一般相対論と計量符号

中西　襄 [*1]

アインシュタイン方程式は計量符号の情報を含まない．にも拘わらず，一般相対論はローレンツ計量を持つとされている．この問題を量子アインシュタイン重力の立場から考察する．

よく「一般相対論は重力を時空の幾何学に帰着した」と言われる．だが．これは誤解を招きやすい言い方だと思う．というのは，重力が幾何学的な量のみで記述されるわけではないからだ．実際，慣性力は座標系の選択に依存する力だが，観測にかかる物理量である．また，等価原理により慣性質量は重力質量に等しいとされるが，素粒子の場の方程式に現れる質量は，この意味での慣性質量ではない．一般相対論の本質は，一般相対性原理，すなわち一般座標変換のもとでの理論の不変性である．

この点を誤解して，量子重力を構築するさいに，幾何学を量子化しようという試みが数多くなされた．たとえば，経路積分法的レシピに従い，「すべての多様体についての和」なるものが考えられた．この場合，困るのは一体どの範囲の多様体を考えるのかである．計量が導入できる多様体に限ったとしても，計量符号はどうするのだろう．頭からローレンツ計量に限定するのか？そしたら因果律と矛盾する測地線をもつ多様体まで含めるのか否か？などなど，いろいろと人為的な選択をしなければならなくなる．

一般相対論では，たしかに重力場 $g_{\mu\nu}(x)$ は時空計量である．しかし，だからといって，重力場の量子化は時空計量を q 数にすることだとは結論できない．時空計量はあくまで c 数であって，量子重力で量子化されるのは重力場に限られる．したがって，重力場イコール時空計量という等式は，量子重力ではもはや成立しない．時空計量は量子重力場の真空期待値なのである．つまり，時空計量は基本的な量ではなく，理論としては後から現れる量なのである．そうすると，量子重力場 $g_{\mu\nu}(x)$ に現れる変数 x とは一体何者なのか．手で別に背景時空を仮定するのは基礎理論として許されないことなので論外とすると，x は時空計量のない世界に住む何者かであるはずだ．そこには時間と空間の先験的な区別は存在しないのである．ADM 形式やホイーラー・ドウィット方程式などの正準形式の理論では，相対論的不変性には配慮しているものの，時間方向と空間方向の差別は先験的に存在するということを前提にしている．

ニュートン力学では，時間は空間とは完全に独立したパラメータであった．ところが，特殊相対論が登場すると，時間はミンコフスキー空間という 4 次元の（平坦な）不定計量空間の一部分に組み込まれてしまった．アインシュタインは

[*1] 京都大学 (数理解析研究所) 名誉教授.　e-mail:　nbr-nak@trio.plala.or.jp

特殊相対論を，特殊相対性原理と光速度不変の原理がら導いたが，前者がいかにも「原理」らしいのに比べて，後者の光速度不変性はどうも原理と呼ぶにふさわしくない気がする．これは光という特別な実体に関する現象論的事実に過ぎないので，原理として据えるのではなくて，理論の結果として導かれるべきことだと考えるのが，より自然な態度ではないだろうか．[*2]　もちろん，ここで問題にしているのは物理の発見法的な妥当性ではなく，すべてが分かったとしたとき，論理的にいかに物理の理論が構築されるべきかである．

歴史的には，アインシュタインは重力の理論として一般相対論を構築するさい，一般相対性原理と等価原理を用いた．両者とも「原理」らしい原理ではあるが，等価原理を使って局所的に特殊相対論を使うわけである．ところが上述したように，特殊相対論は光速度不変性という原理らしからぬ原理に基づいて構築されたわけだから，それを引きずっている一般相対論も，この経験則的原理のうえに立脚することになってしまった．成立からちょうど 100 年，第一原理に基づいて定式化され，数多くの定量的な実験的検証に耐えてきた人類最高の理論である一般相対論の基礎に対して，ケチをつけようというのではないが，再考してみる価値のある問題であると言いたいのである．

