弦理論の可積分性と三角圏構造

首都大学東京 弓林　司

E-mail: yumibayashi-tsukasa@ed.tmu.ac.jp

本発表では String 理論の相関函数 Φ を用いて Soliton 理論の τ 函数の零点や不定点の持つ構造について与える。特に KP 階層が持つ八面体構造から τ 函数に三角圏の構造を見出し系の可積分性を圏論的視点から与える。本発表は齋藤暁氏（首都大）及び脇本佑紀氏（首都大）との共同研究 [1] に基づく。

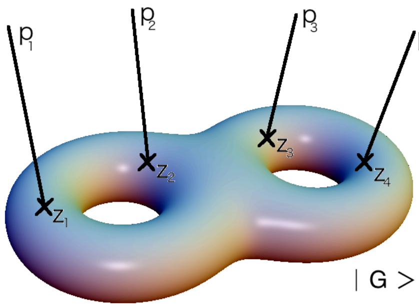
1　Introduction

1.1　String/Soliton **対応**

String 理論の相関函数 Φ と Soliton 理論の τ 函数には以下で与えられる対応がある。これを String/Soliton 対応と呼ぶ事にする。これらは三角圏の Object に成る [1]。

$$\Phi(\boldsymbol{p},\boldsymbol{z},G) :=< 0|\prod_{i=1}^{4} V(p_i,z_i)|G > \Longleftrightarrow \tau(\boldsymbol{p},\boldsymbol{z},G) := \frac{\Phi(\boldsymbol{p},\boldsymbol{z},G)}{\Phi(\boldsymbol{p},\boldsymbol{z},0)} \tag{1}$$

- $\Phi(\boldsymbol{p},\boldsymbol{z},G)$： Tachyon 相関函数
- $V(p,z) := :e^{ipX(z)}:$ Vertex Operator
- $|G>$：佐藤 Grassmann 多様体
- $\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,p_3,p_4), \boldsymbol{z}=(z_1,z_2,z_3,z_4)\in\mathbb{C}^4$：Puncture の情報
- $\tau(\boldsymbol{p},\boldsymbol{z},G)$：KP 階層の解



1.2　Vertex Operator/Bäcklund **差分対応**

以下では相関函数及び τ 函数の Shift を Vertex operator を用いて行う。これらは三角圏の Morphism の素に成る。

Vertex Operator Algebra (VOA) は以下で与えられる。

$$V(p,z)V(p',z') = (-1)^{pp'}V(p',z')V(p,z) \tag{2}$$

$$\Longrightarrow \psi_\pm(z) := V(\pm1,z), \quad \psi_\pm : \text{Fermionic operator} \tag{3}$$

また、VOA と Soliton 理論の解の間の変換（auto-Bäcklund 変換）$e^{\psi_\pm(z)}$ より、

$$e^{\psi_\pm(z)} = 1+\psi_\pm(z) \Rightarrow \psi_\pm(z) = e^{\psi_\pm(z)}-1 \tag{4}$$

を満たす。つまり $\hat{\mathrm{D}}_j^\pm \sim \psi_\pm(z_j)$ をある種の差分演算子と考える事が出来る。この差分演算子 $\hat{\mathrm{D}}_j^\pm$ を Bäcklund 差分演算子と呼ぶ事にする。

1.3 Bäcklund 差分演算子 $\hat{\mathrm{D}}_j^{\pm}$ の函数への作用

Bäcklund 差分演算子の函数への具体的な作用は以下の通りである。特に作用する対象が異なるとその "統計性" もことなる事に注意。

String 相関函数：

$$\Phi_j(\boldsymbol{p},\boldsymbol{z},G) := \hat{\mathrm{D}}_j^{\pm}\Phi(\boldsymbol{p},\boldsymbol{z},G) :=< 0|\prod_{i=1}^{4} V(p_i,z_i)\psi_{\pm}(z_j)|G> \tag{5}$$

$$\Phi_{ij}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{z},G) = -\Phi_{ji}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{z},G) \Longrightarrow \Phi_{ii}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{z},G) = 0 \tag{6}$$

τ 函数：

$$\tau_j(\boldsymbol{p},\boldsymbol{z},G) := \hat{\mathrm{D}}_j^{\pm}\tau(\boldsymbol{p},\boldsymbol{z},G) = \tau(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{z},G) \tag{7}$$

$$\tau_{ij}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{z},G) = \tau_{ji}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{z},G) \Longrightarrow \tau_{ii}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{z},G) = \frac{\Phi_{ii}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{z},G)}{\Phi_{ii}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{z},0)} = \frac{0}{0} =? \tag{8}$$

