

# A new look at instantons & large-N limit

本多正純

KEK & 基研 → Harish-Chandra研究所

Ref.: arXiv:1307.0809 [hep-th]

畔柳竜生氏(ハーバード大)、花田政範氏(基研)、  
松尾善典氏(KEK)、柴正太郎氏(KEK)  
との共同研究に基づく。

基研研究会 2013年8月20日

# ラージ $N$ ('t Hooft) 極限の御利益

[ 't Hooft '74]

- ・摂動展開を特殊なファインマン図 = Planar 図 が支配
- ・鞍点法による厳密計算
- ・ $1/N$ 展開 ~ genus 展開
- ・重力双対が古典に [ Maldacena '97]
- ・Dimensional reduction で情報が失われない(ことがある)
- ・適当な対称性で割っても情報が失われない(ことがある)

[ Eguchi-Kawai '82]

``Orbifold 等価性``

[Kachru-Silverstein '98, Bershadsky-Johansen '98,  
Kovtun-Unsal-Yaffe '04 ]

この講演ではラージ  $N$  極限における インスタントン効果 を考える

# ラージN極限におけるインスタントン効果

通常の't Hooft 極限:  $g^2 N = \lambda = \text{fixed}$ ,  $N \rightarrow \infty$ では、(典型的に)

$$(\text{Instanton効果}) \sim e^{-\frac{8\pi^2}{g^2}} = e^{-\frac{8\pi^2 N}{\lambda}} \rightarrow 0 ?$$

一見無意味に見える  $\rightarrow$  なぜ考えるか？

1. ``0への近づき方``の把握

$\rightarrow$  finite large Nでのインスタントン効果の近似公式

2. SuppressされないようなラージN極限の取り方が存在:

$$g^2 = \text{fixed}, N \rightarrow \infty \quad (\sim \lambda = \mathcal{O}(N)?)$$

(3. 一般には量子効果でインスタントン展開の重みは変化する)

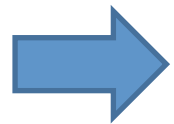
[Cf. インスタントン凝縮: Gross-Matysin '94]

# この講演について

0インスタントンで見てきたラージN極限の性質はインスタントンを入れても保たれるか？

## アイデア:

ラージN極限で、  
インスタントン解周りの摂動論はPlanar図に支配されるはず



インスタントン効果もPlanarの物理に支配される(だろう)

1. ラージN極限における単純化はinstanton sectorでも起こるか？  
→例としてOrbifold等価性を考える
2. インスタントンがsuppressされない極限:  $g^2 = \text{fixed}, N \rightarrow \infty$  と  
't Hooft 極限:  $g^2 N = \lambda = \text{fixed}, N \rightarrow \infty$  との関係

これらをおあるクラスの4d N=2 SUSY理論でdemonstration

# Demonstrationの セットアップ

# セットアップ

説明の簡単のため、

$$4d \ U(kN) \ \mathcal{N} = 2^* \text{ theory} \\ = \left[ \mathcal{N} = 4 \text{ SYM} + \text{mass deformation} \right] \\ \text{(s.t. preserving 8 SUSY)}$$

における(unit) $S^4$ 上の分配関数を考える。

注) 以下の議論は(8SUSYの範囲で)

- ・ゲージ群の数やadjoint, fundamental, bi-fundamentalの数を  
変えた場合にも適用可能
- ・局所化が適用できる物理量(BPSウィルソンループなど)  
全般に適用可能

# S<sup>4</sup>上のN=2\*理論の分配関数

[Pestun '07]

局所化による公式:

$$\begin{aligned} Z_{N=2^*} &= \int d^{kN} a \left( \prod_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^{kN} (a_i - a_j)^2 \right) Z_{N=2^*}^{(\text{pert})}(a_i, m) |Z_{N=2^*}^{(\text{inst})}(a_i, \tilde{m})|^2 \exp \left( -\frac{8\pi^2}{g_p^2} \sum_{i=1}^{kN} a_i^2 \right) \\ &= \int (\text{van der monde}) \times (1\text{-loop}) \times |(\text{Instanton})|^2 \times (\text{classical}) \end{aligned}$$

ラージN極限に興味があるので鞍点法で解析を行う

各部分の自由エネルギーへの効き方:

- (van der monde)  $\rightarrow O(N^2)$
- (1-loop)  $\rightarrow O(N^2)$
- (classical)  $\rightarrow$  't Hooft極限なら $O(N^2)$
- Instanton部分は複雑(次のスライド)

