素粒子論研究・電子版 Vol. 32 (2020) No. 2

2019年度修士論文 Double Field Theory におけるゲージ対称性と Lie 亜代数対による Vaisman 亜代数の構成

北里大学大学院 理学研究科
分子科学専攻 量子物理学講座

森 遥

概要

Double Field Theory (DFT) は，T 双対性を明白な対称性として持つ重力理論であり，その背景には倍化幾何学 (doubled geometry) の存在が考えられている．また，DFT のゲージ対称性は Vaisman および Courant 亜代数 (algebroid) によって記述される．本修士論文では，Lie 代数の Drinfel'd double を出発点として，Vaisman 亜代数がふたつの Lie 亜代数の組から得られることを示す．さらに，倍化幾何学の具現化としてパラエルミート多様体を導入し，この多様体上に Vaisman 亜代数を構築する．

目次

第 1 章

はじめに

弦理論は，ハドロンを分類することを目的に，強い相互作用を扱うための理論として 1960 年代に生まれた．弦理論では，物質の根源的な単位として質点の代わりに 1 次元の弦 (string) を用いて理論を構築する．弦の振動モードの違いによって，異なる種類のハドロンを統一して記述できる，というものであった．だが，1970 年代になると量子色力学 (quantum chromodynamics, QCD) が開発され，強い相互作用を記述する理論として正当なのは QCD であると認識された．

しかし，閉じた弦の励起状態が重力に関係することが指摘され，弦理論は，今度は量子重力理論の候補として再び日の目をみることとなった．重力を記述する理論として弦理論を解釈するにあたり，以下のようなよい特徴があることがわかった．

- 重力子 (graviton) が理論のスペクトルに現れる．
- 超弦理論では，時空の次元が 10 次元に定まる．
- 弦理論における人為的なパラメーターは弦の張力 T のみである．

時空の次元の数が定まる一方，我々が認識する時空は 4 次元である．したがって，余剰次元の処理を考えなくてはならない．余剰次元への対処法のひとつは，低エネルギーでは検出されないように，空間をコンパクト化することである．コンパクト化の概念は，Kaluza-Klein (KK) 理論 [1,2] で考案された．弦理論の特徴は，相互作用が点ではなく時空の拡張領域で起こることである．場の量子論 (Quantum Field Theory, QFT) では，重力の摂動計算を行うと発散が起こってしまう．これは，QFT では物質の最小単位に体積を持たない点粒子を用いているために発生する問題で，弦理論では本質的に回避できる．超弦理論の低エネルギー極限は超重力理論である．言い換えれば，超弦理論は既存の物理として超重力理論を内包する [3]．

弦理論が我々にもたらした発見は，時空そのものの性質に関して多岐にわたる．これらの発見の元となったのは「双対性」である．最も有名な双対性は，AdS/CFT 対応であろう [4]．これは，「D 次元の反ド・ジッター (Anti-de Sitter, AdS) 時空背景で定義された重力理論が，$D-1$ 次元の共形場理論 (Conformal Field Theory, CFT) と双対である」という予想である．ここで「双対である」とは，「2 つの異なる理論が同じ物理を表すこと」を意味する．この予想の有用な点は，一方の理論の結合が強いとき，双対なもう片方の理論では結合が弱いことにあり，弦理論の非摂動的な理解を深めることとなった．弦理論に現れる双対性は，他にも S 双対性 [5]，U 双対性 [6]，そして本修士論文の中心となる T 双対性 [7] がある．U 双対性は，T 双対性と S 双対性を

掛け合わせたような対称性である．超弦理論は，等価な理論が 5 つあり，これらの双対性を通して移りあうことが知られている．特に T 双対性は，弦の長さに由来する，弦理論に特有な双対性である．T 双対性が現れる最も簡単な例は，1 次元方向だけ S^1 にコンパクト化した時空である．弦は 1 次元の物体であることから，コンパクト化された空間 S^1 に巻き付く．この巻き付きのエネルギーは S^1 の半径を R とし，弦の張力を設定すれば計算できる．この結果は弦の質量スペクトルに寄与し，弦の質量スペクトル M^2 は概ね以下のように書くことができる．

$$M^2 \propto \left(\frac{n}{R}\right)^2 + \left(\frac{mR}{\alpha'}\right)^2, \qquad n, m \in \mathbb{Z}. \tag{1.1}$$

一項目は弦の運動量に，二項目は弦の張力に由来するエネルギーを表す．ただし，α' は弦の張力を決めるパラメータである．この弦のスペクトルは半径 $R \Leftrightarrow \alpha'/R$ の入れ替えの下で，弦の運動量 n と巻き付き数 m の役割を交換する．この入れ替えの下で理論が不変となることを T 双対性という．T 双対性により，弦理論では巻きつき数という量が現れ，弦が点粒子とは異なる方法で時空を記述することが読み取れる．しかし，弦理論において T 双対性は隠れた対称性である．T 双対性を明白な対称性とする理論は考えられないだろうか？

Double Field Theory (DFT) は，T 双対性を理論の対称性とする新しい重力理論である [8]．DFT の特徴は，弦の運動量に Fourier 共役な座標と弦の巻きつき数に Fourier 共役な座標を等価に扱うことで，時空座標を double に拡張し，場を $O(D, D)$ 共変な形に組んだことにある．これにより，T 双対性を明白な対称性として実現する．DFT が拡張された時空で定義される一方で，超弦理論では時空の次元が 10 次元と決まっている．DFT が物理的に正しい自由度を持ち，理論として破綻しないようにするためには，何らかの拘束条件を与えて時空の次元の数を合わせる必要がある．この条件を物理 section 条件という．この条件により，拡張時空の中から物理的に意味がある部分空間を指定する．DFT では，$2D$ 次元の倍化 (doubled) 空間の中から，D 次元の部分空間を選ぶことになる．DFT で section 条件を満たすひとつの方法は，倍化空間に定義されたあらゆる場やパラメータから，巻きつき座標の依存性を取り除くことである．

このような，双対性に基づいた理論は一見美しく見え，これまで扱えなかった高エネルギースケールでの時空の様子を記述しているように思える．しかし，弦理論のエネルギースケールは現在の技術では実験で検証可能なレベルを超えたところにあるため，理論が正当かどうかを検証することは難しい．そこで，少なくとも構築した理論に破綻がないことを，数学の力を借りて確かめたい．空間を扱い，その性質を調べる数学といえば，幾何学である．

一般相対性理論が Einstein によって完成されたのは，1915 年のことである [10]．この理論による最も重要な主張は，「重力とは時空間の歪みである」ということである．したがって，一般相対性理論を定式化するには，曲がった (時) 空間を記述する幾何学が必要不可欠であった．このため，(擬) リーマン幾何学は重力を記述するツールとして，一般相対性理論の完成とともに再注目されるようになった．一般相対性理論とリーマン幾何学の組み合わせは，重力理論を構築し，時空構造を理解するにあたって幾何学が強力な武器であることを示した事例と言えるだろう．

純粋数学としての幾何学は，現代も発展を続けている．代表的な例は，2004 年に Hitchin らによって提案された，一般化幾何学 (generalized geometry) である [11]．一般化幾何学では，多様体の接束 (tangent bundle) を，接束と余接束 (cotangent bundle) の和に拡張する．一般化幾何学もまた，ある種の重力理論を記述するツールとしても活躍する．一般相対性理論の超対称性を

含めた拡張として，超重力理論が存在する．一般化幾何学は，超弦理論から得られる超重力理論のうち，特に NS-NS sector に対しての幾何学的な描像を与える．

これらの前例によって考えると，DFT も超重力理論の T 双対不変な定式化を目的として構築された重力理論であるから，その背景にある幾何学的な描像によって定式化されるだろう．DFT の背景にある幾何学として注目されているのが，倍化幾何学 (doubled geometry) [12] である．倍化幾何学が上述のリーマン幾何学や一般化幾何学と異なるのは，数学的に正当に構築しきれていない点である．この意味で，倍化幾何学は現段階では DFT に現れる数学的な構造の総称と言ってもよい．数学として 倍化幾何学を整備することで，DFT の理論構造を理解できると期待される．これは，T 双対性を通して，弦が見ている高エネルギー時空の仕組みを紐解く大きな手がかりになるだろう．

本修士論文は，2020 年 1 月に出版した論文 [13] の内容をベースに，DFT の幾何学的な描像に着目して以下のように構成したものである．

第 2 章 この章では，DFT と，その背景にある 倍化幾何学を導入する．初めに，DFT で用いる倍化座標を提示する．次に，一般化 Lie 微分を定義し，DFT のゲージ対称性を記述する C 括弧を与える．そして，後半の章で議論の主題となる強い拘束条件とは何かについて述べる．