つまり、String Amplitude は Bäcklund 差分演算子の作用で "複体" を成し、τ 函数は Bäcklund 差分の作用で "Shift" する。しかし τ 函数を Bäcklund 差分で二回 Shift したものは "不定点" に行ってしまいどのように扱うべきか解らない。

1.4 KP 階層 $\sim$ 広田三輪方程式

KP 階層を記述する広田三輪方程式（HM eq）は $\boldsymbol{p} \in \mathbb{Z}^4$ を変数とする方程式で、

$$a_{12}a_{34}\tau_{12}(\boldsymbol{p})\tau_{34}(\boldsymbol{p}) - a_{13}a_{24}\tau_{13}(\boldsymbol{p})\tau_{24}(\boldsymbol{p}) + a_{23}a_{14}\tau_{23}(\boldsymbol{p})\tau_{14}(\boldsymbol{p}) = 0 \tag{9}$$

で与えられる可積分系である。但し $a_{ij} = -a_{ji}$ 及び $\tau(\boldsymbol{p}) := \tau(\boldsymbol{p},\boldsymbol{z},G)$ である。

$n = \sum_{i=1}^{4} p_i$ と置くと HM eq は $n+2 = \mathrm{const.}$ 上で定義されている事が分かる。この 4 次元空間内の超平面は三次元整数格子空間の八面体の埋め尽くし空間を成す。この一つの八面体が一つの HM eq を表現し、八面体の各辺の間の移動及び情報の流れを適当に定義する事で τ 函数を Object に持つ "三角圏" が構成出来る。この "三角圏" を $\mathcal{HM}$ と書く。詳しくは [1] を参照の事。

2 局所化と写像化

2.1 三角圏の局所化と Null System

三角圏 $\mathcal{T}$ は Null system $\mathcal{N}$ から定義される積閉系 $\mathcal{S}(\mathcal{N})$ により局所化される。その議論を "三角圏"$\mathcal{HM}$ に適用したい。

Bäcklund 差分演算子の作用で出てきた τ 函数の不定点（集合）を

$$\lambda(\boldsymbol{p}) := \left\{ \frac{\Phi(\boldsymbol{p},\boldsymbol{z},G)}{\Phi(\boldsymbol{p},\boldsymbol{z},0)} \mid \Phi(\boldsymbol{p},\boldsymbol{z},G) = \Phi(\boldsymbol{p},\boldsymbol{z},0) = 0 \right\} \tag{10}$$

定義すると、$\lambda(\boldsymbol{p})$ は 0 を含み、かつ、"Gauge 変換" の軌道 $\Lambda(\infty) := \{\lambda(\boldsymbol{p})\}$ を生成する。そしてこの $\Lambda(\infty)$ が Null System の定義を満たす。

2.2 写像化と "Gauge 対称性"

天下り的ではあるが以下のような函数変換

$$x_j^{(t)} = \frac{\tau_{j+\epsilon+1}^{(t)}\tau_{j-\epsilon}^{(t+1)}}{\tau_{j+1}^{(t)}\tau_j^{(t+1)}}, \quad j \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \tag{11}$$

を行う。この変換は分母と分子それぞれの τ 函数の t の和と j の和がそれぞれ等しい。従って ϕ で書かれた τ 函数の定義を思い出すと真空相関函数 $\Phi(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{z}, 0)$ が打ち消し合い

$$x_j^{(t)} = \frac{\Phi_{j+\epsilon+1}^{(t)}\Phi_{j-\epsilon}^{(t+1)}}{\Phi_{j+1}^{(t)}\Phi_j^{(t+1)}} \tag{12}$$

と書くことができる。つまり函数変換後の世界では τ 函数と相関函数 Φ は $\lambda(\boldsymbol{p})$ を除き区別されない。より一般にはこの函数変換は以下の "Local Gauge 変換" で不変となる。

$$g : \tau_j^{(t)} \to e^{\int^t \mathrm{d}t'\nu(t',j) + \int^j \mathrm{d}j'\mu(t,j')}\tau_j^{(t)}, \quad {}^\forall\nu(t,j), \mu(t,j) \tag{13}$$

この Gauge 群を $G := \{\ g \mid g : \tau_j^{(t)} \to e^{\int^t \mathrm{d}t'\nu(t',j) + \int^j \mathrm{d}j'\mu(t,j')}\tau_j^{(t)}, \quad {}^\forall\nu(t,j), \mu(t,j)\}$ と置く。

