

# 局所ローレンツ対称性に基づく 一般相対性理論の拡張

大阪大学理学研究科物理学専攻  
素粒子論研究室

宮脇渉太

## 概要

一般相対性理論は古典論として重力を十分に記述するが、くりこみ不可能という問題を抱えていて、低エネルギーで成り立つ有効理論だと考えられている。今日では様々な修正重力理論が考えられていて、多くの物理学者が重力の量子論の構築を目指している。多くの重力の拡張モデルでは計量  $g_{\mu\nu}$  を基本的自由度と扱っているが、計量を vierbein に分解することで metric formalism では見えなかった局所ローレンツ対称性というゲージ対称性が現れる。この対称性に起因して接続として局所ローレンツゲージ場が現れる。一般相対性理論は接続である  $\Gamma$  が計量の関数で fundamental な自由度ではないため、一般相対性理論がゲージ理論であるという見方は主流ではなかったが、私はこのゲージ場を基本自由度とした理論で重力の量子論が構築できるのではないかと考える。

四脚場と局所ローレンツゲージ場を基本的自由度とした理論は、Einstein-Cartan gravity (ECG) と呼ばれている。ECG は一般相対性理論の拡張モデルとして妥当である。なぜなら、局所ローレンツゲージ場の場の強さの一次式で Einstein-Hilbert 作用を書くことができるからである。ただ、場の強さの一次式、という点で通常のゲージ理論とは異なる。局所ローレンツゲージ場を基本自由度だと思いたいなら、運動項を入れてゲージ理論として計算したいという考えになるのはアナロジーとしてみたときの自然な取り組みである。そこでこの運動項をくりこみ群のフローで生成できないかという考え方をした。

本研究では、作用の形を制限するため四脚場の null field limit が存在するという要請をして ECG の作用を構築した。そして、そのモデルが南部・ヨナラシーニョ模型に似ているということに注目して、くりこみ群の手法を用いて局所ローレンツゲージ場の運動項が生成されるかどうかについて議論した。

本論文の構成について、まず ECG の基本自由度である、vierbein と局所ローレンツゲージ場の基礎について説明する。また、ECG での解析の例として 1 つの toy model のレビューを行う。その後我々の研究についての概要説明と解析についての議論を行う。

この文書は、昨年度提出した修士論文の一部に 2020 年 3 月に投稿した論文 [1] の内容を加えたものである。修士の研究は尾田欣也准教授のもとで行なっていたが、修士論文提出後に「この内容を素粒子論研究室に投稿しないか」という助言を頂いたのが今回の投稿のきっかけである。その後、修士論文と並行して行なっていた、尾田欣也さん、山田雅俊さんと松崎真也さんとの共同研究の成果を arXiv に投稿することができ、その内容を加えることを提案して頂き今に至っている。この研究は私にとって、大学生生活の集大成のようなものだった。大学に入る前から重力について研究したいと思っていたので、学生生活の最後にこのような研究ができ、また素粒子論研究に投稿できて非常に幸せに感じている。

# 目次

第 1 章	導入	3
第 2 章	Vierbein Formalism	6
2.1	Vierbein の導入	6
2.2	局所ローレンツ対称性	6
2.3	2つのゲージ対称性	9
2.4	一般座標変換に対するゲージ場についての考察	11
2.5	Field strength の 2 次から作られる作用	11
2.6	Field strength の 1 次から作られる作用	11
2.7	ECG における Einstein-Hilbert 作用	12
2.8	章のまとめ	13
第 3 章	Vierbein と LL ゲージ場の運動項からなる toy model の解析	14
3.1	論文の概要	14
3.2	平均場の導入	15
3.3	平坦時空周りの有効作用の解析	17
3.4	一般の背景時空に対する有効作用の解析	19
3.5	章のまとめ	20
第 4 章	フェルミオンのループによる重力の dynamical 自由度の生成	21
4.1	研究の背景	21
4.2	モデルの構成	21
4.3	計算の概要	24
4.4	作用と Feynman rule	25
4.5	フェルミオンのループと vierbein の運動項の関係についての考察	27
4.6	フェルミオンのループによる局所ローレンツゲージ場の運動項の生成	28
4.7	まとめ	32
第 5 章	結論	33
付録 A	微分形式における作用の構成	34
A.1	完全反対称テンソルの公式	34
A.2	Hodge star	37

A.3 2.6節の証明 . . . . .	38
付録B 熱核展開	39
付録C Hessianの構造	41
付録D ガンマ行列の計算	43
付録E 修正重力理論のレビュー	44
E.1 高階微分重力 . . . . .	44
E.1.1 Hessianの導出 . . . . .	44
E.1.2 propagatorの導出 . . . . .	46
E.1.3 unitarityの破れ . . . . .	49
E.2 Teleparallel gravity . . . . .	49
E.2.1 Teleparallel gravityの基礎 . . . . .	50
E.2.2 一般相対性理論との等価性 . . . . .	51
E.2.3 まとめ . . . . .	52

## 論文で用いる記法

本論文では特に断らない限り, 計量の符号を,

$$\eta = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$$

にとる. そのためフーリエ変換の符号は,

$$\Phi(x) = \int_k e^{ikx} \tilde{\Phi}(k), \quad \tilde{\Phi}(k) = \int d^4x e^{-ikx} \Phi(x) \quad (1)$$

となる. ただし,

$$\int_k = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}. \quad (2)$$

Ricci tensor の縮約は,

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu} \quad (3)$$

をとる. よって, Einstein-Hilbert 作用の符号は,

$$+ \int d^4x \sqrt{-g} R. \quad (4)$$

$\Gamma$  をクリストッフエル記号とする:

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} \equiv \frac{d}{2} g^{\rho\lambda} (\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}). \quad (5)$$

また, 共変微分の記法として,

$$\nabla_\nu V^\nu \stackrel{d}{=} \partial_\nu V^\nu + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} V^\lambda \quad (6)$$

$$D_\mu V^a \stackrel{d}{=} \partial_\mu V^a + \omega^a_{b\mu} V^b \quad (7)$$

$$\mathcal{D}_\mu e^a_\nu \stackrel{d}{=} \partial_\mu e^a_\nu - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} e^a_\lambda + \omega^a_{b\mu} e^b_\nu \quad (8)$$

を用いる. ここで,

$$\Omega^a_{b\mu} \stackrel{d}{=} e^a_\lambda \nabla_\mu e_b^\lambda \quad (9)$$

$$\gamma^a_{b\mu} \stackrel{d}{=} \omega^a_{b\mu} - e^a_\lambda \partial_\mu e_b^\lambda \quad (10)$$

を定義しておく, vierbein の共変微分は,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu e^a_\nu &= \partial_\mu e^a_\nu - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} e^a_\lambda + \omega^a_{b\mu} e^b_\nu \\ &= (\gamma - \Gamma)^\lambda_{\nu\mu} e^a_\lambda = (\omega - \Omega)^a_{b\nu} e^b_\mu, \end{aligned} \quad (11)$$

つまり,

$$\mathcal{D}_\nu e^a_\mu = 0 \Leftrightarrow \omega^a_{b\mu} = \Omega^a_{b\mu}. \quad (12)$$

これが metric formalism で良くみるスピンの接続の表示である.

また,

$$\Gamma^a_{b\mu} \stackrel{d}{=} e^a_\rho e_b^\nu \Gamma^\rho_{\nu\mu} \quad (13)$$

を定義しておく,

$$\Gamma_{(ab)\mu} = \gamma_{(ab)\mu} \quad (14)$$

であることが簡単にわかる.

フェルミオンについて議論する際のガンマ行列は,

$$\gamma^0 = -i \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab} I_4 \quad (16)$$

$$\gamma^5 \stackrel{d}{=} -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (17)$$

この時,

$$(\gamma^0)^\dagger = -\gamma^0, \quad \gamma^0(\gamma^a)^\dagger\gamma^0 = \gamma^a \quad (18)$$

Euclid 化 ( $t_E = it$ ) した際のガンマ行列は,

$$\gamma_E^0 \stackrel{d}{=} i\gamma^0, \quad \gamma_E^j \stackrel{d}{=} \gamma^j \quad (19)$$

$$\{\gamma_E^\mu, \gamma_E^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu} I_4. \quad (20)$$

また, ベクトルは,

$$A_0 = iA_0^E, \quad A_j = A_j^E \quad (21)$$

と定義する. 運動量はどうなるかというと,

$$p^0 = -ip_0^E, \quad p_0 = ip_0^E \quad (22)$$

そのため, フーリエ変換の符号は,

$$\Psi(x) = \int_p e^{ipx} \tilde{\Psi}(p), \quad \tilde{\Psi}(p) = \int d^4x e^{-ipx} \Psi(x) \quad (23)$$

となる.

# 第1章 導入

量子重力理論とは何か、という疑問は多くの物理学者が持っている疑問だろう。私の研究の原点もここにある。

現代物理学は、場の量子論と一般相対性理論の2つの柱で成り立っている。場の量子論とは、場という描像を用いて粒子の運動を記述する理論である。この理論は非常に完成度の高い理論で、強い力、弱い力、電磁気力を統一的に記述する標準模型はほとんどの実験結果を矛盾なく説明することに成功している。一方、一般相対性理論とは古典重力を記述する理論で、水星の近日点移動や重力レンズ効果、重力波の存在を説明することに成功している。これら、場の量子論と一般相対性理論で、ほとんどの物理現象を説明できた。しかし、一方は量子論でもう一方は古典論である。そこで重力の量子化を考えるが、一般相対性理論はくりこみが不可能であるという問題があることが分かっている。[2]ではスカラー場と重力を couple させると、1-loop level で Einstein-Hilbert 作用では吸収できない counter term が現れることが示されている。

この問題から、一般相対性理論は低エネルギーの有効理論と考えられ、一般相対性理論を拡張した様々な模型が提案されている。多くの拡張模型では、古典論の範囲で成り立つ、Lovelock の定理<sup>1)</sup>の条件をいくつか外すことで模型を構築し、低エネルギーで一般相対性理論を再現しようとしている。例えば、3. の条件を外して高階微分重力理論 [5, 6] や  $f(R)$  gravity [7], 2. の条件を外して teleparallel gravity [8, 9, 10, 11] などがある。Teleparallel gravity などの理論は宇宙論にも応用され、宇宙膨張などの文脈で議論がされている [12]。修正重力理論は宇宙論の現象論にモチベーションがあるものが多い。どのような議論がされているかは、[13, 14]に良くまとめられている。観測から模型を制限しようという考えがある一方、重力を含む作用のくりこみ群を考えて、紫外スケールで理論が非自明な固定点の存在を調べる漸近的安全性という議論もされている [15, 16, 17, 18, 19]。また、一般相対性理論を低エネルギー有効理論として含んでいるものの中で最も有名なのは超弦理論だろう。超弦理論が量子重力理論の最有力候補だと考える物理学者は多い。

---

<sup>1)</sup>Lovelock の定理は、

1. 時空次元が4次元である。
2. ラグランジアンが計量  $g_{\mu\nu}$  のみに依存する。
3. 運動方程式が2階の微分方程式である。

という条件のもとで Einstein 方程式が唯一許される方程式であるという定理である [3, 4].

多くの拡張模型では計量を自由度としている (metric theory という) が, 四脚場を自由度とする考え方もある (vierbein formalism という)<sup>2)</sup>. Vierbein を用いると, metric theory では見えなかった局所ローレンツ対称性が現れる. これは各点各点で vierbein を回転させるというゲージ対称性である. Formalism を変えると新たなゲージ対称性が現れたのは非常に面白い<sup>3)</sup>. この対称性に注目したい. 最初に局所ローレンツ対称性の重要性に注目したのは内山だった [20]. 彼は, Yang と Mills が  $SU(N)$  ゲージ理論を提唱した頃, 重力理論をゲージ理論として見れないかということを考え, この考え方を提唱していた. しかし彼は局所ローレンツゲージ場は, 基本的自由度だとは考えなかった. 私は局所ローレンツゲージ場を基本的自由度だという視点から出発して理論を構築したら何が出来るかを知りたい<sup>4)</sup>.

このような理由から, vierbein と局所ローレンツゲージ場を基本自由度とみなした理論が一般相対性理論を説明できる理論だと考える. これらを基本自由度だとみなす理論は, Einstein-Cartan gravity (ECG) や Einstein-Cartan theory と呼ばれている. 対して, 計量  $g_{\mu\nu}$  を基本自由度だと思う理論は, 先述した通り, metric theory と呼ばれている. ECG と metric theory は違う formalism だが, ECG でも Einstein-Hilbert 作用は書ける [20, 22]. 簡単にいうと, vierbein と局所ローレンツゲージ場の field strength から  $\int eeF$  という形の作用が書けて, これが Einstein 方程式になっている<sup>5)</sup>. よって, 拡張重力理論として ECG を考えることは1つの手法であるといえる.

さて, 局所ローレンツゲージ場を基本自由度だと考えると, ゲージ場の運動項を考えるのは自然な考えである. しかし, 場の強さの2次の項からなる作用を構築しようとすると, 計量の逆行列が含まれる. 作用に計量の逆行列が含まれると, その表式にゆらぎの無限次の項が含まれる. このことを重力のくりこみ不可能性の原因とする立場もある [23]. また, 計量の逆行列を許して有効作用を考えると, 多くの項が含まれる. そこで, 一般の有効作用を書いてくりこみ群の性質を調べるのではなく, まずある UV スケールで計量の逆行列を含まない理論を仮定して, 低エネルギーへのくりこみ群フローで局所ローレンツゲージ場の運動項を生成する模型を考える. 計量の逆行列が作用に含まれないようにする方法として, null field limit という考えを導入する. 簡単にいうと, vierbein の多項式項のみで作用を構成するということである. Vierbein の null field limit の存在を要請して作用を構築すると, 項が3種類しかないことが分かる; 宇宙項と Einstein-Hilbert 作用, フェルミオンの運動項と質量項の3種類である. この2つ目, Einstein-Hilbert 作用は  $\int eeF$  と書かれた. これをみると, ここには運動項がなく, その意味で vierbein も局所ローレン

<sup>2)</sup>先ほどあげた teleparallel gravity はその1つである.

<sup>3)</sup>これは電磁気学においてゲージ場  $A_\mu$  を導入したことに類似している. この視点からいうと, 計量  $g_{\mu\nu}$  より vierbein  $e^a_\mu$  の方が基本的に思える.

<sup>4)</sup>重力の一般座標変換の  $g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g_{\mu\nu}(x) + 2\nabla_{(\mu}\xi_{\nu)}(x)$  というゲージ対称性を指導原理として, 拡張理論を構築する試みはいろいろなされてきた. [21] に良くまとめられている. 今回我々が特に注目する対称性は局所ローレンツゲージ対称性である.

<sup>5)</sup>詳しい説明は第2.7節で行う.



ツゲージ場も補助場である。よって、この模型を南部・ヨナラシーニヨ模型の一種だと思えることができる。よって、あるスケール  $\Lambda_{UV}$  で作用が vierbein と局所ローレンツゲージ場の運動項を含まない形で書けていて、低エネルギーへのフローで局所ローレンツゲージ場の運動項が生成されるという考え方に妥当性がある。

以上で述べたように、我々はあるスケール  $\Lambda_{UV}$  で作用が null field limit が許される項のみで書かれるということを仮定して  $\Lambda_{UV}$  での作用を構築し、NJL 模型のアナロジーで、くりこみ群のフローで局所ローレンツゲージ場の運動項が生成されるという模型を考えた。この模型の面白い点は、 $\Lambda_{UV}$  では vierbein と局所ローレンツゲージ場の運動項がないため、真空偏極の loop を回るのがフェルミオンだけで重力の自由度は伝搬しないというところにある。このフェルミオンループから局所ローレンツゲージ場の propagator と同じ構造をもつ項が有限で現れたら、 $\Lambda_{UV}$  より少し下のスケールで局所ローレンツゲージ場の運動項が生成されると結論できる。この運動項が生成されるか否かを調べるのが我々の目的である。

本論文では、まず vierbein の導入と作用の構築を行い (第 2 章), 第 3 章で、重力の量子化の困難を部分的に回避できる平均場近似の方法で、1 つの toy model の解析を行った論文についてレビューする。そして、第 4 章で我々の模型について詳しく議論する。

## 第2章 Vierbein Formalism

この章では, vierbein と局所ローレンツゲージ場の導入と, それらから構成できる作用について議論する.

### 2.1 Vierbein の導入

計量  $g_{\mu\nu}$  は別の基底を用いて,

$$g_{\mu\nu} = e^{\mathbf{a}}{}_{\mu} e^{\mathbf{b}}{}_{\nu} \eta_{\mathbf{ab}} \quad (2.1)$$

と分解できる. この  $e^{\mathbf{a}}{}_{\mu}$  が, vielbein である. あるいは多脚場とも呼ばれる. 時空次元が 4 のときは, vierbein または四脚場と呼ばれる.

vierbein の逆行列は,

$$e^{\mathbf{a}}{}_{\mu} e_{\mathbf{a}}{}^{\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}, \quad e^{\mathbf{a}}{}_{\mu} e_{\mathbf{b}}{}^{\mu} = \delta_{\mathbf{b}}^{\mathbf{a}} \quad (2.2)$$

を満たすように定義される. 計量の逆行列の定義が,  $g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta_{\rho}^{\mu}$  なので,

$$g^{\mu\nu} = e_{\mathbf{a}}{}^{\mu} e_{\mathbf{b}}{}^{\nu} \eta^{\mathbf{ab}} \quad (2.3)$$

少し書き換えると,  $\eta^{\mathbf{ab}} = g^{\mu\nu} e_{\mu}^{\mathbf{a}} e_{\nu}^{\mathbf{b}}$ .

行列式は,

$$|e| \equiv \det_{\mathbf{a},\mu} e^{\mathbf{a}}{}_{\mu} \quad (2.4)$$

よって,  $\sqrt{-g} = |e|$ .

### 2.2 局所ローレンツ対称性

さて, vierbein を各座標点で回転させる変換を考える:

$$e^{\mathbf{a}}{}_{\mu}(x) \rightarrow e'^{\mathbf{a}}{}_{\mu}(x) = \Lambda^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{b}}(x) e^{\mathbf{b}}{}_{\mu}(x). \quad (2.5)$$

$\Lambda$  は,  $SO(1,3)_{\text{loc}}$  の元である. この変換で  $g_{\mu\nu}$  は不変である. この対称性を局所ローレンツ対称性という. 理論に局所ローレンツ対称性があれば, 基本表現として以下の場を考えることができる.

$$\text{スカラー場} : \phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) \quad (2.6)$$

$$\text{ベクトル場} : V^{\mathbf{a}}(x) \rightarrow V'^{\mathbf{a}}(x) = \Lambda^{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}}(x)V^{\mathbf{b}}(x) \quad (2.7)$$

$$\text{スピノル場} : \psi^{\alpha}(x) \rightarrow \psi'^{\alpha}(x) = S^{\alpha}_{\beta}(\Lambda(x))\psi^{\beta}(x) \quad (2.8)$$

局所ローレンツ変換に対して vierbein はベクトルである. 局所ローレンツ変換に対してベクトルとして変換する場を局所ローレンツベクトル場と呼ぶ. スピノル場は一般座標変換の表現ではないので一般相対性理論では導入できなかったが, 局所ローレンツ変換の表現になっているため導入できる. スピノルを導入したいならば, vierbein が必要になる [20, 22, 24].

Metric より vierbein が基本的だと考える理由は電磁気学とのアナロジーである. 電磁気学では電場  $E$  と磁場  $B$  を基本自由度と考えていたが, それらの自由度はゲージ場  $A_{\mu}$  を用いて書けることが分かった. さらにゲージ場で書くことによってゲージ対称性という, それまで見えなかった対称性があることが分かった. 現在, ゲージ対称性は非常に重要な概念となっている. 同様の考え方をすると, metric を vierbein で書くと局所ローレンツ対称性が見えた, という事なので, vierbein を基本自由度だと考えることは一理あると言える<sup>1)</sup>.

ここで, 局所ローレンツ対称性が同一時空点での局所回転だということを考えると, この対称性はゲージ対称性である. 局所ローレンツ変換で場  $\Psi(x)$  が,

$$\hat{\Psi}(x) \Rightarrow \hat{\Psi}'(x) = \hat{S}(\Lambda(x))\hat{\Psi}(x) \quad (2.9)$$

と変換するとすると, 共変微分は,

$$\hat{D}_{\mu}\hat{\Psi}(x) = \left( \partial_{\mu} + \frac{1}{2}\omega_{\mathbf{ab}\mu}\hat{\Sigma}^{\mathbf{ab}} \right) \hat{\Psi}(x) \quad (2.10)$$

とかける.  $\Sigma$  は  $SO(1,3)$  の生成子<sup>2)</sup> :

$$[\Sigma^{\mathbf{ab}}, \Sigma^{\mathbf{cd}}] = \eta^{\mathbf{bc}}\Sigma^{\mathbf{ad}} - \eta^{\mathbf{ac}}\Sigma^{\mathbf{bd}} - \eta^{\mathbf{bd}}\Sigma^{\mathbf{ac}} + \eta^{\mathbf{ad}}\Sigma^{\mathbf{bc}} \quad (2.12)$$

<sup>1)</sup>ただの自由度の書き換えだから計量と vierbein どちらを基本自由度としても変わらないと思うかもしれない. しかし, 電磁気学で, ゲージ対称性からゲージ場が質量を持たないことが導かれたように, vierbein を基本自由度だと思って局所ローレンツゲージ対称性を尊重することで, 重要な帰結が得られるかもしれない.