第 3 章 前の章で述べた，C 括弧が規定する代数構造について，数学的な観点から議論する．C 括弧が規定する代数構造は Vaisman 亜代数 (algebroid) と呼ばれる．Lie 代数 (algebra) を出発点とし，代数構造を徐々に一般化していくことで Vaisman 亜代数の定義を与える．また，代数学の分野でよく知られている Lie 代数の Drinfel'd double という操作を元に，ふたつの Lie 亜代数から Vaisman 亜代数を構築できることを証明する．

第 4 章 第 3 章の結果を，DFT に還元する．倍化幾何学の数学的な具現化はパラエルミート (para-Hermitian) 多様体によってなされるという指摘がある [14, 15]．この結果に基づいて，パラエルミート多様体上に，前の章で定義した，double によって得られる Vaisman 亜代数を構築する．また，成分計算の結果から，強い拘束条件の代数的な起源について議論する．加えて，倍化幾何学と一般化幾何学の関係についても議論する．

第 5 章 以上の議論をまとめる．また，今後の課題や展望について述べる．

本文中に現れた数式や証明に関する計算の詳細は，Appendix に回した．特に，第 3 章で行った Vaisman 亜代数の構成に必要な計算は全て記載した．断りがない限り，本文中の記号は以下の意味で用いる．用語の定義等は必要に応じて本文中で与える．

M	多様体
$\mathcal{M}$	倍化空間 (またはパラエルミート多様体)
$\mathfrak{g}$	Lie algebra
E (L, $\tilde{L}$)	Lie 亜代数 (または Lagrangian 部分空間, Dirac 構造)
E^*	E の双対空間，または双対束
$\rho_\bullet : \bullet \to TM$	Anchor map
$\mathcal{C}$	Courant 亜代数
$\mathcal{V}$	Vaisman 亜代数
$[\cdot,\cdot]$	TM 上の Lie 括弧
$[\cdot,\cdot]_{E,L,\tilde{L}}$	E, L, $\tilde{L}$ 上の Lie 括弧
$[\cdot,\cdot]_{\mathrm{S}}$	Schouten(-Nijenhuis) 括弧
$[\cdot,\cdot]_{\mathrm{c}}$	$\mathcal{C}$ 上の Courant 括弧
$[\cdot,\cdot]_{\mathrm{V}}$	$\mathcal{V}$ 上の Vaisman 括弧
$[\cdot,\cdot]_{\mathsf{C}}$	C 括弧
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	内積
$(\cdot,\cdot)$	双線型形式

第 2 章

Double Field Theory

この章では，Double Field Theory の基礎的な部分についてごく簡単に述べる．特に，3 章以降で必要となる，DFT におけるゲージ代数について詳細に見ていく．まずは，DFT に現れる倍化幾何学の要素を与える．次に，DFT における作用とゲージ変換を与え，これを定義する括弧積として，C 括弧を導入する．ゲージ変換の代数が閉じるように，強い拘束条件を導入する．

2.1 DFT に現れる幾何学

DFT は，type II 超重力理論の NS-NS sector を明白に T 双対不変定式化した理論である [8]．この理論は，massless 場として計量 $g_{\mu\nu}$，Kalb-Ramond 場 (B 場) $B_{\mu\nu}$，dilaton ϕ を含む．T 双対性の下では，計量の一般座標変換と，B 場の $U(1)$ ゲージ変換が混合する．これを幾何学的に表現することは，通常の接空間 (弦の運動量モード) と余接空間 (winding モード) を組み合わせた，一般化接空間の導入を促す．

一般化接束 (generalized tangent bundle) E は，多様体 M の接束 TM と 余接束 T^*M の直和によって構成される．

$$E = TM \oplus T^*M. \tag{2.1}$$

一般化接束は一般化幾何学で取り扱われる．一般化幾何学は，2004 年に Hitchin [11] と Gualtieri [16] によって提案された．ベクトルを接束 TM の切断 $\Gamma(TM)$ とすると，微分 1 形式は余接束 T^*M の切断 $\Gamma(T^*M)$ である．したがって，$\Gamma(E)$ はベクトルと微分 1 形式を形式的に足した量となり, これを一般化ベクトルという．一般化幾何学では, 微分同相写像 (diffeomorphism) とゲージ変換を組み合わせて，一般化接空間に対する一般化微分同相写像を導入する．その結果，Courant 亜代数 [17] という，対称性を記述する上での強力な道具を提供する．文献 [17] の Courant 亜代数は，以下の括弧積で与えられる代数構造の一種である．$X_i \in \Gamma(TM)$, $\xi_i \in \Gamma(T^*M)$ としたとき，以下の Courant 括弧

$$[X_1 + \xi_1, X_2 + \xi_2]_{\mathrm{c}} = [X_1, X_2] + (\mathcal{L}_{X_1}\xi_2 - \mathcal{L}_{X_2}\xi_1) + \frac{1}{2}\mathrm{d}_0(\xi_1(X_2) - \xi_2(X_1)), \tag{2.2}$$

によって与えられる．Courant 亜代数に関しては 3 章でより詳細に述べる．

さらに, 弦の巻きつき数と共役な変数 $\tilde{x}$ を導入し，通常の時空座標 x と同等に扱うことで，標的空間 (時空多様体) の次元も 2 倍になり，倍化幾何学 (doubled geometry) に到達する．倍化幾

何学の数学的な具体的構成はいまだに試行段階にある．曲率などの幾何学的な量を定義し，数学的に適切な倍化幾何学を構築する試みは [18, 19] などで行われている．

以下，倍化空間の座標を与え，DFT で扱う計量や場の定義を与える．以降，通常の超重力理論が定義される時空の次元を D 次元とし，DFT の倍化空間は $2D$ 次元であるとする．一般に，超弦理論が定義される時空が 10 次元であることから，倍化空間は 20 次元であると考えられる．倍化空間の座標 (倍化座標) x^M は以下のように書けるものとする．x^μ は運動量と Fourier 共役な座標，$\tilde{x}_\mu$ は巻きつき数と Fourier 共役な座標である．

$$x^M = \begin{pmatrix} \tilde{x}_\mu \\ x^\mu \end{pmatrix}, \qquad (M = 1, \ldots, 2D;\ \mu = 1, \ldots, D). \tag{2.3}$$

T 双対をとることは，x^μ と $\tilde{x}_\mu$ の入れ替えに対応する．また，倍化空間での微分演算子は以下のように表す．

$$\partial_M = \frac{\partial}{\partial x^M} = \begin{pmatrix} \tilde{\partial}^\mu \\ \partial_\mu \end{pmatrix}, \qquad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu},\ \tilde{\partial}^\mu = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_\mu}. \tag{2.4}$$

一般に，D 次元コンパクト空間における T 双対変換群 (T-duality 群) は $O(D, D)$ で与えられる．倍化空間は $O(D, D)$ 不変な構造 η を持つ．上述の x^M の定義から，η とその逆は以下のように書ける．

$$\eta_{MN} = \begin{pmatrix} 0 & \delta^\mu{}_\nu \\ \delta_\mu{}^\nu & 0 \end{pmatrix}, \qquad \eta^{MN} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_\mu{}^\nu \\ \delta^\mu{}_\nu & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

倍化座標上の一般化テンソルの足の上げ下げは，すべて η によって行われる．

最も簡単な DFT は，type II 超重力理論の NS-NS sector を元に定式化される．この理論に現れる基本的な要素は，計量 $g_{\mu\nu}$，Kalb-Ramond 場 $B_{\mu\nu}$，dilaton ϕ の 3 つである．これらの場を T 双対性が明白な理論で扱うには，$O(D, D)$ 共変となるように組み直す必要がある．これを一般化計量 (generalized metric) $\mathcal{H}_{MN}$ という．

$$\mathcal{H}_{MN} = \begin{pmatrix} g^{\mu\nu} & -g^{\mu\rho} B_{\rho\nu} \\ B_{\mu\rho} g^{\rho\nu} & g_{\mu\nu} - B_{\mu\rho} g^{\rho\sigma} B_{\sigma\nu} \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

また，$\mathcal{H}_{MN}$ は以下の関係を満たす．

$$\mathcal{H}^{MN} = \eta^{MK} \eta^{NL} \mathcal{H}_{KL}. \tag{2.7}$$

加えて，dilaton も一般化される．DFT dilaton (一般化 dilaton) d は以下のようになる．

$$e^{-2d} = \sqrt{-g} e^{-2\phi}. \tag{2.8}$$

ただし，g は計量の行列式である．この組み直しにより，$\mathcal{H}_{MN}$ や d は DFT において $O(D, D)$ 変換を受ける．また，倍化空間の関数 $\mathcal{H}_{MN}(x^M), d(x^M)$ となる．

2.2 DFT の作用と C 括弧

前節で提示した場を用いて，$O(D,D)$ 不変な DFT の作用は，一般化 Ricci スカラーという量によって以下のように与えられる [18].

