

角運動量を持つ AdS ブラックホール解の摂動と DC-Conductivity

8月22日@基研

芝浦工業大学工学部物理教室 前田健吾

Based on hep-th/1308XXXX

in preparation (K. M., 石橋明浩 (近大))

1 イントロ

AdS/CFT (CMP) correspondence \implies

強結合の場の理論（強相関量子多体系） \iff 漸近的 AdS 時空上での
重力理論



Hartnoll, Herzog, Horowitz (HHH) (2008)

複素スカラー場を用いた超伝導相の実現

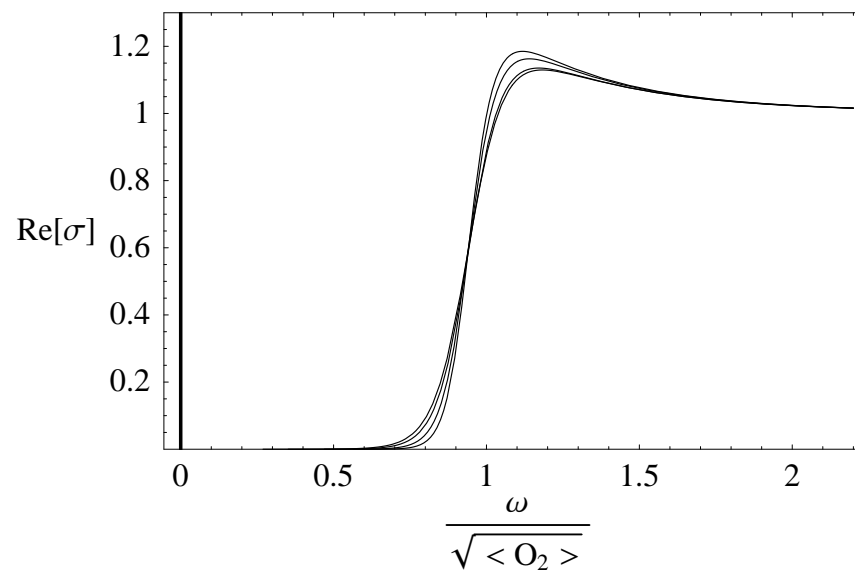


図 1: HHH による電気伝導率 $\text{Re}[\sigma]$ の数値計算結果： $\langle \mathcal{O}_2 \rangle$ は秩序パラメーター

HHH model $\implies \omega = 0$ にデルタ関数 $\delta(\omega)$ が存在



モデルに並進対称性を課しているため、超伝導相でない常伝導相でもデルタ関数が存在！



HHH modelの問題点： 運動量（電流）が散逸するメカニズムが存在しない（電気抵抗が常にゼロ）

例）ブーストされた電荷を持つブラックホール解（永久電流の存在）

電気抵抗のメカニズム

- 格子振動
- 格子欠陥、不純物等による散乱

通常の物性系における質量 m 、電荷 $-e$ の電子の運動方程式：

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\gamma \frac{dx}{dt} - eE_0 e^{-i\omega t} \implies x = A e^{-i\omega t}, \quad A = \frac{eE_0}{m\omega^2 + i\gamma\omega}$$

電流 i は $i \sim -en \frac{dx}{dt}$ より、電気伝導率 σ は

$$i = \sigma E, \quad \sigma = \frac{D\tau}{1 - i\tau\omega}, \quad \tau = \frac{m}{\gamma} \quad (\text{緩和時間}) \quad (1)$$