<sup>2)</sup>例えばベクトルの基本表現に対しては,

$$(\Sigma^{\mathbf{ab}})^{\mathbf{c}}_{\mathbf{d}} = \eta^{\mathbf{ac}}\delta_{\mathbf{d}}^{\mathbf{b}} - \eta^{\mathbf{bc}}\delta_{\mathbf{d}}^{\mathbf{a}}. \quad (2.11)$$

局所ローレンツ変換に対して、共変微分が場と同じ変換をすると要請すると<sup>3)</sup>、局所ローレンツゲージ場の変換は、

$$\hat{\omega}_\mu(x) \rightarrow \hat{\omega}'_\mu(x) = \hat{S}\hat{\omega}_\mu(x)\hat{S}^{-1} + \hat{S}\partial_\mu\hat{S}^{-1} \quad (2.13)$$

と決まる。ゲージ変換が無限小変換  $\hat{S} = I + \hat{\epsilon}$  だとすると<sup>4)</sup>、局所ローレンツゲージ場の微小変換は、

$$\delta_L\omega^{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}\mu} = \epsilon^{\mathbf{a}}_{\mathbf{c}}\omega^{\mathbf{c}}_{\mathbf{b}\mu} - \epsilon^{\mathbf{c}}_{\mathbf{b}}\omega^{\mathbf{a}}_{\mathbf{c}\mu} - \partial_\mu\epsilon^{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}} = -D_\mu\epsilon^{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}} \quad (2.14)$$

と書いて、 $SU(N)$  ゲージ理論で現れた  $SU(N)$  ゲージ場と同様に inhomogeneous に変換する。

ここで、 $e_{\mathbf{a}\lambda}\partial_\mu e_{\mathbf{b}}^\lambda$  という量を考えて局所ローレンツ変換すると、

$$e^{\mathbf{a}}_{\lambda}(x)\partial_\mu e_{\mathbf{b}}^\lambda(x) \rightarrow \Lambda^{\mathbf{a}}_{\mathbf{c}}(e^{\mathbf{c}}_{\lambda}(x)\partial_\mu e_{\mathbf{d}}^\lambda(x))(\Lambda^{-1})^{\mathbf{d}}_{\mathbf{b}} + \Lambda^{\mathbf{a}}_{\mathbf{c}}\partial_\mu(\Lambda^{-1})^{\mathbf{c}}_{\mathbf{b}}. \quad (2.15)$$

つまり、 $\omega^{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}\mu}$  と同じ変換をする。そのため、

$$\gamma^{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}\mu} \stackrel{d}{\equiv} \omega^{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}\mu} - e^{\mathbf{a}}_{\lambda}\partial_\mu e_{\mathbf{b}}^\lambda \quad (2.16)$$

を定義すると、これは局所ローレンツテンソルとなる： $\gamma^{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}\mu} \rightarrow \Lambda^{\mathbf{a}}_{\mathbf{c}}\gamma^{\mathbf{c}}_{\mathbf{d}\mu}(\Lambda^{-1})^{\mathbf{d}}_{\mathbf{b}}$ 。さらに、

$$\gamma^\mu{}_{\nu\rho} \stackrel{d}{\equiv} e_{\mathbf{a}}^\mu e_{\mathbf{b}}^\nu \gamma^{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}\rho} \quad (2.17)$$

は局所ローレンツスカラーである。一方で、この量は一般座標変換に対しては、

$$\gamma^\mu{}_{\nu\rho} \rightarrow \gamma'^\mu{}_{\nu\rho}(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\rho} \gamma^\alpha{}_{\gamma\delta}(x) + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x'^\nu \partial x'^\rho} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu} \quad (2.18)$$

と変換する。これは一般相対性理論における Levi-Civita 接続と同じ変換である。よって、一般座標変換の接続として  $\gamma$  を選ぶことができる。多くの ECG の理論はこの  $\gamma$  を Diff 接続として用いている。この  $\gamma$  は一般に下付き添え字  $\nu, \rho$  について対称ではない。つまり一般に nonzero torsion がある。これが ECG と一般相対性理論の違いのひとつである<sup>5)</sup>。古典的には、この torsion は物質場のスピンの関係があることが議論されている [25, 26]。

さて、(2.10) で与えた共変微分から field strength が定義できて、

$$\hat{F}_{\mu\nu} \stackrel{d}{\equiv} \left[ \hat{D}_\mu, \hat{D}_\nu \right]. \quad (2.19)$$

<sup>3)</sup>  $\hat{\Psi} \rightarrow \hat{S}\hat{\Psi}$  なら、 $\hat{D}_\mu\hat{\Psi} \rightarrow \hat{S}(\hat{D}_\mu\hat{\Psi})$ 。

<sup>4)</sup>  $\hat{\epsilon} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mathbf{ab}}\hat{\Sigma}^{\mathbf{ab}}$ 。

<sup>5)</sup> 一般相対性理論では接続  $\Gamma$  は計量  $g_{\mu\nu}$  の関数として書く際に、torsion-free 条件  $\Gamma^\rho{}_{[\mu\nu]} = 0$  を課していた。

少し計算すると,

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \omega^{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}\nu} - \partial_\nu \omega^{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}\mu} + \omega^{\mathbf{a}}_{\mathbf{c}\mu} \omega^{\mathbf{c}}_{\mathbf{b}\nu} - \omega^{\mathbf{a}}_{\mathbf{c}\nu} \omega^{\mathbf{c}}_{\mathbf{b}\mu}) \hat{\Sigma}^{\mathbf{ab}} \stackrel{d}{=} \frac{1}{2} F^{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}\mu\nu} \hat{\Sigma}^{\mathbf{ab}}. \quad (2.20)$$

$\hat{F}_{\mu\nu}$  は局所ローレンツ変換に対して,

$$\hat{F}_{\mu\nu} \rightarrow \hat{S} \hat{F}_{\mu\nu} \hat{S}^{-1} \quad (2.21)$$

と, homogeneous に変換する. したがって,  $SU(N)$  理論と同様にしてゲージ場の運動項を作ると,

$$\begin{aligned} S &= + \frac{1}{4g_L^2} \int d^4x |e| \text{Tr} \left[ \hat{F}_{\mu\nu} \hat{F}_{\rho\sigma} \right] g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \\ &= \frac{1}{4g_L^2} \int d^4x |e| F_{\mathbf{ab}\mu\nu} F_{\mathbf{cd}\rho\sigma} \text{Tr} \left[ \hat{\Sigma}^{\mathbf{ab}} \hat{\Sigma}^{\mathbf{cd}} \right] g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \\ &= \frac{1}{2g_L^2} \int d^4x |e| F^{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}\mu\nu} F^{\mathbf{b}}_{\mathbf{a}\rho\sigma} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \end{aligned} \quad (2.22)$$

これが最も基本的な  $F^2$  の形である<sup>6)7)</sup>.

## 2.3 2つのゲージ対称性

ECG には Diff 対称性と局所ローレンツ対称性の2つのゲージ対称性がある. 通常のゲージ理論, 例えば  $SU(2) \times U(1)$  ゲージ理論の二つのゲージ対称性は直交している. しかし, 今回考える対称性は時空を変換する対称性ということで, Diff と局所ローレンツ対称性の関係が  $SU(2)$  と  $U(1)$  の関係のようなものとは違って来るかもしれない. それらの関係性を調べたい.

まず一般座標変換:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu \quad (2.23)$$

について, この変換による vierbein の変換はどうだったかというところ,

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{a}}_{\mu}(x) \rightarrow e'^{\mathbf{a}}_{\nu}(x') &= e^{\mathbf{a}}_{\nu}(x) \left. \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \right|_{x'=x+\xi} \\ &= e^{\mathbf{a}}_{\mu}(x) - e^{\mathbf{a}}_{\nu}(x) \partial_\mu \xi^\nu \end{aligned} \quad (2.24)$$

<sup>6)</sup>途中で,  $\text{Tr} \left[ \hat{\Sigma}^{\mathbf{ab}} \hat{\Sigma}^{\mathbf{cd}} \right] = 2\eta^{\mathbf{c}[\mathbf{b}} \eta^{\mathbf{a}]\mathbf{d}}$  を用いた.

<sup>7)</sup>ここで符号が正になっていることに注意. 何故なら,  $\hat{\Sigma}$  と  $\hat{F}^{\mu\nu}$  の定義が標準的なゲージ理論で用いられる定義とそれぞれ  $i$  ずつずれているからである.  $\eta_{\mathbf{ab}}$  の符号の選び方には依存していない. 背景場を平坦時空として計算すると, 確かに  $(\partial_i \omega_{\mathbf{ab}j})^2$  の符号が正になっている (ただし,  $j = 1, 2, 3$ ).

リー微分を評価すると,

$$\mathcal{L}_\xi e^{\mathbf{a}}{}_\mu(x) = \xi^\nu(x) \partial_\nu e^{\mathbf{a}}{}_\mu(x) + e^{\mathbf{a}}{}_\nu(x) \partial_\mu \xi^\nu(x). \quad (2.25)$$

局所ローレンツ変換に対しては,

$$\delta_\epsilon e^{\mathbf{a}}{}_\mu(x) \stackrel{d}{=} \Lambda^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{b}}(x) e^{\mathbf{a}}{}_\mu(x) - e^{\mathbf{a}}{}_\mu(x) \quad (2.26)$$

$$= \epsilon^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{b}}(x) e^{\mathbf{b}}{}_\mu(x) \quad (2.27)$$

さて, いま一般座標変換による微小変換  $\delta_\xi e$  を,

$$\begin{aligned} \delta_\xi e^{\mathbf{a}}{}_\mu(x) &= \mathcal{L}_\xi e^{\mathbf{a}}{}_\mu(x) \\ &= \xi^\nu(x) \partial_\nu e^{\mathbf{a}}{}_\mu(x) + e^{\mathbf{a}}{}_\nu(x) \partial_\mu \xi^\nu(x) \end{aligned} \quad (2.28)$$

と選んで,  $[\delta_\epsilon, \delta_\xi]$  を計算すると,

$$\begin{aligned} [\delta_\epsilon, \delta_\xi] e^{\mathbf{a}}{}_\mu &= \delta_\epsilon (\mathcal{L}_\xi e^{\mathbf{a}}{}_\mu) - \delta_\xi (\epsilon^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{b}} e^{\mathbf{b}}{}_\mu) \\ &= \delta_\epsilon (\mathcal{L}_\xi e^{\mathbf{a}}{}_\mu) - (\mathcal{L}_\xi \epsilon^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{b}}) e^{\mathbf{b}}{}_\mu - \epsilon^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{b}} (\mathcal{L}_\xi e^{\mathbf{b}}{}_\mu) \\ &= -(\mathcal{L}_\xi \epsilon^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{b}}) e^{\mathbf{b}}{}_\mu \neq 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

よって, Diff と局所ローレンツは混ざっていて,  $\text{Diff} \times SO(1,3)_{\text{loc}}$ .

一方,  $\delta_\xi$  として, (2.24) の変換則の右辺を持ってきて,

$$\begin{aligned} \delta_\xi e^{\mathbf{a}}{}_\mu(x) &= \delta_{\text{GC}} e^{\mathbf{a}}{}_\mu(x) \\ &\stackrel{d}{=} e'^{\mathbf{a}}{}_\nu(x') - e^{\mathbf{a}}{}_\mu(x) \\ &= e^{\mathbf{a}}{}_\nu(x) \left. \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \right|_{x'=x+\xi} - e^{\mathbf{a}}{}_\mu(x) \\ &= -e^{\mathbf{a}}{}_\nu(x) \partial_\mu \xi^\nu(x) \end{aligned} \quad (2.30)$$

という選び方もできる<sup>8)</sup>. すると,

$$\begin{aligned} [\delta_\epsilon, \delta_\xi] e^{\mathbf{a}}{}_\mu &= \delta_\epsilon (-e^{\mathbf{a}}{}_\nu \partial_\mu \xi^\nu) - \delta_\xi (\epsilon^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{b}} e^{\mathbf{b}}{}_\mu) \\ &= -\epsilon^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{b}} e^{\mathbf{b}}{}_\nu \partial_\mu \xi^\nu - (-\epsilon^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{b}} e^{\mathbf{b}}{}_\nu) \partial_\mu \xi^\nu = 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

この選び方に対しては,  $\text{Diff} \times SO(1,3)_{\text{loc}}$  と, 2つの対称性が直交しているとして考えることができる. 一般座標変換による vierbein の変化量をどちらにとるかはゲージ固定をする際に重要になる<sup>9)</sup>.

<sup>8)</sup> これは同一時空点での座標変換だが, 最終的に最右辺は  $x$  の関数になっている.

<sup>9)</sup> [18] では, Ward operator を使って, リー微分を選んだ時の Diff と  $SO(1,3)_{\text{loc}}$  の関係を調べている.

## 2.4 一般座標変換に対するゲージ場についての考察

共変微分は場と同じように変化するように決められる<sup>10)</sup>. 一般座標変換に対してはどのように決められるかという点、

$$\nabla_{\nu}^{(\Upsilon)} V^{\mu}(x) \rightarrow \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \nabla_{\sigma}^{(\Upsilon)} V^{\rho}(x) \quad (2.32)$$

このように変換するためには、接続  $\Upsilon$  は以下の変換則を満たせば良い:

$$\Upsilon^{\mu}{}_{\nu\rho} \rightarrow \Upsilon'^{\mu}{}_{\nu\rho}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\rho}} \Upsilon^{\alpha}{}_{\gamma\delta}(x) + \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha} \partial x'^{\nu} \partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\rho}}. \quad (2.33)$$

一般座標変換をゲージ変換と考えるならば、 $\Upsilon$  は独立な自由度だと思いたくなる。このとき  $\Upsilon$  の自由度は 64 個ある。vierbein と局所ローレンツゲージ場と  $\Upsilon$  (Diff ゲージ場と呼ぶことにする) を理論の基本的自由度だと考えると自由度は  $16+24+64 = 104$  となる。これが最も素朴な自由度勘定だと思うが、この議論に関しては詳しいことが分かっていないので今回は Diff ゲージ場は基本的自由度だとは考えない<sup>11)</sup>。

## 2.5 Field strength の 2 次から作られる作用

ここでは、微分形式の考え方<sup>12)</sup> を使って form から作られる作用を考える。

時空次元が 4 次元の時を考える。Field strength の 2 次から作られる作用は 4 通り書ける:

$$\int F^{ab} \wedge \star F^{cd} \eta_{ac} \eta_{bd} = \frac{1}{2} \int d^4 x |e| F^{ab\mu\nu} F_{ab\mu\nu} \quad (2.34)$$

$$\int F^{ab} \wedge F^{cd} \epsilon_{abcd} = \frac{1}{4} \int d^4 x F^{ab}{}_{\mu\nu} F^{cd}{}_{\rho\sigma} \epsilon_{abcd} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (2.35)$$

$$\int F^{ab} \wedge F^{cd} \eta_{ac} \eta_{bd} = \frac{1}{4} \int d^4 x F^{ab}{}_{\mu\nu} F_{ab\rho\sigma} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (2.36)$$

$$\int F^{ab} \wedge \star F^{cd} \epsilon_{abcd} = \frac{1}{2} \int |e| F^{ab\mu\nu} F^{cd}{}_{\mu\nu} \epsilon_{abcd}. \quad (2.37)$$

## 2.6 Field strength の 1 次から作られる作用

通常考えられるゲージ理論との違いは、field strength が vierbein と couple できるということである。時空次元が 4 次元の時、vierbein と field strength から作ら

<sup>10)</sup>  $\hat{\Psi} \rightarrow \hat{S}\hat{\Psi}$  なら、 $\hat{D}_{\mu}\hat{\Psi} \rightarrow \hat{S}(\hat{D}_{\mu}\hat{\Psi})$ .

<sup>11)</sup> 今回の議論 (第 4 章) では、 $\nabla_{\mu}^{(\Upsilon)} e^{\mathbf{a}}{}_{\nu} = 0$  として、Diff ゲージ場を vierbein と局所ローレンツゲージ場の関数と考える。つまり、Diff ゲージ場として (2.17) の  $\gamma$  を選んでいることになる。

<sup>12)</sup> 微分形式の基礎は付録 A 章に記述している。

れる作用は4通り考えることができる:

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{2} \int e^{\mathbf{a}} \wedge e^{\mathbf{b}} \wedge \star F_{\mathbf{ab}} = \frac{1}{2} \int d^4x |e| e_{\mathbf{a}}^{\mu} e_{\mathbf{b}}^{\nu} F^{\mathbf{ab}}{}_{\mu\nu} \quad (2.38)$$

$$S_{e1} = \frac{1}{2} \int e^{\mathbf{a}} \wedge e^{\mathbf{b}} \wedge \star F^{\mathbf{cd}} \epsilon_{\mathbf{abcd}} = \frac{1}{2} \int d^4x |e| e^{\mathbf{a}\mu} e^{\mathbf{b}\nu} F_{\mathbf{cd}\mu\nu} \epsilon_{\mathbf{ab}}{}^{\mathbf{cd}} \quad (2.39)$$

$$S_{e2} = - \int e^{\mathbf{a}} \wedge e^{\mathbf{b}} \wedge F_{\mathbf{ab}} \quad (2.40)$$

$$S_{\text{E}} = \frac{1}{4} \int e^{\mathbf{a}} \wedge e^{\mathbf{b}} \wedge F^{\mathbf{cd}} \epsilon_{\mathbf{abcd}}. \quad (2.41)$$

公式を使ってそれぞれ書き直すと,  $S_{\text{EH}} = S_{\text{E}}$ ,  $S_{e1} = S_{e2}$  であることがわかる. 次節で示すが,  $S_{\text{EH}}$  及び  $S_{\text{E}}$  は Einstein-Hilbert 作用である<sup>13)</sup>. つまり, 実際に作られる作用は2通りである. これは metric formalism でも, vierbein formalism のどちらの文脈でも正しい<sup>14)</sup>.

## 2.7 ECG における Einstein-Hilbert 作用

$S_{\text{EH}}$  が Einstein-Hilbert 作用であることを説明する. まず, field strength が  $\gamma$  を接続とした Riemann tensor に一致することをみる.  $F$  の局所ローレンツの足を潰して全てを時空の足に置き換えると,

$$\begin{aligned} F^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} &\stackrel{d}{=} e_{\mathbf{a}}^{\rho} e_{\mathbf{b}}^{\sigma} F^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{b}\mu\nu} \\ &= e_{\mathbf{a}}^{\rho} e_{\mathbf{b}}^{\sigma} (\partial_{\mu} \gamma^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{b}\nu} + \gamma^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{c}\mu} \gamma^{\mathbf{c}}{}_{\mathbf{b}\nu} + e^{\mathbf{a}}{}_{\lambda} \gamma^{\mathbf{c}}{}_{\mathbf{b}\nu} \partial_{\mu} e^{\lambda}{}_{\mathbf{c}} + e^{\mathbf{c}}{}_{\rho} \gamma^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{c}\mu} \partial_{\nu} e^{\rho}{}_{\mathbf{b}}) - (\mu \leftrightarrow \nu) \\ &= \partial_{\mu} \gamma^{\rho}{}_{\sigma\nu} - \partial_{\nu} \gamma^{\rho}{}_{\sigma\mu} + \gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu} \gamma^{\lambda}{}_{\sigma\nu} - \gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu} \gamma^{\lambda}{}_{\sigma\mu} \\ &= R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}(\gamma) \end{aligned} \quad (2.42)$$

すると作用を以下のように書き換えることができ,

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{2} \int d^4x |e| F^{\mu}{}_{\nu\mu\nu} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} R(\gamma). \quad (2.43)$$

これはまさに Einstein-Hilbert 作用である.

次に, vierbein と局所ローレンツゲージ場を独立変数とみたときの運動方程式が Einstein 方程式になることをみる. それぞれで変分すると,

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_{\text{EH}}}{\delta \omega_{\mathbf{ab}\mu}} &= |e| e^{\mathbf{d}\rho} e^{\mathbf{e}\lambda} \frac{\partial}{\partial \omega_{\mathbf{ab}\mu}} \omega_{[\mathbf{d}|\mathbf{c}\rho] \omega^{\mathbf{c}}{}_{\mathbf{e}\lambda]} - \partial_{\nu} \left( |e| e^{\mathbf{d}\rho} e^{\mathbf{e}\lambda} \frac{\partial \omega_{[\mathbf{d}\mathbf{e}\lambda]}}{\partial \omega_{\nu\mathbf{ab}\mu}} \right) \\ &= 2 |e| e^{\mathbf{d}\rho} e^{\mathbf{e}\lambda} \delta_{\rho}^{\mu} \delta_{[\mathbf{d}}^{\mathbf{a}} \omega^{\mathbf{b}]}{}_{\mathbf{e}\lambda]} - \partial_{\nu} (|e| e^{[\mathbf{a}|\nu]} e^{\mathbf{b}]\mu}) \\ &= |e| (e^{\mathbf{e}\lambda} e^{[\mathbf{a}|\mu]} \omega^{\mathbf{b}]}{}_{\mathbf{e}\lambda]} - e^{\mathbf{e}\mu} e^{[\mathbf{a}|\lambda]} \omega^{\mathbf{b}]}{}_{\mathbf{e}\lambda]} - \partial_{\nu} (|e| e^{[\mathbf{a}|\nu]} e^{\mathbf{b}]\mu}) \end{aligned} \quad (2.44)$$

<sup>13)</sup>ここでは表現の簡略化のため結合定数は1にしている.

<sup>14)</sup>計算は付録 A.3 節に載せている.



$\omega_{ab\mu} = \gamma_{ab\mu} + e_{a\lambda}\partial_\mu e_b^\lambda$  を代入すると,

$$\begin{aligned}\frac{\delta S_{\text{EH}}}{\delta \omega_{ab\mu}} &= 2|e|e^{e[\lambda}e_{[a}{}^{\mu]}\omega_{b]e\lambda} - \partial_\nu (|e|e_{[a}{}^\nu e_{b]}{}^\mu) \\ &= 2|e|e^{e[\lambda}e_{[a}{}^{\mu]}(\gamma - \Gamma)_{b]e\lambda}\end{aligned}\quad (2.45)$$

したがって,  $\gamma = \Gamma$ . これは torsion free 条件に対応する. つまり, 物質場のない Einstein の重力方程式は torsion free 条件を運動方程式として含んでいたということである. Vierbein による変分は,

$$\begin{aligned}\frac{\delta S_{\text{EH}}}{\delta e_a^\mu} &= \frac{1}{2} \frac{\partial |e|e^{d\rho}e^{e\lambda}}{\partial e_a^\mu} F_{de\rho\lambda} \\ &= -\frac{1}{2}|e|e^a{}_\mu e^{d\rho}e^{e\lambda} F_{de\rho\lambda} + |e|e^{e\lambda} F^a{}_{e\mu\lambda}\end{aligned}\quad (2.46)$$

これに  $\gamma = \Gamma$  を代入して書き直すと,

$$\frac{1}{2}e^a{}_\mu R(\Gamma) = e^a{}_\lambda R_\mu^\lambda(\Gamma)\quad (2.47)$$

これで Einstein 方程式になることが証明できた.

つまり,  $S_{\text{EH}}$  のみの理論を考えると, metric theory でも ECG でも結果は同じである. このため, ECG を一般相対性理論の拡張として議論することが可能になる.

## 2.8 章のまとめ

以上が, vierbein formalism で書ける作用である. ECG の特徴は, 局所ローレンツゲージ場という非可換ゲージ場に加え, vierbein というベクトルがあるため通常のゲージ理論では考えられなかった作用を書くことができる. そして field strength の 2 次から作られる作用ではなく, vierbein と field strength の 1 次で作られる作用が Einstein-Hilbert 作用に等価であるということは驚きである. ちなみに (2.22) で与えた局所ローレンツゲージ場の運動項は,

$$F^a{}_{b\mu\nu}F^b{}_{a}{}^{\mu\nu} = -R_{\mu\nu\rho\sigma}(\gamma)R^{\mu\nu\rho\sigma}(\gamma)\quad (2.48)$$

と,  $\gamma^\rho{}_{\mu\nu}$  の Riemann tensor で書ける. これは  $\gamma = \Gamma$  なら, 高階微分重力理論の higher derivative term に対応しているという見方ができる. 考察はまだできていないが,  $F^a{}_{b\mu\nu}F^b{}_{a}{}^{\mu\nu}$  はゲージ場の 2 階微分までしか含まないため高階微分重力理論の unitarity 問題は一旦すると解消されているように感じる.

また, metric formalism とは異なり, vierbein formalism では spinor が導入できた. この点で vierbein formalism で理論を構築することは意味があると考え.

これらは, 私が vierbein と局所ローレンツゲージ場を基本自由度だと考える理論が一般相対性理論を拡張した模型になっていると考える理由のひとつである.