# インスタントン分配関数

[Nekrasov '02]

インスタントン効果は各固有値にassignされたヤング図によってラベルされる:

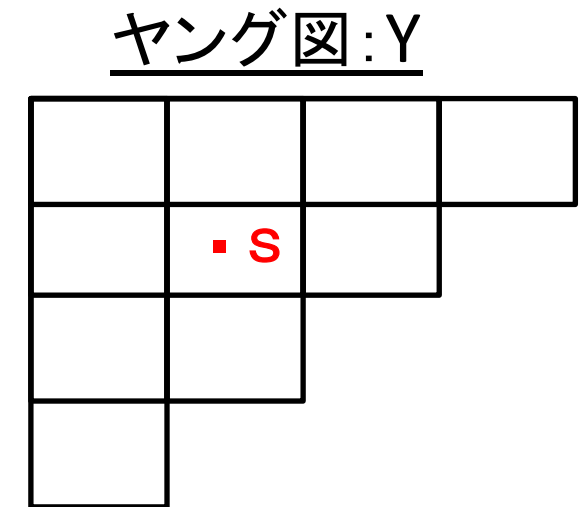
$$Z_{\mathcal{N}=2^*}^{(\text{inst})}(a_i, \tilde{m}) = \sum_{Y=\{Y_1, \dots, Y_{kN}\}} e^{-\frac{8\pi^2|Y|}{g_p^2}} \prod_{i,j=1}^{kN} Z_{\text{vec}}^{(\text{inst})}(a_i - a_j; Y_i, Y_j) Z_{\text{mat}}^{(\text{inst})}(a_i - a_j; Y_i, Y_j; \tilde{m}),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_{\text{vec}}^{(\text{inst})}(a_i - a_j; Y_i, Y_j) = \prod_{s \in Y_i} [E(a_i - a_j; Y_i, Y_j, s)]^{-1} \prod_{t \in Y_j} [2 - E(a_j - a_i; Y_j, Y_i, t)]^{-1}, \\ Z_{\text{mat}}^{(\text{inst})}(a_i - a_j; Y_i, Y_j; \tilde{m}) = \prod_{s \in Y_i} (E(a_i - a_j; Y_i, Y_j, s) - \tilde{m}) \prod_{t \in Y_j} (2 - E(a_j - a_i; Y_j, Y_i, t) - \tilde{m}), \end{array} \right.$$

※sはヤング図中の座標で、空のヤング図のときは走らない

大きく分けて以下の3タイプがある:

- (empty Y) – (empty Y) → 寄与なし
- (non-empty Y) – (empty Y)
- (non-empty Y) – (non-empty Y)



インスタントン数が $O(1)$ のとき、積の数は $O(N)$ 個 → 鞍点を動かさない



# Orbifold等価性 with instanton

# Orbifold等価性 **without** instanton

[Kachru-Silverstein '98, Bershadsky-Johansen '98, Kovtun-Unsal-Yaffe '04]

Idea:

Orbifolding  
by a discrete sym.  $\Gamma$

``parent`` field theory



``daughter`` field theory

等価性: 't Hooft極限で、

- ・自由エネルギー:  $F(\text{parent}) = |\Gamma| F(\text{daughter})$
- ・ $\Gamma$ 不変な演算子:  $\langle \mathcal{O} \rangle_{\text{parent}} = \langle \mathcal{O} \rangle_{\text{daughter}}$

簡単な例:  $\Gamma$ がglobalな内部対称性、かつ親と子がgravity dualを持っている場合

子の重力側 = 親の重力側で余剰次元を $\Gamma$ でorbifoldingしたもの

- ・自由度が $|\Gamma|$ 倍ずれている  $\rightarrow F(\text{parent}) = |\Gamma| F(\text{daughter})$
- ・ $\Gamma$ 不変な演算子は``余剰次元の違い``を感知しない  $\rightarrow$   
 $\langle \mathcal{O} \rangle_{\text{parent}} = \langle \mathcal{O} \rangle_{\text{daughter}}$