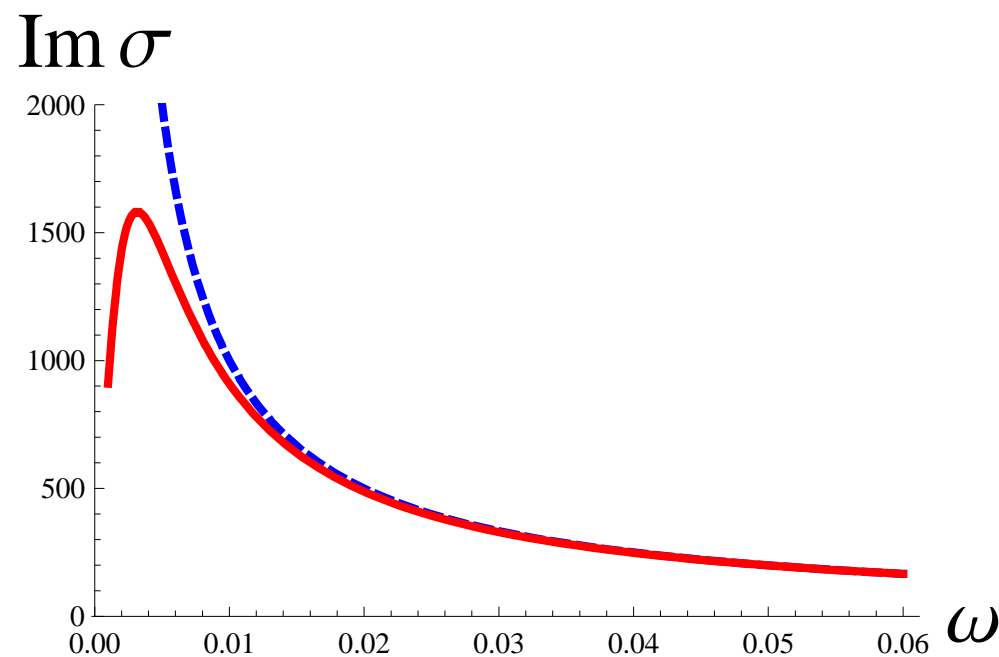


図 2: Drude Peak と電気伝導率

♠ 格子構造を入れた並進対称性のないホログラフィックモデルの構築
空間的に非一様（周期関数）な化学ポテンシャル $\mu(x)$ の導入 \implies
ゲージポテンシャル（バルク：4次元 (t, x, y, z) ）

$$A_t(x, z) \implies \mu(x) + \rho(x)z, \quad z \rightarrow 0 \quad (2)$$

- 常伝導相における摂動解の構築（K. M., 岡村、古賀(2011)）
- 常伝導相における電気伝導率の計算（非摂動）(Horowitz, Santos, Tong (2012))
Drude peak の確認、power-law behavior $|\sigma(\omega)| \sim \omega^{-2/3}$ （酸化銅超伝導と一致）
- 緩和時間 τ が温度 T の負冪の関数（ $\tau \sim T^{-p}$ ($p > 0$)）で書かれる（ゼロ温度の極限で無限大）(Hartnoll, Hofman(2012)、Horowitz, Santos, Tong (2012))

超伝導相では？

散逸しない**永久電流の存在**（少なくとも宇宙年齢程度）

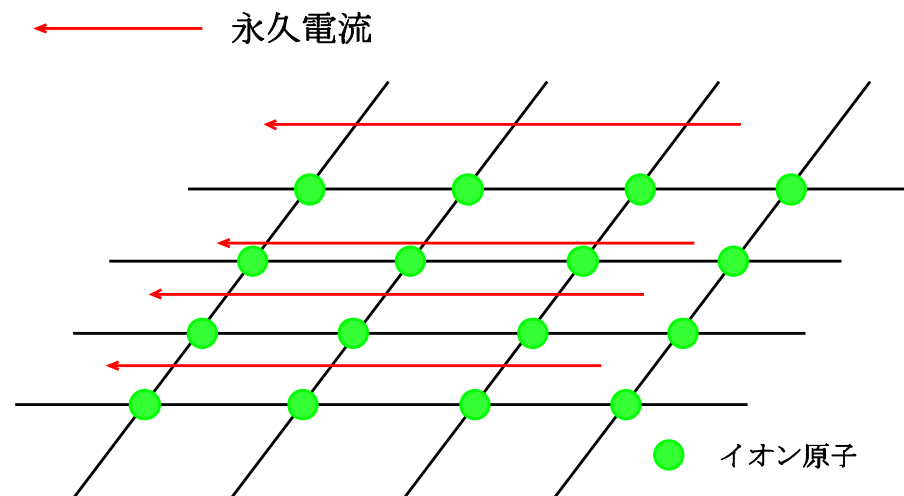


図 3: 格子構造の中を流れる永久電流

- Toy model を用いた超伝導相における電気伝導率の計算（摂動）（飯塚、K. M. (2012)）
- 数値計算による電気伝導率の計算（非摂動）Horowitz, Santos (2013)）

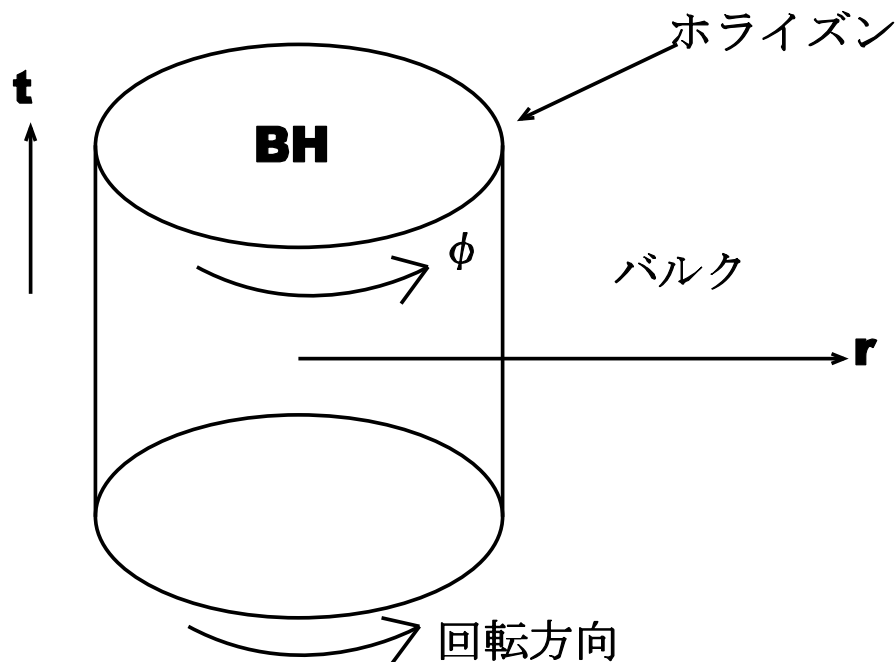
いずれの結果も**デルタ関数が存在**（**永久電流の存在**を示唆）

Question) 場の理論側で永久電流に相当する定常非静的ブラックホール解は格子構造の下で存在するか？

△

ブラックホールの剛性定理 (Hawking(1972), Hollands, Ishibashi, Wald (2007))