$$S_{\rm DFT} = \int \mathrm{d}^{2D}x\, e^{-2d}\mathcal{R}(\mathcal{H},d), \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R} = &\frac{1}{8}\mathcal{H}^{MN}\partial_M\mathcal{H}^{KL}\partial_N\mathcal{H}_{KL} - \frac{1}{2}\mathcal{H}^{MN}\partial_M\mathcal{H}^{KL}\partial_K\mathcal{H}_{NL}\\ &+ 4\mathcal{H}^{MN}\partial_M\partial_N d - \partial_M\partial_N\mathcal{H}^{MN} - 4\mathcal{H}^{MN}\partial_M d\,\partial_N d + 4\partial_M\mathcal{H}^{MN}\partial_N d.\end{aligned} \tag{2.10}$$

この作用が $O(D,D)$ スカラーかつ一般化ゲージスカラーであることも，[18] において示された．

作用 (2.9) は，大域的な $O(D,D)$ 対称性

$$\mathcal{H}^{MN} \to \mathcal{H}^{LK}M_L{}^M M_K{}^N, \quad x^M \to x^N M_N{}^M \tag{2.11}$$

に対して明白に不変である．では，これをもとに局所対称性はどのように規定されるだろうか？一般化ベクトル V に対する一般化微分同相写像の無限小版，すなわち倍化座標の無限小変換は以下のように定義される [8].

$$V^M \to V^M + \delta_\Xi V^M, \quad x^M \to x^M - \Xi^M. \tag{2.12}$$

ただし，δ_Ξ は以下のような一般化 Lie 微分で与えられる．重み $w(V)$ を持つ一般化ベクトル V^M の一般化 Lie 微分は以下のように定義される．

$$\widehat{\mathcal{L}}_\Xi V^M = \Xi^K\partial_K V^M + (\partial^M\Xi_K - \partial_K\Xi^M)V^K + w(V)V^M\partial_K\Xi^K. \tag{2.13}$$

一項目は通常の Lie 微分と同じ移動を表す項，二項目の括弧の中の項は $O(D,D)$ 変換を表す．$\mathcal{H}$ の重みは $w(\mathcal{H})=0$ であり，一般化 dilaton の重みは $w(e^{-2d})=1$ である．また，一般化 Lie 微分は $O(D,D)$ 構造を保つ．すなわち，以下の関係が成立する．

$$\widehat{\mathcal{L}}_\Xi\eta_{MN} = \widehat{\mathcal{L}}_\Xi\eta^{MN} = 0. \tag{2.14}$$

一般化 Lie 微分は，DFT におけるゲージ対称性の代数構造を定義する．この代数構造は C 代数

$$[\widehat{\mathcal{L}}_{\Xi_1}, \widehat{\mathcal{L}}_{\Xi_2}] = \widehat{\mathcal{L}}_{[\Xi_1,\Xi_2]_{\rm C}} + F(\Xi_1,\Xi_2,\cdot) \tag{2.15}$$

をなし，C 括弧

$$\begin{aligned}[\Xi_1,\Xi_2]_{\rm C}^M &= 2\Xi_{[1}^K\partial_K\Xi_{2]}^M - \eta_{KL}\Xi_{[1}^K\partial^M\Xi_{2]}^L\\ &= \Xi_1^K\partial_K\Xi_2^M - \Xi_2^K\partial_K\Xi_1^M - \frac{1}{2}\eta_{KL}(\Xi_1^K\partial^M\Xi_2^L - \Xi_2^K\partial^M\Xi_1^L).\end{aligned} \tag{2.16}$$

によって支配される．ただし，$\Xi_{[1}\Xi_{2]} = (\Xi_1\Xi_2 - \Xi_2\Xi_1)/2$ である．また，F は以下に示すような余分な項である．

$$F(\Xi_1,\Xi_2,V)^M = \frac{1}{2}\eta_{KL}(\Xi_1^K\partial^P\Xi_2^L - \Xi_2^K\partial^P\Xi_1^L)\partial_P V^M - (\partial^P\Xi_1^M\partial_P\Xi_2^K - \partial^P\Xi_2^M\partial_P\Xi_1^K)V_K. \tag{2.17}$$

F が存在することから，一般化 Lie 微分の交換子積は C 括弧で閉じない．また，C 括弧は Jacobi 律を満たさない．F を消去し，C 括弧が規定する代数を閉じるには，次節で説明する強い拘束条件 (strong constraint) を課せば十分である．

2.3 物理的拘束条件

弦理論の level-matching 条件に由来して，DFT に現れる場は，以下の弱い拘束条件 (weak constraint) を満足する必要がある．すなわち，任意の場とゲージパラメータを Φ に対し，

$$\partial_\mu \tilde{\partial}^\mu \Phi = 0 \tag{2.18}$$

という条件が課される．一般に，場の積はこの条件を満たさないが，射影演算子を導入することでこれを補正する．実際に，弱い拘束条件に基づいた DFT は，主に [22] で議論されている．問題は，射影演算子を用いた計算があまりにも煩雑すぎることであった．

最初期の DFT は，弦の場の理論を用いて構築された [8]．これは，massless 場のゆらぎと 2 階までの微分を含む，場の 3 次までのゲージ不変性を持つ理論である．最初期の DFT を，より高次のゲージ不変性を持つ理論に発展させることは，上述の射影演算子の存在により困難となった．この状況を打開するには，DFT 場とゲージパラメータとに加えて，それらの任意の積に対する積を

$$\partial_\mu \tilde{\partial}^\mu (\Phi\Psi) = 0 \tag{2.19}$$

で消滅させる必要がある．$(\Phi\Psi)$ が，DFT 場とゲージパラメータの任意の積を表す．(2.19) を強い拘束条件 (strong constraint) という．強い拘束条件は，名称の通り場に対して強い制約を与えることから，以下のことが証明できる [23]．強い拘束を満たす場の集合が与えられたならば，場が x 座標のみに依存するような倍化座標 $(x, \tilde{x})$ の取り方が必ず存在する．言い換えると，強い拘束条件を課したとき理論は真に倍化されない．

強い拘束条件と弱い拘束条件をあわせて，物理的 section 条件と呼ぶ．これらの条件を解く最も簡単な方法は，場が座標の半分だけに依存するようにすることである．特に，時空座標 x^μ に依存し，巻きつき座標 $\tilde{x}_\mu$ に依存しない $(\tilde{\partial}^\mu \Phi = 0)$ 場合，DFT は一般化幾何学に沿った超重力理論の定式化に至る．x^μ と $\tilde{x}_\mu$ の混在を考えることは可能ではあるが，η^{MN} で積を形成する座標として実現するのは，x^μ または $\tilde{x}_\mu$ のいずれか一方に依存する場合だけである．

ここで，物理的 section 条件について数学的な側面から少し考察しておこう．ただし，倍化幾何学の数学的に完全な具現化は実現していないことに注意する．強い拘束条件を課すことで，理論の数学的背景は倍化幾何学から 一般化幾何学へ移行する．この意味で，倍化幾何学が実現するならば，それは既存の一般化幾何学を内包しているべきである．また，$2D$ 次元の標的空間 (時空多様体) は η 内積に対して最大等方 (maximally isotropic) な二つの部分空間に分割される．問題は，どちらを物理的時空とみなすか (x^μ 側とみなすか) である．$O(D, D)$ 構造の計量 η によって作られる部分空間としての時空の特定は，[24] で言及がある．倍化幾何学の数学的な描像として近年注目されているのが，パラエルミート幾何学 (para-Hermitian geometry) [14, 15, 25] や，その拡張であるボルン幾何学 (Born geometry) [26, 27] である．これらの幾何学は，パラ複素 (para-complex) 構造によって自然に $2D$ 次元の底空間 (時空多様体) の接空間の分割を与えるという，倍化幾何学の記述にあたり非常によい性質をもつ．詳細は 4 章で議論する．

つづいて，ゲージ代数に関しても言及しておこう．弱い拘束条件は，$O(D, D)$ 形式では以下の

ように表される．Φ を任意の場やゲージパラメータとして

$$\eta^{MN}\partial_M\partial_N\Phi = 0. \tag{2.20}$$

同様に，強い拘束条件は以下のように表される．Φ_i を任意の場やゲージパラメータとして

$$\eta^{MN}\partial_M\Phi_1\partial_N\Phi_2 = 0. \tag{2.21}$$

前節で述べた通り，強い拘束条件を課すことは，(2.17) の F を消去し，DFT のゲージ代数が閉じるための十分条件である．

任意の括弧積 $[\cdot,\cdot]$ の Jacobiator は，以下のように定義される．

$$\mathrm{Jac}(\Xi_1,\Xi_2,\Xi_3) = [[\Xi_1,\Xi_2],\Xi_3] + [[\Xi_2,\Xi_3],\Xi_1] + [[\Xi_3,\Xi_1],\Xi_2]. \tag{2.22}$$