## 第3章 Vierbein と LL ゲージ場の運動項からなる toy model の解析

第2章で局所ローレンツゲージ場の運動項が書けることがわかった。その項は formalism の違いを除けば高階微分重力理論の  $R_{\mu\nu\rho\sigma}^2$  に対応している。私は局所ローレンツゲージ場の運動項を含んだ理論を解析することは興味深いと考えている。

本章では, vierbein と局所ローレンツゲージ場の運動項からなる作用を考えて有効作用の構造を調べている論文 [23] についてレビューする。

また, この論文では, 解析方法として平均場近似を用いていることも面白い。この方法を使うと有効作用を比較的簡単に評価することができる。さらに, vierbein が真空期待値 (VEV) を獲得することで局所ローレンツ対称性が破れ, プランク質量が現れるという議論も行われている。

### 3.1 論文の概要

先述したように, この論文 [23] では vierbein と LL ゲージ場を dynamical な自由度とした作用を構築し, vierbein が Coleman-Weinberg mechanism で VEV を獲得し局所ローレンツ対称性が破れ, dimensional transmutation でプランク質量が現れるという mechanism を説明している。そして, 有効作用の導出の際に平均場近似が使われる。

重力の作用の量子化を考えようとする, そこに立ちはだかる問題がある。それは metric が dynamical な自由度であるとともに, geometric な自由度であるという問題である。

また, CW 機構で対称性の破れを起こすためには, 秩序変数のポテンシャルが書ける必要がある。例えば, vierbein の2次の項は  $A^{\mu\nu} e^a{}_\mu e^b{}_\nu \eta_{ab}$  になっていると考えられる。しかし  $A^{\mu\nu}$  の候補が metric の逆行列しかない:  $g^{\mu\nu} e^a{}_\mu e^b{}_\nu \eta_{ab}$ 。しかしこの量は定数となってしまう意味をなさない。つまり, ポテンシャルが書けないのである。

これらを解決するために, 彼らは平均場近似を用いた。この方法は, dynamical な vierbein 以外を先に平均場 (場  $\phi$  の平均場を  $\check{\phi}$  という添字で表す) に置き換えて

しまつて有効作用を計算しようという方法である。このため vierbein の potential は、 $A^{\mu\nu}$  として  $\check{g}^{\mu\nu}$  を使って、 $\check{g}^{\mu\nu} e^a_\mu e^b_\nu \eta_{ab}$  と書くことができる。さらに、平均場近似によって、重力の dynamical な役割と、geometric な役割を切り離して考えることができるようになる。つまり、先ほど書いた重力の量子化の問題が回避できる。

また、この論文では、局所ローレンツ対称性が破れた結果、プランク質量が生成することを議論している。

まず 3.2 節で Hessian を導出し、3.3 節と 3.4 節で背景時空をそれぞれ平坦時空と一般の時空に選んで vierbein の VEV の計算を行う。

## 3.2 平均場の導入

本章では、vierbein の質量次元が<sup>3</sup>1 だとする。考える作用は以下である：

$$S(e, \omega) = \int d^4x |e| \left[ -\frac{1}{4} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \eta^{ac} \eta^{bd} F_{ab\mu\nu} F_{cd\rho\sigma} - \frac{1}{2} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \eta_{ab} \mathcal{D}_\mu e^a_\nu \mathcal{D}_\rho e^b_\sigma \right]. \quad (3.1)$$

第 1 項は局所ローレンツゲージ場の運動項、第 2 項は vierbein の運動項である。この toy model に vierbein formalism での Einstein-Hilbert 項や宇宙項は含まれていない<sup>1)</sup>。Field strength と共変微分の定義は、

$$F_{ab\mu\nu} = \partial_\mu \omega_{ab\nu} - \partial_\nu \omega_{ab\mu} + g_L (\omega_{ae\mu} \omega^e_{b\nu} - \omega_{ae\nu} \omega^e_{b\mu}), \quad (3.2)$$

$$\mathcal{D}_\mu e^a_\nu = \partial_\mu e^a_\nu - \Gamma^\rho_{\nu\mu} e^a_\rho + g_L \omega^a_{b\mu} e^b_\nu. \quad (3.3)$$

いま vierbein の質量次元が 1 なので、次元を持った定数は現れない。この作用で、dynamical でない自由度を mean-field ( $\check{e}$ ) に置き換えた作用が<sup>2)</sup>、

$$\begin{aligned} \check{S}(e, \omega; \check{g}) = \int d^4x |\check{e}| & \left[ -\frac{1}{4} \check{g}^{\mu\rho} \check{g}^{\nu\sigma} \eta^{ac} \eta^{bd} F_{ab\mu\nu} F_{cd\rho\sigma} - \frac{1}{2} \check{g}^{\mu\rho} \check{g}^{\nu\sigma} \eta_{ab} \check{\mathcal{D}}_\mu e^a_\nu \check{\mathcal{D}}_\rho e^b_\sigma \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} (m_b^2 + \xi \check{R}) \text{Tr}[X] - \frac{\lambda_{1b}}{4} (\text{Tr}[X])^2 - \frac{\lambda_{2b}}{4} \text{Tr}[X^2] \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$(3.5)$$

$X_b^a \equiv \check{g}^{\mu\nu} e^a_\mu e_{b\nu}$  は、平均場を導入したことで書けるようになった potential である。また後の繰り込みのために、quadratic term に加えて quartic term も加えている。添字の  $b$  は bare を表す。作用に入っている逆行列が全て平均場で置き換えられているので、この作用は後述する null field limit を満たしている。

さて、背景場展開の方法を用いて、dynamical な自由度である、vierbein と LL gauge 場を背景場とゆらぎに分ける：

$$e^a_\mu = e_0^a{}_\mu + \hat{e}^a{}_\mu, \quad \omega^a{}_{b\mu} = \bar{\omega}^a{}_{b\mu} + \hat{\omega}^a{}_{b\mu}. \quad (3.6)$$

<sup>1)</sup>これらは質量次元 4 以下の項なので作用に含むべきであるが、その解析は論文 [23] の最後で今後の課題として言及されている。

<sup>2)</sup>Vierbein の次元は 1 だが、平均場の次元は 0 にしている。

LL 対称性の background gauge symmetry を尊重して, ゲージ固定を,

$$G(\omega) = \check{D}_\mu^{(0)} \hat{\omega}_{ab\nu} - \alpha g_L e_{0b\mu} \hat{e}_{a\nu} \quad (3.7)$$

のように決める<sup>3)</sup>. するとゲージ固定作用は,

$$\check{S}_{GF} = -\frac{1}{2\alpha} \int d^4x |\check{e}| \left[ \check{g}^{\mu\nu} \left( \check{D}_\mu^{(0)} \hat{\omega}_{ab\nu} - \alpha g_L e_{0b\mu} \hat{e}_{a\nu} \right) \right]^2. \quad (3.8)$$

少し計算すると 2 次の項は簡単に求められて,

$$\begin{aligned} (\check{S} + S_{GF})^{(2)} &= \frac{1}{2} \int d^4x |\check{e}| \left( \hat{\omega}_{ab\mu} \quad \hat{e}_{a\mu} \right) \begin{pmatrix} \mathcal{O}_{[\hat{\omega}\hat{\omega}]}^{ab\mu,cd\nu} & \mathcal{O}_{[\hat{\omega}\hat{e}]}^{ab\mu,c\nu} \\ \mathcal{O}_{[\hat{e}\hat{\omega}]}^{a\mu,cd\nu} & \mathcal{O}_{[\hat{e}\hat{e}]}^{a\mu,c\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\omega}_{cd\nu} \\ \hat{e}_{c\nu} \end{pmatrix} \quad (3.9) \\ &= \int d^4x |\check{e}| \left[ \frac{1}{2} \hat{\omega}_{ab\mu} \mathcal{O}_{[\hat{\omega}\hat{\omega}]}^{ab\mu,cd\nu} \hat{\omega}_{cd\nu} + \hat{e}_\mu^a \mathcal{O}_{[\hat{e}\hat{\omega}]}^{a\mu,bc\nu} \hat{\omega}_{bc\nu} + \frac{1}{2} \hat{e}_\mu^a \mathcal{O}_{[\hat{e}\hat{e}]}^{a\mu}{}^\nu{}_{\mathbf{b}} \hat{e}_{\mathbf{b}\nu} \right] \quad (3.10) \end{aligned}$$

$$\mathcal{O}_{[\hat{\omega}\hat{\omega}]}^{ab\mu,cd\nu} = 4g_L \delta_{[a}^{[c} F_{0b]}^{d]}{}_\mu{}^\nu - \check{g}^{\mu\nu} M_{0ab}{}^{cd} + \delta_{[a}^c \delta_{b]}^d \left( \check{\square}^{(0)} \delta_\mu^\nu - \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) \check{D}_\mu^{(0)} \check{D}_{(0)}^\nu - \check{R}_\mu^\nu \right) \quad (3.11)$$

$$\mathcal{O}_{[\hat{e}\hat{\omega}]}^{a\mu,cd\nu} = 2\check{g}^{\mu\sigma} \delta_a^{[c} \check{D}_{(0)}^\nu e_{0]}{}_\sigma \quad (3.12)$$

$$\mathcal{O}_{[\hat{e}\hat{e}]}^{a\mu}{}_{\mathbf{b}}{}^\nu = \check{g}^{\mu\nu} \eta_{ab} \left( \check{\square}^{(0)} - (m^2 + \xi \check{R}) \right) - N_{0a}{}^\mu{}_{\mathbf{b}}{}^\nu \quad (3.13)$$

$$M_{0ab}{}^{cd} = g_L^2 \delta_{[a}^{[c} X_{0b]}^{d]} \quad (3.14)$$

$$N_{0a}{}^\mu{}_{\mathbf{b}}{}^\nu = \alpha g_L^2 \eta_{ab} \check{g}^{\mu\rho} \check{g}^{\nu\sigma} e_{0\rho}{}^c e_{0c\sigma} + \lambda_{1b} \left( \check{g}^{\mu\nu} \eta_{ab} X_0 + 2\check{g}^{\mu\sigma} e_{0a\sigma} \check{g}^{\rho\nu} e_{0b\rho} \right) \quad (3.15)$$

$$+ \lambda_{2b} \left( \check{g}^{\mu\nu} X_{0ba} + \check{g}^{\mu\rho} e_{0b\rho} \check{g}^{\nu\sigma} e_{0a\sigma} + \check{g}^{\lambda\mu} e_{0\lambda}{}^e \eta_{ab} \check{g}^{\nu\sigma} e_{0e\sigma} \right) \quad (3.16)$$

足の上げ下げは  $\check{g}, \eta$  で行なった.  $X_0^{ab} = \check{g}^{\mu\nu} e_a{}^\mu e_b{}^\nu$ . FP ghost の作用  $S_{gh}$  からの寄与も考える必要があつて,

$$\mathcal{O}_{[gh]}^{ab}{}^{cd} = \delta_{[a}^c \delta_{b]}^d \check{\square}^{(0)} - \alpha M_{0ab}{}^{cd} \quad (3.17)$$

ここから先は, Euclidean で考える<sup>4)</sup>. すると有効作用への 1-loop の寄与は,

$$\Gamma^{(1)}(e_0, A_0; \check{g}) = \frac{1}{2} \ln \det \mathcal{O}^E - \ln \det \mathcal{O}_{(gh)}^E \quad (3.19)$$

<sup>3)</sup> background gauge をとる.

<sup>4)</sup> この場合 bare な作用は,

$$S(e, \omega) = \int d^4x |e| \left[ \frac{1}{4} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \eta^{ac} \eta^{bd} F_{ab\mu\nu} F_{cd\rho\sigma} + \frac{1}{2} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \eta_{ab} \mathcal{D}_\mu e_\nu{}^a \mathcal{D}_\rho e_\sigma{}^b \right]. \quad (3.18)$$

$$\mathcal{O}_{[\hat{\omega}]_{\mathbf{ab}\mu},}^{\mathbf{E}, \mathbf{cd}\nu} = -4g_L \delta_{[\mathbf{a}}^{[\mathbf{c}} F_{0\mathbf{b}]}^{\mathbf{d}]} \mu^\nu + \check{g}^{\mu\nu} M_{0\mathbf{ab}}^{\mathbf{cd}} - \delta_{[\mathbf{a}}^{\mathbf{c}} \delta_{\mathbf{b}]}^{\mathbf{d}} \left( \check{\square}^{(0)} \delta_\mu^\nu - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \check{\mathcal{D}}_\mu^{(0)} \check{\mathcal{D}}_{(0)}^\nu - \check{R}_\mu^\nu \right) \quad (3.20)$$

$$\mathcal{O}_{[\hat{e}\hat{\omega}]_{\mathbf{a}}}^{\mathbf{E}, \mu, \mathbf{cd}\nu} = -2\check{g}^{\mu\sigma} \delta_{\mathbf{a}}^{[\mathbf{c}} \check{\mathcal{D}}_{(0)}^{\nu]} e_{0\sigma}^{\mathbf{d}] \quad (3.21)$$

$$\mathcal{O}_{[\hat{e}\hat{e}]_{\mathbf{a} \mathbf{b}}}^{\mathbf{E}, \mu, \nu} = \check{g}^{\mu\nu} \eta_{\mathbf{ab}} \left( -\check{\square}^{(0)} + (m^2 + \xi \check{R}) \right) + N_{0\mathbf{a}}^\mu \mathbf{b}^\nu \quad (3.22)$$

この Hessian を用いて、いくつかの場合について計算を行う。

### 3.3 平坦時空周りの有効作用の解析

まずは背景場を平坦時空に選ぶ。この場合は、平面波展開ができるため計算が非常に簡単である。また、Diff が explicit に破れ、dimensional transmutation でプランク質量が現れるのを見ることができる。

さて、 $\check{g} = \eta$ ,  $e_0 = \text{const}$ ,  $A_0 = 0$  とすると、

$$\mathcal{O}_{[\hat{\omega}]_{\mathbf{ab}\mu},}^{\mathbf{E}, \mathbf{cd}\nu} = \eta^{\mu\nu} M_{0\mathbf{ab}}^{\mathbf{cd}} + \delta_{[\mathbf{a}}^{\mathbf{c}} \delta_{\mathbf{b}]}^{\mathbf{d}} \left( k_E^2 \delta_\mu^\nu - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) k_\mu^{\mathbf{E}} k_\nu^{\mathbf{E}} \right) \quad (3.23)$$

$$\mathcal{O}_{[\hat{\phi}\hat{\phi}]_{\mathbf{a}\mu},}^{\mathbf{E}, \mathbf{b}\nu} = \delta_\mu^\nu \delta_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (k_E^2 + m^2) + N_{0\mathbf{a}\mu}^{\mathbf{b}\nu} \quad (3.24)$$

$$\mathcal{O}_{[\hat{g}\hat{h}]_{\mathbf{ab}}}^{\mathbf{E}, \mathbf{cd}} = \delta_{[\mathbf{a}}^{\mathbf{c}} \delta_{\mathbf{b}]}^{\mathbf{d}} k_E^2 + \alpha M_{0\mathbf{ab}}^{\mathbf{cd}} \quad (3.25)$$

1 ループの有効作用は、

$$\Gamma^{(1)}(e_0, A_0; \check{g}) = \frac{1}{2} \ln \det \mathcal{O}^{\mathbf{E}} - \ln \det \mathcal{O}_{(\text{gh})}^{\mathbf{E}} \quad (3.26)$$

で計算できる。

さて一般に、 $\mathcal{O} = \text{diag}(k_E^2 + \lambda_i)$  と書けた時、

$$\ln \det \mathcal{O} = \frac{(VT)}{(2\pi)^2} \frac{2\pi^2}{(2\pi)^2 \Gamma(2)} \sum_i \int^\Lambda dk k^3 \ln(k^2 + \lambda_i) \quad (3.27)$$

$$= \frac{(VT)}{8\pi^2} \sum_i \left( \frac{1}{4} \lambda_i^2 \left( \ln \frac{\lambda_i}{\Lambda^2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \lambda_i \Lambda^2 + \mathcal{O} \left( \Lambda^4, \frac{1}{\Lambda^2} \right) \right) \quad (3.28)$$

$\mathcal{O}'$  を対角化して  $\mathcal{O} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  となっていたとすると、

$$\text{Tr} \ln \mathcal{O} = \text{Tr} \ln (P^{-1} \mathcal{O}' P) = \text{Tr} (P^{-1} (\ln \mathcal{O}') P) = \text{Tr} \ln \mathcal{O}' \quad (3.29)$$

したがって、対角化した後の  $\mathcal{O}$  についてのみ  $\text{Tr} \ln$  を計算すればよくて、すると、

$$\frac{1}{2} \ln \det \mathcal{O}' = \frac{(VT)}{2(2\pi)^2} \frac{2\pi^2}{(2\pi)^2 \Gamma(2)} \sum_i \int^\Lambda dk k^3 \ln(k^2 + \lambda_i) \quad (3.30)$$

$$= \frac{(VT)}{64\pi^2} \sum_i \left[ \lambda_i^2 \left( \ln \frac{\lambda_i}{\Lambda^2} - \frac{1}{2} \right) + 2\lambda_i \Lambda^2 + O\left(\Lambda^4, \frac{1}{\Lambda^2}\right) \right] \quad (3.31)$$

$$= \frac{(VT)}{64\pi^2} \left[ 2\Lambda^2 \text{Tr} \mathcal{O}' + \text{Tr} \left[ \mathcal{O}'^2 \left( \ln \frac{\mathcal{O}'}{\Lambda^2} - \frac{1}{2} \right) \right] + O\left(\Lambda^4, \frac{1}{\Lambda^2}\right) \right] \quad (3.32)$$

$$= \frac{(VT)}{64\pi^2} \left[ 2\Lambda^2 \text{Tr} \mathcal{O} + \text{Tr} \left[ \mathcal{O}^2 \left( \ln \frac{\mathcal{O}}{\Lambda^2} - \frac{1}{2} \right) \right] + O\left(\Lambda^4, \frac{1}{\Lambda^2}\right) \right] \quad (3.33)$$

したがって、

$$\begin{aligned} V^{(1)} = & \frac{3}{64\pi^2} \left\{ 2\Lambda^2 \text{Tr} M_0 + \text{Tr} \left[ M_0^2 \left( \ln \frac{M_0}{\Lambda^2} - \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \\ & - \frac{1}{64\pi^2} \left\{ 2\alpha \Lambda^2 \text{Tr} M_0 + \alpha^2 \text{Tr} \left[ M_0^2 \left( \ln \frac{\alpha M_0}{\Lambda^2} - \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \\ & + \frac{1}{64\pi^2} \left\{ 2\Lambda^2 \text{Tr} \tilde{N}_0 + \text{Tr} \left[ \tilde{N}_0^2 \left( \ln \frac{\tilde{N}_0}{\Lambda^2} - \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.34)$$

第1項は  $\hat{\omega}$  の transverse mode から第2項は  $\hat{\omega}$  の longitudinal mode と ghost からの寄与である。第3項は  $\hat{e}$  からの寄与である。  $\tilde{N} = m_{\mathbf{b}}^2 + N$ 。この発散項を繰り込みたいが、

$$\text{Tr} M_0 = \frac{2}{3} g_L^2 \text{Tr} X_0^2, \quad \text{Tr} M_0^2 = g^4 \left[ \frac{1}{2} \text{Tr} X_0^2 + \frac{1}{4} (\text{Tr} X_0)^2 \right] \quad (3.35)$$

を使うと、それぞれの発散項を  $m$  と  $\lambda_i$  にくりこむことができ、

$$\begin{aligned} V = V^{(0)} + V^{(1)} = & \frac{m_r^2}{2} \text{Tr} X_0 + \frac{\lambda_{1r}}{4} \text{Tr} X_0^2 + \frac{\lambda_{2r}}{4} \text{Tr} [X_0^2] \\ & + \frac{1}{64\pi^2} \left\{ (3 - \alpha^2) \text{Tr} \left[ M_0^2 \left( \ln \frac{M_0}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right) \right] - \alpha^2 \ln \alpha \text{Tr} M_0^2 \right\} \\ & + \frac{1}{64\pi^2} \left\{ 2\mu^2 \text{Tr} M_0 + \text{Tr} \left[ M_0^2 \left( \ln \frac{M_0}{\mu^2} - \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \\ & + \frac{1}{64\pi^2} \text{Tr} \left[ N_0^2 \left( \ln \frac{N_0}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.36)$$

平均場近似の方法を用いているので、最初に導入した期待値  $\check{\rho}$  は場の古典配位  $e_0$  と等しいはずである。これが自己整合方程式である。今回は、 $e_0^{\mathbf{a}\mu} = \rho \delta^{\mathbf{a}\mu}$  である。この式を代入して次元1を持った  $\rho$  の関数として有効作用を評価すると、

$$V(\rho) = (4\lambda_{1r} + \lambda_{2r}) \rho^4 + \frac{g_L^4 \rho^4}{32\pi^2} \left( (9 + 5\alpha^2) \left( \ln \frac{g_L^2 \rho^2}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right) + 5\alpha^2 \ln \alpha \right) + O(g^6) \quad (3.37)$$

但し,  $m_{\tau}^2 = 0$ ,  $\lambda_{ir} = O(g^4)$  としている. 極小値は,

$$\rho = \frac{\mu}{g_L} \exp \left( \frac{1}{2} - \frac{16\pi^2}{9 + 5\alpha^2} \left( \frac{4\lambda_{1b} + \lambda_{2b}}{g_L^4} + \frac{5}{32\pi^2} \alpha^2 \ln \alpha \right) \right) \quad (3.38)$$

よって,  $\langle e^a{}_{\mu} \rangle \neq 0$  で vierbein の VEV が得られる. これは自発的対称性の破れである<sup>5)</sup>. ここで破れている対称性は局所ローレンツ対称性である. さらに背景場を平坦時空に選んでいるので, 全体としては  $GL(4) \times SO(1, 3)_{\text{loc}}$  が global な  $SO(1, 3)$  に破れている.

### 3.4 一般の背景時空に対する有効作用の解析

ここまでは, 具体的に背景場を選んで有効作用を計算していたが, Diff. 対称性を破っていた. 対称性を保ったまま計算をすることが理想だが, 一般の背景場に対しても有効作用を計算することができる. この場合, 低エネルギーで Einstein 重力が得られるかどうかを明らかにすることができる.

ここでは熱核展開の方法を用いる. 熱核展開では, ある関数  $W(p^2)$  が与えられたとき,

$$\text{Tr} [W(p^2)] = \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ Q_2[W] \int d^4x \sqrt{\check{g}} \text{Tr} [\bar{\mathbf{b}}_0] + Q_1[W] \int d^4x \sqrt{\check{g}} \text{Tr} [\bar{\mathbf{b}}_2] \check{R} + O(\check{R}^2) \right\} \quad (3.39)$$

$$Q_n[W] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} ds (-s)^n \check{W}(s) \quad (3.40)$$

と書けた (B 章). ただし,  $p^2 = -\nabla^{\mu} \nabla_{\mu}$ . これを使うと, 1-loop の寄与が,

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)} = \int \frac{d^4x |\check{e}|}{2(4\pi)^2} & \left\{ \text{Tr} \left[ M_0^2 \left( \ln \frac{M_0}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right) \right] + \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ N_0^2 \left( \ln \frac{N_0}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right) \right] \right. \\ & \left. + \frac{2\check{R}}{3} \text{Tr} \left[ M_0 \left( \ln \frac{M_0}{\mu^2} - 1 \right) \right] + O(\check{R}^2) \right\} \end{aligned} \quad (3.41)$$

簡単のため, 長波長展開で dominant な項を見る. また  $m_{\tau}^2 = 0$ ,  $\xi = 1/6$  とすると,

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)} = \int d^4x |\check{e}| & \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{6} \check{R} \text{Tr} [X_0] + \frac{\lambda_{1b}}{4} (\text{Tr} X_0)^2 + \frac{\lambda_{2b}}{4} \text{Tr} [X_0^2] \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \text{Tr} \left[ M_0^2 \left( \ln \frac{M_0}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right) \right] + \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ N_0^2 \left( \ln \frac{N_0}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right) \right] \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2\check{R}}{3} \text{Tr} \left[ M_0 \left( \ln \frac{M_0}{\mu^2} - 1 \right) \right] \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.42)$$

<sup>5)</sup>しかしこの議論には間違いがある. 3.5 節で詳しく議論する.