定常非静的ブラックホール解が存在するとき、時間方向 ∂_t とは独立に、回転方向のキリングベクトル ∂_ϕ が存在し、互いに可換である。



特に常伝導相の場合、**ゼロ温度では互いに矛盾する結果**となる

完全結晶 (電気抵抗ゼロ) (場の理論側) \iff 剛性定理により電流が
流れている方向に対称性あり (バルク側)

本講演では、常伝導相において、格子構造を摂動で取り入れ、初期に
電流が流れている状態がどの様に格子構造の下で散逸するのかを考
察する



背景解) ブーストされた電荷を持つ AdS ブラックホール解 (運動量
あり)



$$A_t(x, z) \implies \mu(x) + \rho(x)z, \quad z \rightarrow 0$$

に相当するゲージ場の摂動を加え、ブラックホールの時間発展を計算

2 摂動方程式

モデル (常伝導相): Einstein-Maxwell 理論

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(R + \frac{6}{L^2} - \frac{1}{2} F^2 \right)$$

L : AdS 半径

背景解) boosted charged AdS Black hole 解

$$ds^2 = - \left(f \cosh^2 \beta - \frac{r^2}{L^2} \sinh^2 \beta \right) dt_*^2 \\ + \frac{dr^2}{f} + 2 \left(fL - \frac{r^2}{L} \right) \sinh \beta \cosh \beta dt_* d\hat{x}_* \\ + (r^2 \cosh^2 \beta - fL^2 \sinh^2 \beta) d\hat{x}_*^2 + r^2 d\hat{y}^2,$$

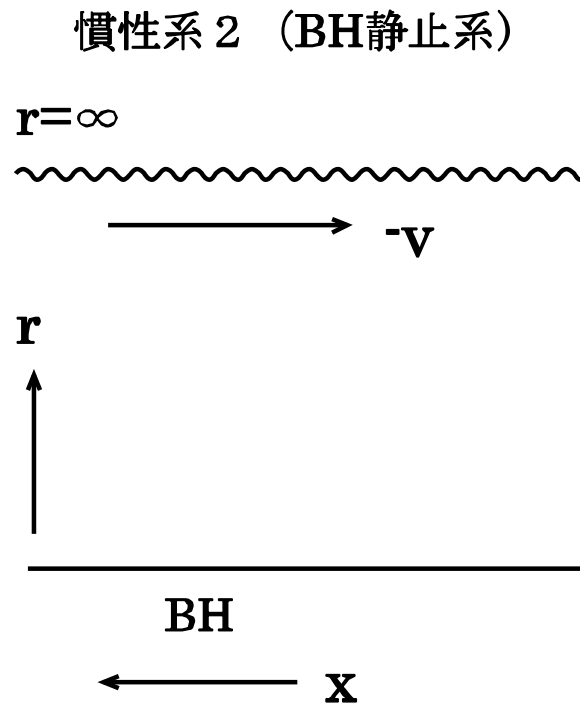
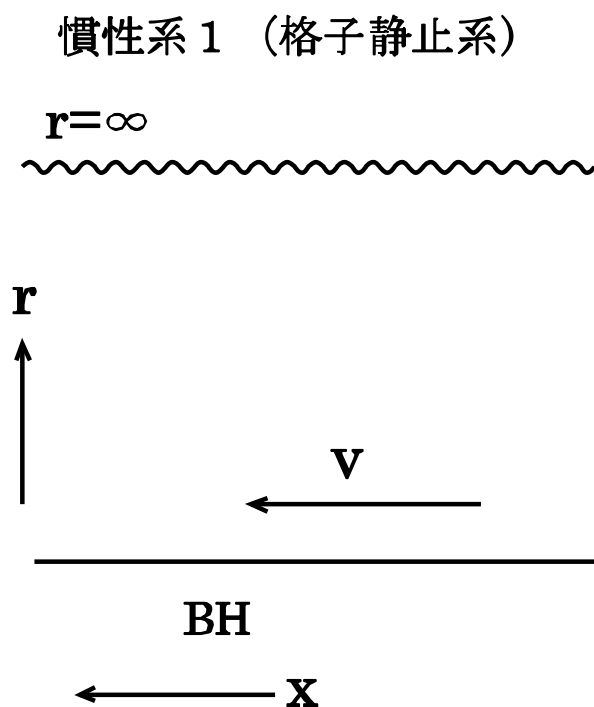
$$f(r) = \frac{r^2}{L^2} - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$$