この定義にのっとり計算すると，一般に C 括弧の Jacobiator J_{C} は以下のようになる．導出は Appendix A.1 を参照のこと．

$$J_{\mathsf{C}}(\Xi_1,\Xi_2,\Xi_3) = \partial^\bullet N_{\mathsf{C}}(\Xi_1,\Xi_2,\Xi_3) + \mathrm{SC}_{\mathsf{C}}(\Xi_1,\Xi_2,\Xi_3). \tag{2.23}$$

ただし，$\partial^\bullet$ は，η^{MN} で足が上がった微分演算子である．また，N_{C} は Ξ_i に関して完全反対称な以下の量

$$N_{\mathsf{C}}(\Xi_1,\Xi_2,\Xi_3) = \frac{1}{3}\left(\eta_{MN}[\Xi_1,\Xi_2]_{\mathsf{C}}^M\Xi_3^N + \mathrm{c.p.}\right) \tag{2.24}$$

であり，SC_{C} は強い拘束条件を課せば消える項である．強い拘束条件を課した後，(2.23) の右辺は一般に 0 ではない．C 括弧は Jacobi 律を満たさず，少なくとも DFT のゲージ代数は Lie 代数ではないことが直ちにわかる．また，通常の Lie 微分の交換子積の拡張として，以下のように D 括弧 [18] を導入しても，C 括弧と同じ代数構造が得られる．

$$[\Xi_1,\Xi_2]_{\mathsf{D}}^M = \widehat{\mathcal{L}}_{\Xi_1}\Xi_2^M. \tag{2.25}$$

D 括弧と C 括弧は以下のように関係する．

$$[\Xi_1,\Xi_2]_{\mathsf{D}}^M = [\Xi_1,\Xi_2]_{\mathsf{C}}^M + \frac{1}{2}\eta^{MN}\partial_N(\eta_{KL}\Xi_1^K\Xi_2^L). \tag{2.26}$$

D 括弧は反対称ではないが，Jacobi 律を満たす一方，C 括弧は反対称で Jacobi 律を満たさない．D 括弧と C 括弧は性質的に表裏の関係にある．本修士論文では，C 括弧による定義を採用する．

C 括弧の規定するゲージ代数は，例えば初期の文献では [29,30] で扱われているほか，[19–21] などで議論されている．C 括弧に対して $\tilde{\partial}^\mu\Phi = 0$ を課し，強い拘束条件を自明に解くと，C 括弧は (2.2) 式の Courant 括弧 [17] に変化する．同様に，D 括弧は Dorfman bracket operator [33,34,53] に変化する．C 括弧から Courant 括弧を得る過程は，Appendix A.2 に示した．このように得られる Courant 括弧や Dorfman 括弧は，いずれも Courant 亜代数と呼ばれる構造を定義する [34]．よって，C 括弧は一般化幾何学 [11,31] に現れる Courant 括弧 [17] を $O(D,D)$ 共変化したものといえる [32]．また，(2.16) で示した C 括弧の形は，[35] で定義された Courant 括弧と形式的には同じ形である．しかし，[35] の Courant 括弧の Jacobiator の計算結果は (2.23) とは異なるため，C 括弧自身は Courant 亜代数を定義しない．近年，倍化空間をパラエルミート幾何学に

よって数学的に実現させる試みがあり，その過程で C 括弧が規定する構造は metric 亜代数であるという指摘がなされた [14, 15]．また，metric 亜代数と本質的には同じ構造が，[36] において pre-DFT 亜代数として与えられている．混乱を避けるため，本修士論文では metric 亜代数のことを，発見者の名をとって Vaisman 亜代数という呼称で統一する．Vaisman 亜代数は Courant 亜代数をさらに一般化した概念である．次章以降で，Vaisman 亜代数が内包する構造や性質について述べ，強い拘束条件の数学的な出自について議論していく．

第 3 章

亜代数 (Algebroid) の導入

この章では，種々の代数構造と，(classical) Drinfel'd double という操作について紹介する．Drinfel'd double は元々 Hopf 代数に対して考案され，双対な Hopf 代数の直和によって，新たな Hopf 代数が得られることを指す．Hopf 代数は一言で言えば Lie 代数をパラメータ変形したもので，パラメーターに対してある極限をとると Lie 代数が得られる．Hopf 代数から Lie 代数を得る操作を 古典 (classical) 極限をとるという．Hopf 代数の Drinfel'd double の古典極限として，Lie 代数の (classical) Drinfel'd double を考えられる．これについては，文献 [37, 38] に詳しい．この操作は，DFT の強い拘束条件の代数的な起源を知るための基礎となる．Lie 代数の Drinfel'd double の拡張として，文献 [35] において Lie 亜代数 (algebroid) の Drinfel'd double が考案された．我々は，そのさらに一般化として C 代数が規定する Vaisman 亜代数が，Lie 亜代数に対して Drinfel'd double に類似した操作を行うことで得られることを示した [13]．この操作を，文中ではただ単に "double" と呼ぶ．

3.1　Lie（双）代数と Drinfel'd double

初めに，Lie 代数を以下のように定義する．

Lie 代数 $\mathfrak{g}$

V を 体 K 上のベクトル空間とする．V の元を引数とする反対称かつ双線型な二項演算として，Lie 括弧 (bracket) $[\cdot,\cdot]: V\times V\to V$ が与えられるとき，V と Lie 括弧の組 $(V,[\cdot,\cdot])$ を Lie 代数といい，$\mathfrak{g}$ と表記する．Lie 括弧 は Jacobi 律を満たす．すなわち，$x,y,z\in\mathfrak{g}$ であるとき

$$[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=0. \tag{3.1}$$

V の双対 (dual) ベクトル空間 V^* に対しても，同様に Lie 代数を定義できる．V^* と V^* の元を引数とする Lie 括弧 $[\cdot,\cdot]_*: V^*\times V^*\to V^*$ の組 $(V^*,[\cdot,\cdot]_*)$ を，$\mathfrak{g}$ に対する双対な Lie 代数 $\mathfrak{g}^*$ という．$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ の間には自然に内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ が定義される．$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は K 上の値をとる．

次に，ベクトル空間 R による Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現 ϱ を考える．$x\in\mathfrak{g}, m\in R$ とすると，x は一般に， m に対して $\varrho(x)\cdot m$ と作用する．特に，$\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{g}$ 自身へ作用する場合を考えることで，$\mathfrak{g}$ の随伴 (adjoint) 表現 $\mathrm{ad}: x\in\mathfrak{g}\mapsto \mathrm{ad}_x\in\mathrm{End}\,\mathfrak{g}$ を規定できる．随伴表現は，Lie 括弧を用いると

以下のように書き直せる.

$$\mathrm{ad}_x(y) = [x, y], \qquad x, y \in \mathfrak{g}. \tag{3.2}$$

$x \in \mathfrak{g}$ は任意のテンソル積 $\otimes^p \mathfrak{g} = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{g}$ へ，以下のように作用する.

$$\begin{aligned} \varrho(x) \cdot (y_1 \otimes \cdots \otimes y_p) &= \mathrm{ad}_x^{(p)}(y_1 \otimes \cdots \otimes y_p) \\ &= \mathrm{ad}_x(y_1) \otimes y_2 \otimes \cdots \otimes y_p + y_1 \otimes \mathrm{ad}_x(y_2) \otimes \cdots \otimes y_p + \cdots \\ &\quad \cdots + y_1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{ad}_x(y_p). \end{aligned} \tag{3.3}$$

したがって，ad は Leibniz 則を満たす．Lie 括弧積の Jacobi 律 (3.2) は，ad の Leibniz 則としても解釈できる.

$$\mathrm{ad}_z([x, y]) = [\mathrm{ad}_z(x), y] + [x, \mathrm{ad}_z(y)]. \tag{3.4}$$

同様に，p 次の外積代数 $\wedge^p \mathfrak{g}$ への $x \in \mathfrak{g}$ の作用を考える．完全反対称なテンソル積 $\otimes^p \mathfrak{g}$ に対する作用を考えればよく，以下のように定義できる.

$$\varrho(x) \cdot y_1 \wedge y_2 = [x, y_1] \wedge y_2 + y_1 \wedge [x, y_2]. \tag{3.5}$$

このとき，多様体の余接束上の外微分演算子 d と同じように考えれば，演算子 $\mathrm{d} : \wedge^p \mathfrak{g}^* \to \wedge^{p+1} \mathfrak{g}^*$ を定義できる．$\mathrm{d}^2 = 0$ である．同様の手順で，$\mathfrak{g}^*$ の表現とその作用を考えていくことで，d と双対な外微分作用素 $\mathrm{d}_* : \wedge^p \mathfrak{g} \to \wedge^{p+1} \mathfrak{g}$ も定義できる．$\mathrm{d}_*^2 = 0$ である．これらを用いることで，$\mathfrak{g}$ に対して，Lie 代数コホモロジーを定義できる [39].