3 特異点閉じ込めと Projective Resolution

3.1 3 次元 Lotka-Volterra 写像

函数変換 $\tau_j^{(t)} \to x_j^{(t)}$ を HM eq に代入すると $d = 3$ のとき以下の 3 次元（可積分）Lotka-Volterra 写像（LV 写像）を得る。

$$x_1^{(t+1)} = x_1^{(t)}\frac{1 - x_2^{(t)} + x_2^{(t)}x_3^{(t)}}{1 - x_3^{(t)} + x_3^{(t)}x_1^{(t)}}, \quad x_2^{(t+1)} = x_2^{(t)}\frac{1 - x_3^{(t)} + x_3^{(t)}x_1^{(t)}}{1 - x_1^{(t)} + x_1^{(t)}x_2^{(t)}}, \quad x_3^{(t+1)} = x_2^{(t)}\frac{1 - x_1^{(t)} + x_1^{(t)}x_2^{(t)}}{1 - x_2^{(t)} + x_2^{(t)}x_3^{(t)}} \tag{14}$$

この写像は以下の不変量を持つ。

$$r = x_1^{(t)}x_2^{(t)}x_3^{(t)}, \quad s = \left(1 - x_1^{(t)}\right)\left(1 - x_2^{(t)}\right)\left(1 - x_3^{(t)}\right) \tag{15}$$

3.2 特異点閉じ込め

$\Lambda(\infty)$ の LV 写像に依る振る舞いを見るべく "初期点"$\boldsymbol{x}^{(1)} := (\infty, 0, 1)$ を選ぶ。LV 写像は二つの不変量を持つので初期点の条件と合わせると初期点（-1 の点）を不変量だけで書く事が出来る。

$$\boldsymbol{x}^{(0)} := \left(\frac{r-s}{r+1}, r\frac{s+1}{r-s}, \frac{r+1}{s+1}\right) \tag{16}$$

この点は LV 写像の時間発展で、

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \left(\frac{r-s}{r+1}, r\frac{s+1}{r-s}, \frac{r+1}{s+1}\right) \to \boldsymbol{x}^{(1)} = (\infty, 0, 1) \to \boldsymbol{x}^{(2)} = (1, 0, \infty) \to \boldsymbol{x}^{(3)} \to \dots \tag{17}$$

と振る舞う。但し、$\boldsymbol{x}^{(3)}$ は、

$$\boldsymbol{x}^{(3)} = \left(\frac{r+1}{s+1}, r\frac{s+1}{r-s}, \frac{r-s}{r+1}\right) \tag{18}$$

と初期点の情報に依存した有限の値となる。つまり一度無限大に発散した点が発散する前の点の情報を持って有限の点に返って来たのである。この現象を “特異点閉じ込め” と呼ぶ。

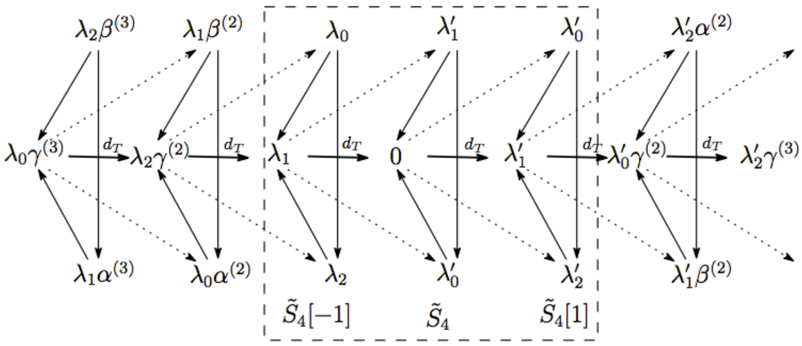
3.3 特異点閉じ込めと Projective Resolution

以上の話は、Gauge 対称な函数 $\boldsymbol{x}^{(t)}$ で見たが、同様の事を τ 函数の立場で見ると、不定点と出会うことになる。

$\boldsymbol{x}^{(0)}$ を定める事で $\boldsymbol{\tau}^{(0)}$ が求まる。しかし $\boldsymbol{x}^{(0)}$ は $\boldsymbol{\tau}^{(0)}, \boldsymbol{\tau}^{(1)}$ で構成されているものの $\boldsymbol{\tau}^{(1)}$ は決まらない。また、$\boldsymbol{\tau}^{(0)}$ が定まれば、写像を解いていくことで、次々 $\boldsymbol{\tau}^{(t)}$ が求まるが、ある式を 0 に置いてしまうと、式が足らず、解く事が出来ない。つまり、更に不定な $\boldsymbol{\tau}$ が発生する。$\boldsymbol{\tau}^{(0)} = (\lambda_1\beta^{(0)}, \lambda_2\gamma^{(0)}, \lambda_0\alpha^{(0)}), \tau^{(1)} = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ と置くと、