$v := \tanh \beta$ (ブラックホール速度)

ゲージ場の摂動)

$$\delta A_{t_*}(r, \hat{x}_*) = \epsilon a_{t_*}(r) e^{-i\hat{k}_* \hat{x}_*}, \quad \epsilon : \text{摂動パラメーター}$$

簡単のため、ブラックホール静止系 (慣性系 2) で摂動を考える \implies



$$\delta A_{t_*}(r, \hat{x}_*) = \epsilon a_{t_*}(r) e^{-i\hat{k}_* \hat{x}_*} \implies \delta A_t(r, \hat{x}) = \epsilon a_t(r) e^{i(\hat{k}\hat{x} - \hat{\omega}\hat{t})}$$

座標変換) r_+ : ホライズン半径

$$r = \frac{r_+}{u}, \quad \hat{t} = \frac{L^2}{r_+}t, \quad \hat{x} = \frac{L}{r_+}x, \quad \hat{y} = \frac{L}{r_+}y, \quad \hat{k} = \frac{r_+}{L}k, \quad \hat{\omega} = \frac{r_+}{L^2}\omega$$

摂動された計量 (スカラータイプ)

$$ds^2 = \frac{L^2}{u^2} \left[-g(u) \{1 + \epsilon(X(u) + 2H_L(u))e^{-i\omega t + ikx}\} dt^2 + \frac{1 - \epsilon(X(u) + 2H_L(u))e^{-i\omega t + ikx}}{g(u)} du^2 - \frac{2\epsilon L^2 u^2}{r_+^2 g(u)} Z(u) e^{-i\omega t + ikx} dt du + (1 + 2\epsilon H_L(u)) e^{-i\omega t + ikx} (dx^2 + dy^2) \right],$$

$$g(u) = (1 - u)(1 - \xi u)(1 + (1 + \xi)u + (1 + \xi + \xi^2)u^2)$$

$\xi = 0$ 電荷ゼロ

$\xi = 1$ 電荷極大 (温度ゼロ)

ゲージ場（関数 A ですべて表せる）

$$\delta F_{tu} = \epsilon \left[\frac{\omega^2}{g} A + (gA')' \right] e^{-i\omega t + ikx},$$

$$\delta F_{tx} = i\epsilon k g A' e^{-i\omega t + ikx}, \quad \delta F_{ux} = \epsilon \frac{\omega k}{g} A e^{-i\omega t + ikx}$$

摂動方程式

$$g^2 H_L'' - (\omega^2 - k^2 g) H_L + \frac{k^2}{2} g X - \frac{L^2 \omega^2 u}{r_+^2} \frac{Z}{i\omega} = 0,$$

$$4ug H_L' - 2(2g + ug') H_L - 2gX - \frac{L^2 k^2 u^3}{r_+^2} \frac{Z}{i\omega} = 0,$$

$$Z' + i \frac{\omega r_+^2}{L^2 u^2} X - \frac{2\sqrt{2}iQ\omega}{L^2} A = 0,$$

ゲージ場の方程式

$$g^2 A'' + gg' A' + (\omega^2 - k^2 g) A - \frac{2\sqrt{2}L^2 Q}{r_+^2} g H_L = 0$$

マスター変数 Φ (ゲージ不変量) (Kodama-Ishibashi (2004))

$$\Phi(u) = \frac{4\omega r_+^2 H_L - 2iL^2 u Z}{\omega r_+ u h(u)}$$

$$h(u) = \frac{r_+^2}{L^2} \left(k^2 - \frac{g'}{u} \right).$$

さらに、新しい変数として

$$\Phi_{\pm} = a_{\pm}(u)\Phi + b_{\pm}A$$

を導入すると

$$g(g\Phi'_{\pm})' + (\omega^2 - V_{\pm})\Phi_{\pm} = 0, \quad V_{\pm} = \frac{g}{L^2 r_+^2 b_{\pm} u h^2} U_{\pm},$$

$$U_{\pm} = 4\sqrt{2}Qg\{(2r_+^3 a_{\pm}(k^2 + 4u^2\xi(1 + \xi + \xi^2)) + L^2h(\sqrt{2}Qub_{\pm} - 2r_+a_{\pm}))\} \\ + L^2uhr_+(k^2b_{\pm}hr_+ + 4\sqrt{2}Qa_{\pm}(k^2u + g'))$$