Lie 括弧は，引数が高次 $\wedge^p \mathfrak{g}$ の場合へと拡張できる．これを Schouten-Nijenhuis 括弧 $[\cdot, \cdot]_{\mathrm{S}}$ という [40]．$[\cdot, \cdot]_{\mathrm{S}}$ は以下のように定義される．ただし，$a \in \wedge^p \mathfrak{g}, b \in \wedge^q \mathfrak{g}, c \in \wedge^r \mathfrak{g}$ である.

(i) $[a, b]_{\mathrm{S}} = -(-)^{(p-1)(q-1)}[b, a]_{\mathrm{S}}$.
(ii) $[a, b \wedge c]_{\mathrm{S}} = [a, b]_{\mathrm{S}} \wedge c + (-)^{(p-1)q} b \wedge [a, c]_{\mathrm{S}}$.
(iii) $(-)^{(p-1)(r-1)}[a, [b, c]_{\mathrm{S}}]_{\mathrm{S}} + (-)^{(q-1)(r-1)}[b, [c, a]_{\mathrm{S}}]_{\mathrm{S}} + (-)^{(r-1)(q-1)}[c, [a, b]_{\mathrm{S}}]_{\mathrm{S}} = 0$.
(iv) $[\cdot, \cdot]_{\mathrm{S}}$ の引数の，少なくともどちらか一方が $\wedge^0 \mathfrak{g} = K$ であるとき，その結果は 0 になる.

Schouten-Nijenhuis 括弧は，Gerstenhaber 代数を成す [41].

次に，$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ の関係を調べる．一般に Lie 括弧 $[\cdot, \cdot]$ は，$\mathfrak{g}$ のふたつの元から別の $\mathfrak{g}$ の元を得るので，双線形写像 (bilinear map) とみなせる．Lie 括弧が反対称なことを考慮して，$[\cdot, \cdot]$ を $\mu : \wedge^2 \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ とすると，これに双対な Lie 括弧 $[\cdot, \cdot]_*$ は $\mu^* : \wedge^2 \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ と書ける．μ の co-bracket を $\delta : \mathfrak{g} \to \wedge^2 \mathfrak{g}$ する．$x \in \mathfrak{g}$, $\xi \in \wedge^2 \mathfrak{g}^*$ とすると，μ_* の随伴 $\mu_*^* : \mathfrak{g} \to \wedge^2 \mathfrak{g}$ は内積を通して

$$\langle x, \mu_*(\xi) \rangle = \langle \mu_*^*(x), \xi \rangle \tag{3.6}$$

と与えられることから，δ は μ_*^* で定義できる．双対な Lie 括弧 μ_* が Jacobi 律を満たすことから，δ は Jacobi 律を満たす．言い換えると，双対な Lie 括弧 μ_* は，δ^* によって定義できる．したがって，Lie 代数 $\mathfrak{g} = (V, [\cdot, \cdot])$ と，$[\cdot, \cdot]$ の co-bracket δ を定義しておけば，双対な Lie 代数 $\mathfrak{g}^* = (V^*, [\cdot, \cdot]_*)$ は内積によって自然に誘導できる.

Lie 双代数

Lie 代数 $(V, [\cdot,\cdot])$ を定義し，$[\cdot,\cdot]$ の co-bracket を δ とする．特に，co-bracket δ が 次の 1-cocycle 条件を満たす場合，

$$\delta([x,y]) = \mathrm{ad}_x^{(2)}\delta(y) - \mathrm{ad}_y^{(2)}\delta(x), \quad x, y \in \mathfrak{g}, \tag{3.7}$$

$(\mathfrak{g}, \mu, \delta)$ の組のことを Lie 双代数という．

$(\mathfrak{g}, \mu, \delta)$ が Lie 双代数ならば，$(\mathfrak{g}^*, \mu^*, \delta^*)$ も同じ Lie 双代数を与える．よって，今後は Lie 双代数のことを $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ と表記する．

次に，Lie 双代数に対して Drinfel'd double を行う．Lie 双代数 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ を構成している $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*$ に対して，その直和 $\mathfrak{d} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ を考えると，$\mathfrak{d}$ 上に非退化 (non-degenerate) で対称な双線型形式 (bilinear form) $(\cdot,\cdot)$ を以下のように定義できる．

$$(x,y) = (\xi,\eta) = 0, \qquad (x,\xi) = \langle \xi, x\rangle, \qquad x, y \in \mathfrak{g},\ \xi,\eta \in \mathfrak{g}^*. \tag{3.8}$$

続いて，上述の双線型形式を不変に保つように $\mathfrak{d}$ 上に括弧積 $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{d}}$ を定義する．ここで，双線型形式を不変に保つとは以下の関係が成立することを指す．

$$(y, [x,\xi]_{\mathfrak{d}}) = ([y,x]_{\mathfrak{d}}, \xi). \tag{3.9}$$

まず，$\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*$ がそれぞれ $\mathfrak{d}$ の部分代数 (subalgebra) であることから，

$$[x,y]_{\mathfrak{d}} = [x,y], \quad [\xi,\eta]_{\mathfrak{d}} = [\xi,\eta]_*, \qquad x,y \in \mathfrak{g},\ \xi,\eta \in \mathfrak{g}^*. \tag{3.10}$$

とするのが自然である．次に，$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ がクロスする場合 $[x,\xi]_{\mathfrak{d}}$ を考える．

$$\begin{aligned}(y, [x,\xi]_{\mathfrak{d}}) &= ([y,x]_{\mathfrak{d}}, \xi) \\ &= ([y,x], \xi) = \langle \xi, [y,x]\rangle = \langle \xi, -\mathrm{ad}_x(y)\rangle = \langle \mathrm{ad}_x^*\xi, y\rangle = (y, \mathrm{ad}_x^*\xi).\end{aligned} \tag{3.11}$$

ここで，1 段目の等号は括弧積 $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{d}}$ が双線型形式を不変に保つという要請から成立する．また，2 段目の最も左の等号は $\mathfrak{g}$ が Lie 部分代数なので，(3.10) により成立する．また，2 段目の右から 2 番目の等号は，ad の co-adjoint を $\mathrm{ad}_x^* = -(\mathrm{ad}_x)^*$ と定義したことにより成立する．同様の議論から，$(\eta, [x,\xi]_{\mathfrak{d}}) = -(\eta, \mathrm{ad}_\xi^* x)$ であることも導ける．よって，$[x,\xi]_{\mathfrak{d}}$ は以下のように書ける．

$$[x,\xi]_{\mathfrak{d}} = -\mathrm{ad}_\xi^* x + \mathrm{ad}_x^*\xi. \tag{3.12}$$

式 (3.7), (3.10), (3.12) から，$[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{d}}$ も Jacobi 律を満たすことがわかる．よって，$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ の間に 1-cocycle 条件 (3.7) が成立していて，$(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ が Lie 双代数をなすとき，適切に $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{d}}$ を定めれば $(\mathfrak{d} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{d}})$ は Lie 代数となる．このように，新たな Lie 代数 $\mathfrak{d}$ を構築する操作のことを Lie 双代数の **(classical) Drinfel'd double** という．非退化な双線型形式と，それを不変に保つような Lie 括弧による Lie 代数との組を，特に quadratic Lie 代数という．$\mathfrak{d}$ は自然と quadratic Lie 代数となる．

Drinfel'd double の逆を考えることもできる．$\mathfrak{p}$ を quadratic Lie 代数とする．$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ が $\mathfrak{p}$ の部分代数であり，かつ $\mathfrak{p}$ の双線型形式に対して等方的 (isotropic) である[*1]とき，$(\mathfrak{p}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ の組を **Manin triple** という [42]．上述の $(\mathfrak{d}, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ の組は，当然 Manin triple である．

[*1] $\mathfrak{g}$ が $(\cdot,\cdot)$ に対して等方的とは，任意の $x, y \in \mathfrak{g}$ で $(x,y) = 0$ であることをいう．

3.2 Lie 亜代数

ここでは，Lie 代数の一般化として多様体上のベクトル束を用いた Lie 亜代数の定義 [43] を与える．その後，Lie 代数との大まかな違いについて述べる．

Lie 亜代数 E

以下の構造の組 $(E, [\cdot,\cdot]_E, \rho)$ を，Lie 亜代数という．

- M 上のベクトル束 $E \xrightarrow{\pi} M$
- E の切断 (section) $\Gamma(E)$ を引数とする Lie 括弧 $[\cdot,\cdot]_E : \Gamma(E)\times\Gamma(E)\to\Gamma(E)$
- E から接束 TM への束写像 (bundle map) $\rho : E \to TM$.
  ρ と $[\cdot,\cdot]_E$ の間に，以下の関係が成立することを要求する．

$$\rho([X,Y]_E) = [\rho(X),\rho(Y)], \quad X,Y\in\Gamma(E). \tag{3.13}$$

  ρ を anchor map と呼ぶ．

Lie 括弧 $[\cdot,\cdot]_E$ は Jacobi 律を満たす．また，Leibniz 則を満たす．すなわち，関数 $f\in C^\infty(M)$ に対して，

$$[X,fY]_E = (\rho(X)\cdot f)Y + f[X,Y]_E. \tag{3.14}$$

$(\rho(X)\cdot f)$ は，$\rho(X)$ が f への微分として作用することを意味する．

E の切断で得られるベクトル $\Gamma(E)$ は，M の各点とベクトル空間が一対一で対応したものとみなせる．一方で，前節で述べた通り，Lie 代数は ベクトル空間に対して定義される．したがって Lie 亜代数は， M の各点と $\Gamma(E)$ 上の Lie 代数を一対一で対応させて作った， Lie 代数の集合を扱っているとみなせる．この意味で，Lie 亜代数は Lie 代数の一般化である．M が一点であり，anchor が $\rho=0$ であるとき Lie 亜代数は Lie 代数となる．