$$\boldsymbol{\tau}^{(0)} = (\lambda_1\beta^{(0)}, \lambda_2\gamma^{(0)}, \lambda_0\alpha^{(0)}) \to (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \to (\lambda_2, 0, \lambda_1) \to (\lambda'_0, \lambda'_1, \lambda'_2) \to \dots \tag{19}$$

λ だけで書かれる部分が不定部分である。



$$\tilde{S}_4[-1], \tilde{S}_4[0], \tilde{S}_4[1] \subset \Lambda(\infty) \tag{20}$$

特に、今得た図式から以下のような図式を読み取る事が出来る。ここで P は、

$$\begin{tikzcd}
 & \gamma_\lambda^{[k]} \arrow[dl, dashed] \arrow[dr, dashed, "u"] & & \\
\lambda'_1 \arrow[rr, "\pi"] & & \lambda'_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$P := \cdots \lambda_0\gamma^{(3)} \to \lambda_2\gamma^{(2)} \to \lambda_1 \tag{21}$$

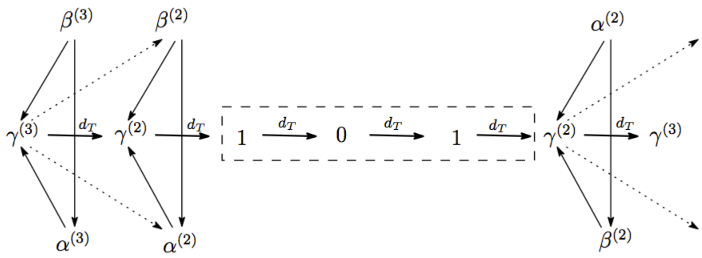
である。このことから P は λ'_0 の “Projective Resolution” を与える事が分かる。

3.4 局所化

“三角圏”$\mathcal{HM}$ を Null set$\Lambda(\infty)$ から得られる積閉系、

$$\mathcal{S}(\mathcal{N}) := \{\ g \in G \mid g : \Lambda(\infty) \to \Lambda(\infty)\ \} \tag{22}$$

で局所化した圏 $\mathcal{HM}/\mathcal{S}(\mathcal{N})$ において先ほどの系列を見ると、となる。以前の図と比べて解るように局所化に



よって λ の不定性がなくなっている。

3.5 可積分性との関係

実は、Projective resolution で得た $\gamma^{(n)}$ 達は、LV 写像の周期点集合を不変量のみの多項式で表現したものであり、この代数多様体を不変周期点多様体（IVPP）と呼ぶ。特に IVPP を持つ有理写像に対し以下が成り立つ。

- IVPP 定理：d 次元有理写像 $F : \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{X}$ が $d/2$ 個以上の不変量を持つとする。このとき F は IVPP を持つならば F は Julia 集合を持たない。

Julia 集合は非可積分に特有な集合と捉えられており、このことから IVPP の存在は可積分系を特徴付けると考えられる。

4 結果

KP 階層の解である τ 函数は “三角圏構造” を持つ。また、τ 函数は、いわゆる佐藤 Grassmann 多様体上の Plücker 関係式を満たし、零点を持たない。しかし、τ 函数が定める不定点集合 $\Lambda(\infty)$ が Gauge 対称性を持つ写像化を通して “三角圏”$\mathcal{HM}$ の Null system となる。つまり写像化を通して “三角圏”$\mathcal{HM}$ は局所化される。

更に、$\Lambda(\infty)$ は Projective Resolution を持ち、写像の IVPP を定める多項式列と同一視される。IVPP の存在と系の可積分性は密な関係にあると考えられており、以上の事から、圏論的な可積分性の公理として、“三角圏”、“接続条件”、“Projective Resolution を持つ” を選ぶのが良いと予想される。

参考文献

[1] S. Saito, T. Yumibayashi, Y. Wakimoto, Singularity Confinement and Projective Resolution of Triangulated Category, [arXiv:1310.1358]