Q : BHの電荷（密度）

Φ_- : 重力場の摂動

Φ_+ : 電磁場の摂動

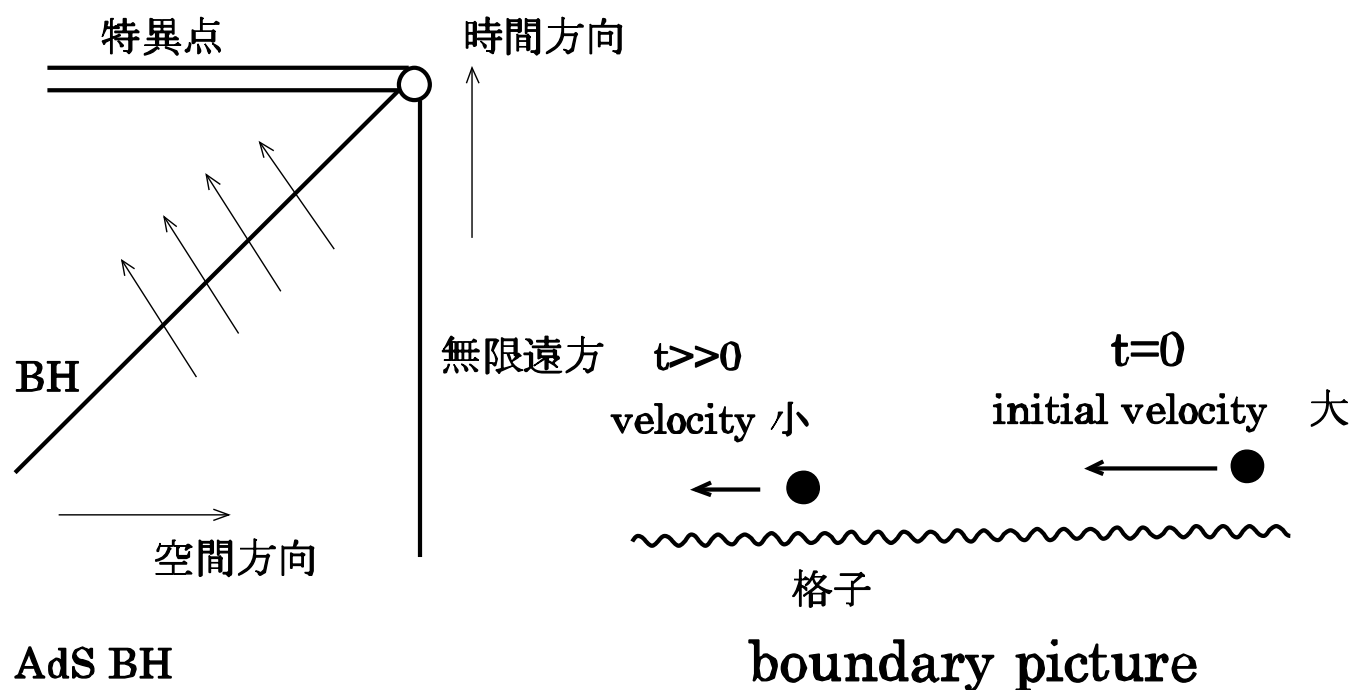
境界条件（無限遠方）

- 計量の揺らぎが無限遠方でゼロ： $H_L(u)$ 、 $X(u)$ 、 $uZ(u) \implies 0$ ($u \rightarrow 0$)
- 電場の振幅が一定 ($E_x = -\partial_x \mu(x) = E_0 \cos k_* x_*$ ($E_0 = \text{一定}$))

境界条件（ホライズン）

因果律 \implies Infalling boundary condition

$$\Phi_{\pm} \sim e^{i(kx - \omega(t - u_*))} \sim e^{ik(x + v(t - u_*))}, \quad u_* = \int_0^u \frac{du}{g}$$



格子による運動量減少率 \mathcal{G} の計算

漸近的 AdS 時空 \implies

$$ds^2 = N^2 dz^2 + \gamma_{ab} (d\tilde{x}^a + N^a dz) (d\tilde{x}^b + N^b dz) \quad (a, b = \tilde{t}_*, \tilde{x}_*, \tilde{y}_*),$$
$$\rightarrow \frac{L^2}{z^2} (dz^2 + \eta_{ab} d\tilde{x}^a d\tilde{x}^b + O(z^3)), \quad z \rightarrow 0$$

場の理論側 :

$$\langle T^{ab} \rangle = \lim_{z \rightarrow 0} 2 \left(\frac{L}{z} \right)^5 \left(\gamma^{ab} K - K^{ab} - \frac{2}{L} \gamma^{ab} \right),$$
$$\langle J^a \rangle = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{L}{z} \right)^3 \sqrt{2} F^{a\mu} n_\mu$$

保存則 :

$$\partial_b \langle T^{ab} \rangle = \sqrt{2} \langle J^b \rangle \lim_{z \rightarrow 0} (\eta^{ac} F_{cb})$$

