s,a}(t) &= \left| \frac{1}{\hbar} \int_0^t \left\{ \langle \psi_s^f \otimes \psi_a^f | \hat{V}_1 | \psi_s^i \otimes \psi_a^i \rangle g_1(u) + \langle \psi_s^f \otimes \psi_a^f | \hat{V}_2 | \psi_s^i \otimes \psi_a^i \rangle g_2(u) \right\} \right. \\ &\quad \left. \times e^{i(E_s^f + E_a^f - E_s^i - E_a^i)u/\hbar} du \right|^2 \\ &= |\phi_1(t) + \phi_2(t)|^2 \end{aligned} \quad (77)$$

となる．展開すると  $\phi_1^* \phi_2 + \phi_2^* \phi_1$  という項が現れるが，これは， $g_1 \hat{V}_1$  に由来する確率振幅と  $g_2 \hat{V}_2$  に由来する確率振幅の干渉効果を表している．

とくに

$$g_1(t) = c_1 \delta(t - t_1), \quad g_2(t) = c_2 \delta(t - t_2) \quad (78)$$

のようなパルス型相互作用を 2 回作用させた場合，遷移確率は

$$\begin{aligned} P_{s,a}(t) &= \frac{1}{\hbar^2} \left| V_1 c_1 e^{i(E_s^f + E_a^f - E_s^i - E_a^i)t_1/\hbar} + V_2 c_2 e^{i(E_s^f + E_a^f - E_s^i - E_a^i)t_2/\hbar} \right|^2 \\ &= \frac{1}{\hbar^2} \left\{ |V_1 c_1|^2 + |V_2 c_2|^2 \right. \\ &\quad \left. + 2|V_1 V_2 c_1 c_2| \cos \left( \frac{1}{\hbar} (E_s^f + E_a^f - E_s^i - E_a^i)(t_2 - t_1) + \alpha \right) \right\} \quad (79) \end{aligned}$$

となる．この場合，2 回のパルスの時間間隔  $t_2 - t_1$  とエネルギー非保存量  $E = E_s^f + E_a^f - E_s^i - E_a^i$  に依存する干渉効果が観測されるだろう．ただし，相互作用ハミルトニアン of the 行列要素を  $V_\mu = \langle \psi_s^f \otimes \psi_a^f | \hat{V}_\mu | \psi_s^i \otimes \psi_a^i \rangle$  ( $\mu = 1, 2$ ) とおいた．

## 8 あとがき

時間とエネルギーの不確定性関係については，昔からさまざまな議論・解説があるものの，私はいま一つすっきりとわかった気がしていなかった．私と同じような感想を持っておられる方は多いのではないかと思う．

私自身は，光子の局在化問題 [24] という問題を量子測定理論の立場から解こうとしていた最中に，今回報告したような不確定性関係の定式化に気がついた．相対論的量子論の枠組みでは光子の位置を定義できないという，これまた昔から知られたパラドクスがあり，私はこの問題を解こうとして，原子が光子を放射したり吸収したりする事象の時刻と場所を量子論で記述する方法や，光子の位置の測定誤差が生じる機構を研究している．そうしているうちに，測定過程におけるエネルギーと時間の不確定性関係が自然と目に入ってきた．実質的には，私の議論はランダウ・パイエルスの議論の再現であるが，アインシュタイン・ボーアの光子箱から出た光子を被測定系，箱を測定器として役割付けた点や，相互作用を人為的にオンオフした有限時間の測定過程と，相互作用が無限の時間にわたって続いている自然な崩壊過程とを区別して扱ったあたりは目新しいかもしれない．

いずれにしても，このノートが時間とエネルギーの不確定性関係を巡る議論のよい整理になっていて，せめて教育的な役に立つならば，幸いである．

アインシュタインの光子箱のパズルに対する，より良い回答を見つけた方や，一般相対論を持ち出したボーアの議論をより適切に修正するアイデアをお持ちの方は，ご教示願いたい．また，ここで導いた不確定性関係 (58), (68) はどちらも曖昧な関係式であったが，等号成立条件も言えるようなちゃんとした不等式で不確定性関係を表現できるなら，その方が望ましい．測定過程を織り込んで，すべてのケースについて成立する，時間とエネルギーの不確定性関係を表す一つの不等式が見つかったなら，教えていただきたい．