# Orbifold等価性 **with** instanton

Parent :  $U(kN)$   $\mathcal{N} = 2^*$  theory

$Z_k$  orbifolding

$$\Omega(\text{vectormultiplet})\Omega^{-1} = (\text{vectormultiplet})$$

$$\Omega(\text{chiralmultiplet})\Omega^{-1} = \omega^{-1}(\text{chiralmultiplet})$$

$$\Omega = \text{diag}(\omega \otimes \mathbf{1}_{N \times N}, \omega^2 \otimes \mathbf{1}_{N \times N}, \dots, \omega^k \otimes \mathbf{1}_{N \times N}) \quad \omega = e^{\frac{2\pi i}{k}}$$

Daughter :  $\mathcal{N} = 2$   $U(N)^k$  circle quiver theory

## 議論のアウトライン:

- ①親と子で0インスタントンの鞍点方程式を立てる
- ②Democratic ansatz:子のk個の固有値密度が互いに等しい  
→ 親の鞍点方程式と全く同じ形 →  $F_{Y=0}^{(\text{parent})} = kF_{Y=0}^{(\text{daughter})}$
- ③親でインスタントン数有限の固定されたヤング図:  $Y$ を考える。
- ④子の各ゲージ群で同じヤング図:  $Y$ を考える
- ⑤インスタントン分配関数は鞍点を動かさないので、

$$F_Y^{(\text{parent})} = kF_Y^{(\text{daughter})}$$

注:  $0=0$ でなく、 $0$ への近づき方の等価性

# コメント

ここでは、等価性を陽に示すために、  
親と子がN=2 SUSYを持っている場合を考えた。



しかし、orbifoldingの仕方を変えると、親がN=2 SUSYを持っているが、  
子はN=1 SUSY, non-SUSYの場合も考えることができる

[Kachru-Silverstein '98, Bershadsky-Johansen '98]



もし、等価性がこれらの場合も成り立つとすると、  
N=1 SUSY, non-SUSYの場合のインスタントン分配関数が  
分かることになる

From  $g^2 N = \text{fixed}$ ,  $N \rightarrow \infty$   
to  $g^2 = \text{fixed}$ ,  $N \rightarrow \infty$

# Very strongly coupled large-N limit

[Azeyanagi-Fujita-Hanada '12, Hanada-Fujita-Hoyos '12]

次の2つの極限を考える:


- 1.  $\lambda = g^2 N = \text{fixed}$ ,  $N \rightarrow \infty$ , then  $\lambda \rightarrow \mathcal{O}(N^p)$  ( $p > 0$ )  
(planar図の強結合極限)
- 2.  $\lambda_p = g^2 N^{1-p} = \text{fixed}$ ,  $N \rightarrow \infty$   
(一般的にはnon-planar図が寄与し得る)

これらの極限は一般には滑らかにつながらないが、つながる時もある。

$$F = \sum_{g=0}^{\infty} f_g(\lambda) N^{2-2g}, \quad f_g(\lambda) \stackrel{\lambda \gg 1}{\sim} \lambda^{m_g}$$

としたとき、

$$F \sim \sum_{g=0}^{\infty} \lambda_p^{m_g} N^{2-2g+m_g p},$$

  $m_0 > -\frac{2g}{p} + m_g$  ならば滑らかにつながる

# 滑らかにつながる例 without instanton

[Azeyanagi-Fujita-Hanada '12, Hanada-Fujita-Hoyos '12]

## ① 4次元 N=4 SYM:

古典SUGRA近似は、 $1 \ll \lambda \ll N$  のとき正しい。  
曲率小  $g_s$ 小

注: 't Hooft極限は十分だが必要ではない

$0 \leq p \leq 1$  は滑らかにつながる

## ② ABJM理論: (k: Chern-Simons level)

[Drukker-Marino-Putrov, Marino-Putrov]

• 't Hooft極限の強結合 ( $\lambda = N/k = \text{fixed} \gg 1$ , type IIA SUGRA):  $F = -\frac{\pi\sqrt{2}}{3\sqrt{\lambda}}N^2$

• k=fixed,  $N \rightarrow \infty$  (11d SUGRA):  $F = -\frac{\pi\sqrt{2k}}{3}N^{3/2}$

基本的に重力双対をもつ理論では、

genus 0の $\alpha'$ 展開に奇跡的なキャンセルが起きない限りはつながる

# From $g^2 N = \text{fixed}$ to $g^2 = \text{fixed}$ with instanton

0-instanton: [Bucel-Russo-Zarembo]

(以下の結果は  $g^2 \ll 1$  の限り正しい)