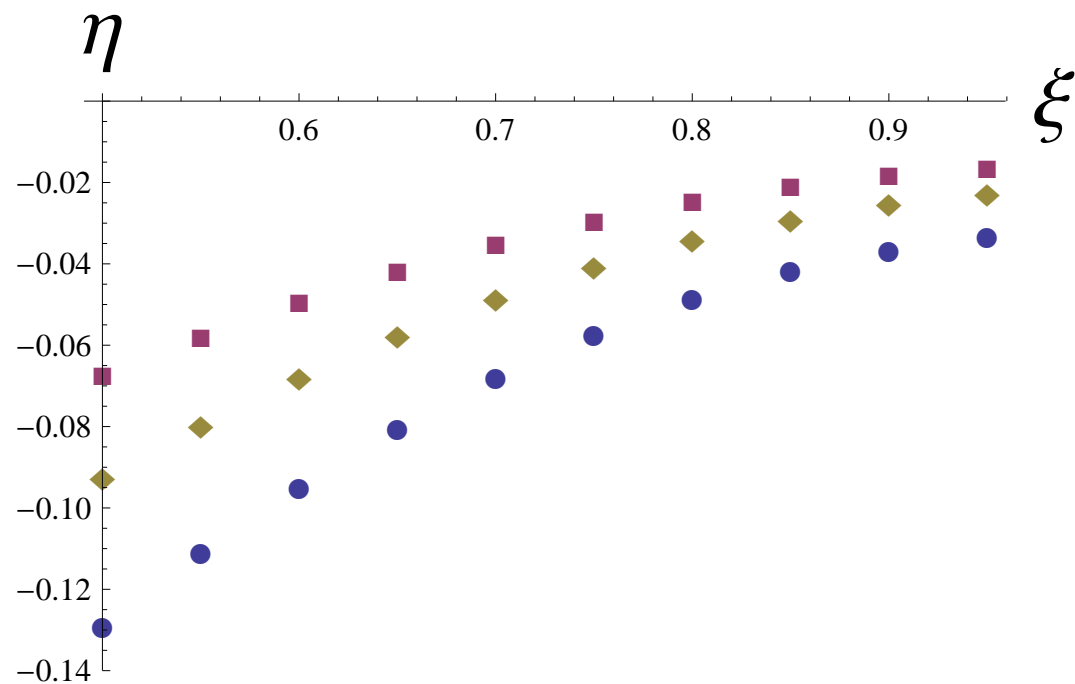


図 4: (color online) $\eta = \mathcal{G}/(\epsilon^2 r_+^4)$ is plotted for $k = 1/2$ and $L = 1$ for various β . $\beta = 0.1$, $\beta = 0.07$, and $\beta = 0.05$ correspond to a circle, a rhombus, and a square, respectively.

$a = \tilde{x}_*$ を代入して

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G} &:= \overline{\partial_{\tilde{t}_*} \langle T^{\tilde{x}_* \tilde{t}_*} \rangle} = \overline{\partial_b \langle T^{\tilde{x}_* b} \rangle} \\
 &= -\frac{2r_+^4}{L^4} \overline{\delta F_{t_* u} \delta F_{t_* x_*}} \quad \Leftarrow \quad \text{二次の微小量}
 \end{aligned}$$

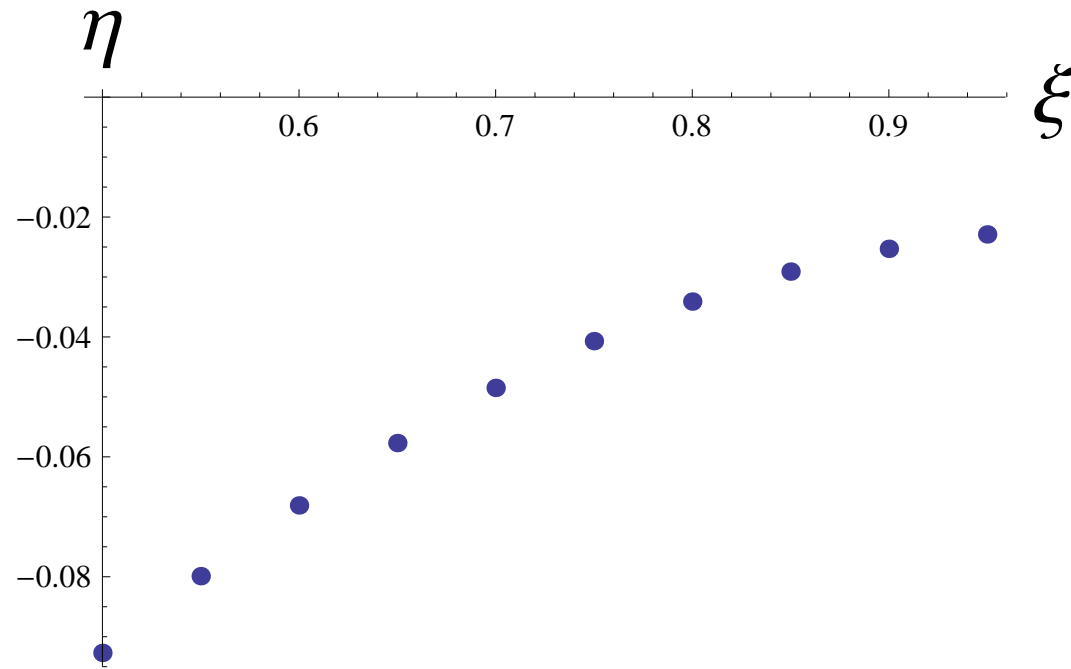


図 5: (color online) $\eta := \mathcal{G}/(\epsilon^2 r_+^4)$ is plotted for $k = 1$, $L = 1$, and $\beta = 0.1$.