一般相対性原理に基づいて導かれたアインシュタイン方程式には，どこにも計量符号の情報は含まれていない．つまり，この方程式は，時空が正真のリーマン空間なのか，擬リーマン空間すなわち (3+1) リーマン空間なのか，はたまた (2+2) リーマン空間なのか，全く何も言及していないのだ．このことは，いくら強調しても強調し過ぎることはないのだが，不幸にして一般相対論の教科書にちゃんと明言してあるのは，見たことがない．擬リーマン空間的，すなわちローレンツ計量的構造は，アインシュタイン方程式を解くときの境界条件として入ってくる．つまりいわば後から手で入れているわけだ．特殊相対論を習って次に一般相対論を習うから，誰もこの手続きに対して疑問を抱かないのである．しかし，理屈からいえば話は逆だ．理論的には一般相対論のほうが特殊相対論よりも基礎的な理論のはずだから，ローレンツ計量をここで勝手に持ち込むのはルール違反と言うべきであろう．ローレンツ計量は基礎理論から論理的に導出されなければならないことのはずだ．しかし，一般相対論，すなわち古典アインシュタイン重力の枠内でこのことを導くのは不可能である．つまり，より基本的な理論である量子アインシュタイン重力 [1),2)] に基づいて導かれなければならない．

時空は 4 次元である．このこと自体を第一原理から導くのは困難であるので，仮定するしかない．しかし以下の話は次元数によらないので，D 次元としておく．もちろん本物では $D=4$ である．論理の出発点として実 D 次元のベクトル空間を考えるのは，自然であろう．これを「原初時空」と呼び，X と書く．X に特定の計量や接続を持ち込むのは許さない．そうすると，X は D **次元アフィ**

[*2] 実際，アインシュタインも一般相対論を出す前には，光速度が重力によって変わると考えたことがある．

ン空間であると仮定するのが最も自然であろう．つまり，理論は X の並進変換と線形 1 次変換の下に不変であることを要請するのである．

X はそれ自身で順序集合をなしてないので，別に「原初時間」T を導入する．これは連続 1 次元の順序集合である．原初時空から原初時間への連続写像 $\varphi : X \to T$ を考える．時刻 $t \in T$ に対し，$\varphi^{-1}t$ を「同原初時刻」という．商空間 $X/\varphi^{-1}t$ は，原初時間 T と同定してよい．相対論では，時間をいきなり時空の中の 1 次元自由度と考えるので，時間の特質は計量符号が空間のそれと異なるということだけのように錯覚されてしまう．しかし時間概念は，本来ニュートン力学のように，時空の計量とは独立な概念として導入されるべきものと思う．「正準形式は時間を特別扱いするので相対論的不変性とは相性が悪い」と長く信じられてきたが，*3 これは時間を相対論的な時空計量の枠内で考えるからで，「正準形式の時間変数」を上のように原初時間と同定すれば，正準形式と相対論的不変性との間になんらの不整合性はないのである．

さて，量子アインシュタイン重力に現れる x^μ を X の中の点と同定することによって，素粒子物理学の理論がローレンツ不変でなければならないことが導かれる．これについてはすでに前論文 [3),4)] で述べたが，ここでは論理の道筋だけを再録しておこう．

アインシュタイン方程式は，重力場 $g_{\mu\nu}(x)$ の有理関数で書けるが，それを導く作用積分や対称性の保存量のように積分が必要になる量は，その行列式 $g(x)$ の平方根を含む．しかし，一般に $g(x)$ が定符号であるという保証はない．そこで，重力の基本場として「D 脚場」$h_\mu{}^a(x)$ を導入し，

$$g_{\mu\nu}(x) = \xi_{ab} h_\mu{}^a(x) h_\nu{}^b(x)$$

と書けるとする．実対称行列 ξ_{ab} は非特異であるとすれば，2 次形式の一般論から，一般性を失うことなしにそれは対角行列で，その対角要素はすべて $+1$ もしくは -1 であるとしてよい．-1 の個数を N とすれば，$g(x) = (-1)^N h(x)^2$ である．$h(x)$ は $h_\mu{}^a(x)$ の行列式で，$g(x)$ の平方根に相当するが，常に実であることが明らかである．$g_{\mu\nu}(x)$ は $\frac{1}{2}D(D+1)$ 個の独立成分を持つのに対し，$h_\mu{}^a(x)$ は D^2 個の独立成分を持つから，$\frac{1}{2}D(D-1)$ 自由度が余分である．理論はこの内部自由度に関して自明に不変になっていなければならない．これを「局所内部対称性」と呼ぶ．