$\Gamma^{(4)}$  は  $A_0$  を含まないので, ゲージ場の VEV は任意. 自己整合方程式  $\langle \theta \rangle = \rho \check{\theta}$  を代入して,  $\rho$  に対する関数の最小値を求めると

$$\rho^2 = \frac{\mu^2}{g_L^2} e^{1 - \frac{16\pi^2}{7} \frac{4\lambda_{1r} + \lambda_{2r}}{g^4}} - \frac{\check{R}}{7g_L^2} \left( 1 + \frac{8\pi^2}{3g_L^2} - \frac{16\pi^2}{7} \frac{4\lambda_{1r} + \lambda_{2r}}{g^4} \right) \quad (3.43)$$

$$\Gamma(\check{g}) = \int d^4x |\check{e}| \left\{ \frac{\mu^2}{3g_L^2} e^{1 - \frac{16\pi^2}{7} \frac{4\lambda_{1r} + \lambda_{2r}}{g^4}} \left( 1 - \frac{6}{7} \frac{4\lambda_{1r} + \lambda_{2r}}{g^4} \right) \check{R} + O(g^0, \check{R}^2) \right\} \quad (3.44)$$

従って, 有効作用が, 結合定数  $g_L$  が小さい極限かつ長波長極限で Einstein-Hilbert 作用になることがわかった.  $\check{R}$  の係数がプランク質量になっているという結論である.

### 3.5 章のまとめ

平均場近似の方法を用いると, 重力の量子化のややこしい問題に触れずに有効作用を求められることが分かった. 一般に重力の作用は複雑な構造をしているので, 平均場近似を使って大雑把に評価することは, 初手として良い方法だと考えられる. しかしこの論文 [23] では, C.W. 機構を使う際に間違いをしている. 簡単に説明すると, 有効作用の導出には摂動論を用いているため, 有効作用の 1-loop からの寄与は tree レベルに対して十分小さいことが仮定されている. しかし, (3.37) で  $V = 0$  とするということは, 第 1 項の tree レベルと第 2 項の 1loop の寄与が同じということを要請してしまっている. この間違いは, VEV がくりこみスケール  $\mu$  に比例していることから分かる. この評価方法が間違っていることは, [27] や Coleman-Weinberg の原論文 [28] でも詳しく言及されている. そのためくりこみ群を用いて正しく評価する必要があるが, その点を除けば, ECG の基本自由度の運動項を含んだ模型を考えているため非常に興味深い論文だといえる.



## 第4章 フェルミオンのループによる 重力の dynamical 自由度の 生成

これまで、vierbein と局所ローレンツ対称性について議論をしてきた。この章では、vierbein と局所ローレンツゲージ場の運動項がない作用から、それらの運動項が生成されるかどうかを調べた、我々が3月に投稿した論文 [1] の内容を詳しく記述する。

### 4.1 研究の背景

一般相対性理論は低エネルギー有効理論であるが故に様々な拡張モデルが考えられている。第2章にも書いたように、我々は重力の基本自由度は vierbein と局所ローレンツゲージ場だと考える。

理論に局所ローレンツゲージ対称性があるためゲージ場の運動項を考えようとするのは自然である。しかし運動項を書こうとすると vierbein の逆行列が含まれる。これが意味することは、理論の摂動展開を行った際に vierbein のゆらぎの効果が無限次まで含まれるということである。また、逆行列の存在を許して有効作用を書こうとすると運動項以外にも幾らかの項が含まれるため解析も複雑になり、本質が見えにくくなってしまう。それを避けるため、あるスケール  $\Lambda_{UV}$  で”作用の null field limit が存在する”という条件を課して作用の形を制限することにする。そして、低エネルギーへくりこみ群でフローさせることで局所ローレンツゲージ場の運動項の生成を調べることにした。

### 4.2 模型の構成

Vierbein の 16 成分のうちいくつかの成分を選んでそれらの集合を  $S$  とかく。残りの成分を  $\bar{S}$  とかく。ここで、 $\bar{S}$  の要素についてはそのまま  $S$  の要素を全て 0 にする極限を考える。このとき、どんな  $S$  の選び方に対しても上記の極限が有限 (0 を含む) になるという条件を、null field limit が存在すると定義する。例として、

$$e^a{}_\mu e^b{}_\nu F^{cd}{}_{\rho\sigma} \epsilon[\mathbf{abcd}] \epsilon[\mu\nu\rho\sigma] \quad (4.1)$$

を考えると, null field limit は存在することがわかる. 一方で,

$$|e|g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}F^a{}_{b\mu\nu}F^b{}_{a\rho\sigma} \quad (4.2)$$

は vierbein に関して  $|e|e_a{}^\mu e^{a\rho}e_b{}^\nu e^{b\sigma}$  という構造をしているので null field limit は存在しない. 一般的に null field limit が存在するかどうかは,  $|e|$  の冪を数える事でわかる.  $|e|$  の冪が負でないならば, その項の null field limit は存在する. また, 計量の逆行列は  $|e|^{-2}$  に比例するので, 計量の逆行列が含まれていれば null field limit は存在しないと考えることができる<sup>1)</sup>. Null field limit は degenerate limit と同じ考えである<sup>2)</sup>. この vierbein を 0 に持って行く極限は, 通常, 重力理論で用いられる weak field limit  $e_a{}^\mu \rightarrow \delta_a^\mu$  と異なっている. この違いをヒッグス物理の analogy で説明すると, null field limit はヒッグス場の 0 への極限  $\Phi \rightarrow 0$  に対応する. これはヒッグス場がゲージ対称性の linear realization になっていることに対応する. 一方 weak field limit は  $\Phi \rightarrow v$  に対応する. これはゲージ対称性の nonlinear realization に対応する. ヒッグスの物理は linear realization で十分良く記述することができている. この事に基づいて我々は null field limit を用いる<sup>3)</sup>. また, null field limit を許す作用では topology change が許されている. このことは vierbein の全ての配位について経路積分ができることに対応している. 詳しいことは [30] で議論されている.

さて, あるスケール  $\Lambda_{UV}$  で作用の Null field limit が存在することを要請すると,  $\Lambda_{UV}$  での作用は,

$$\begin{aligned} S_{\Lambda_{UV}} &= \int d^4x \left[ -\frac{1}{4!} \lambda_B e_a{}^\mu e_b{}^\nu e_c{}^\rho e_d{}^\sigma \epsilon[\mu\nu\rho\sigma] \epsilon[\mathbf{abcd}] \right. \\ &\quad + \frac{M_B^2}{2} e_a{}^\mu e_b{}^\nu F^{\mathbf{cd}}{}_{\rho\sigma} \epsilon[\mathbf{abcd}] \epsilon[\mu\nu\rho\sigma] \\ &\quad \left. - \frac{1}{3!} \bar{\psi} e_b{}^\nu e_c{}^\rho e_d{}^\sigma \epsilon[\mathbf{abcd}] \epsilon[\mu\nu\rho\sigma] \frac{1}{2} \left( \gamma^{\mathbf{a}} \overleftrightarrow{\partial}_\mu + \omega_{\mathbf{eg}\mu} \left\{ \gamma^{\mathbf{a}}, \frac{\Sigma^{\mathbf{eg}}}{2} \right\} \right) \psi \right] \\ &= \int d^4x |e| \left[ -\lambda_B + \frac{M_B^2}{2} e_a{}^\mu e_b{}^\nu F^{\mathbf{ab}}{}_{\mu\nu} - \bar{\psi} e_a{}^\mu \gamma^{\mathbf{a}} \mathcal{D}_\mu \psi \right] \end{aligned} \quad (4.3)$$

となる. この作用には確かに vierbein の逆行列が含まれておらず場のゆらぎが 3 次までしか含まれない. 第 1 項は宇宙項である. 第 2 項は Einstein-Hilbert 作用で<sup>4)</sup>, 第 3 項はスピノルの運動項である. ここで第 2 項に注目する. この項は metric formalism では計量の 2 階微分を含んでいるので運動項と考えていたが, 基本的自

<sup>1)</sup>一般的な証明はまだできていない.

<sup>2)</sup>degenerate limit は vierbein の行列式  $|e|$  を 0 にする極限である [29, 30].

<sup>3)</sup>Null field limit で vierbein の逆行列が禁止されるということは, ヒッグス物理で  $\Phi^{-2}$  のような項を考えないことに対応している.

<sup>4)</sup>Einstein-Hilbert 作用は, metric formalism では metric に対する null field limit は存在するという要請は満たさないのだが, ECG では null field limit は存在する [18, 29].

由度である vierbein と局所ローレンツゲージ場の運動項にはなっていない。それを踏まえて、 $S_{\Lambda_{UV}}$  の構造を見ると、似たような形をした模型が思い起こされる。それは、南部ヨナラシーニヨ模型 (NJL 模型) である。

NJL 模型の概要を説明する<sup>5)</sup>。NJL 模型では、あるスケール  $\Lambda_{UV}$  で作用がフェルミオンのみで書かれていると考える：

$$S = \int d^4x \left[ -\bar{\psi} \not{\partial} \psi + \frac{G}{N} (\bar{\psi} \psi)^2 \right]. \quad (4.4)$$

$G$  は質量次元  $-2$  のパラメータである。これはくりこみ不可能な作用であるが、補助場を導入すると、

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left( i \int d^4x \left[ -\bar{\psi} \not{\partial} \psi + \frac{G}{2} (\bar{\psi} \psi)^2 \right] \right) \times \int \mathcal{D}\phi \exp \left( i \int d^4x \left[ -\frac{a}{G} (\phi - bG\bar{\psi}\psi)^2 \right] \right) \quad (4.5)$$

$$= \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\phi \exp \left( i \int d^4x \left[ -\bar{\psi} \not{\partial} \psi + y_0 \phi \bar{\psi} \psi - \frac{y_0^2}{2G} \phi^2 \right] \right) \quad (4.6)$$

ただし、途中で  $a = y_0^2/2$ ,  $b = 1/y_0$  とした。この作用は質量次元 4 以下の相互作用で書いている。ポイントは、作用が質量次元が 4 以下の項で構成されるように書き換えられた事と運動項を持たない補助場  $\phi$  が含まれているという事である。この作用から、くりこみ群で低エネルギーへ走ると、

$$S_k = \int d^4x \left[ -Z_\psi \bar{\psi} \not{\partial} \psi - \frac{Z_\phi}{2} (\partial\phi)^2 + y_k \phi \bar{\psi} \psi - \frac{m_k^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda_k}{4!} \phi^4 \right] \quad (4.7)$$

と、スカラー場の運動項と自己相互作用項が現れる。波動関数くりこみ  $Z$  と結合定数は、以下の境界条件：

$$\begin{aligned} Z_\psi|_{k=\Lambda_{UV}} &= 1, \quad Z_\phi|_{k=\Lambda_{UV}} = 0, \\ y_k|_{k=\Lambda_{UV}} &= y_0, \quad m_k^2|_{k=\Lambda_{UV}} = \frac{\lambda^2}{2G}, \quad \lambda_k|_{k=\Lambda_{UV}} = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

を満たすとすると、 $\Lambda_{UV}$  で作用が (4.6) の形で書け、 $\Lambda_{UV}$  以上の高エネルギーではフェルミオンのみで書ける理論に変わる、という描像を持つことができる。これが NJL 模型である<sup>6)</sup>。

今回の作用  $S_{\Lambda_{UV}}$  (4.3) はまさに NJL 模型の形をしている： vierbein と局所ローレンツゲージ場が、上述した NJL 模型 (4.6) のスカラー場  $\phi$  に対応している<sup>7)</sup>。NJL 模型で低エネルギーに下がるとスカラー場の運動項が生成されたので、そのアナロ

<sup>5)</sup> 詳しい説明は原論文 [31, 32] や [33] などで行われている。

<sup>6)</sup>  $e^a{}_\mu$  と  $\omega^a{}_{b\mu}$  はゲージ場だが  $S_{\Lambda_{UV}}$  に運動項がないため gauged NJL [34] とは違う考え方であることに注意。

<sup>7)</sup> ただし、今回は片方を経路積分した時にもう一方の補助場だと思っていた自由度が dynamical になる点が一般的な NJL 模型と違う。

ジーで今回の作用のくりこみ群フローを考えると  $k (< \Lambda_{UV})$  では vierbein と局所ローレンツゲージ場の運動項が現れて,

$$S_k = \int d^4x \left[ -\lambda_k + \frac{M_k^2}{2} e_a^\mu e_b^\nu F^{ab}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} Z_\psi \bar{\psi} e_a^\mu \left( \gamma^a \overleftrightarrow{\partial}_\mu + \sqrt{Z_\omega} \omega_{bc\mu} \left\{ \gamma^a, \frac{\Sigma^{bc}}{2} \right\} \right) \psi \right. \\ \left. + \frac{Z_\omega}{2g_{L,k}^2} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F^a_{\ b\mu\nu} F^b_{\ a\rho\sigma} - Z_e g^{\rho[\mu} g^{\nu]\sigma} \delta_{ab} \partial_\mu e^a_\nu \partial_\rho e^b_\sigma \right] \quad (4.9)$$

と書けると予想できる.  $\Lambda_{UV}$  での境界条件は,

$$Z_\psi|_{k=\Lambda_{UV}} = 1, \quad Z_\omega|_{k=\Lambda_{UV}} = 0, \quad Z_e|_{k=\Lambda_{UV}} = 0, \quad (4.10) \\ M_k|_{k=\Lambda_{UV}} = M_B, \quad \lambda_k|_{k=\Lambda_{UV}} = \lambda_B.$$

低エネルギーで局所ローレンツゲージ場と vierbein が dynamical になっているというのが我々の予想である. これらの運動項の生成が実際に行われるか否かを解析することが本論文の主題である. 本論文では局所ローレンツゲージ場の運動項の生成に注目して解析を行う.

### 4.3 計算の概要

以上で模型が構築できたので, 計算を始める. Vierbein と局所ローレンツゲージ場の運動項が生成するかどうかを知るには, 真空偏極を計算すれば良い.  $\Lambda_{UV}$  では運動項を持つのはフェルミオンだけなのでフェルミオンだけのループしかないのが本質である. 局所ローレンツゲージ場の運動項生成に注目する. 背景場を平坦時空  $\bar{e} = \delta$  に取ると,  $k < \Lambda_{UV}$  では, up to (positive) constant で,

$$+Z_\omega F^a_{\ b\mu\nu} F^b_{\ a}{}^{\mu\nu} \supset +Z_\omega \omega_{ab\mu} [\eta^{c[a} \eta^{b]d} (\bar{g}^{\mu\nu} \partial^2 - \partial^\mu \partial^\nu)] \omega_{cd\nu} \quad (4.11)$$

という tensor structure を持っている. したがって, propagator は,

$$+\frac{i}{q^4} Z_\omega [\eta_{c[a} \eta_{b]d} (\eta_{\mu\nu} q^2 - q_\mu q_\nu)] \quad (4.12)$$

という tensor structure を持つ<sup>8)</sup>. フェルミオンのループによる真空偏極の 1-loop は,

$$\omega_{a_2 a_3 \mu_1} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \text{---} q \text{---} \\ \text{---} p \text{---} \end{array} \text{---} \text{---} \begin{array}{c} p+q \\ \text{---} q \text{---} \\ \text{---} q \text{---} \end{array} \omega_{a_6 c_7 \mu_5} =: I(q)^{a_2 a_3 a_6 a_7, \mu_1 \mu_5}. \quad (4.13)$$

<sup>8)</sup>ただし, 背景時空が平坦時空の場合のみに限る.

$I(q)$  は,

$$I(q)^{a_2 a_3 a_6 a_7, \mu_1 \mu_5} = -i\beta [\eta^{a_6 [a_2 \eta^{a_3] a_7} (q^2 \eta^{\mu_1 \mu_5} - q^{\mu_1} q^{\mu_5})}] + i\gamma \eta^{a_6 [a_2 \eta^{a_3] a_7} q^{\mu_1} q^{\mu_5} + (\text{others}) \quad (4.14)$$

という形をしていると考えられる. 第1項が propagator と同じ tensor structure を持っている項である. すると, 局所ローレンツゲージ場の波動関数くりこみは,

$$Z_\omega = \beta. \quad (4.15)$$

$\beta > 0$  ならば, 運動項が生成されたと言える.

(4.14) の (others) は第1項以外の tensor structure を持つ項を表わしている. 今回は運動項が生成されるか否かに焦点を当てたいので, 第1項以外の tensor structure のみに射影して考える.

## 4.4 作用と Feynman rule

作用のおさらいをすると, スケール  $\Lambda_{UV}$  で,

$$\begin{aligned} S_{\Lambda_{UV}} &= \int d^4x \left[ -\frac{1}{4!} \lambda_B e^a{}_\mu e^b{}_\nu e^c{}_\rho e^d{}_\sigma \epsilon[\mu\nu\rho\sigma] \epsilon[\mathbf{abcd}] \right. \\ &\quad + \frac{M_B^2}{2} e^a{}_\mu e^b{}_\nu F^{\mathbf{cd}}{}_{\rho\sigma} \epsilon[\mathbf{abcd}] \epsilon[\mu\nu\rho\sigma] \\ &\quad \left. - \frac{1}{3!} \bar{\psi} e^b{}_\nu e^c{}_\rho e^d{}_\sigma \epsilon[\mathbf{abcd}] \epsilon[\mu\nu\rho\sigma] \frac{1}{2} \left( \gamma^a \overleftrightarrow{\partial}_\mu + \omega_{\mathbf{eg}\mu} \left\{ \gamma^a, \frac{\Sigma^{\mathbf{eg}}}{2} \right\} \right) \psi \right] \\ &= \int d^4x |e| \left[ -\lambda_B + \frac{M_B^2}{2} e_a{}^\mu e_b{}^\nu F^{\mathbf{ab}}{}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{\psi} e_a{}^\mu \left( \gamma^a \overleftrightarrow{\partial}_\mu + \omega_{\mathbf{eg}\mu} \left\{ \gamma^a, \frac{\Sigma^{\mathbf{eg}}}{2} \right\} \right) \psi \right] \end{aligned} \quad (4.16)$$

と書けているのであった. まずフェルミオンの質量は0として計算する. 背景場展開の方法:

$$e^a{}_\mu = \bar{e}^a{}_\mu + \hat{e}^a{}_\mu, \quad \omega^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{b}\mu} = \bar{\omega}^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{b}\mu} + \hat{\omega}^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{b}\mu} \quad (4.17)$$

を用いると, fermion part の構造は,

$$\begin{aligned}
|e|\mathcal{L}_\psi = & -\frac{1}{2}\bar{\psi}|\bar{e}|\bar{e}_a^\mu \left( \gamma^a \overleftrightarrow{\partial}_\mu + \bar{\omega}_{eg\mu} \left\{ \gamma^a, \frac{\Sigma^{eg}}{2} \right\} \right) \psi - \frac{1}{2}\bar{\psi}|\bar{e}|\bar{e}_a^\mu \hat{\omega}_{eg\mu} \left\{ \gamma^a, \frac{\Sigma^{eg}}{2} \right\} \psi \\
& - \bar{\psi}|\bar{e}|\hat{e}_\nu^b \bar{e}_a^\mu \bar{e}_b^\nu \left( \gamma^a \overleftrightarrow{\partial}_\mu + \bar{\omega}_{eg\mu} \left\{ \gamma^a, \frac{\Sigma^{eg}}{2} \right\} \right) \psi \\
& - \frac{1}{4}\bar{\psi}\hat{e}_\nu^b \hat{e}_\rho^c \bar{e}_\sigma^d \epsilon[\mathbf{abcd}]\epsilon[\mu\nu\rho\sigma] \left( \gamma^a \overleftrightarrow{\partial}_\mu + \bar{\omega}_{eg\mu} \left\{ \gamma^a, \frac{\Sigma^{eg}}{2} \right\} \right) \psi \\
& - \bar{\psi}|\bar{e}|\hat{e}_\nu^b \bar{e}_a^\mu \bar{e}_b^\nu \hat{\omega}_{eg\mu} \left\{ \gamma^a, \frac{\Sigma^{eg}}{2} \right\} \psi \\
& - \frac{1}{4}\bar{\psi}\hat{e}_\nu^b \hat{e}_\rho^c \bar{e}_\sigma^d \epsilon[\mathbf{abcd}]\epsilon[\mu\nu\rho\sigma] \hat{\omega}_{eg\mu} \left\{ \gamma^a, \frac{\Sigma^{eg}}{2} \right\} \psi \\
& - \frac{1}{12}\bar{\psi}\hat{e}_\nu^b \hat{e}_\rho^c \bar{e}_\sigma^d \epsilon[\mathbf{abcd}]\epsilon[\mu\nu\rho\sigma] \left( \gamma^a \overleftrightarrow{\partial}_\mu + \bar{\omega}_{eg\mu} \left\{ \gamma^a, \frac{\Sigma^{eg}}{2} \right\} \right) \psi \\
& - \frac{1}{12}\bar{\psi}\hat{e}_\nu^b \hat{e}_\rho^c \bar{e}_\sigma^d \epsilon[\mathbf{abcd}]\epsilon[\mu\nu\rho\sigma] \hat{\omega}_{eg\mu} \left\{ \gamma^a, \frac{\Sigma^{eg}}{2} \right\} \psi.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

最後の項を見てわかるように, 相互作用が6点相互作用までである. 今回必要な Feynman rule を記述すると,

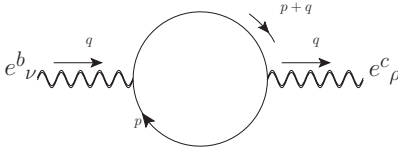
$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \begin{array}{c} p \\ p \end{array} = \frac{i}{-\frac{1}{2}|\bar{e}|\bar{e}_a^\mu \left( \gamma^a \overleftrightarrow{\partial}_\mu + \bar{\omega}_{eg\mu} \left\{ \gamma^a, \frac{\Sigma^{eg}}{2} \right\} \right)} = \frac{1}{|\bar{e}|\bar{e}_a^\mu \left( -\gamma^a p_\mu + \frac{i}{2}\bar{\omega}_{eg\mu} \left\{ \gamma^a, \frac{\Sigma^{eg}}{2} \right\} \right)} \tag{4.19}$$

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \begin{array}{c} q \\ p \end{array} = + |\bar{e}|\bar{e}_a^\mu \bar{e}_b^\nu \left( \gamma^a (p+q)_\mu - i\bar{\omega}_{eg\mu} \left\{ \gamma^a, \frac{\Sigma^{eg}}{2} \right\} \right) \tag{4.20}$$

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \begin{array}{c} q \\ p \end{array} = -\frac{i}{2}|\bar{e}|\bar{e}_a^\mu \left\{ \gamma^a, \frac{\Sigma^{eg}}{2} \right\}. \tag{4.21}$$

## 4.5 フェルミオンのループと vierbein の運動項の関係 についての考察

フェルミオンと vierbein の vertex があるので, フェルミオンのループによる vierbein の真空偏極のダイアグラムを計算することができる. 簡単のため,  $\bar{\omega} = 0$  とする. 外線の運動量を  $q$ , 積分する運動量を  $p$  とすると,