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して，双対な Lie 代数 $\mathfrak{g}^*$ が定義できたように，E に双対なベクトル束 E^* を用いて，同じ多様体上に双対な Lie 亜代数 $E^* = (E^*, \rho_*, [\cdot,\cdot]_{E^*})$ を定義できる．$[\cdot,\cdot]_{E^*} : \Gamma(E^*)\times\Gamma(E^*)\to\Gamma(E^*)$ は $[\cdot,\cdot]_E$ に対して双対な Lie 括弧である．また，anchor map $\rho_* : E^*\to TM$ である．E と E^* の間には，自然に内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ が定義できる．

Lie 代数の場合は，Lie 括弧を Schouten-Nijenhuis 括弧 $[\cdot,\cdot]_{\mathrm{S}}$ に一般化できた．Lie 括弧の co-bracket が $[\cdot,\cdot]_{\mathrm{S}}$ を含んだ条件式である 1-cocycle 条件 (3.7) を満たすのであれば Lie 双代数が構成でき，双対な Lie 代数を誘導できた．その類推として，Lie 亜代数から Lie 双亜代数 (bialgebroid) が得られることを確認する．そのために，Lie 括弧 $[\cdot,\cdot]_E$ の一般化を行う．まずは，必要となる演算を先に定義しておく．

$\Gamma(TM)$ や $\Gamma(T^*M)$ から外積代数を構築するのと同じように，$\Gamma(E)$ や $\Gamma(E^*)$ から p-vector $\Gamma(\wedge^p E)$ や p-form $\Gamma(\wedge^p E^*)$ を定義する．まず，$\Gamma(\wedge^p E)$ や $\Gamma(\wedge^p E^*)$ に対して，通常の微分 p 形式と同様に外微分演算子 d，d* を定義できる．たとえば，d は，$\xi\in\Gamma(\wedge^p E^*)$ に対して次のよう

に作用する [44]．$X_i \in \Gamma(E)$ として，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\xi(X_1,\ldots,X_{p+1}) = & \sum_{i=1}^{p+1}(-)^{i+1}\rho(X_i)\cdot\big(\xi(X_1,\ldots,\check{X}_i,\ldots,X_{p+1})\big)\\
& + \sum_{i<j}(-)^{i+j}\xi([X_i,X_j]_E,X_1,\ldots,\check{X}_i,\ldots,\check{X}_j,\ldots,X_{p+1}).
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

ただし，$\check{X}_i$ は i 番目の X を消去するという意味である．この定義から，d は以下のような性質を満たす．$X,Y \in \Gamma(E)$, $\xi,\eta \in \Gamma(E^*)$ としたとき，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}(\xi\wedge\eta) = \mathrm{d}\xi\wedge\eta - \xi\wedge\mathrm{d}\eta,\\
&\mathrm{d}f(X) = \rho(X)\cdot f,\\
&\mathrm{d}\xi([X,Y]_E) = \rho(X)\cdot(\xi(Y)) - \rho(Y)\cdot(\xi(X)) - \xi([X,Y]_E).
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

同様に，$\Gamma(E)$ に対する内部積 $\iota_X : \Gamma(\wedge^p E^*) \to \Gamma(\wedge^{p-1}E^*)$ は次のように定義できる．

$$
\iota_X(\xi(Y_1,\ldots,Y_{p-1})) = \xi(X,Y_1,\ldots,Y_{p-1}).
\tag{3.17}
$$

これらの組み合わせから，$\Gamma(E)$ に対する Lie 微分 $\mathcal{L}_X : \Gamma(\wedge^p E^*) \to \Gamma(\wedge^p E^*)$ は以下のように定義できる．

$$
\mathcal{L}_X(\xi)(Y_1,\ldots,Y_p) = \rho(X)\cdot(\xi(Y_1,\ldots,Y_p)) - \sum_{i=1}^{p}\xi\left(Y_1,\ldots,[X,Y_i]_E,\ldots,Y_p\right).
\tag{3.18}
$$

これらの演算子は，以下のような関係式を満たす．$X,Y \in \Gamma(E)$, $f \in C^\infty(M)$, $\xi \in \Gamma(\wedge^p E^*)$ としたとき，

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{[X,Y]_E} = \mathcal{L}_X\cdot\mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y\cdot\mathcal{L}_X,\\
&\iota_{[X,Y]_E} = \mathcal{L}_X\cdot\iota_Y - \iota_Y\cdot\mathcal{L}_X,\\
&\mathcal{L}_X = \mathrm{d}\cdot\iota_X + \iota_X\cdot\mathrm{d},\\
&\mathcal{L}_{fX}(\xi) = f\mathcal{L}_X(\xi) + \mathrm{d}f\wedge\iota_X(\xi),\\
&\mathcal{L}_X\langle\xi,Y\rangle = \langle\mathcal{L}_X\xi,Y\rangle + \langle\xi,\mathcal{L}_XY\rangle,
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

同様に，$\Gamma(E^*)$ に対する内部積と Lie 微分も定義できる．これで，$\Gamma(\wedge^p E)$ や $\Gamma(\wedge^p E^*)$ を取り扱えるようになった．次に，Lie 括弧を引数が $\Gamma(\wedge^p E)$ の場合へと拡張する．$[\cdot,\cdot]_E$ の一般化として，Schouten-Nijenhuis 括弧 $[\cdot,\cdot]_{\mathrm{S}}$ は以下の関係式を満たすものとして定義される．$A \in \Gamma(\wedge^p E), B \in \Gamma(\wedge^q E)$ としたとき，

(i) $[A,B]_{\mathrm{S}} = -(-)^{(p-1)(q-1)}[B,A]_{\mathrm{S}}$.

(ii) 特に，$p=1$ のとき $[A,f]_{\mathrm{S}} = \rho(A)\cdot f$.

(iii) $[X,\cdot\,]_{\mathrm{S}}$ は，$\Gamma(\wedge^q E)$ に対して，p 次の微分として作用する．

Lie 双亜代数 (E, E^*)

Lie 双亜代数は以下のように定義される．E を Lie 亜代数，E^* を E と双対な Lie 亜代数とする．E の括弧積から構成した Schouten-Nijenhuis 括弧 $[\cdot,\cdot]_{\mathrm{S}}$ と，$\Gamma(\wedge^p E)$ に対する外微分演算子 d_* の間に，以下の derivation 条件

$$\mathrm{d}_*[X,Y]_{\mathrm{S}} = [\mathrm{d}_* X, Y]_{\mathrm{S}} + [X, \mathrm{d}_* Y]_{\mathrm{S}} \tag{3.20}$$

が成立している場合，E, E^* は Lie 双亜代数 (E, E^*) をなす [44].

Lie 双亜代数は，Lie 双代数の一般化である．上述の定義の代わりに，E^* を元に Schouten-Nijenhuis 括弧 $[\cdot,\cdot]^*_{\mathrm{S}}$ を構成し，$\Gamma(\wedge^p E^*)$ に対する外微分演算子 d との間に derivation 条件を課しても，同じ Lie 双亜代数 (E, E^*) が得られる．derivation 条件は，前節の Lie 代数の間の 1-cocycle 条件に対応する．M が一点で，各亜代数の anchor が 0 のとき，Lie 双亜代数は Lie 双代数となる．Lie 双代数の場合と同様に，Lie 双亜代数に対しても Drinfel'd double を行えるが，その結果得られる構造は，Lie 亜代数ではなく，次節で述べる Courant 亜代数である [35].