量子アインシュタイン重力では，ゲージ固定により一般座標変換不変性という局所対称性はなくなる．その代わりに，ゲージ固定項プラス FP ゴースト項は一般座標変換の量子論版である BRS 変換のもとで不変となっている．ゲージ固定としてド・ドンデア条件を採れば，一般線形不変性は保たれる．したがって，x^μ

*3 これが経路積分法が流行した根源的理由である．

を原初時空と見做すことができる．理論は BRS 不変に定式化されるので，状態ベクトル空間による表現レベルで九後・小嶋条件の設定が可能である．局所内部対称性についても同様である．これにより最終的に物理的 S 行列のユニタリー性が保証されるようになる．重力場以外の場を素粒子の場と呼ぶが，素粒子の場はすべて時空対称性についてスカラー場である．他方，局所内部対称性に対しては，非自明な表現（ベクトルやスピノル）をもつことが可能である．ただし BRS 化したのちでは，全域的内部対称性の表現になる．

正準量子化は，原初時間を時間変数として，第 2 類拘束のみをもつ系のディラック量子化の意味で，通常通り行える．そしてすべての場および原初時間に関する 1 階偏微分に対する同原初時刻交換関係*4をあらわに閉じた形で求めることができる．またネーターの定理に従い，すべての対称性の生成子の表式を求め，それら相互間の交換関係や場の間の交換関係を計算できる．とくに，並進生成子 P_μ，一般線形変換生成子 $M^\mu_{\ \nu}$，そして全域的内部対称性生成子 $M^{ab}(=-M^{ba})$ について，すべて期待通りの結果が得られる．

状態ベクトル空間*5 による表現は，真空ベクトル $|0\rangle$ を導入し，場の量の単純積の真空期待値であるワイトマン関数をすべて与えることによって決定される [5]．ワイトマン関数は，すべての多重 4 次元交換関係とコンシステントになるようになっていなければならない．また，「時間の矢」（時間順序の向き）を具体化するエネルギーの正値性条件は，ワイトマン関数の解析性*6によって表す．もちろん，ワイトマン関数を具体的に計算することは極めて困難であるが，アインシュタイン定数 κ について冪展開したときの第 0 近似は完全に求めることができる．*7　第 0 近似では，重力場同士は D 次元的に可換なので，重力場のみを含むワイトマン関数はすべて単独の重力場の真空期待値の積に等しい．しかし重力場の第 0 近似と非可換な演算子が存在するから，それは c 数ではない．このように c 数の如く振る舞う q 数が存在するのは，表現空間が不定計量をもつからこそ可能なのであることを強調しておこう．

さて，表現のレベルにおいて，$M^\mu_{\ \nu}$ と M^{ab} のすべての成分の対称性は自発的に破れる．もし，P_μ が自発的に破れていなければ，すなわち $P_\mu|0\rangle = 0$ だったならば，$u^a_\mu \equiv \langle 0|h^a_\mu(x)|0\rangle$ は x に依存しない．そこでこの量を用いて $M^\mu_{\ \nu}$ の反対称部分と M^{ab} との或る 1 次結合を作ると，自発的に破れていない $\frac{1}{2}D(D-1)$ 個の対称性の生成子を構成することができる．これが物理的なローレンツ対称性の生成子に他ならないのだが，それをいうには ξ_{ab} が，全体の符号を除き，η_{ab} に一致することを示さなければならない．これは次のようにしていえる．

*4 反交換関係の場合を含む．

*5 ヒルベルト空間ではなく，不定計量をもつセパラブルな無限次元複素ベクトル空間である．

*6 正確にいえば，どのような解析関数の境界値であるかということ．

*7 共変的摂動論では，BRS 不変性を無視して第 0 近似を勝手に特定の c 数時空計量と仮定し，$\sqrt{\kappa}$ の冪級数に展開するが，これは原理的に間違っている．したがって，摂動論に基づいて量子重力の基本的な問題（たとえば発散の問題）を議論するのは全くナンセンスだ．