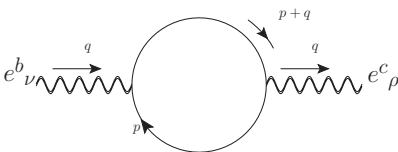


$$e^b_{\nu} \xrightarrow{q} \text{loop} \xrightarrow{q} e^c_{\rho} =: J(q)_{\mathbf{bc}}{}^{\nu\rho}, \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} J(q)_{\mathbf{bc}}{}^{\nu\rho} &= (-1) \int_p \text{Tr} \left[ (|\bar{e}| \bar{e}_{\mathbf{c}}{}^{\rho} (2\not{P} + \not{Q})) \frac{1}{-|\bar{e}|(\not{P} + \not{Q})} (|\bar{e}| \bar{e}_{\mathbf{b}}{}^{\nu} (2\not{P} + \not{Q})) \frac{1}{-|\bar{e}| \not{P}} \right] \\ &= -\bar{e}_{\mathbf{c}}{}^{\rho} \bar{e}_{\mathbf{b}}{}^{\nu} \int_p \text{Tr} \left[ (2\not{P} + \not{Q}) \frac{(\not{P} + \not{Q})}{(p+q)^2} (\not{P}) \frac{\not{P}}{p^2} \right] - \bar{e}_{\mathbf{c}}{}^{\rho} \bar{e}_{\mathbf{b}}{}^{\nu} \int_p \text{Tr} \left[ (2\not{P} + \not{Q}) \frac{(\not{P} + \not{Q})}{(p+q)^2} (\not{P} + \not{Q}) \frac{\not{P}}{p^2} \right] \\ &= -\bar{e}_{\mathbf{c}}{}^{\rho} \bar{e}_{\mathbf{b}}{}^{\nu} \int_p \text{Tr} \left[ (2\not{P} - \not{Q}) \frac{\not{P}}{p^2} \right] - \bar{e}_{\mathbf{c}}{}^{\rho} \bar{e}_{\mathbf{b}}{}^{\nu} \int_p \text{Tr} \left[ (2\not{P} + \not{Q}) \frac{\not{P}}{p^2} \right] \\ &= -\bar{e}_{\mathbf{c}}{}^{\rho} \bar{e}_{\mathbf{b}}{}^{\nu} \int_p 16. \end{aligned} \quad (4.23)$$

これは, loop 運動量で積分すると, 4次発散になる. 結果が外線運動量に依存しないため, フェルミオンの 1-loop の真空偏極では vierbein の運動項は出ない

フェルミオンが質量を持つ場合, propagator が書き換えられて,



$$e^b_{\nu} \xrightarrow{q} \text{loop} \xrightarrow{q} e^c_{\rho} =: J_m(q)_{\mathbf{bc}}{}^{\nu\rho}. \quad (4.24)$$

簡単のため, 背景場を平坦時空  $\bar{e} = \delta$  に選び,  $\bar{\omega} = 0$  とすると,

$$\begin{aligned} J_m(q)_{\mathbf{bc}}{}^{\nu\rho} &= (-1) \int_p \text{Tr} \left[ (|\bar{e}| \bar{e}_{\mathbf{c}}{}^{\rho} (2\not{P} + \not{Q})) \frac{1}{-|\bar{e}|(\not{P} + \not{Q}) + i|\bar{e}|m} (|\bar{e}| \bar{e}_{\mathbf{b}}{}^{\nu} (2\not{P} + \not{Q})) \frac{1}{-|\bar{e}| \not{P} + i|\bar{e}|m} \right] \\ &= -8\bar{e}_{\mathbf{b}}{}^{\nu} \bar{e}_{\mathbf{c}}{}^{\rho} \left( \int_p \frac{p^2}{p^2 + m^2} - m^2 \int_p \int_0^1 dx \frac{2p^2 + (1-2x)^2 q^2}{(p^2 + \Delta)^2} \right) \quad (\Delta = x(1-x)q^2 + m^2) \\ &\supset -i \frac{m^2}{6\pi^2} \left( \ln \frac{\Lambda^2 + m^2}{\mu^2 + m^2} - \frac{\Lambda^2(2\Lambda^2 + m^2)}{(\Lambda^2 + m^2)^2} \right) q^2 \bar{e}_{\mathbf{b}}{}^{\nu} \bar{e}_{\mathbf{c}}{}^{\rho}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

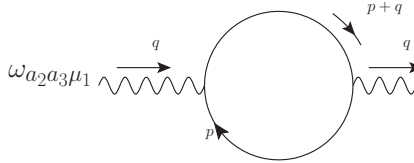
よって、フェルミオンが質量を持っている場合は、

$$(\bar{e}_b{}^\nu e^b{}_\nu) \square (\bar{e}_c{}^\rho e^c{}_\rho) \quad (4.26)$$

という形の、vierbein のトレース部分の運動項が生成されることができると考えることができる<sup>9)</sup>。つまり、トレース部分に関してであるが、vierbein の運動項が 1-loop で現れるかどうかはフェルミオンが質量を持つかどうかによって依存する。これはカイラル対称性の破れと関連があるのかもしれない。また、一般的な運動項はさらに下のエネルギースケールで生成されることが考えられる。

## 4.6 フェルミオンのループによる局所ローレンツゲージ場の運動項の生成

次に、フェルミオンのループによる局所ローレンツゲージ場の真空偏極のダイアグラムを計算する。先ほど同様に、外線の運動量を  $q$ 、積分する運動量を  $p$  とする。背景場を平坦時空  $\bar{e} = \delta$  に選び、 $\bar{\omega} = 0$  とすると、



$$\omega_{a_2 a_3 \mu_1} \xrightarrow{q} \text{loop} \xrightarrow{q} \omega_{a_6 a_7 \mu_5} = I(q)^{a_2 a_3 a_6 a_7, \mu_1 \mu_5} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} I(q)^{a_2 a_3 a_6 a_7, \mu_1 \mu_5} &= (-1) \int_p \text{Tr} \left[ \left( -\frac{i}{2} |\bar{e}| \bar{e}_{a_1}{}^{\mu_1} \left\{ \gamma^{a_1}, \frac{\Sigma^{a_2 a_3}}{2} \right\} \right) \frac{1}{|\bar{e}| \bar{e}_{a_4}{}^{\mu_4} \gamma^{a_4} p_{\mu_4}} \right. \\ &\quad \left. \times \left( -\frac{i}{2} |\bar{e}| \bar{e}_{a_5}{}^{\mu_5} \left\{ \gamma^{a_5}, \frac{\Sigma^{a_6 a_7}}{2} \right\} \right) \frac{1}{|\bar{e}| \bar{e}_{a_8}{}^{\mu_8} \gamma^{a_8} (p+q)_{\mu_8}} \right] \\ &= \frac{1}{4} \bar{e}_{a_1}{}^{\mu_1} \bar{e}_{a_4}{}^{\mu_4} \bar{e}_{a_5}{}^{\mu_5} \bar{e}_{a_8}{}^{\mu_8} \int_p \frac{p_{\mu_4} (p+q)_{\mu_8}}{(p+q)^2 p^2} \text{Tr} \left[ \left\{ \gamma^{a_1}, \frac{\Sigma^{a_2 a_3}}{2} \right\} \gamma^{a_4} \left\{ \gamma^{a_5}, \frac{\Sigma^{a_6 a_7}}{2} \right\} \gamma^{a_8} \right]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

運動量の部分を取り出して、

$$\begin{aligned} \int_p \frac{(p+q)_{\mu_8} p_{\mu_4}}{(p+q)^2 p^2} &= \int_p \int_0^1 dx \frac{(p+(1-x)q)_{\mu_8} (p-xq)_{\mu_4}}{(p^2 + \Delta)^2} \quad (\Delta = x(1-x)q^2) \\ &= \frac{1}{4} \bar{g}_{\mu_8 \mu_4} \int_0^1 dx \int_{p_E} \frac{p_E^2}{(p_E^2 + \Delta)^2} - i q_{\mu_8} q_{\mu_4} \int_0^1 dx x(1-x) \int_{p_E} \frac{1}{(p_E^2 + \Delta)^2} \\ &=: i \bar{g}_{\mu_8 \mu_4} f_1(q^2) - i q_{\mu_8} q_{\mu_4} f_2(q^2). \end{aligned} \quad (4.29)$$

<sup>9)</sup>  $e_c{}^\rho e^c{}_\rho$  は定数だが<sup>3)</sup>、第3章で記述した平均場近似の方法を尊重して  $\bar{e}_c{}^\rho e^c{}_\rho$  と組んでいる。



途中で、カットオフ  $\Lambda$  を導入して正則化を行い以下の公式を用いた:

$$\begin{aligned}
f_1(q^2) &= \frac{1}{4} \int_0^1 dx \int_{p_E} \frac{p_E^2}{(p_E^2 + \Delta)^2} \\
&= \frac{1}{64\pi^2} \int_0^1 dx \left( \Lambda^2 - \mu^2 - \frac{\Delta^2}{\Lambda^2 + \Delta} + \frac{\Delta^2}{\mu^2 + \Delta} - 2\Delta \ln \frac{\Lambda^2 + \Delta}{\mu^2 + \Delta} \right) \\
f_2(q^2) &= \int_0^1 dx x(1-x) \int_{p_E} \frac{1}{(p_E^2 + \Delta)^2} \\
&= \frac{1}{16\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \left( \frac{\Delta}{\Lambda^2 + \Delta} - \frac{\Delta}{\mu^2 + \Delta} + \ln \frac{\Lambda^2 + \Delta}{\mu^2 + \Delta} \right).
\end{aligned} \tag{4.30}$$

運動量積分の結果は  $\mu_4$  と  $\mu_8$  について対称であることがわかったので、後ろの  $\text{Tr}[\dots]$  の部分について、 $\mathbf{a}_4$  と  $\mathbf{a}_8$  について対称パートのみを残せばいい。すると、

$$\begin{aligned}
I(q)^{\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3\mathbf{a}_6\mathbf{a}_7, \mu_1\mu_5} &= \frac{i}{4} f_1(q^2) \bar{e}_{\mathbf{a}_1}^{\mu_1} \bar{e}_{\mathbf{a}_5}^{\mu_5} \eta_{\mathbf{a}_4\mathbf{a}_8} \text{Tr} \left[ \left\{ \gamma^{\mathbf{a}_1}, \frac{\Sigma^{\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3}}{2} \right\} \gamma^{(\mathbf{a}_4} \left\{ \gamma^{\mathbf{a}_5}, \frac{\Sigma^{\mathbf{a}_6\mathbf{a}_7}}{2} \right\} \gamma^{\mathbf{a}_8)} \right] \\
&\quad - \frac{i}{4} f_2(q^2) q_{\mu_8} q_{\mu_4} \bar{e}_{\mathbf{a}_1}^{\mu_1} \bar{e}_{\mathbf{a}_4}^{\mu_4} \bar{e}_{\mathbf{a}_5}^{\mu_5} \bar{e}_{\mathbf{a}_8}^{\mu_8} \text{Tr} \left[ \left\{ \gamma^{\mathbf{a}_1}, \frac{\Sigma^{\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3}}{2} \right\} \gamma^{(\mathbf{a}_4} \left\{ \gamma^{\mathbf{a}_5}, \frac{\Sigma^{\mathbf{a}_6\mathbf{a}_7}}{2} \right\} \gamma^{\mathbf{a}_8)} \right].
\end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Tr} \left[ \left\{ \gamma^{\mathbf{a}_1}, \frac{\Sigma^{\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3}}{2} \right\} \gamma^{(\mathbf{a}_4} \left\{ \gamma^{\mathbf{a}_5}, \frac{\Sigma^{\mathbf{a}_6\mathbf{a}_7}}{2} \right\} \gamma^{\mathbf{a}_8)} \right] \\
&= X(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4\mathbf{a}_5\mathbf{a}_6\mathbf{a}_7\mathbf{a}_8) \\
&\quad - 8\eta^{\mathbf{a}_1[\mathbf{a}_3\eta^{\mathbf{a}_2](\mathbf{a}_4\eta^{\mathbf{a}_8)[\mathbf{a}_6\eta^{\mathbf{a}_7]\mathbf{a}_5} + 4\eta^{\mathbf{a}_4\mathbf{a}_8}\eta^{\mathbf{a}_1[\mathbf{a}_3\eta^{\mathbf{a}_2][\mathbf{a}_6\eta^{\mathbf{a}_7]\mathbf{a}_5}.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

第2行目から  $q^2 \bar{g}^{\mu_1\mu_5}$  は出ない。また、

$$X(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4\mathbf{a}_5\mathbf{a}_6\mathbf{a}_7\mathbf{a}_8) \stackrel{d}{=} \text{Tr} \left[ \gamma^{\mathbf{a}_1} \Sigma^{\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3} \gamma^{(\mathbf{a}_4} \gamma^{|\mathbf{a}_5} \Sigma^{\mathbf{a}_6\mathbf{a}_7} \gamma^{\mathbf{a}_8)} \right]$$

と定義した。我々は、tensor structure が  $\eta^{\mathbf{a}_6[\mathbf{a}_2\eta^{\mathbf{a}_3]\mathbf{a}_7}\eta^{\mu_1\mu_5}q^2$  の構造を持っているところのみに着目したいので、第1項は  $\eta^{\mathbf{a}_6[\mathbf{a}_2\eta^{\mathbf{a}_3]\mathbf{a}_7}\eta^{\mu_1\mu_5}$  のところのみを、第2項からは  $\eta^{\mathbf{a}_6[\mathbf{a}_2\eta^{\mathbf{a}_3]\mathbf{a}_7}\eta^{\mu_1\mu_5}q^2$  の構造を持っているところのみを取り出せば良い。  $X(\dots)$  の公式は付録に与えているものを用いる:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} X(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4\mathbf{a}_5\mathbf{a}_6\mathbf{a}_7\mathbf{a}_8) &= \frac{1}{8} \text{Tr} [\mathbf{a}_1[\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3](\mathbf{a}_4[\mathbf{a}_5[\mathbf{a}_6\mathbf{a}_7]|\mathbf{a}_8)] \\
&= 4\eta^{\mathbf{a}_4\mathbf{a}_8}\eta^{(\mathbf{a}_1[\mathbf{a}_2\eta^{\mathbf{a}_3][\mathbf{a}_6\eta^{\mathbf{a}_7]\mathbf{a}_5)} - 8\eta^{(\mathbf{a}_1[\mathbf{a}_2\eta^{\mathbf{a}_3](\mathbf{a}_4\eta^{\mathbf{a}_8)[\mathbf{a}_6\eta^{\mathbf{a}_7]\mathbf{a}_5)} \\
&\quad + 4\eta^{\mathbf{a}_1(\mathbf{a}_8\eta^{[\mathbf{a}_2[\mathbf{a}_6\eta^{\mathbf{a}_3]\mathbf{a}_5}\eta^{\mathbf{a}_4)\mathbf{a}_7]} + 4\eta^{\mathbf{a}_5(\mathbf{a}_8\eta^{[\mathbf{a}_2[\mathbf{a}_6\eta^{\mathbf{a}_7]\mathbf{a}_1}\eta^{\mathbf{a}_4)\mathbf{a}_3]} \\
&\quad - 2\eta^{\mathbf{a}_1(\mathbf{a}_4\eta^{[\mathbf{a}_2[\mathbf{a}_6\eta^{\mathbf{a}_3]\mathbf{a}_7]}\eta^{\mathbf{a}_8)\mathbf{a}_5} \\
&\quad + 4\eta^{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_5}\eta^{[\mathbf{a}_2(\mathbf{a}_8\eta^{\mathbf{a}_3][\mathbf{a}_6\eta^{\mathbf{a}_4)\mathbf{a}_7]} + \eta^{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_5}\eta^{\mathbf{a}_4\mathbf{a}_8}\eta^{\mathbf{a}_6[\mathbf{a}_2\eta^{\mathbf{a}_3]\mathbf{a}_7}.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

これを使って各項の tensor structure を計算して、欲しいものを取り出すと、

$$\begin{aligned}
& \bar{e}_{\mathbf{a}_1}{}^{\mu_1} \bar{e}_{\mathbf{a}_5}{}^{\mu_5} \eta_{\mathbf{a}_4 \mathbf{a}_8} X(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4 \mathbf{a}_5 \mathbf{a}_6 \mathbf{a}_7 \mathbf{a}_8) \\
&= 16 \bar{e}^{[\mathbf{a}_2(\mu_1 \eta^{\mathbf{a}_3][\mathbf{a}_6 \bar{e}^{\mathbf{a}_7] \mu_5)} + 16 \eta^{[\mathbf{a}_2[\mathbf{a}_6 e^{\mathbf{a}_3] \mu_5} \bar{e}^{\mathbf{a}_7] \mu_1} - 4 \eta^{[\mathbf{a}_2[\mathbf{a}_6 \eta^{\mathbf{a}_3] \mathbf{a}_7]} \bar{g}^{\mu_1 \mu_5} \\
&\supset - 4 \eta^{[\mathbf{a}_2[\mathbf{a}_6 \eta^{\mathbf{a}_3] \mathbf{a}_7]} \eta^{\mu_1 \mu_5}.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

第2項は、

$$\begin{aligned}
& q_{\mu_4} q_{\mu_8} \bar{e}_{\mathbf{a}_1}{}^{\mu_1} \bar{e}_{\mathbf{a}_4}{}^{\mu_4} \bar{e}_{\mathbf{a}_5}{}^{\mu_5} \bar{e}_{\mathbf{a}_8}{}^{\mu_8} X(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4 \mathbf{a}_5 \mathbf{a}_6 \mathbf{a}_7 \mathbf{a}_8) \\
&= + 2q^2 \bar{g}^{\mu_1 \mu_5} \eta^{\mathbf{a}_6[\mathbf{a}_2 \eta^{\mathbf{a}_3] \mathbf{a}_7} - 4q^{\mu_1} q^{\mu_5} \eta^{[\mathbf{a}_2[\mathbf{a}_6 \eta^{\mathbf{a}_3] \mathbf{a}_7]} \\
&\quad + 8q^2 \bar{e}^{[\mathbf{a}_2(\mu_1 \eta^{\mathbf{a}_3][\mathbf{a}_6 \bar{e}^{\mathbf{a}_7] \mu_5)} + 8\bar{g}^{\mu_1 \mu_5} q^{[\mathbf{a}_2 \eta^{\mathbf{a}_3] \mathbf{a}_7} [\mathbf{a}_6 q^{\mathbf{a}_7]} \\
&\quad - 16q^{\mathbf{a}_3]} q^{[\mathbf{a}_6 \bar{e}^{[\mathbf{a}_2(\mu_1 \bar{e}^{\mathbf{a}_7] \mu_5)} \\
&\quad + 8q^{\mu_1} q^{\mathbf{a}_7]} \eta^{[\mathbf{a}_2[\mathbf{a}_6 \bar{e}^{\mathbf{a}_3] \mu_5} + 8q^{\mu_5} q^{\mathbf{a}_3]} \eta^{[\mathbf{a}_2[\mathbf{a}_6 \bar{e}^{\mathbf{a}_7] \mu_1} \\
&\supset + 2q^2 \eta^{\mu_1 \mu_5} \eta^{\mathbf{a}_6[\mathbf{a}_2 \eta^{\mathbf{a}_3] \mathbf{a}_7} - 4q^{\mu_1} q^{\mu_5} \eta^{[\mathbf{a}_2[\mathbf{a}_6 \eta^{\mathbf{a}_3] \mathbf{a}_7]}.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

最後に背景場の条件式  $\bar{e} = \delta$  を代入している。よって、

$$\begin{aligned}
& I(q)^{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_6 \mathbf{a}_7, \mu_1 \mu_5} \\
&\supset - i \left( f_1(q^2) + \frac{1}{2} f_2(q^2) q^2 \right) \eta^{\mu_1 \mu_5} \eta^{\mathbf{a}_6[\mathbf{a}_2 \eta^{\mathbf{a}_3] \mathbf{a}_7} + i f_2(q^2) q^{\mu_1} q^{\mu_5} \eta^{\mathbf{a}_6 \mathbf{a}_2 \eta^{\mathbf{a}_3] \mathbf{a}_7} \\
&= - \frac{i}{64\pi^2} \left( \Lambda^2 - \mu^2 + \int_0^1 dx \left( \frac{x^2(1-x)^2}{\Lambda^2 + x(1-x)q^2} - \frac{x^2(1-x)^2}{\mu^2 + x(1-x)q^2} \right) q^4 \right) \eta^{\mu_1 \mu_5} \eta^{\mathbf{a}_6[\mathbf{a}_2 \eta^{\mathbf{a}_3] \mathbf{a}_7} \\
&\quad + \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \left( \frac{\Delta}{\Lambda^2 + \Delta} - \frac{\Delta}{\mu^2 + \Delta} + \ln \frac{\Lambda^2 + \Delta}{\mu^2 + \Delta} \right) q^{\mu_1} q^{\mu_5} \eta^{\mathbf{a}_6[\mathbf{a}_2 \eta^{\mathbf{a}_3] \mathbf{a}_7}.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

したがって、 $\eta^{\mathbf{a}_6[\mathbf{a}_2 \eta^{\mathbf{a}_3] \mathbf{a}_7} \eta^{\mu_1 \mu_5} q^2$  の部分はない;

$$\beta = 0. \tag{4.37}$$

よってフェルミオンの 1-loop では運動項が生成されない。

## フェルミオンが質量を持つ場合

Vierbein の場合と同様に、ファインマンルールに質量の効果を追加すれば良い:

$$\begin{aligned}
& I_m(q)^{\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3\mathbf{a}_6\mathbf{a}_7,\mu_1\mu_5} \\
&= (-1) \int_p \text{Tr} \left[ \left( -\frac{i}{2} |\bar{e}| \bar{e}_{\mathbf{a}_1}^{\mu_1} \left\{ \gamma^{\mathbf{a}_1}, \frac{\Sigma^{\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3}}{2} \right\} \right) \frac{1}{|\bar{e}| (-\bar{e}_{\mathbf{a}_4}^{\mu_4} \gamma^{\mathbf{a}_4} p_{\mu_4} + im)} \right. \\
&\quad \left. \times \left( -\frac{i}{2} |\bar{e}| \bar{e}_{\mathbf{a}_5}^{\mu_5} \left\{ \gamma^{\mathbf{a}_5}, \frac{\Sigma^{\mathbf{a}_6\mathbf{a}_7}}{2} \right\} \right) \frac{1}{|\bar{e}| (-\bar{e}_{\mathbf{a}_8}^{\mu_8} \gamma^{\mathbf{a}_8} (p+q)_{\mu_8} + im)} \right] \\
&= \frac{1}{4} \bar{e}_{\mathbf{a}_1}^{\mu_1} \bar{e}_{\mathbf{a}_4}^{\mu_4} \bar{e}_{\mathbf{a}_5}^{\mu_5} \bar{e}_{\mathbf{a}_8}^{\mu_8} \int_p \frac{p_{\mu_4} (p+q)_{\mu_8}}{((p+q)^2 + m^2)(p^2 + m^2)} \text{Tr} \left[ \left\{ \gamma^{\mathbf{a}_1}, \frac{\Sigma^{\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3}}{2} \right\} \gamma^{\mathbf{a}_4} \left\{ \gamma^{\mathbf{a}_5}, \frac{\Sigma^{\mathbf{a}_6\mathbf{a}_7}}{2} \right\} \gamma^{\mathbf{a}_8} \right] \\
&\quad - \frac{1}{4} \bar{e}_{\mathbf{a}_1}^{\mu_1} \bar{e}_{\mathbf{a}_5}^{\mu_5} \int_p \frac{m^2}{((p+q)^2 + m^2)(p^2 + m^2)} \text{Tr} \left[ \left\{ \gamma^{\mathbf{a}_1}, \frac{\Sigma^{\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3}}{2} \right\} \left\{ \gamma^{\mathbf{a}_5}, \frac{\Sigma^{\mathbf{a}_6\mathbf{a}_7}}{2} \right\} \right].
\end{aligned} \tag{4.38}$$

第1項は質量がゼロの場合とほとんど同じである. 第2項の tensor structure は,

$$\text{Tr} \left[ \left\{ \gamma^{\mathbf{a}_1}, \frac{\Sigma^{\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3}}{2} \right\} \left\{ \gamma^{\mathbf{a}_5}, \frac{\Sigma^{\mathbf{a}_6\mathbf{a}_7}}{2} \right\} \right] \supset -2\eta^{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_5} \eta^{\mathbf{a}_6[\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3]\mathbf{a}_7} \tag{4.39}$$

という形をしている. 一方, 運動量積分は,

$$\begin{aligned}
\int_p \frac{m^2}{((p+q)^2 + m^2)(p^2 + m^2)} &= i \frac{m^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left( \frac{\Delta_m}{\Lambda^2 + \Delta_m} - 1 + \ln \frac{\Lambda^2 + \Delta_m}{\Delta_m} \right) \\
& \quad (\Delta_m = x(1-x)q^2 + m^2).
\end{aligned} \tag{4.40}$$

したがって,

$$\begin{aligned}
& I_m(q)^{\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3\mathbf{a}_6\mathbf{a}_7,\mu_1\mu_5} \\
&= -i \frac{1}{64\pi^2} \frac{\Lambda^4}{2(\Lambda^2 + m^2)^2} \eta^{\mathbf{a}_6[\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3]\mathbf{a}_7} (q^2 \eta^{\mu_1\mu_5} - q^{\mu_1} q^{\mu_5}) + \dots
\end{aligned} \tag{4.41}$$

よって,

$$Z = \frac{1}{128\pi^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{m^2}{\Lambda^2}\right)^2}. \tag{4.42}$$

フェルミオンが質量を持つ場合は低エネルギー側で運動項が生成する. 局所ローレンツゲージ場の波動関数くりこみは, 2次発散も log 発散も含まない. この相殺の背後には対称性などの何らかのメカニズムがあると考えている.