For  $\lambda \gg 4\pi^2 m^2 / (m^2 + 1)$ ,  $\rho(x) = \frac{2}{\pi\mu^2} \sqrt{\mu^2 - x^2}$  with  $\mu = \frac{\sqrt{\lambda(m^2 + 1)}}{2\pi}$


$$F^{(\text{pert})} = -N^2(m^2 + 1) \left( \frac{1}{2} \log \frac{\lambda(1 + m^2)}{16\pi^2} + \frac{1}{4} + \gamma \right)$$

1-instanton:

$$F^{(1\text{-inst})} = F^{(\text{pert})} + \frac{8\pi^2}{g^2} + \mathcal{O}(\log g^2)$$

任意の有限の数のinstanton:

陽に自由エネルギーを計算するのは難しいが、  
インスタントン分配関数は0インスタントンの鞍点を動かさない

 0インスタントンでの固有値密度の連続性から明らか。



# まとめ・展望

# まとめ

ラージN極限におけるインスタントン効果の性質を探った。

instanton数が有限の固定されたinstanton sectorについて、

1. Orbifold等価性が成り立つ

2. インスタントンがsuppressされない極限:  $g^2 = \text{fixed}$ ,  $N \rightarrow \infty$  は 't Hooft 極限の超強結合極限に等しい

「ラージN極限では、

インスタントン効果もPlanarの物理に支配される」

# 展望

- “ラージN SUSY”を示唆？
- インスタントンまで含めたゲージ/重力対応の検証
- Low/Non-SUSY instanton partition function
- 他の非摂動効果については？

完

Thank you !

# Appendix

# Some Details on matrix model

$$Z_{\mathcal{N}=2^*} = \int d^{kN} a \left( \prod_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^{kN} (a_i - a_j)^2 \right) Z_{\mathcal{N}=2^*}^{(\text{pert})}(a_i, m) |Z_{\mathcal{N}=2^*}^{(\text{inst})}(a_i, \tilde{m})|^2 \exp \left( -\frac{8\pi^2}{g_p^2} \sum_{i=1}^{kN} a_i^2 \right)$$

$$Z_{\mathcal{N}=2^*}^{(\text{pert})}(a_i, m) = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{kN} Z_{\text{vec}}^{(\text{pert})}(a_i - a_j) \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{kN} Z_{\text{mat}}^{(\text{pert})}(a_i - a_j, m),$$

$$Z_{\text{vec}}^{(\text{pert})}(a_i - a_j) = H(i(a_i - a_j)),$$

$$Z_{\text{mat}}^{(\text{pert})}(a_i - a_j, m) = e^{(1+\gamma)m^2} [H(i(a_i - a_j + m))H(i(a_i - a_j - m))]^{-\frac{1}{2}}.$$

$$Z_{\mathcal{N}=2^*}^{(\text{inst})}(a_i, \tilde{m}) = \sum_{Y=\{Y_1, \dots, Y_{kN}\}} e^{-\frac{8\pi^2|Y|}{g_p^2}} \prod_{i,j=1}^{kN} Z_{\text{vec}}^{(\text{inst})}(a_i - a_j; Y_i, Y_j) Z_{\text{mat}}^{(\text{inst})}(a_i - a_j; Y_i, Y_j; \tilde{m}),$$

$$Z_{\text{vec}}^{(\text{inst})}(a_i - a_j; Y_i, Y_j) = \prod_{s \in Y_i} [E(a_i - a_j; Y_i, Y_j, s)]^{-1} \prod_{t \in Y_j} [2 - E(a_j - a_i; Y_j, Y_i, t)]^{-1},$$

$$Z_{\text{mat}}^{(\text{inst})}(a_i - a_j; Y_i, Y_j; \tilde{m}) = \prod_{s \in Y_i} (E(a_i - a_j; Y_i, Y_j, s) - \tilde{m}) \prod_{t \in Y_j} (2 - E(a_j - a_i; Y_j, Y_i, t) - \tilde{m})$$

$$H(z) = e^{-(1+\gamma)z^2} \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{n^2} \right)^n e^{\frac{z^2}{n}}, \quad \tilde{m} = im + 1,$$

$$E(a_i - a_j, Y_i, Y_j, s) = -h_{Y_j}(s) + (v_{Y_i}(s) + 1) + i(a_j - a_i).$$

$$h_{Y_i}(s) = \nu'_{s_v}(Y_i) - s_h \quad v_{Y_i}(s) = \nu_{s_h}(Y_i) - s_v$$