また，(61), (62) 式では，励起状態の消散過程を，減衰因子  $e^{-t/\tau}$  を挿入してノルムを減衰させるという形で定式化したが，本来なら量子系の状態はユニタリ時間発展するはずであ

り、ノルムの減衰などということはあってはならないはずである．この種の減衰因子を挿入する処方、現象論的手法としてしばしば行われるが、量子力学や場の量子論などの基礎理論の立場からこの処方を正当化できるかどうか、疑問である．

また、本稿では1次の摂動近似のみで遷移確率を求めたが、高次の補正項を入れた場合、不確定性関係が大きく修正されることはないのか、はっきりしていない．遷移確率の2次までの摂動計算は(53)を

$$\begin{aligned}
P_{s,a} &= \left| -\frac{i}{\hbar} V_{fi} \int_0^t e^{i(E^f - E^i)u/\hbar} du \right. \\
&\quad \left. + \left( -\frac{i}{\hbar} \right)^2 \sum_n V_{fn} V_{ni} \int_0^t du' \int_0^{u'} du e^{i(E^f - E^n)u'/\hbar} e^{i(E^n - E^i)u/\hbar} \right|^2 \\
&= \left| -\frac{i}{\hbar} V_{fi} \frac{e^{i(E^f - E^i)t/\hbar} - 1}{i(E^f - E^i)/\hbar} \right. \\
&\quad \left. + \left( -\frac{i}{\hbar} \right)^2 \sum_n \frac{V_{fn} V_{ni}}{i(E^n - E^i)/\hbar} \left\{ \frac{e^{i(E^f - E^i)t/\hbar} - 1}{i(E^f - E^i)/\hbar} - \frac{e^{i(E^f - E^n)t/\hbar} - 1}{i(E^f - E^n)/\hbar} \right\} \right|^2 \\
&= \left| \left( V_{fi} + \sum_n \frac{V_{fn} V_{ni}}{E^i - E^n} \right) \frac{e^{i(E^f - E^i)t/\hbar} - 1}{E^i - E^f} - \sum_n \frac{V_{fn} V_{ni}}{E^i - E^n} \frac{e^{i(E^f - E^n)t/\hbar} - 1}{E^n - E^f} \right|^2 \\
&= \left| \left( V_{fi} + \sum_{n \neq i} \frac{V_{fn} V_{ni}}{E^i - E^n} \right) \frac{e^{i(E^f - E^i)t/\hbar} - 1}{E^i - E^f} - \sum_{n \neq i} \frac{V_{fn} V_{ni}}{E^i - E^n} \frac{e^{i(E^f - E^n)t/\hbar} - 1}{E^n - E^f} \right|^2 \quad (80)
\end{aligned}$$

に変更する．ただし、系全体の状態ベクトルを  $\xi^n$  として相互作用ハミルトニアン<sup>1</sup>の行列要素を  $V_{ni} = \langle \xi^n | \hat{V} | \xi^i \rangle$  と書き、合成系のすべての中間状態についての和を  $\sum_n$  と書いた．また、系全体のエネルギーを  $E^f = E_s^f + E_a^f$  などと書いた．(80)を2つの項に分けて見ると、第1項

$$\left( V_{fi} + \sum_{n \neq i} \frac{V_{fn} V_{ni}}{E^i - E^n} \right) \frac{e^{i(E^f - E^i)t/\hbar} - 1}{E^i - E^f} \quad (81)$$

は1次摂動(53)と同じ時間依存性を持つが、第2項

$$\sum_{n \neq i} \frac{V_{fn} V_{ni}}{E^i - E^n} \frac{e^{i(E^f - E^n)t/\hbar} - 1}{E^n - E^f} \quad (82)$$