## 4.7 まとめ

以上より, フェルミオンが質量ゼロの場合は vierbein の運動項も局所ローレンツゲージ場の運動項も生成されないということがわかった.

フェルミオンが質量を持つ場合は, vierbein と局所ローレンツゲージ場のそれぞれの運動項が生成される. この結果として, 低エネルギーでは一般相対性理論で記述ができると期待したい. しかし, 計量の高階微分と対応していると考えられる局所ローレンツゲージ場の運動項や vierbein の運動項に対応する項は, 一般相対性理論にはない. この問題は, 局所ローレンツゲージ場の運動項については, 4 点フェルミ相互作用のアナロジーで, 局所ローレンツゲージ場が  $M_{Pl}$  程度の質量を持っている低エネルギーでは 4 点相互作用が実現されていると考えれば問題ではなくなるだろう (図.4.1). 実際, vierbein がゼロでない期待値を持つ場合, Einstein-Hilbert 項に局所ローレンツゲージ場の質量項が含まれることが分かり,  $\Lambda_{UV}$  からエネルギーが下がると massive ゲージ場の運動項が生成され, 低エネルギーでは理論の dynamics に効かなくなる. これは hidden local symmetry という考え方である<sup>10)</sup> この考え方は一般相対性理論がくりこみ不可能であることに対する 1 つの見方になっているのかもしれない.

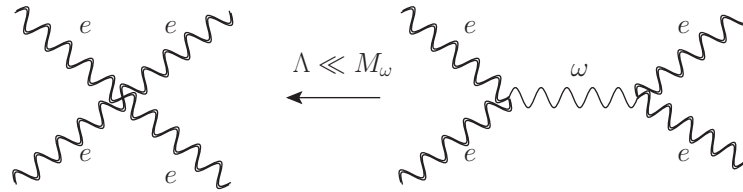


図 4.1: 低エネルギーで実現されていると考える, vierbein の 4 点相互作用

また, 我々は, 重力はあるスケール  $\Lambda_{UV}$  より上ではフェルミオンの複合状態で書けていて, 重力理論は実はフェルミオンの composite theory だという見方もできるだろうと考えている<sup>11)</sup>. この見方は, 弦理論が composite theory だという議論とも関係していると推測することもできるだろう. 重力の自由度がフェルミオンの複合状態であるという考えは, [37] でされている.

今後やることは, 局所ローレンツゲージ場の波動関数くりこみ  $Z_\omega$  などの running を, 1-loop exact な汎関数くりこみ群を用いて計算することである.

<sup>10)</sup>Hidden local symmetry を扱っている論文は [35, 36] などがある.

<sup>11)</sup>ただし, フェルミオンが質量を持っている場合のみを考えている.

## 第5章 結論

以上, 一般相対性理論を拡張した理論の候補として, ECG を考えてきた. 第2章では, vierbein の導入と局所ローレンツ対称性の説明を行い局所ローレンツゲージ場の1次の作用が Einstein-Hilbert 作用になることを確認した. そして vierbein formalism では metric theory とは違い, スピノル場を扱えることがわかった. 第3章では, 実際に局所ローレンツゲージ場の運動項を含んだモデルを構築し, 平均場近似と対称性の破れを組み合わせることでプランク質量を生成を議論した論文についてレビューした. そして, 第4章で, 我々のモデルについての議論を行い, フェルミオンが massive の場合のみ, ある UV スケール  $\Lambda_{UV}$  より低いエネルギーで局所ローレンツゲージ場の運動項が生成されることが分かった.

以上, 重力理論を局所ローレンツゲージ理論として定式化する試みを行ってきた. 大事なことは vierbein と局所ローレンツゲージ場を基本自由度として独立に扱っていることである. もちろん低エネルギーでは一般相対性理論が実現されていることを期待したいので, 個人的には, なんらかの形で torsion free 条件などが実現されていると考えたいがその解析にはまだ至っていない. ただ, 私は, 一般相対性理論の背後に局所ローレンツゲージ場の dynamics があるのではないかと推測している.

今後の課題として,  $F^a{}_{b\mu\nu}F^b{}_{a}{}^{\mu\nu}$  は  $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$  に対応するが, 高階微分重力理論で現れた  $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$  や  $R^2$  に対応する作用が,  $\Lambda_{UV}$  より低いエネルギーでの有効作用  $S_k$  に現れてもいいはずである. これらの作用の tensor structure と 1-loop 計算の tensor structure との対応を調べることも課題である.

## 付録 A 微分形式における作用の構成

ゲージ理論の作用は微分形式で書けることが知られている。そこで、この方法で作用を作ることを考える。この節では一般の時空次元を考える。また、特に断らない限り Lorentzian とする。添字をわかりやすくするため、時空次元を  $d$  としたときに、 $(0 \cdots d-1)$  のところを、 $(1 \cdots n)$  とかくことにする。

### A.1 完全反対称テンソルの公式

まず、いくつか記号を定義する。  $n$  階完全反対称テンソルを、

$$\epsilon[\mu_1 \cdots \mu_n] = \begin{cases} 1 & (1 \cdots n) \text{ の偶置換} \\ -1 & (1 \cdots n) \text{ の奇置換} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

で定義する。これを使うと、

$$dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_n} = \epsilon[\mu_1 \cdots \mu_n] d^n x. \quad (\text{A.2})$$

また行列式は、

$$g = \det_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} = g_{1\nu_1} \cdots g_{n\nu_n} \epsilon[\nu_1 \cdots \nu_n] \quad (\text{A.3})$$

$$|e| = \det_{\mathbf{a}, \mu} e^{\mathbf{a}}_{\mu} = e^1_{\mu_1} \cdots e^n_{\mu_n} \epsilon[\mu_1 \cdots \mu_n]. \quad (\text{A.4})$$

ここから以下の公式が従う:

$$g^{1\nu_1} \cdots g^{n\nu_n} \epsilon[\nu_1 \cdots \nu_n] = \frac{1}{g} \quad (\text{A.5})$$

$$g_{\mu_1\nu_1} \cdots g_{\mu_n\nu_n} \epsilon[\nu_1 \cdots \nu_n] = g \epsilon[\mu_1 \cdots \mu_n] \quad (\text{A.6})$$

行列式の変換も簡単にわかって,

$$|e(x)| \rightarrow |e'(x')| = e'^1_{\mu_1}(x') \cdots e'^n_{\mu_n}(x') \epsilon[\mu_1 \cdots \mu_n] \quad (\text{A.7})$$

$$= \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\mu_n}}{\partial x^{\nu_n}} e^1_{\nu_1}(x) \cdots e^n_{\nu_n}(x) \epsilon[\mu_1 \cdots \mu_n] \quad (\text{A.8})$$

$$= \frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(x'^1, \dots, x'^n)} e^1_{\nu_1}(x) \cdots e^n_{\nu_n}(x) \epsilon[\nu_1 \cdots \nu_n] \quad (\text{A.9})$$

$$= \frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(x'^1, \dots, x'^n)} |e(x)| \quad (\text{A.10})$$

また以下の量を定義すると,

$$\epsilon_{\mu_1 \cdots \mu_n} = |e| \epsilon[\mu_1 \cdots \mu_n] \quad (\text{A.11})$$

form として  $\epsilon$  が書ける:

$$\epsilon = \frac{1}{n!} \epsilon_{\mu_1 \cdots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_n} \quad (\text{A.12})$$

これは diff に対して不変である:

$$\begin{aligned} \epsilon' &= \frac{1}{n!} \epsilon'_{\mu_1 \cdots \mu_n}(x') dx'^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx'^{\mu_n} \\ &= \frac{1}{n!} |e'(x')| \epsilon[\mu_1 \cdots \mu_n](x') dx'^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx'^{\mu_n} \\ &= \frac{1}{n!} \frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(x'^1, \dots, x'^n)} |e(x)| \epsilon[\mu_1 \cdots \mu_n] \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_n}}{\partial x^{\nu_n}} dx^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_n} \quad (\text{A.13}) \\ &= \frac{1}{n!} \frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(x'^1, \dots, x'^n)} |e(x)| \epsilon[\nu_1 \cdots \nu_n] \frac{\partial(x'^1, \dots, x'^n)}{\partial(x^1, \dots, x^n)} dx^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_n} \\ &= \frac{1}{n!} |e(x)| \epsilon[\nu_1 \cdots \nu_n] dx^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_n} = \epsilon \end{aligned}$$

また, 縮約の公式が簡単にかけて,

$$\epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_n} \stackrel{d}{=} g^{\mu_1 \nu_1} \cdots g^{\mu_n \nu_n} \epsilon_{\nu_1 \cdots \nu_n} = -\frac{1}{|e|} \epsilon[\mu_1 \cdots \mu_n] \quad (\text{A.14})$$

$$\epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_n} \epsilon_{\mu_1 \cdots \mu_n} = -n! \quad (\text{A.15})$$

$$\epsilon^{\mu_1 \nu_1 \cdots \nu_n} \epsilon_{\nu_1 \nu_1 \cdots \nu_n} = -(n-1)! \delta^{\mu_1}_{\nu_1} \quad (\text{A.16})$$

LL の足に対しても完全反対称テンソルが定義できて,

$$\epsilon[\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n] = \begin{cases} 1 & (1 \cdots n) \text{ の偶置換} \\ -1 & (1 \cdots n) \text{ の奇置換} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

すると,

$$\epsilon[\mu_1 \cdots \mu_n] e^{\mathbf{a}_1 \mu_1} \cdots e^{\mathbf{a}_n \mu_n} = |e| \epsilon[\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n] \quad (\text{A.18})$$

$$\epsilon[\mu_1 \cdots \mu_n] e_{\mathbf{a}_1}^{\mu_1} \cdots e_{\mathbf{a}_n}^{\mu_n} = \frac{1}{|e|} \epsilon[\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n] \quad (\text{A.19})$$

$$\epsilon[\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n] \epsilon[\mu_1 \cdots \mu_n] e^{\mathbf{a}_1 \mu_1} \cdots e^{\mathbf{a}_n \mu_n} = n! |e| \quad (\text{A.20})$$

$$\epsilon[\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n] \epsilon[\mu_1 \cdots \mu_n] e_{\mathbf{a}_1}^{\mu_1} \cdots e_{\mathbf{a}_n}^{\mu_n} = \frac{n!}{|e|} \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{1}{(n-p)! p!} \epsilon[\nu_1 \cdots \nu_{n-p} \mu_1 \cdots \mu_p] \epsilon[\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_{n-p} \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_p] e^{\mathbf{b}_1 \nu_1} \cdots e^{\mathbf{b}_{n-p} \nu_{n-p}} = |e| e_{\mathbf{a}_1}^{[\mu_1} \cdots e_{\mathbf{a}_p}^{\mu_p]} \quad (\text{A.22})$$

ただし,  $0 \leq p \leq n$ . 上2つの公式から使いやすい数式を導くと,

$$\epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_n} = \epsilon^{a_1 \cdots a_n} e_{a_1}^{\mu_1} \cdots e_{a_n}^{\mu_n} \quad (\text{A.23})$$

$$\epsilon^{a_1 \cdots a_n} = \epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_n} e^{\mathbf{a}_1 \mu_1} \cdots e^{\mathbf{a}_n \mu_n} \quad (\text{A.24})$$

$$\epsilon_{\mu_1 \cdots \mu_n} = \epsilon_{a_1 \cdots a_n} e^{\mathbf{a}_1 \mu_1} \cdots e^{\mathbf{a}_n \mu_n} \quad (\text{A.25})$$

( $\epsilon_{\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n} \stackrel{d}{=} \epsilon[\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n]$  とした.)<sup>1)</sup> 逆行列の表現もかけて,

$$\begin{aligned} e_{\mathbf{a}_n}^{\mu_n} &= -\frac{1}{(n-1)!} e^{\mathbf{b}_1 \nu_1} \cdots e^{\mathbf{b}_{n-1} \nu_{n-1}} \epsilon_{\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_{n-1} \mathbf{a}_n} \epsilon^{\nu_1 \cdots \nu_{n-1} \mu_n} \\ &= \frac{1}{|e|} \frac{1}{(n-1)!} \epsilon[\nu_1 \cdots \nu_{n-1} \mu_n] \epsilon[\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_{n-1} \mathbf{a}_n] e^{\mathbf{b}_1 \nu_1} \cdots e^{\mathbf{b}_{n-1} \nu_{n-1}} \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

以降これらの公式を使っていく. また, クロネッカーデルタを拡張した量として,

$$\delta_{\nu_1 \cdots \nu_p}^{\mu_1 \cdots \mu_p} = p! \delta_{[\nu_1}^{\mu_1} \cdots \delta_{\nu_p]}^{\mu_p]} \quad (\text{A.27})$$

を定義する. ただし,  $0 \leq p \leq n$ . この量は以下の性質を満たす:

$$\epsilon[\mu_1 \cdots \mu_n] = \delta_{1 \cdots n}^{\mu_1 \cdots \mu_n} = \delta_{\mu_1 \cdots \mu_n}^{1 \cdots n} \quad (\text{A.28})$$

$$\frac{1}{p!} \delta_{\nu_1 \cdots \nu_p}^{\mu_1 \cdots \mu_p} \delta_{\rho_1 \cdots \rho_p}^{\nu_1 \cdots \nu_p} = \delta_{\rho_1 \cdots \rho_p}^{\mu_1 \cdots \mu_p}. \quad (\text{A.29})$$

さらに公式として以下を書いておく:

$$\frac{1}{p!} \epsilon[\mu_1 \cdots \mu_{n-p} \rho_1 \cdots \rho_p] \epsilon[\nu_1 \cdots \nu_{n-p} \rho_1 \cdots \rho_p] = \delta_{\nu_1 \cdots \nu_{n-p}}^{\mu_1 \cdots \mu_{n-p}} \quad (\text{A.30})$$

$$\det M^{\mu}_{\nu} = \frac{1}{n!} \delta_{\mu_1 \cdots \mu_n}^{\nu_1 \cdots \nu_n} M^{\mu_1}_{\nu_1} \cdots M^{\mu_n}_{\nu_n}. \quad (\text{A.31})$$

<sup>1)</sup>これらは Lorentzian か Euclidean によらず成り立つ.



## A.2 Hodge star

$T$ : p-form とすると,

$$T = \frac{1}{p!} T_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \quad (\text{A.32})$$

ただし,  $0 \leq p \leq n$ . vierbein は一般座標変換に対してベクトルの変換をするので, 1形式でかける<sup>2)</sup>.

$$e^{\mathbf{a}} = e^{\mathbf{a}}_{\mu} dx^{\mu} \quad (\text{A.33})$$

さて, このとき Hodge star の作用は,

$$\star T = \frac{1}{(n-p)!p!} T^{\mu_1 \dots \mu_p} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_p \nu_1 \dots \nu_{n-p}} dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_{n-p}} \quad (\text{A.34})$$

と定義される.

$$(\star T)_{\nu_1 \dots \nu_{n-p}} = \frac{1}{p!} T^{\mu_1 \dots \mu_p} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_p \nu_1 \dots \nu_{n-p}} \quad (\text{A.35})$$

Hodge star を使うと, 不変な体積要素が簡単に書けて,

$$\text{Vol} = \star 1 = \epsilon = \frac{1}{n!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n} \quad (\text{A.36})$$

ここから例えば  $p$  階完全反対称テンソル  $T_{\mu_1 \dots \mu_p}$  からなる作用を描こうとすると,

$$\begin{aligned} \int T \wedge \star T &= \int \frac{1}{p!} T_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \wedge \left( \frac{1}{(n-p)!p!} T^{\rho_1 \dots \rho_p} \epsilon_{\rho_1 \dots \rho_p \nu_1 \dots \nu_{n-p}} dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_{n-p}} \right) \\ &= \int d^n x \frac{|e|}{p!(n-p)!p!} T_{\mu_1 \dots \mu_p} T^{\rho_1 \dots \rho_p} \epsilon[\rho_1 \dots \rho_p \nu_1 \dots \nu_{n-p}] \epsilon[\mu_1 \dots \mu_p \nu_1 \dots \nu_{n-p}] \\ &= \int d^n x \frac{|e|}{p!p!} T_{\mu_1 \dots \mu_p} T^{\rho_1 \dots \rho_p} \delta_{\rho_1 \dots \rho_p}^{\mu_1 \dots \mu_p} = \int d^n x \frac{|e|}{p!} T_{\mu_1 \dots \mu_p} T^{\mu_1 \dots \mu_p} \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

$e^{\mathbf{a}}$  と  $F^{\mathbf{ab}}$  を使って作用を書こうとすると, 例えば,

$$\frac{\Lambda}{n!} \int \epsilon_{\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n} e^{\mathbf{a}_1} \wedge \dots \wedge e^{\mathbf{a}_n} = \Lambda \int d^n x |e|. \quad (\text{A.38})$$

これは宇宙項である. また,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2!(n-2)!} \int \epsilon_{\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n} e^{\mathbf{a}_1} \wedge \dots \wedge e^{\mathbf{a}_{n-2}} \wedge F^{\mathbf{a}_{n-1} \mathbf{a}_n} \\ &= \frac{1}{2!(n-2)!} \int d^n x \epsilon_{\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n} e^{\mathbf{a}_1}_{\mu_1} \dots e^{\mathbf{a}_{n-2}}_{\mu_{n-2}} F^{\mathbf{a}_{n-1} \mathbf{a}_n}_{\mu_{n-1} \mu_n} \epsilon[\mu_1 \dots \mu_n] \\ &= \frac{1}{2!(n-2)!} \int d^n x |e| e_{\mathbf{a}_{n-1}}^{\mu_{n-1}} e_{\mathbf{a}_n}^{\mu_n} F^{\mathbf{a}_{n-1} \mathbf{a}_n}_{\mu_{n-1} \mu_n} \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

これは,  $d$ 次元の Einstein-Hilbert 作用である.

<sup>2)</sup>計量は微分形式で書けなかった.

### A.3 2.6節の証明

2.6節の  $S_{\text{EH}} = S_E$ ,  $S_{e1} = S_{e2}$  を証明する.

$$\begin{aligned}
S_E &= \frac{1}{4} \int e^{\mathbf{a}} \wedge e^{\mathbf{b}} \wedge F^{\mathbf{cd}} \epsilon_{\mathbf{abcd}} \\
&= \frac{1}{8} \int d^4x e^{\mathbf{a}}_{\mu} e^{\mathbf{b}}_{\nu} F^{\mathbf{cd}}_{\rho\sigma} \epsilon[\mathbf{abcd}] \epsilon[\mu\nu\rho\sigma] \\
&= \frac{1}{8} \int d^4x |e| 4e_{\mathbf{a}}^{\mu} e_{\mathbf{b}}^{\nu} F^{\mathbf{ab}}_{\mu\nu} \epsilon[\mathbf{abcd}] \epsilon[\mu\nu\rho\sigma] \\
&= \frac{1}{2} \int d^4x |e| e^{\mathbf{a}\mu} e^{\mathbf{b}\nu} F_{\mathbf{ab}\mu\nu} = S_{\text{EH}}
\end{aligned} \tag{A.40}$$

$$\begin{aligned}
S_{e2} &= - \int e^{\mathbf{a}} \wedge e^{\mathbf{b}} \wedge F_{\mathbf{ab}} \\
&= - \frac{1}{2} \int d^4x e^{\mathbf{a}}_{\mu} e^{\mathbf{b}}_{\nu} F_{\mathbf{ab}\rho\sigma} \epsilon[\mu\nu\rho\sigma] \\
&= - \frac{1}{2} \int d^4x |e| e_{\mathbf{c}}^{\rho} e_{\mathbf{d}}^{\sigma} F_{\mathbf{ab}\rho\sigma} \epsilon[\mathbf{abcd}] \\
&= \frac{1}{2} \int d^4x |e| e_{\mathbf{c}}^{\rho} e_{\mathbf{d}}^{\sigma} F_{\mathbf{ab}\rho\sigma} \epsilon^{\mathbf{abcd}} = S_{e1}
\end{aligned} \tag{A.41}$$

## 付録B 熱核展開

場の理論のくりこみの際に、有効作用の計算において  $\nabla^2$  の固有値を足しあげることが、背景場が平坦時空の場合は、 $e^{ipx}$  が完全系を張るため平面波展開が出来て  $\nabla^2$  は  $p^2$  に置き換えられる。しかし、曲がった時空上ではそれが出来ない。この計算を可能にしてくれるのが、熱核展開の方法である。

時空次元は4とする。  $p^2$  の任意の関数  $W(p^2)$  と  $\text{Tr}[W(p^2)]$  が与えられているとする。このとき、  $p^2 = -g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$  であることに注意。この関数をラプラス変換すると、

$$\text{Tr}[W(p^2)] = \int_{-\infty}^{\infty} ds \tilde{W}(s) \text{Tr}[e^{-sp^2}]. \quad (\text{B.1})$$

右辺のトレースを、

$$\text{Tr}[e^{-sp^2}] = \sum_{n=0} B_n(p^2) s^{n/2-2} \quad (\text{B.2})$$

と展開すると、

$$B_n(p^2) = \frac{1}{(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{g} \text{Tr}[\mathbf{b}_n] \quad (\text{B.3})$$

である [17, 19]。  $\mathbf{b}_n$  は熱核係数と呼ばれ、

$$\mathbf{b}_0 = \mathbf{1}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{R}{6} \mathbf{1} \quad (\text{B.4})$$

などになる。よって、  $\text{Tr}[W(p^2)]$  は、

$$\begin{aligned} \text{Tr}[W(p^2)] &= \sum_{n=0} Q_{2-n/2}[W] B_n(p^2) \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ Q_2[W] \int d^4x \sqrt{g} \text{Tr}[\mathbf{b}_0] + Q_1[W] \int d^4x \sqrt{g} \text{Tr}[\mathbf{b}_2] + O(R^2) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

と書ける。  $Q_n[W]$  は、

$$Q_n[W] \stackrel{d}{=} \int_{-\infty}^{\infty} ds s^{-n} \tilde{W}(s). \quad (\text{B.6})$$

で被積分関数が  $\tilde{W}$  だが, Mellin 変換すると,

$$Q_0[W] = W(0) \quad (\text{B.7})$$

$$Q_n[W] = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dz z^{n-1} W(z) \quad (\text{B.8})$$

よって,  $\tilde{W}$  を求める必要はない.  $R$  の高次の項は書いていないが<sup>1)</sup>, これで  $\text{Tr} [W(p^2)]$  を計算できる. 各スピンに対する熱核係数の値など詳細は [38]などを参照してほしい.