3.3 Courant 亜代数

数学において，新しい研究対象がよく知られた概念の拡張や一般化から得られることは多い．先述の Lie 代数や Lie 亜代数も例外ではない．微分幾何学の分野で議論されていた問題のひとつは，「ベクトル束の拡張」である．ベクトル空間 V と 双対ベクトル空間 V^* の直和空間 $V \oplus V^*$ には，Lie 括弧を与えて Lie 代数を定義できた．では，ベクトル束 E と双対ベクトル束 E^* の直和 $E \oplus E^*$ に対しては，どのような括弧積が与えられ，どのような構造が得られるだろうか．特に多様体 M の接束 TM と余接束 T^*M の直和 $TM \oplus T^*M$ を例に考えると，Courant 亜代数という新しい構造が現れることが 1990 年に示された [17]．文献 [17] で提示された Courant 括弧 (2.2) に基づいて，のちに一般化接束 $TM \oplus T^*M$ を研究対象とする，一般化幾何学 (generalized geometry) が開発されることとなる [11]．一般化幾何学では，底空間 (時空多様体) は倍化せず，接束だけが倍化される．一般化幾何学については，原論文 [11] の著者である Hitchin による講義ノートがある [45] ほか，文献 [16, 31, 46] などに詳しい．これらの文献では，空間の形状を規定する量である曲率や捩率についても議論されている．また，一般化幾何学の記述としてポアソン (Poisson) 多様体上での記述も考えられている [47, 48]．物理的には超弦理論から得られる超重力理論のうち，NS-NS sector に対しての幾何学的な描像を与える．Courant 括弧によって与えられるのは，微分同相写像と B 場によるゲージ変換を組み合わせた，一般化接束に対する一般化微分同相写像である．文献 [49] では，上述のポアソン多様体上の一般化幾何学を用いて，β 超重力理論についても議論されている．

より一般に，$E \oplus E^*$ の場合も，Lie 双亜代数の Drinfel'd double によって Courant 亜代数を構築できることが 1997 年に示された [35]．文献 [17] で提示された Courant 括弧と，文献 [35] で提示された Courant 括弧の形状は異なる．文献 [35] の Courant 括弧は，形式的には DFT の C 括弧 (2.16) と同じ形だが，Jacobi 律を計算した結果が異なるので， C 括弧が規定する代数構造は Courant 亜代数ではない．

この節では，初めに一般的な Courant 亜代数の定義を与える．Courant 括弧の定義方法は 2 通

りの等価な方法があることを紹介する．そして，文献 [35] のレヴューを行う．この文献で提示された Courant 括弧を紹介したのち，Lie 双亜代数の Drinfel'd double を行う．

まず，Courant 亜代数の定義を示す．

Courant 亜代数

以下の 4 つの構造の組 $(\mathcal{C}, [\cdot,\cdot]_{\mathrm{c}}, \rho_{\mathrm{c}}, (\cdot,\cdot))$ を考える．

- M 上のベクトル束 $\mathcal{C} \xrightarrow{\pi} M$
- $\mathcal{C}$ の切断 $\Gamma(\mathcal{C})$ を引数とする反対称な Courant 括弧 $[\cdot,\cdot]_{\mathrm{c}} : \Gamma(\mathcal{C}) \times \Gamma(\mathcal{C}) \to \Gamma(\mathcal{C})$
- $\mathcal{C}$ から接束 TM への anchor map $\rho_{\mathrm{c}} : \mathcal{C} \to TM$.
- 非退化で対称な双線型形式 $(\cdot,\cdot)$

この組 $(\mathcal{C}, [\cdot,\cdot]_{\mathrm{c}}, \rho_{\mathrm{c}}, (\cdot,\cdot))$ は，以下に示す 5 つの公理 Axiom C1-C5 を満たす場合，Courant 亜代数を成す [35]．ただし，$\mathcal{D}$ は $\Gamma(\mathcal{C})$ に作用する外微分演算子である．

Axiom C1. $e_1, e_2, e_3 \in \Gamma(\mathcal{C})$ とする．Courant 括弧の Jacobiator は以下のようになる．

$$[[e_1, e_2]_{\mathrm{c}}, e_3]_{\mathrm{c}} + \text{c.p.} = \mathcal{D}T(e_1, e_2, e_3). \tag{3.21}$$

ただし，$T(e_1, e_2, e_3) = \frac{1}{3}(([e_1, e_2]_{\mathrm{c}}, e_3) + \text{c.p.})$ である．c.p. は cyclic permutation を意味する．$T(e_1, e_2, e_3)$ は e の入れ替えに関して完全反対称である．

Axiom C2. $e_1, e_2 \in \Gamma(\mathcal{C})$ に対して，

$$\rho_{\mathrm{c}}([e_1, e_2]_{\mathrm{c}}) = [\rho_{\mathrm{c}}(e_1), \rho_{\mathrm{c}}(e_2)]. \tag{3.22}$$

ただし，$[\cdot,\cdot]$ は TM 上の Lie 括弧を指す．

Axiom C3. Courant 括弧に対して，修正された Leibniz 則が成立する．すなわち，$e_1, e_2 \in \Gamma(\mathcal{C})$, $f \in C^\infty(M)$ に対して，

$$[e_1, f e_2]_{\mathrm{c}} = f[e_1, e_2]_{\mathrm{c}} + (\rho_{\mathrm{c}}(e_1) \cdot f) e_2 - (e_1, e_2)\mathcal{D}f. \tag{3.23}$$

Axiom C4. $\rho_{\mathrm{c}} \cdot \mathcal{D} = 0$ である．言い換えると，$f, g \in C^\infty(M)$ に対して，

$$(\mathcal{D}f, \mathcal{D}g) = 0. \tag{3.24}$$

Axiom C5. $(\cdot,\cdot)$ と ρ_{c} は両立条件を満たす．すなわち，$e_1, e_2, e_3 \in \Gamma(\mathcal{C})$, としたとき

$$\rho_{\mathrm{c}}(e_1) \cdot (e_2, e_3) = ([e_1, e_2]_{\mathrm{c}} + \mathcal{D}(e_1, e_2), e_3) + (e_2, [e_1, e_3]_{\mathrm{c}} + \mathcal{D}(e_1, e_3)). \tag{3.25}$$

文献 [50] によると，各公理のうち，Axiom C5 は Axiom C3 から導出でき，Axiom C2 から Axiom C4 を導出できる．完全に独立しているのは Axiom C1 のみである．以下の議論では，Axiom C1-C5 は全て独立なものとして扱う．

ここで，Courant 亜代数のの定義についてコメントする．上述の反対称な Courant 括弧 $[\cdot,\cdot]_{\mathrm{c}}$ の代わりに，Dorfman bracket operator という $\Gamma(\mathcal{C})$ に対する二項演算 $\circ$ を用いて定義する方法もある [34, 53]．この場合，上に示した Axiom C1-C5 は以下のように Axiom C1′-C5′ に置き換

わる．これらの定義方法が等価であることは，文献 [34] で証明されている．Axiom C1′ からわかるように，$\circ$ は Jacobi 律の代わりに，左 Leibniz 律を満たす．反対称な括弧積 $[\cdot,\cdot]_{\mathrm{c}}$ による定義から，Courant 亜代数は strong homotopy Lie 代数 (L_∞ 代数) として解釈することができる [51]．一方で，二項演算 $\circ$ による定義から，Courant 亜代数は Leibniz 亜代数として解釈することもできる．

$$e_1 \circ (e_2 \circ e_3) = (e_1 \circ e_2) \circ e_3 + e_2 \circ (e_1 \circ e_3) \qquad \text{(Axiom C1}'\text{)}$$
$$\rho_{\mathrm{c}}(e_1 \circ e_2) = [\rho_{\mathrm{c}}(e_1), \rho_{\mathrm{c}}(e_2)] \qquad \text{(Axiom C2}'\text{)}$$
$$e_1 \circ (f e_2) = f(e_1 \circ e_2) + (\rho_{\mathrm{c}}(e_1) f) e_2 \qquad \text{(Axiom C3}'\text{)}$$
$$e_1 \circ e_1 = \mathcal{D}(e_1, e_1) \qquad \text{(Axiom C4}'\text{)}$$
$$\rho_{\mathrm{c}}(e_3)(e_1, e_2) = (e_3 \circ e_1, e_2) + (e_1, e_3 \circ e_2) \qquad \text{(Axiom C5}'\text{)}$$

本論文では，反対称な括弧積 $[\cdot,\cdot]_{\mathrm{c}}$ による定義によって議論を行う[*2]．

続いて，[35] にのっとり Lie 双亜代数の Drinfel'd double によって得られる Courant 亜代数について述べる．前の節で定義した通り，双対なふたつの Lie 亜代数 E, E^* を導入する．E, E^* の切断で得られるベクトルを，それぞれ $\Gamma(E) = X_i$，$\Gamma(E^*) = \xi_i$ とする．次に，E と E^* の直和により新たなベクトル束 $\mathcal{C} = E \oplus E^*$ を定義する．$e_i \in \Gamma(\mathcal{C})$，すなわち $e_i = X_i + \xi_i$ としたとき，$\Gamma(\mathcal{C})$ 上の非退化な双線型形式 $(\cdot,\cdot)_\pm$ を

$$(e_1, e_2)_\pm = \frac{1}{2}(\langle \xi_1, X_2 \rangle \pm \langle \xi_2, X_1 \rangle) \tag{3.28}$$