は、だいぶ異なった  $t$  依存性を持つ．そのために、遷移確率のエネルギーと時間への依存性を(54)のようなただ一つのプロファイル関数で特徴付けることはできなくなり、(57)のような簡潔な関係式から時間とエネルギーの不確定性関係を導く論法は使えない(この点に関しては[23]にも考察あり)．量子力学の教科書(例えば[25])では(82)のような項は時間的に速く振動するので無視できるとしているが、高次の摂動項を取り入れても遷移確率の時間依存性が変わることはないのか、疑問である．

また、量子ゼノン効果[4]との関わりはどうかという疑問も残る．つまり、エネルギー測定器の目盛りを繰り返し読み取ったり、測定器を常時監視した場合、時間とエネルギーの不確定性関係はどうなるのか知りたい．ひょっとすると、常時監視の場合に“ノルムの減衰”処方を正当化できるかもしれない．

また、今回の量子測定理論的扱いで改めてわかったことだが、励起状態の寿命や崩壊モードは孤立系の固有の性質というよりは、他の自由度や環境との相互作用で決まる、あるいは変化し得るものである。当たり前のことかもしれないが、そういう観点を思い起こすのも有用かもしれない。ニュートリノ振動が環境の影響を受け得ることも、類似の効果と言えよう。

なお、このノートを書き終えた頃に気づいたことだが、石川健三氏たちが粒子のサイズの有限性が崩壊法則に与える効果について研究している [26]。

ちなみに、アインシュタインは 1955 年 4 月 18 日、76 歳で亡くなり、ニールス・ボーアは、1962 年 11 月 18 日、77 歳で亡くなった。ボーアの書斎の黒板には、死の前日に描かれた「光子箱」の絵が残されていたという [27]。

謝辞：大貫義郎氏をはじめとする、天白<sup>てんぱく</sup>ゼミ（名古屋市天白区の名城大学で行われている有志セミナー）のメンバーとの討論のおかげで、論点をクリアにすることができた。天白ゼミのメンバー各位に感謝している。もちろん本稿中の誤りは著者に責任がある。

## 参考文献

- [1] マックス・ヤンマー（井上健 訳）『量子力学の哲学（上）』（紀伊国屋書店, 1983）. 第 5 章 Bohr-Einstein 論争. Jammer 自身と Pais, Fock, Komar, Rosenfeld が Bohr の論証を讃えた言葉が p.159-160 にかけて書かれている。また、p.161 で、特殊相対論に基づく時間とエネルギーの不確定性関係の導出が議論されている。
- [2] P. Busch, “The time-energy uncertainty relation”, arXiv: quant-ph/0105049.
- [3] J. Hilgevoord, “The uncertainty principle for energy and time”, Am. J. Phys. **64**, 1451-1456 (1998). “The uncertainty principle for energy and time. II”, Am. J. Phys. **66**, 396-402 (1998).
- [4] K. Koshino and A. Shimizu, “Quantum Zeno effect by general measurements”, Phys. Rep. **412**, 191-275 (2005). arXiv: quant-ph/0411145. Chapter 4. Quantum measurement theory.
- [5] M. Ozawa, “Universally valid reformulation of the Heisenberg uncertainty principle on noise and disturbance in measurement”, Phys. Rev. A **67**, 042105 (2003). arXiv: quant-ph/0207121.
- [6] J. Erhart, S. Sponar, G. Sulyok, G. Badurek, M. Ozawa, and Y. Hasegawa, “Experimental demonstration of a universally valid error-disturbance uncertainty relation in spin measurements”, Nature Physics DOI: 10.1038/NPHYS2194 (2012). arXiv: 1201.1833.
- [7] Y. Watanabe, T. Sagawa, and M. Ueda “Uncertainty relation revisited from quantum estimation theory”, Phys. Rev. A **84**, 042121 (2011). arXiv: 1010.3571.
- [8] 谷村省吾「ハイゼンベルクの不確定性関係と小澤の不等式の検証実験」パリティ2013年1月号 pp. 37-38.