---

<sup>1)</sup> [19, 23]などを参照してほしい.

## 付録C Hessianの構造

$S_k$ の各項Hessianの構造を見て, propargator および vertex の tensor structure について計算する. Vierbein と局所ローレンツゲージ場を,

$$e^{\mathbf{a}}{}_{\mu} = \bar{e}^{\mathbf{a}}{}_{\mu} + \hat{e}^{\mathbf{a}}{}_{\mu}, \quad \omega^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{b}\mu} = \bar{\omega}^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{b}\mu} + \hat{\omega}^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{b}\mu} \quad (\text{C.1})$$

と展開する.

### Einstein-Hilbert action

$$S_{\text{EH}} = \frac{M^2}{8} \int d^4x e^{\mathbf{a}}{}_{\mu} e^{\mathbf{b}}{}_{\nu} F^{\mathbf{cd}}{}_{\rho\sigma} \epsilon[\mathbf{abcd}] \epsilon[\mu\nu\rho\sigma] \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned} S_{\text{EH}}^{(2)} &= \frac{M^2}{8} \int d^4x \left[ \hat{e}^{\mathbf{a}}{}_{\mu} \bar{F}^{\mathbf{cd}}{}_{\rho\sigma} \epsilon[\mathbf{abcd}] \epsilon[\mu\nu\rho\sigma] \hat{e}^{\mathbf{b}}{}_{\nu} + 2\bar{e}^{\mathbf{a}}{}_{\mu} \bar{e}^{\mathbf{b}}{}_{\nu} \epsilon[\mathbf{abcd}] \epsilon[\mu\nu\rho\sigma] \hat{\omega}_{\mathbf{ce}\rho} \hat{\omega}^{\mathbf{e}}{}_{\mathbf{d}\sigma} \right. \\ &\quad \left. + 4\hat{e}^{\mathbf{a}}{}_{\mu} \epsilon[\mathbf{abcd}] \epsilon[\mu\nu\rho\sigma] \bar{e}^{\mathbf{b}}{}_{\nu} (\eta_{\mathbf{ce}} \partial_{\rho} + 2\bar{\omega}_{\mathbf{ce}\rho}) \hat{\omega}^{\mathbf{e}}{}_{\mathbf{d}\sigma} \right] \\ &= \frac{M^2}{8} \int d^4x \left[ \hat{e}^{\mathbf{a}}{}_{\mu} \bar{F}^{\mathbf{cd}}{}_{\rho\sigma} \epsilon[\mathbf{abcd}] \epsilon[\mu\nu\rho\sigma] \hat{e}^{\mathbf{b}}{}_{\nu} + 8|\bar{e}| \bar{e}_{[\mathbf{c}}{}^{\rho} \bar{e}_{\mathbf{d}]}{}^{\sigma} \hat{\omega}_{\mathbf{ce}\rho} \hat{\omega}^{\mathbf{e}}{}_{\mathbf{d}\sigma} \right. \\ &\quad \left. + 4\hat{e}^{\mathbf{a}}{}_{\mu} \epsilon[\mathbf{abcd}] \epsilon[\mu\nu\rho\sigma] \bar{e}^{\mathbf{b}}{}_{\nu} (\eta_{\mathbf{ce}} \partial_{\rho} + 2\bar{\omega}_{\mathbf{ce}\rho}) \hat{\omega}^{\mathbf{e}}{}_{\mathbf{d}\sigma} \right] \quad (\text{C.3}) \end{aligned}$$

$\bar{e} = \delta, \bar{\omega} = 0$  なら,

$$S_{\text{EH}}^{(2)} = \frac{M^2}{8} \int d^4x \left[ 8\delta_{[\mathbf{c}}^{\rho} \delta_{\mathbf{d}]}^{\sigma} \hat{\omega}_{\mathbf{ce}\rho} \hat{\omega}^{\mathbf{e}}{}_{\mathbf{d}\sigma} + 4\hat{e}^{\mathbf{a}}{}_{\mu} \epsilon[\mathbf{abcd}] \epsilon[\mu\nu\rho\sigma] \delta_{\nu}^{\mathbf{b}} \partial_{\rho} \hat{\omega}^{\mathbf{c}}{}_{\mathbf{d}\sigma} \right]. \quad (\text{C.4})$$

第1項は局所ローレンツゲージ場の質量項になる.

### 局所ローレンツゲージ場の運動項

$$S = \frac{1}{2g_L^2} \int d^4x |e| F^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{b}\mu\nu} F^{\mathbf{b}}{}_{\mathbf{a}\rho\sigma} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \quad (\text{C.5})$$

$$S^{(2)} = \frac{1}{2g_L} \int d^4x |e| \left[ \bar{g}^{\rho[\mu} \bar{g}^{\nu]\sigma} \hat{e}_\lambda^e \mathcal{O}_{[\hat{e}\hat{e}]_{ef}}^{\lambda\kappa} \hat{e}_\kappa^f + 2\hat{e}_\lambda^e \mathcal{O}_{[\hat{e}\hat{\omega}]_{efd}}^{\lambda\sigma} \hat{\omega}^{fd}_\sigma + \hat{\omega}^{ab}_\lambda \mathcal{O}_{[\hat{\omega}\hat{\omega}]_{abfd}}^{\lambda\sigma} \hat{\omega}^{fd}_\sigma \right] \quad (\text{C.6})$$

$$\mathcal{O}_{[\hat{\omega},\hat{\omega}]_{abfd}}^{\lambda\sigma} = 4 \left( -\overleftarrow{\partial}_\mu \delta_\nu^\lambda \eta_{\mathbf{bd}} \eta_{\mathbf{af}} \partial_\rho - 4g \Omega_{f\mathbf{a}\mu} \delta_\nu^\lambda \eta_{\mathbf{bd}} \partial_\rho \right. \\ \left. - 2g^2 \Omega_{c\mathbf{a}\mu} \delta_\nu^\lambda \eta_{\mathbf{bd}} \Omega_{f\rho}^c + 2g^2 \Omega_{d\mathbf{a}\mu} \delta_\nu^\lambda \Omega_{\mathbf{b}f\rho} - \bar{F}_{\mathbf{ad}\mu\nu} \delta_\rho^\lambda \eta_{\mathbf{b}f} \right) \quad (\text{C.7})$$

$$\mathcal{O}_{[\hat{e}\hat{e}]_{ef}}^{\lambda\kappa} = 2\bar{F}_{cd\mu\nu} \bar{F}_{\rho\sigma}^{cd} \\ \times \left( -2\bar{g}^{\lambda(\mu} \bar{e}_e^{\rho)} \bar{g}^{\kappa(\sigma} \bar{e}_f^{\nu)} - \left( \bar{g}^{\lambda\kappa} \bar{e}_e^\mu \bar{e}_f^\rho + 2\bar{g}^{\lambda(\mu} \bar{e}_f^{\rho)} \bar{e}_e^\kappa - 2\bar{e}_e^\lambda \bar{g}^{\kappa(\mu} \bar{e}_f^{\rho)} + \bar{e}_{[e}^\lambda \bar{e}_{f]}^\kappa \bar{g}^{\mu\rho} \right) \bar{g}^{\nu\sigma} \right) \quad (\text{C.8})$$

$$\mathcal{O}_{[\hat{e}\hat{\omega}]_{efd}}^{\lambda\sigma} = 2\bar{F}_{cd\mu\nu} \left( 2\bar{g}^{\lambda\mu} \bar{e}_e^{[\rho} \bar{g}^{\nu]\sigma]} + 2\bar{g}^{\lambda[\rho} \bar{e}_e^{|\mu} \bar{g}^{\nu]\sigma]} - \bar{e}_e^\lambda \bar{g}^{\mu\rho} \bar{g}^{\nu\sigma} \right) (\delta_f^c \partial_\rho + 2g \Omega_{f\rho}^c) \quad (\text{C.9})$$

$\bar{e} = \delta, \bar{\omega} = 0$  なら,

$$\mathcal{O}_{[\hat{\omega},\hat{\omega}]_{abfd}}^{\lambda\sigma} = 4\eta^{\rho[\mu} \eta^{\nu]\sigma} \delta_\nu^\lambda \eta_{\mathbf{bd}} \eta_{\mathbf{af}} \partial_\mu \partial_\rho = \eta_{d[\mathbf{b}} \eta_{\mathbf{a}]} f (\eta^{\lambda\sigma} \partial^\rho \partial_\rho - \partial^\sigma \partial^\lambda) \\ \mathcal{O}_{[\hat{e}\hat{e}]} = \mathcal{O}_{[\hat{e}\hat{\omega}]} = 0 \quad (\text{C.10})$$

となる。つまり、局所ローレンツゲージ場の運動項のみになり、それは transverse の構造になっている。

## 付録D ガンマ行列の計算

記法として,

$$\mathrm{Tr}[\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n] \stackrel{d}{=} \mathrm{Tr}[\gamma^{\mathbf{a}_1} \cdots \gamma^{\mathbf{a}_n}] \quad (\text{D.1})$$

を用いる. 本論で用いる重要な公式として,

$$\mathrm{Tr}[\mathbf{a}_n \cdots \mathbf{a}_1] = \mathrm{Tr}[\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n] \quad (\text{D.2})$$

$$\mathrm{Tr}[\mathbf{a}\mathbf{b}] = 4\eta^{\mathbf{a}\mathbf{b}} \quad (\text{D.3})$$

$$\mathrm{Tr}[\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}\mathbf{d}] = 4\left(\eta^{\mathbf{a}\mathbf{b}}\eta^{\mathbf{c}\mathbf{d}} - \eta^{\mathbf{a}\mathbf{c}}\eta^{\mathbf{b}\mathbf{d}} + \eta^{\mathbf{a}\mathbf{d}}\eta^{\mathbf{b}\mathbf{c}}\right) \quad (\text{D.4})$$

$$[\gamma^{\mathbf{a}}, \Sigma^{\mathbf{b}\mathbf{c}}] = \eta^{\mathbf{a}\mathbf{b}}\gamma^{\mathbf{c}} - \eta^{\mathbf{a}\mathbf{c}}\gamma^{\mathbf{b}} \quad (\text{D.5})$$

などがある.

第4章で用いるガンマ行列の計算についてまとめておく.

$$\mathrm{Tr}[\gamma^{(\mathbf{a}_1|\Sigma^{\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3}\gamma^{\mathbf{a}_5)}\Sigma^{\mathbf{a}_6\mathbf{a}_7}] = 2\eta^{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_5}\eta^{\mathbf{a}_3[\mathbf{a}_6|\eta^{\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_7}]} - 8\eta^{(\mathbf{a}_5[\mathbf{a}_6\eta^{\mathbf{a}_1}])[\mathbf{a}_2\eta^{\mathbf{a}_3}]\mathbf{a}_7}] \quad (\text{D.6})$$

$$\begin{aligned} & \mathrm{Tr}[\mathbf{a}_1[\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3](\mathbf{a}_4\mathbf{a}_5[\mathbf{a}_6\mathbf{a}_7]\mathbf{a}_8)] \\ &= 32\eta^{\mathbf{a}_4\mathbf{a}_8}\eta^{(\mathbf{a}_1[\mathbf{a}_2\eta^{\mathbf{a}_3}][\mathbf{a}_6\eta^{\mathbf{a}_7}]\mathbf{a}_5)} - 64\eta^{(\mathbf{a}_1[\mathbf{a}_2\eta^{\mathbf{a}_3}](\mathbf{a}_4\eta^{\mathbf{a}_8})[\mathbf{a}_6\eta^{\mathbf{a}_7}]\mathbf{a}_5)} \\ & \quad + 32\eta^{\mathbf{a}_1(\mathbf{a}_8\eta^{[\mathbf{a}_2[\mathbf{a}_6\eta^{\mathbf{a}_3}]\mathbf{a}_5\eta^{\mathbf{a}_4}]\mathbf{a}_7})} + 32\eta^{\mathbf{a}_5(\mathbf{a}_8\eta^{[\mathbf{a}_2[\mathbf{a}_6\eta^{\mathbf{a}_7}]\mathbf{a}_1\eta^{\mathbf{a}_4}]\mathbf{a}_3})} \\ & \quad - 16\eta^{\mathbf{a}_1(\mathbf{a}_4\eta^{[\mathbf{a}_2[\mathbf{a}_6\eta^{\mathbf{a}_3}]\mathbf{a}_7]}\eta^{\mathbf{a}_8})\mathbf{a}_5} \\ & \quad + 32\eta^{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_5}\eta^{[\mathbf{a}_2(\mathbf{a}_8\eta^{\mathbf{a}_3}][\mathbf{a}_6\eta^{\mathbf{a}_4}]\mathbf{a}_7]} + 8\eta^{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_5}\eta^{\mathbf{a}_4\mathbf{a}_8}\eta^{\mathbf{a}_6[\mathbf{a}_2\eta^{\mathbf{a}_3}]\mathbf{a}_7} \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

## 付録E 修正重力理論のレビュー

一般相対性理論でくりこみを考えると、一般に曲率の高次の項が現れる。高階微分重力理論は曲率の2次の項を含んだ作用を考える理論である。高階微分重力理論はくりこみ可能だが、unitarity を破った理論になっている [5, 6].

### E.1 高階微分重力

この節では、 $\eta = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$  とする。

高階微分重力とは一般に、Einstein-Hilbert 作用に Riemann tensor などの2次の項を加えた理論のことを指す<sup>1)</sup>。D次元時空を考えた場合の最も一般的な形は、

$$S = \int d^D x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{\kappa^2} R + \Lambda + aR^2 + bR_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + cR_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} + d\Box R \right] \quad (\text{E.1})$$

$\Box R$  は全微分項なので落とす。さらに、4次元時空を考えるので、Gauss-Bonnet 項

$$G = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2 \quad (\text{E.2})$$

も効かなくなる。従って、今回考える作用は、

$$\begin{aligned} S &= \int d^4 x \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{\kappa^2} R + \Lambda + \frac{1}{\lambda} C^2 - \frac{\omega}{3\lambda} R^2 \right) \\ &= \int d^4 x \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{\kappa^2} R + \Lambda + \frac{1}{\lambda} \left( R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - 2R_{\mu\nu}^2 + \frac{1-\omega}{3} R^2 \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

となる。  $C_{\mu\nu\rho\sigma}$  は Weyl tensor である：

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma} - (g_{\mu[\rho}R_{\sigma]\nu} - g_{\nu[\rho}R_{\sigma]\mu}) + \frac{1}{3}Rg_{\mu[\rho}g_{\sigma]\nu} \quad (\text{E.4})$$

#### E.1.1 Hessian の導出

さて、 $g_{\mu\nu}$  を、

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu} \quad (\text{E.5})$$

<sup>1)</sup>  $R^2$  gravity と呼ばれることもある。



と展開して  $h_{\mu\nu}$  の propagator を求める.  $\kappa$  の次元が  $-1$  なので,  $h_{\mu\nu}$  の次元は  $1$  である. 付録で求めた計算結果を用いると, Hessian は,

$$S^{(2)} = \int d^4x \frac{\kappa^2}{2} h_{\mu\nu} \left\{ \left( \frac{1}{\lambda} \square^2 - \frac{1}{2\kappa^2} \square \right) \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} - \left( \frac{1+2\omega}{3\lambda} \square^2 - \frac{1}{2\kappa^2} \square \right) \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \right. \\ \left. + \left( 2 \frac{1+2\omega}{3\lambda} \square - \frac{1}{\kappa^2} \right) \eta^{\alpha\beta} \partial^\mu \partial^\nu - \left( \frac{2}{\lambda} \square - \frac{1}{\kappa^2} \right) \eta^{\mu\alpha} \partial^\nu \partial^\beta \right. \\ \left. + 2 \frac{1-\omega}{3\lambda} \partial^\nu \partial^\mu \partial^\alpha \partial^\beta \right\} h_{\alpha\beta} \quad (\text{E.6})$$

さて, 一般座標変換に対する metric のリ-微分を考えると,

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu \quad (\text{E.7})$$

$$\mathcal{L}_\xi h_{\mu\nu} = \xi^\alpha \partial_\alpha h_{\mu\nu} + \frac{1}{\kappa} (g_{\mu\alpha} \partial_\nu \xi^\alpha + g_{\nu\alpha} \partial_\mu \xi^\alpha) \quad (\text{E.8})$$

ゲージ固定条件と weight operator を,

$$\chi_\nu(h_{\mu\nu}) = \kappa \left( \partial_\mu h_\nu^\mu - \left( \beta + \frac{1}{4} \right) \partial_\nu h \right) \quad (\text{E.9})$$

$$G^{\mu\nu} = \frac{1}{\alpha} (-\eta_{\mu\nu} \square + (\gamma - 1) \partial^\mu \partial^\nu) \quad (\text{E.10})$$

と決めると, ゲージ固定作用  $S_{\text{GF}}$  は,

$$S_{\text{GF}} = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{2} \chi_\alpha G^{\alpha\beta} \chi_\beta \quad (\text{E.11})$$

と書ける. よって,  $S_{\text{GF}}$  からの Hessian への寄与は,

$$S_{\text{GF}}^{(2)} = \int d^4x \frac{\kappa^2}{2} h_{\mu\nu} \left\{ \frac{C^2(2-\gamma)}{\alpha} \square^2 \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \right. \\ \left. - \frac{2C(2-\gamma)}{\alpha} \square \eta^{\alpha\beta} \partial^\mu \partial^\nu + \frac{1}{\alpha} \square \eta^{\mu\alpha} \partial^\nu \partial^\beta \right. \\ \left. - \frac{\gamma-1}{\alpha} \partial^\mu \partial^\nu \partial^\alpha \partial^\beta \right\} h_{\alpha\beta} \quad (\text{E.12})$$

であることが分かる. ただし,  $C = \beta + \frac{1}{4}$ .  $S + S_{\text{GF}}$  の Hessian は,

$$\begin{aligned}
(S + S_{\text{GF}})^{(2)} = \int d^4x \frac{\kappa^2}{2} h_{\mu\nu} \left\{ \left( \frac{1}{\lambda} \square^2 - \frac{1}{2\kappa^2} \square \right) \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \right. \\
- \left( \left( \frac{1+2\omega}{3\lambda} - \frac{C^2(2-\gamma)}{\alpha} \right) \square^2 - \frac{1}{2\kappa^2} \square \right) \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \\
+ \left( \left( 2\frac{1+2\omega}{3\lambda} - \frac{2C(2-\gamma)}{\alpha} \right) \square - \frac{1}{\kappa^2} \right) \eta^{\alpha\beta} \partial^\mu \partial^\nu \\
- \left( \left( \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{\alpha} \right) \square - \frac{1}{\kappa^2} \right) \eta^{\mu\alpha} \partial^\nu \partial^\beta \\
\left. + \left( 2\frac{1-\omega}{3\lambda} - \frac{\gamma-1}{\alpha} \right) \partial^\nu \partial^\mu \partial^\alpha \partial^\beta \right\} h_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{E.13}$$

## E.1.2 propagator の導出

まず以下のように表記を簡略化しておく:

$$(S + S_{\text{GF}})^{(2)} = \int d^4x \frac{\kappa^2}{2} h_{\mu\nu} \hat{\mathcal{B}}^{\mu\nu, \alpha\beta} h_{\alpha\beta} \tag{E.14}$$

$$\hat{\mathcal{B}}^{\mu\nu, \alpha\beta} = \hat{b}_{(1)} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} + \hat{b}_{(2)} \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} + \hat{b}_{(3)} \eta^{\alpha\beta} \partial^\mu \partial^\nu + \hat{b}_{(4)} \eta^{\mu\alpha} \partial^\nu \partial^\beta + \hat{b}_{(5)} \partial^\nu \partial^\mu \partial^\alpha \partial^\beta. \tag{E.15}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\hat{b}_{(1)} &= \left( \frac{1}{\lambda} \square^2 - \frac{1}{2\kappa^2} \square \right) \\
\hat{b}_{(2)} &= - \left( \frac{1+2\omega}{3\lambda} \square^2 - \frac{1}{2\kappa^2} \square - \frac{C^2(2-\gamma)}{\alpha} \square^2 \right) \\
\hat{b}_{(3)} &= \left( 2\frac{1+2\omega}{3\lambda} \square - \frac{1}{\kappa^2} - \frac{2C(2-\gamma)}{\alpha} \square \right) \\
\hat{b}_{(4)} &= - \left( \frac{2}{\lambda} \square - \frac{1}{\kappa^2} - \frac{1}{\alpha} \square \right) \\
\hat{b}_{(5)} &= 2\frac{1-\omega}{3\lambda} - \frac{\gamma-1}{\alpha}
\end{aligned} \tag{E.16}$$

とした. さて, 背景場が平坦時空なのでフーリエ変換して運動量空間に移ることができて,

$$S = \int_k \frac{\kappa^2}{2} \tilde{h}_{\mu\nu}(-k) \tilde{\mathcal{B}}^{\mu\nu, \alpha\beta}(k) \tilde{h}_{\alpha\beta}(k) \tag{E.17}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{B}}^{\mu\nu,\alpha\beta} = & \tilde{b}_{(1)}\eta^{\mu(\alpha}\eta^{\beta)\nu} + \tilde{b}_{(2)}\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\tilde{b}_{(3)}(\eta^{\alpha\beta}k^\mu k^\nu + \eta^{\mu\nu}k^\alpha k^\beta) \\ & - \frac{\tilde{b}_{(4)}}{2}(\eta^{\mu(\alpha}k^{\beta)}k^\nu + \eta^{\nu(\alpha}k^{\beta)}k^\mu) + \tilde{b}_{(5)}k^\nu k^\mu k^\alpha k^\beta\end{aligned}\quad (\text{E.18})$$

各係数はそれぞれ,

$$\begin{aligned}\tilde{b}_{(1)} &= \left(\frac{1}{\lambda}k^4 + \frac{1}{2\kappa^2}k^2\right) \\ \tilde{b}_{(2)} &= -\left(\frac{1+2\omega}{3\lambda}k^4 + \frac{1}{2\kappa^2}k^2 - \frac{C^2(2-\gamma)}{\alpha}k^4\right) \\ \tilde{b}_{(3)} &= -\left(2\frac{1+2\omega}{3\lambda}k^2 + \frac{1}{\kappa^2} - \frac{2C(2-\gamma)}{\alpha}k^2\right) \\ \tilde{b}_{(4)} &= \left(\frac{2}{\lambda}k^2 + \frac{1}{\kappa^2} - \frac{k^2}{\alpha}\right) \\ \tilde{b}_{(5)} &= 2\frac{1-\omega}{3\lambda} - \frac{\gamma-1}{\alpha}\end{aligned}\quad (\text{E.19})$$

ここで、ベクトルの transverse part と longitudinal part の射影演算子,

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}, \quad \theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\quad (\text{E.20})$$