N 次元ユークリッド空間を E^N と書くと，ξ^{ab} を計量とする内部空間は，E^D か $E^{D-1}\bigoplus E^1$ か $E^{D-2}\bigoplus E^2$ か，... のいずれかである．これが表現のレベルにおいて原初時空にはめ込まれることになる．他方，同原初時刻の空間は E^{D-1} である．正準交換関係によれば，場の交換子はここで（原点を除き）0 である．ユークリッド空間は回転不変性があるから，もし同原初時刻の空間との共通部分の次元が 0 でなければユークリッド空間内ではこの性質はその全体に伝播する．したがって，第 2 の場合以外は，場の D 次元交換子は（原点を除き）恒等的に 0 にならざるをえない．交換子が 0 ということと，エネルギー正値性に基づくワイトマン関数の解析性とを使うと，ワイトマン関数が本質的にトリヴィアルになってしまう．つまり理論が時間発展のあるノントリヴィアルな系を記述できるのは，ξ^{ab} が $\pm\eta^{ab}$ になる場合に限ることになる．

以上の考察から，$\tilde{x}^\alpha \equiv u_\mu^\alpha x^\mu$ を「物理的時空」の座標とするとき，物理的時空に関して素粒子の場の量子論がポアンカレ不変であることがわかる．ただし，重力場を無視する近似を採らないと，「2 つの場の量はそれらの座標が空間的距離にあるとき可換（または反可換）である」という局所因果律は，必ずしも成立するとはいえない．

上の議論において本質的な仮定は，並進 P_μ が自発的に破れていないことである．もしそれが自発的に破れた，すなわち $P_\mu|0\rangle \neq 0$ だったとしたらどうなるか．この時は，真空という概念自体がおかしなものになるし，また時空対称性と内部対称性とを結びつけるような対称性も存在しなくなってしまう．そこで並進対称性の自発的破れは，プランク長 $\sqrt{\kappa}$ よりもずっと大きいスケールを対象としたときに現れるものと考えるべきであろう．並進対称性は微小領域では自発的に破れていないので，上述の議論が成立し，ローレンツ計量をもつ物理的時空の存在が結論される．微小領域をコンシステントに接続していけば，全体としてもローレンツ計量をもつ物理的時空が得られる．しかし，広い領域では重力場の真空期待値で定義される時空計量は，もはや x^μ に依存しない量ではない．

上述したように，$\kappa = 0$ の近似では，重力場のみのワイトマン関数はすべて重力場の真空期待値の積に等しいので，次の式が成立する：任意の $\frac{1}{2}D(D+1)$ 変数解析関数 $F(z_{\mu\nu})$ に対し，

$$\langle 0|F(g_{\mu\nu}(x))|0\rangle = F(\langle 0|g_{\mu\nu}(x)|0\rangle).$$

量子アインシュタイン方程式，すなわち量子アインシュタイン重力における $g_{\mu\nu}(x)$ に対する方程式に，この事実を適用すれば，時空計量 $\langle 0|g_{\mu\nu}(x)|0\rangle$ は，真空中のアインシュタイン方程式を満たすことが分かる．[*8]　しかもそれはローレ

[*8] 量子アインシュタイン方程式にはゲージ固定と FP ゴースト項からくる余分の項があるが，第 0 近似では効かない．

ンツ計量符号をもつことも見られた．

一般相対論における特異点定理によれば，物理的に意味があると思われる非自明なアインシュタイン方程式の解は，必ず特異点をもつものと考えられる．特異点では一般相対論が破綻するというような言い方もあるが，むしろこれは特異点の近傍では時空計量が古典的な微分方程式を満たさなくなるということであろう．全時空で真空中のアインシュタイン方程式が成立すれば，解は自明なものしかない．したがって現実的にはもちろん $\kappa \neq 0$ である．この時はもはや重力場が D 次元的に可換ではありえないから，その真空期待値で定義される時空計量が何らかの微分方程式を満たすということはありえない．すなわち，古典論的特異点近傍では，素粒子の場を考慮した量子アインシュタイン方程式を詳しく解析しなければならないのである．

文　献

1) N. Nakanishi, Publication RIMS **19** 1095 (1983).

2) N. Nakanishi and I. Ojima, *Covariant Operator Formalism of Gauge Theories and Quantum Gravity*(World Scientific, 1990), Chap. 5.

3) 中西襄，素粒子論研究電子版 **15**, No.3 (2012).

4) N. Nakanishi, Int. J. Mod. Phys. **A29**, 1450034 (2014).

5) N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. **111** 301 (2004).