$$\frac{d\langle T_{\tilde{x}_* \tilde{t}_*} \rangle}{dt_*} \simeq -\gamma v$$

- \mathcal{G} は速度に比例する！ $\implies v \sim v_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ (通常の散逸過程を再現！)
- どの波数 k でも、ゼロ温度極限で $\mathcal{G} > 0 \implies$ 完全結晶のようにはならない！

3 WKB analysis

波数 k が大きい極限では解析解が構築可能

$$S_{\pm} = S_{0\pm} + \frac{S_{1\pm}}{k} + \frac{S_{2\pm}}{k^2} + \dots,$$
$$V_{\pm} = k^2 \left(V_{0\pm} + \frac{V_{1\pm}}{k} + \frac{V_{2\pm}}{k^2} + \dots \right)$$

WKB Eqs.

$$\left(\frac{dS_{0\pm}}{du_*} \right)^2 = V_{0\pm} - v^2, \quad \text{zeroth order}$$

$$\frac{d^2 S_{0\pm}}{du_*^2} + 2 \frac{dS_{0\pm}}{du_*} \frac{dS_{1\pm}}{du_*} - V_{1\pm} = 0, \quad \text{first order}$$

$$V_{0\pm} = g(u), \quad V_{1\pm} = \mp 2 \sqrt{\xi(1 + \xi + \xi^2)} u g(u)$$

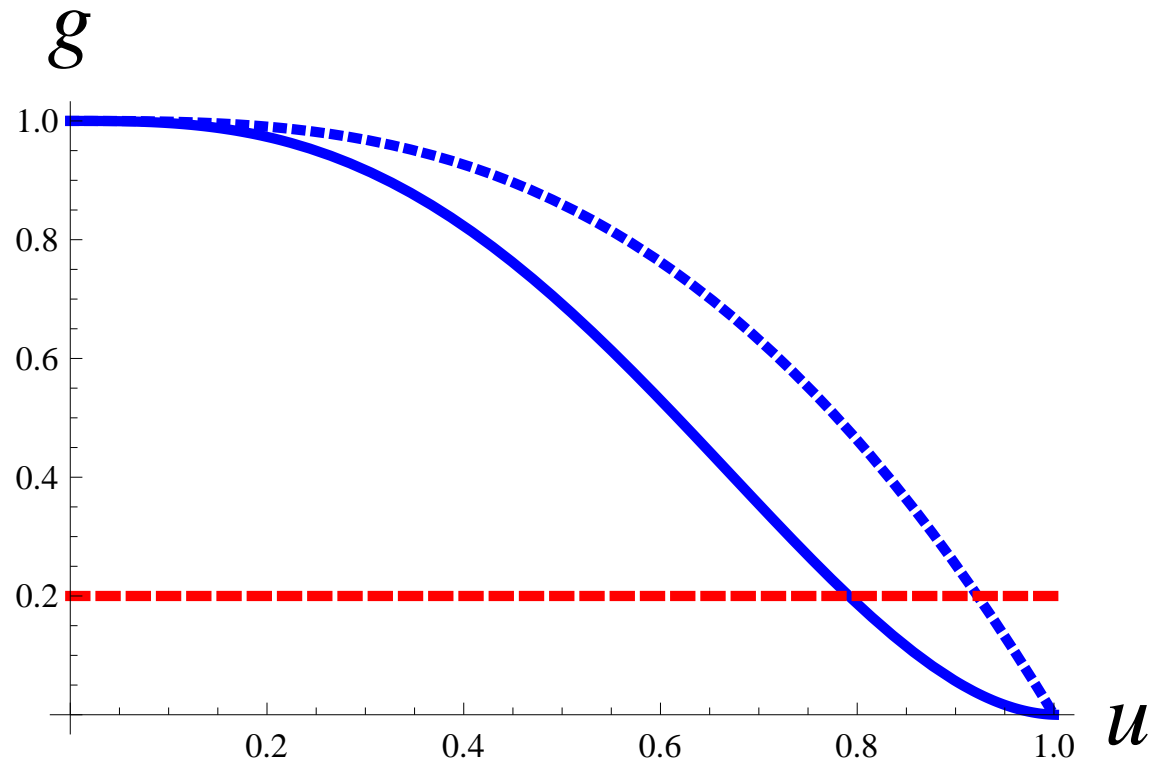


図 6: $V_{0\pm} = g$ is shown for $\xi = 0.99$ (solid curve) and $\xi = 0.2$ (dotted curve). The horizontal line (dashed line) corresponds to $v^2 = 1/5$.