を定義して、運動量空間での 2 階対称テンソルの射影演算子を以下のように定義する:

$$P_{\mu\nu,\rho\sigma}^{(2)} = \theta_{\mu(\rho}\theta_{\sigma)\nu} - \frac{1}{3}\theta_{\mu\nu}\theta_{\rho\sigma}\quad (\text{E.21})$$

$$P_{\mu\nu,\rho\sigma}^{(1)} = \theta_{\mu(\rho}\omega_{\sigma)\nu} + \omega_{\mu(\rho}\theta_{\sigma)\nu}\quad (\text{E.22})$$

$$P_{\mu\nu,\rho\sigma}^{(0-s)} = \frac{1}{3}\theta_{\mu\nu}\theta_{\rho\sigma}\quad (\text{E.23})$$

$$P_{\mu\nu,\rho\sigma}^{(0-w)} = \omega_{\mu\nu}\omega_{\rho\sigma}.\quad (\text{E.24})$$

これらに加えて、2つの transfer operator を定義する:

$$P_{\mu\nu,\rho\sigma}^{(0-sw)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\theta_{\mu\nu}\omega_{\rho\sigma}\quad (\text{E.25})$$

$$P_{\mu\nu,\rho\sigma}^{(0-ws)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\omega_{\mu\nu}\theta_{\rho\sigma}\quad (\text{E.26})$$

. すると、これら 6 つの演算子は完全系を成し、以下の直交条件を満たす:

$$P^{(i-a)}P^{(j-b)} = \delta^{ij}\delta^{ab}P^{(j-b)}\quad (\text{E.27})$$

$$P^{(i-ab)}P^{(j-cd)} = \delta^{ij}\delta^{bc}P^{(j-a)}\quad (\text{E.28})$$

$$P^{(i-a)}P^{(j-bc)} = \delta^{ij}\delta^{ab}P^{(j-ac)}\quad (\text{E.29})$$

$$P^{(i-ab)}P^{(j-c)} = \delta^{ij}\delta^{bc}P^{(j-ac)}\quad (\text{E.30})$$

ただし  $i, j = \{0, 1, 2\}$ ,  $a, b, c = \{s, w\}$  である. さて,  $P^{(i-a)}$  で  $\tilde{\mathcal{B}}$  のそれぞれのテンソルを書き直すと,

$$\eta_{\mu(\rho}\eta_{\sigma)\nu} = P_{\mu\nu,\rho\sigma}^{(2)} + P_{\mu\nu,\rho\sigma}^{(1)} + P_{\mu\nu,\rho\sigma}^{(0-s)} + P_{\mu\nu,\rho\sigma}^{(0-w)} \quad (\text{E.31})$$

$$\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} = 3P_{\mu\nu,\rho\sigma}^{(0-s)} + \sqrt{3} (P_{\mu\nu,\rho\sigma}^{(0-sw)} + P_{\mu\nu,\rho\sigma}^{(0-ws)}) + P_{\mu\nu,\rho\sigma}^{(0-w)} \quad (\text{E.32})$$

$$\eta_{\rho\sigma}k_{\mu}k_{\nu} + \eta_{\mu\nu}k_{\rho}k_{\sigma} = \sqrt{3}k^2 (P_{\mu\nu,\rho\sigma}^{(0-sw)} + P_{\mu\nu,\rho\sigma}^{(0-ws)}) + 2k^2 P_{\mu\nu,\rho\sigma}^{(0-w)} \quad (\text{E.33})$$

$$\eta_{\mu(\rho}k_{\sigma)}k_{\nu} + \eta_{\nu(\rho}k_{\sigma)}k_{\mu} = k^2 P_{\mu\nu,\rho\sigma}^{(1)} + 2k^2 P_{\mu\nu,\rho\sigma}^{(0-w)} \quad (\text{E.34})$$

$$k_{\mu}k_{\nu}k_{\rho}k_{\sigma} = k^4 P_{\mu\nu,\rho\sigma}^{(0-w)} \quad (\text{E.35})$$

よって,  $\tilde{\mathcal{B}}(k)$  が基底  $P^{(i-a)}$  で展開できた. propagator は  $\tilde{\mathcal{B}}(k)$  の逆行列なので, 今から逆行列を計算する.

一般に, 今回考えているような tensor structure を持った 4 階テンソルが,

$$\mathcal{C} = c_{(1)}P^{(2)} + c_{(2)}P^{(1)} + c_{(3)}P^{(0-s)} + c_{(4)}P^{(0-w)} + c_{(5)}P^{(0-sw)} + c_{(6)}P^{(0-ws)} \quad (\text{E.36})$$

とかけたとき,

$$\mathcal{C}^{-1} = \frac{1}{c_{(1)}}P^{(2)} + \frac{1}{c_{(2)}}P^{(1)} + \frac{1}{\Delta} (c_{(4)}P^{(0-s)} + c_{(3)}P^{(0-w)} - c_{(5)}P^{(0-sw)} - c_{(6)}P^{(0-ws)}) \quad (\text{E.37})$$

ただし,  $\Delta \equiv c_{(3)}c_{(4)} - c_{(5)}c_{(6)}$ . 従って, これを今回の場合に当てはめて計算すると,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{B}} &= \tilde{b}_{(1)}P^{(2)} + \left( \tilde{b}_{(1)} - \frac{\tilde{b}_{(4)}k^2}{2} \right) P^{(1)} \\ &+ \left( \tilde{b}_{(1)} + 3\tilde{b}_{(2)} \right) P^{(0-s)} + \left( \tilde{b}_{(1)} + \tilde{b}_{(2)} - k^2\tilde{b}_{(3)} - k^2\tilde{b}_{(4)} + k^4\tilde{b}_{(5)} \right) P^{(0-w)} \quad (\text{E.38}) \\ &+ \sqrt{3} \left( \tilde{b}_{(2)} - \frac{k^2}{2}\tilde{b}_{(3)} \right) (P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)}) \end{aligned}$$

$$\Delta = \left( \tilde{b}_{(1)} + 3\tilde{b}_{(2)} \right) \left( \tilde{b}_{(1)} + \tilde{b}_{(2)} - k^2\tilde{b}_{(3)} - k^2\tilde{b}_{(4)} + k^4\tilde{b}_{(5)} \right) - 3 \left( \tilde{b}_{(2)} - \frac{k^2}{2}\tilde{b}_{(3)} \right)^2$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{B}}^{-1} &= \frac{1}{\tilde{b}_{(1)}}P^{(2)} + \frac{1}{\tilde{b}_{(1)} - \frac{\tilde{b}_{(4)}k^2}{2}}P^{(1)} + \frac{1}{\Delta} \left( \left( \tilde{b}_{(1)} + \tilde{b}_{(2)} - k^2\tilde{b}_{(3)} - k^2\tilde{b}_{(4)} + k^4\tilde{b}_{(5)} \right) P^{(0-s)} \right. \\ &\left. + \left( \tilde{b}_{(1)} + 3\tilde{b}_{(2)} \right) P^{(0-w)} - \sqrt{3} \left( \tilde{b}_{(2)} - \frac{k^2}{2}\tilde{b}_{(3)} \right) (P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)}) \right) \quad (\text{E.39}) \end{aligned}$$

各項の係数はそれぞれ,

$$\begin{aligned}
\tilde{b}_{(1)} &= \frac{k^2}{\lambda} \left( k^2 + \frac{\lambda}{2\kappa^2} \right) \\
\tilde{b}_{(1)} - \frac{\tilde{b}_{(4)}k^2}{2} &= \frac{k^4}{2\alpha} \\
\tilde{b}_{(1)} + \tilde{b}_{(2)} - \dots &= \frac{(C-1)^2(2-\gamma)k^4}{\alpha} \\
\tilde{b}_{(1)} + 3\tilde{b}_{(2)} &= \left( \frac{3C^2(2-\gamma)}{\alpha} - \frac{2\omega}{\lambda} \right) k^4 - \frac{k^2}{\kappa^2} \\
\tilde{b}_{(2)} - \frac{k^2}{2}\tilde{b}_{(3)} &= \frac{C(C-1)(2-\gamma)}{\alpha} k^4
\end{aligned}$$

よって,

$$\tilde{\mathcal{B}}^{-1} = \frac{\lambda}{k^2 \left( k^2 + \frac{\lambda}{2\kappa^2} \right)} P^{(2)} + \frac{2\alpha}{k^4} P^{(1)} - \frac{\lambda}{2\omega} \frac{1}{k^2 \left( k^2 + \frac{\lambda}{2\kappa^2} \right)} P^{(0-s)} + \frac{\alpha}{(2-\gamma)k^4} P^{(0-w)} \quad (\text{E.40})$$

### E.1.3 unitarity の破れ

propagator は  $k^{-4}$  を含んでいるので, loop 計算の無限大は生じない. 従って, くりこみ不可能の問題は解決する.

さて,  $P^{(2)}$  の項は, spin 2 の自由度で重力子を記述する. 因数分解すると,

$$\frac{1}{k^2 \left( k^2 + \frac{\lambda}{2\kappa^2} \right)} = \frac{2\kappa^2}{\lambda} \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 + \frac{\lambda}{2\kappa^2}} \right) \quad (\text{E.41})$$

重力子は質量ゼロなので  $k^2$  の部分に対応しているが, スタートが4階微分を含んでいたために第2項が現れる. これは massive ghost と呼ばれている. しかし係数が負なので, 負ノルム状態を出してしまう. 負ノルム状態は物理的なスペクトルから取り除くことができない. この意味で unitarity が破れている.

## E.2 Teleparallel gravity

ここでは, 修正重力理論の1つである, teleparallel gravity についてレビューする [8, 9]. Teleparallel gravity は一番最初に Einstein によって提案された理論であり [39], vierbein formalism が使われている理論で, vierbein と捻れテンソルが基本的な自由度である. つまり, 一般座標変換というゲージ変換の接続を自由度としている. この点は, 重力のゲージ理論的な見方に感化されている [8].

## E.2.1 Teleparallel gravity の基礎

第2章にある通り, vierbein は接空間の基底ベクトルで,

$$g_{\mu\nu} = e^a{}_{\mu} e^b{}_{\nu} \eta_{ab} \quad (\text{E.42})$$

が成り立つ. さて, 一般座標変換の接続  $\Upsilon$  と局所ローレンツ変換の接続  $\omega$  の間に,

$$\Upsilon^{\rho}{}_{\mu\nu} = -e^a{}_{\mu} \partial_{\nu} e_a{}^{\rho} + e_a{}^{\rho} e^b{}_{\mu} \omega^a{}_{b\nu} \stackrel{d}{\equiv} -e^a{}_{\mu} D_{\nu} e_a{}^{\rho} \quad (\text{E.43})$$

$\omega$  について解き直すと,

$$\omega^a{}_{b\nu} = e^a{}_{\lambda} \partial_{\nu} e_b{}^{\lambda} + e^a{}_{\rho} e_b{}^{\mu} \Upsilon^{\rho}{}_{\mu\nu} \stackrel{d}{\equiv} e^a{}_{\lambda} \nabla_{\nu}^{(\Upsilon)} e_b{}^{\lambda} \quad (\text{E.44})$$

つまり,

$$\mathcal{D}_{\mu}^{(\Upsilon)} e^a{}_{\nu} = \partial_{\mu} e^a{}_{\nu} - \Upsilon^{\lambda}{}_{\nu\mu} e^a{}_{\lambda} + \omega^a{}_{b\mu} e^b{}_{\nu} = 0 \quad (\text{E.45})$$

が成り立つように  $\Upsilon$  と  $\omega$  は関係づいている. これにより, metricity:

$$\nabla_{\mu}^{(\Upsilon)} e^a{}_{\nu} = 0 \quad (\text{E.46})$$

が成り立つ. 以降, notation(節) の記法に則り,  $\Upsilon$  を  $\gamma$  とかく. 捻れテンソルは,

$$T^{\rho}{}_{\mu\nu} \stackrel{d}{\equiv} \gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} - \gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} \quad (\text{E.47})$$

で定義される. また,  $\gamma$  と Levi-Civita 接続  $\Gamma$  から,

$$K^{\rho}{}_{\mu\nu} \stackrel{d}{\equiv} \gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} \quad (\text{E.48})$$

として contortion テンソルが定義される. contortion テンソルは捻れテンソルで表すことができ,

$$K^{\rho}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (T_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu} + T_{\nu}{}^{\rho}{}_{\mu} - T^{\rho}{}_{\mu\nu}). \quad (\text{E.49})$$

次に,

$$S^{\rho\mu\nu} \stackrel{d}{\equiv} K^{\mu\nu\rho} - 2g^{\rho[\nu} T^{|\sigma|\mu]}{}_{\sigma} \quad (\text{E.50})$$

を定義すると, 不変量として,

$$T \stackrel{d}{\equiv} \frac{1}{2} S^{\rho\mu\nu} T_{\rho\mu\nu} \quad (\text{E.51})$$

が定義できる. これは一般座標変換に対しても局所ローレンツ変換に対してもスカラー量である.  $R$  と  $T$  が結びついていることはすぐにわかる:

$$R(\gamma)^\rho{}_{\mu\lambda\nu} = R^\rho{}_{\mu\lambda\nu} + \nabla_\lambda K^\rho{}_{\mu\nu} - \nabla_\nu K^\rho{}_{\mu\lambda} + K^\rho{}_{\sigma\lambda} K^\sigma{}_{\mu\nu} - K^\rho{}_{\sigma\nu} K^\sigma{}_{\mu\lambda} \quad (\text{E.52})$$

$$\begin{aligned} R(\gamma) &= R(\Gamma) + \nabla^\rho K^\mu{}_{\rho\mu} - \nabla^\mu K^\rho{}_{\mu\rho} + K^{\rho\sigma}{}_{\rho} K^\mu{}_{\sigma\mu} - K^\rho{}_{\sigma\mu} K^{\sigma\mu}{}_{\rho} \\ &= R(\Gamma) + T + 2\nabla^\mu T^\nu{}_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{E.53})$$

さて, ここで, teleparallelism の要請をする:

$$\text{ある座標系の族が存在して, その座標系では } \omega^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{b}\mu}(x) = 0.$$

この系 (以降, 系  $S$  と書くことにする. ) では,

$$\gamma^\rho{}_{\mu\nu} = -e^{\mathbf{a}}{}_{\mu} \partial_\nu e_{\mathbf{a}}{}^{\rho} \quad (\text{E.54})$$

$$R(\gamma)^\rho{}_{\mu\lambda\nu} = 0 \quad (\text{E.55})$$

が成り立つ. つまり, 接続  $\gamma$  は 0 ではないが曲率  $R(\gamma)$  は 0 になる<sup>2)</sup>.  $R(\gamma)^\rho{}_{\mu\lambda\nu}$  は LL 変換に対してスカラーなので, 系  $S$  が存在した場合, 全ての系で 0 になる. また, 捻れテンソルは,

$$T^\rho{}_{\mu\nu} = e_{\mathbf{b}}{}^{\rho} (\partial_\mu e_{\nu}^{\mathbf{b}} - \partial_\nu e_{\mu}^{\mathbf{b}}) \quad (\text{E.56})$$

と書ける.

以降, 系を  $S$  に選んで議論をするが, ここにもはや LL 対称性はない. なぜなら, 明らかにこの条件はゲージ固定条件だからである. [8] では, 系として  $\omega^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{b}\mu} = 0$  が成り立つ  $S$  を選ぶことが<sup>3)</sup>, metric formalism で  $\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = \Gamma(g_{\mu\nu})^\rho{}_{\mu\nu}$  と選ぶことに等価だと述べている.

## E.2.2 一般相対性理論との等価性

さて, 系  $S$  では LL ゲージ場が 0 である. 従って,

$$-R(\Gamma) = T + 2\nabla^\mu T^\nu{}_{\mu\nu} \quad (\text{E.57})$$

Teleparallel gravity において, 最もミニマルな作用は以下で与えられる:

$$S_T = -\frac{M_{pl}^2}{2} \int d^4x |e| T \quad (\text{E.58})$$

上の関係式を代入すると,

$$S_T = \frac{M_{pl}^2}{2} \int d^4x |e| [R(\Gamma) + 2\nabla^\mu T^\nu{}_{\mu\nu}] \quad (\text{E.59})$$

<sup>2)</sup>Levi-Civita 接続についての曲率  $R(\Gamma)$  が 0 になるわけではない.

ここには teleparallelism の要請が課されていて、一般相対性理論で導かれた、LL 対称性を尊重している Einstein-Hilbert 作用とは違うが、境界項を除けば Einstein-Hilbert 作用と同一であり、実際に一般相対性理論と等価になる。ただやはり作用が LL 不変な量のみで構成されていても、teleparallelism の要請が課された時点で LL 対称性が破れている。

### E.2.3 まとめ

Teleparallel gravity は確かに vierbein と Diff. 接続を基本自由度として理論の構築を始めているが、teleparallelism の要請を課した時点で、本修士論文で私が重要視している LL 対称性が破れていて、基本自由度だと考えていた接続が vierbein の関数になっている。私は、teleparallelism の要請はゲージ固定だと考える。なぜなら、 $\omega^a{}_{b\mu}(x) = 0$  となる座標系を”選んで”いるからである。



## 参考文献

- [1] S. Matsuzaki, S. Miyawaki, K. Oda and M. Yamada, *Dynamically emergent gravity from hidden local Lorentz symmetry*, 2003.07126.
- [2] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, *One loop divergencies in the theory of gravitation*, *Ann. Inst. H. Poincare Phys. Theor.* **A20** (1974) 69.
- [3] D. Lovelock, *The Einstein tensor and its generalizations*, *J. Math. Phys.* **12** (1971) 498.
- [4] D. Lovelock, *The four-dimensionality of space and the einstein tensor*, *J. Math. Phys.* **13** (1972) 874.
- [5] K. S. Stelle, *Renormalization of Higher Derivative Quantum Gravity*, *Phys. Rev.* **D16** (1977) 953.
- [6] I. L. Buchbinder, S. D. Odintsov and I. L. Shapiro, *Effective action in quantum gravity*. 1992.
- [7] T. P. Sotiriou and V. Faraoni, *f(R) Theories Of Gravity*, *Rev. Mod. Phys.* **82** (2010) 451 [0805.1726].
- [8] T. P. Sotiriou, B. Li and J. D. Barrow, *Generalizations of teleparallel gravity and local Lorentz symmetry*, *Phys. Rev.* **D83** (2011) 104030 [1012.4039].
- [9] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, *Teleparallel Gravity*, vol. 173. Springer, Dordrecht, 2013, 10.1007/978-94-007-5143-9.
- [10] B. Li, T. P. Sotiriou and J. D. Barrow, *f(T) gravity and local Lorentz invariance*, *Phys. Rev.* **D83** (2011) 064035 [1010.1041].
- [11] V. C. De Andrade, L. C. T. Guillen and J. G. Pereira, *Teleparallel gravity: An Overview*, in *Recent developments in theoretical and experimental general relativity, gravitation and relativistic field theories. Proceedings, 9th Marcel Grossmann Meeting, MG'9, Rome, Italy, July 2-8, 2000. Pts. A-C, 2000*, gr-qc/0011087.

- [12] Y.-F. Cai, S. Capozziello, M. De Laurentis and E. N. Saridakis, *f(T) teleparallel gravity and cosmology*, *Rept. Prog. Phys.* **79** (2016) 106901 [1511.07586].
- [13] T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla and C. Skordis, *Modified Gravity and Cosmology*, *Phys. Rept.* **513** (2012) 1 [1106.2476].
- [14] K. Koyama, *Cosmological Tests of Modified Gravity*, *Rept. Prog. Phys.* **79** (2016) 046902 [1504.04623].
- [15] R. Percacci and D. Perini, *Asymptotic safety of gravity coupled to matter*, *Phys. Rev.* **D68** (2003) 044018 [hep-th/0304222].
- [16] M. Niedermaier and M. Reuter, *The Asymptotic Safety Scenario in Quantum Gravity*, *Living Rev. Rel.* **9** (2006) 5.
- [17] A. Codello, R. Percacci and C. Rahmede, *Investigating the Ultraviolet Properties of Gravity with a Wilsonian Renormalization Group Equation*, *Annals Phys.* **324** (2009) 414 [0805.2909].
- [18] J. E. Daum and M. Reuter, *Einstein-Cartan gravity, Asymptotic Safety, and the running Immirzi parameter*, *Annals Phys.* **334** (2013) 351 [1301.5135].
- [19] K. Oda and M. Yamada, *Non-minimal coupling in Higgs-Yukawa model with asymptotically safe gravity*, *Class. Quant. Grav.* **33** (2016) 125011 [1510.03734].
- [20] R. Utiyama, *Invariant theoretical interpretation of interaction*, *Phys. Rev.* **101** (1956) 1597.
- [21] M. Blagojević and F. W. Hehl, eds., *Gauge Theories of Gravitation*. World Scientific, Singapore, 2013.
- [22] T. W. B. Kibble, *Lorentz invariance and the gravitational field*, *J. Math. Phys.* **2** (1961) 212.
- [23] R. Floreanini and R. Percacci, *Mean field quantum gravity*, *Phys. Rev.* **D46** (1992) 1566.
- [24] D. W. Sciama, *The Physical structure of general relativity*, *Rev. Mod. Phys.* **36** (1964) 463.
- [25] F. W. Hehl, P. Von Der Heyde, G. D. Kerlick and J. M. Nester, *General Relativity with Spin and Torsion: Foundations and Prospects*, *Rev. Mod. Phys.* **48** (1976) 393.

- [26] A. Trautman, *Einstein-Cartan theory*, [gr-qc/0606062](#).
- [27] J. Haruna and H. Kawai, *Weak scale from Planck scale – Mass Scale Generation in Classically Conformal Two Scalar System –*, [1905.05656](#).
- [28] S. R. Coleman and E. J. Weinberg, *Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking*, *Phys. Rev.* **D7** (1973) 1888.
- [29] A. A. Tseytlin, *On the First Order Formalism in Quantum Gravity*, *J. Phys.* **A15** (1982) L105.
- [30] G. T. Horowitz, *Topology change in classical and quantum gravity*, *Class. Quant. Grav.* **8** (1991) 587.
- [31] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I*, *Phys. Rev.* **122** (1961) 345.
- [32] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. II*, *Phys. Rev.* **124** (1961) 246.
- [33] K. Yamawaki, *Dynamical symmetry breaking with large anomalous dimension*, in *14th Symposium on Theoretical Physics: Dynamical Symmetry Breaking and Effective Field Theory Cheju, Korea, July 21-26, 1995*, 1996, [hep-ph/9603293](#).
- [34] M. Harada, Y. Kikukawa, T. Kugo and H. Nakano, *Nontriviality of gauge Higgs-Yukawa system and renormalizability of gauged NJL model*, *Prog. Theor. Phys.* **92** (1994) 1161 [[hep-ph/9407398](#)].
- [35] M. Bando, T. Kugo and K. Yamawaki, *Nonlinear Realization and Hidden Local Symmetries*, *Phys. Rept.* **164** (1988) 217.
- [36] M. Bando, T. Kugo, S. Uehara, K. Yamawaki and T. Yanagida, *Is rho Meson a Dynamical Gauge Boson of Hidden Local Symmetry?*, *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985) 1215.
- [37] A. Hebecker and C. Wetterich, *Spinor gravity*, *Phys. Lett.* **B574** (2003) 269 [[hep-th/0307109](#)].
- [38] P. B. Gilkey, *The Spectral geometry of a Riemannian manifold*, *J. Diff. Geom.* **10** (1975) 601.
- [39] A. Unzicker and T. Case, *Translation of Einstein's attempt of a unified field theory with teleparallelism*, [physics/0503046](#).