- [9] W. Heisenberg, “Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik”, *Z. Phys.* **43**, 172-198 (1927). ハイゼンベルク「量子論的な運動学および力学の直観的内容について」. 邦訳は湯川秀樹, 井上健 編集『現代の科学』世界の名著 66 巻 (中央公論社, 1970), pp.325-355 に所収. この論文の (1) 式が  $Q_1 P_1 \sim h$ , (2) 式が  $E_1 t_1 \sim h$  である.
- [10] E. Schrödinger, “Spezielle Relativitätstheorie und Quantenmechanik”, *Berliner Berichte*, 238-247 (1931). 4次元時空座標を演算子で表現しようとした初期の試み.
- [11] 谷村省吾「ハイゼンベルク方程式を最初に書いた人はハイゼンベルクではない」素粒子論研究 119 巻 4C 号 pp.280-290 (2012 年 2 月号). 電子版 Vol. 10, No. 3 (2011).
- [12] W. Pauli, *Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik*, Handbuch der Physik, Bd. XXIV, Teil 1 (1933). パウリ (川口教男・堀節子 訳)『量子力学の一般原理』(講談社, 1975), p.107.
- [13] A. Arai, “Spectrum of time operators”, *Lett. Math. Phys.* **80**, 211-221 (2007).
- [14] H. P. Robertson, “The uncertainty principle”, *Phys. Rev.* **34**, 163-164 (1929).
- [15] L. Mandelstam and Ig. Tamm, “The uncertainty relation between energy and time in nonrelativistic quantum mechanics”, *Izvestia Academia Nauk* **9**, 122-128 (1945) [original Russian version], *J. Phys. (USSR)* **9**, 249-254 (1945) [English version].
- [16] J. Anandan and Y. Aharonov, “Geometry of quantum evolution”, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1697-1700 (1990).
- [17] 長岡浩司「量子推定と不確定性原理」数理科学 2005 年 10 月号 pp.26-34.
- [18] 山本義隆 編訳『ニールス・ボーア論文集 1: 因果律と相補性』(岩波, 1999). p.28 で初めて不確定性関係に言及している. p.245 以降が光子箱についての論考.
- [19] H. Rauch and S. A. Werner, *Neutron Interferometry: Lessons in Experimental Quantum Mechanics*, (Clarendon Press, Oxford, 2000). Chapter 7. Gravitational, non-inertial, and motional effects.
- [20] 大場一郎「アインシュタインの論争とコペンハーゲン解釈」数理科学 2013 年 9 月号 pp.22-27.
- [21] L. Landau and R. Peierls, “Erweiterung des Unbestimmtheitsprinzips für die relativistische Quantentheorie”, *Z. Phys.* **69**, 56-69 (1931).
- [22] L. D. Landau and E. M. Lifshitz (translated by J. B. Sykes and J. S. Bell), *Quantum Mechanics (Non-relativistic Theory)*, 3rd edition (Pergamon Press, 1977). Section 44.
- [23] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition (McGraw-Hill, 1968). Section 35. 2次摂動計算には “unphysical terms” が出て来ると書かれている.
- [24] S. Tanimura, “Photon detection operator and complementarity between electric detector and magnetic detector”, arXiv: 1309.0620.

- [25] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, (Benjamin, 1985). 2次摂動の計算は Eq. (5.6.37) in the 1st edition; Eq. (5.7.37) in the 2nd edition.
- [26] K. Ishikawa and Y. Tobita, “Finite-size corrections to Fermi’s golden rule: I. Decay rates”, *Prog. Theor. Exp. Phys.* (2013) 073B02. arXiv: 1303.4568.
- [27] マンジット・クマール (青木 薫 訳) 『量子革命：アインシュタインとボーア，偉大なる頭脳の激突』 (新潮社, 2013). p.427 にボーアの最後の板書の写真がある .