転回点 $u_* = u_{*0}$ ($g(u_{*0}) = v^2$) はただ一つ存在し、一定の v では $\xi \rightarrow 1$ で、 $u_{*0} \rightarrow 1$ (ホライズン) には近づかない

境界条件を考慮すると

$$\mathcal{G} = \overline{\partial_{\tilde{t}_*} \langle T_{\tilde{x}_* \tilde{t}_*} \rangle} = -\epsilon^2 \frac{r_+^4 C^2 (\zeta^2 + \zeta^{-2})}{L^4 \Gamma^2},$$

$$\Gamma = \exp \left(-k \int_0^{u_{*0}} \sqrt{|Q|} du_* \right) \quad (k < 0),$$

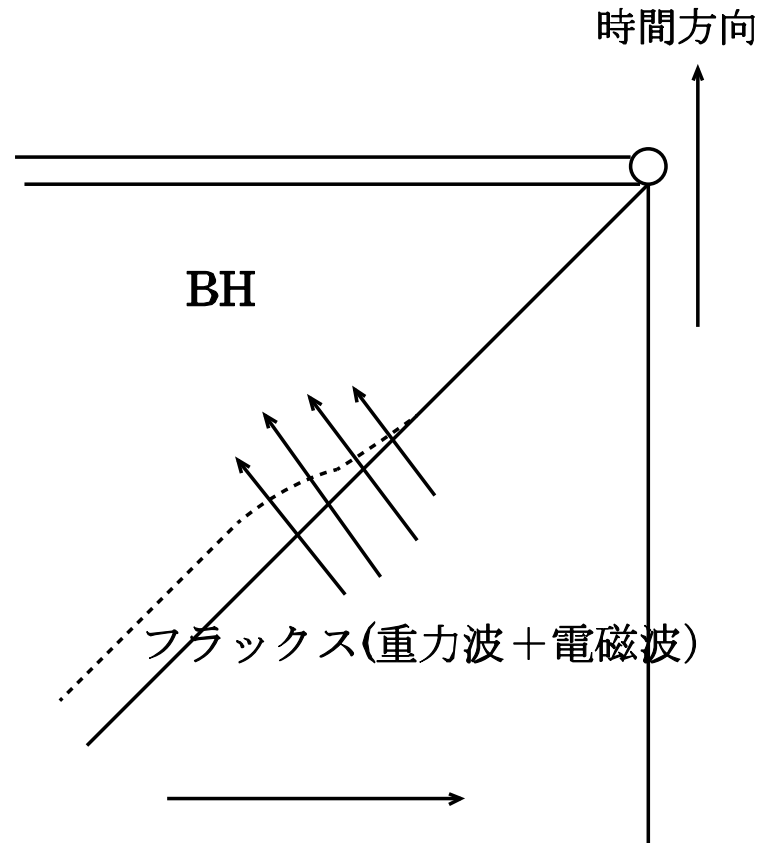
$$\zeta = \exp \left(\sqrt{\xi(1 + \xi + \xi^2)} \int_0^{u_{*0}} \frac{ug}{\sqrt{|Q|}} du_* \right),$$

$$Q := v^2 - g$$

Γ はゼロ温度極限でも発散しない!



運動量減少率 \mathcal{G} はゼロ温度極限でもゼロに近づかない



4 不可逆過程におけるエントロピー生成率と熱力学第一法則

レイチャウドリ方程式

$$l^\mu \partial_\mu \rho = \kappa_* \rho - \rho^2 - |\sigma|^2 - \frac{1}{2} T_{\mu\nu} l^\mu l^\nu,$$

$$l^\mu \partial_\mu \sigma = \kappa_* \sigma + \Psi_0$$

l^μ : 測地線の接ベクトル ρ : 面積膨張率 σ : shear

Hawking-Hartle formula \implies

BHの面積変化率：

$$\frac{d\Sigma}{dv_*} \simeq \frac{\epsilon^2 r_+^2 \sqrt{1-v^2} C^2}{2L^4 \Gamma^2} \left(\zeta^2 + \frac{1}{\zeta^2} \right) \frac{v \Sigma}{\kappa_*}$$

熱力学第一法則：

$$0 = d\mathcal{E} = T ds + v d\mathcal{L}$$

\mathcal{E} :エネルギー密度 \mathcal{L} :運動量密度 s :エントロピー密度

$$T = \frac{\kappa_*}{2\pi}, \quad s = 4\pi\Sigma = 4\pi r_+^2 \cosh \beta$$

\triangle

静的摂動を考えているので、全エネルギーは保存する ($d\mathcal{E} = 0$)

5 Summary

- 格子構造がある強結合の場の理論（強相関物性系）において、初期電流がどのように緩和するのかを調べた
- $v \sim v_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ が得られ、通常の緩和過程と一致。
- τ はゼロ温度極限でも無限大にはならず、Horowitz らの結論と合致しない（**ゼロ温度でも、必ず運動量は失われ、熱化が起こる**）！



静的解ではなく、初期に運動量（電流）がある状態の摂動を計算

二次の摂動量を計算（**一次では散逸は起こらない**）

Future Project(K. M., 石橋、飯塚)

有限温度で、超伝導相では、永久電流に相当するブラックホール解は存在するか？