のように定義する．$(e_1, e_2)_+$ は対称，$(e_1, e_2)_-$ は反対称である．また，ρ は以下のように定義する．

$$\rho_{\mathrm{c}}(e_i) = \rho(X_i) + \rho_*(\xi_i). \tag{3.29}$$

$\Gamma(\mathcal{C})$ に対する微分演算子 $\mathcal{D} : C^\infty(M) \to \Gamma(\mathcal{C})$ は

$$(\mathcal{D} f, e_i) = \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{c}}(e_i) f \tag{3.30}$$

のように定義する．上述の ρ の定義と合わせると，$\mathcal{D} = \mathrm{d} + \mathrm{d}_*$ と表すことができる．そして，Courant 括弧 $[\cdot,\cdot]_{\mathrm{c}}$ を具体的に以下のように定める．

$$\begin{aligned} [e_1, e_2]_{\mathrm{c}} = [X_1, X_2]_E + \mathcal{L}_{\xi_1} X_2 - \mathcal{L}_{\xi_2} X_1 - \mathrm{d}_*(e_1, e_2)_- \\ + [\xi_1, \xi_2]_{E^*} + \mathcal{L}_{X_1} \xi_2 - \mathcal{L}_{X_2} \xi_1 + \mathrm{d}(e_1, e_2)_-. \end{aligned} \tag{3.31}$$

[*2] Courant 括弧は，Dorfman bracket operator を反対称に組むことで定義できる．

$$[e_1, e_2]_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2}((e_1 \circ e_2) - (e_2 \circ e_1)). \tag{3.26}$$

一般化幾何学の文脈では，Courant 括弧との対比として Dorfman bracket を対称に組むことで “Dorfman bracket”

$$[e_1, e_2]_{\mathrm{d}} = \frac{1}{2}((e_1 \circ e_2) + (e_2 \circ e_1)) \tag{3.27}$$

を定義する場合がある．DFT の文脈で，D 括弧に強い拘束条件を課すと得られるのは，“Dorfman bracket” ではなく Dorfman bracket operator である．

このように定義しておくと，$(E \oplus E^*, [\cdot,\cdot]_{\mathrm{C}}, (\cdot,\cdot)_+, \rho_{\mathrm{c}})$ は Courant 亜代数となることが文献 [35] で証明された．$[e_1, e_2]_{\mathrm{c}}$ は DFT の C 括弧と形式的に同じ形である[*3]．

文献 [35] では，Drinfel'd double の逆も議論されている．ある Courant 亜代数を定義するベクトル束 $\mathcal{C}$ に着目する．$\mathcal{C}$ は，双線型形式 $(\cdot,\cdot)_+$ に関して等方的な部分束 (subbundle) E, E^* に分割でき，なおかつ Courant 括弧 $[\cdot,\cdot]_{\mathrm{c}}$ が $\Gamma(\mathcal{C})$ で閉じている場合，(E, E^*) は自然に Lie 双亜代数の構造を持つことが証明されている．ここで，以降の議論で必要となる Dirac 構造を導入する．

Definition 3.3.1. E, E^* が以下のふたつの条件を満たすとき，$\mathcal{C}$ の Dirac 構造であるという．

- 最大等方的である，すなわち $\dim E = \dim E^* = \frac{1}{2}\dim \mathcal{C}$ である．
- E 上に閉じた括弧積 $[\cdot,\cdot]$ (Lie 括弧) を定義できる．すなわち，任意の $X, Y \in \Gamma(E)$ に対して，$[X, Y] \in \Gamma(E)$ であるような $[\cdot,\cdot]$ が存在する．

E, E^* が $\mathcal{C}$ の Dirac 構造であるとき，$(E, E^*, E \oplus E^*)$ の組は亜代数構造による Manin triple と言える．もちろん，全ての Courant 亜代数が Lie 亜代数の Drinfel'd double によって得られるわけではない．逆に，Courant 亜代数が必ず Dirac 構造によって分割できるとは限らない．

3.4 Double による Vaisman 亜代数の構成

Vaisman 亜代数は次のように定義される．

Vaisman 亜代数

以下の 4 つの構造の組 $(\mathcal{V}, [\cdot,\cdot]_{\mathrm{V}}, \rho_{\mathrm{V}}, (\cdot,\cdot))$ を考える．

- M 上のベクトル束 $\mathcal{V} \xrightarrow{\pi} M$
- $\mathcal{V}$ の切断 $\Gamma(\mathcal{V})$ を引数とする Vaisman 括弧 $[\cdot,\cdot]_{\mathrm{V}} : \Gamma(\mathcal{V}) \times \Gamma(\mathcal{V}) \to \Gamma(\mathcal{V})$
- $\mathcal{V}$ から接束 TM への anchor map $\rho_{\mathrm{V}} : \mathcal{V} \to TM$.
- 非退化で対称な双線型形式 $(\cdot,\cdot)$

この組 $(\mathcal{V}, [\cdot,\cdot]_{\mathrm{V}}, \rho_{\mathrm{V}}, (\cdot,\cdot))$ は，以下に示す 2 つの定義式 Axiom V1, V2 を満たす場合，Vaisman 亜代数を成す．ただし，$\mathcal{D}$ は $\Gamma(\mathcal{V})$ に作用する外微分演算子である．

Axiom V1. $[e_1, fe_2]_{\mathrm{V}} = f[e_1, e_2]_{\mathrm{V}} + (\rho_{\mathrm{V}}(e_1) \cdot f)e_2 - (e_1, e_2)\mathcal{D}f$.

Axiom V2. $\rho_{\mathrm{V}}(e_1) \cdot (e_2, e_3) = ([e_1, e_2]_{\mathrm{V}} + \mathcal{D}(e_1, e_2), e_3) + (e_2, [e_1, e_3]_{\mathrm{V}} + \mathcal{D}(e_1, e_3))$.

Courant 亜代数の定義と比較すると，Axiom V1 は Axiom C3 と，Axiom V2 は Axiom C5 と対応する．したがって，Vaisman 亜代数は Courant 亜代数を更に一般化した構造であるといえる．また，Axiom C5 から Axiom C3 が導かれるとする文献 [50] の議論とも矛盾しない．

文献 [35] の Courant 亜代数に関する結果から，Vaisman 亜代数も何らかの構造の double で得られるものと推測される．我々は，Axiom V1, V2 を満たす Vaisman 亜代数が，Courant 亜代数と類似した double 化の手続きによって得られることを示した [13]．鍵となるのは，Lie 双亜代

*3 時系列としては [35] で数学的に発見されたのが先である．

数における derivation 条件 (3.20) である．以下では，derivation 条件を課さずにふたつの Lie 亜代数の double をとることで，Vaisman 亜代数が得られることを示す．また，double によって構成した Vaisman 亜代数に対して，後から derivation 条件を課すと文献 [35] の Courant algeroid が得られる．

まず，双対なふたつの Lie 亜代数 $E = (E, [\cdot,\cdot]_E, \rho)$ と $E^* = (E^*, [\cdot,\cdot]_{E^*}, \rho_*)$ を定義し，直和によってベクトル束 $\mathcal{V} = E \oplus E^*$ を与える．ただし，(E, E^*) は Lie 双亜代数をなさないものと仮定する．すなわち，括弧積と微分の間に derivation 条件 (3.20) は成立していないとする．$\Gamma(\mathcal{V})$ 上の非退化な双線型形式 $(\cdot,\cdot)_\pm$ を

$$(e_1, e_2)_\pm = \frac{1}{2}(\langle \xi_1, X_2\rangle \pm \langle \xi_2, X_1\rangle) \tag{3.32}$$

のように定義する．また，anchor ρ_{V} は以下のように定義する．

$$\rho_{\mathrm{V}}(e_i) = \rho(X_i) + \rho_*(\xi_i). \tag{3.33}$$

$\Gamma(\mathcal{V})$ に対する微分演算子 $\mathcal{D} : C^\infty(M) \to \Gamma(\mathcal{V})$ は

$$(\mathcal{D}f, e_i) = \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{V}}(e_i)f \tag{3.34}$$

のように定義する．また，$\mathcal{D} = \mathrm{d} + \mathrm{d}_*$ と表すことができる．Vaisman 括弧は文献 [52] を参考に以下のような反対称な括弧積として定義する．

$$\begin{aligned}[e_1, e_2]_{\mathrm{V}} = [X_1, X_2]_E &+ \mathcal{L}_{\xi_1}X_2 - \mathcal{L}_{\xi_2}X_1 - \mathrm{d}_*(e_1, e_2)_- \\ &+ [\xi_1, \xi_2]_{E^*} + \mathcal{L}_{X_1}\xi_2 - \mathcal{L}_{X_2}\xi_1 + \mathrm{d}(e_1, e_2)_-. \end{aligned} \tag{3.35}$$

これは，DFT の C 括弧と同じ形である．また，[35] の Courant 括弧と同じ形である．

このように定義した 4 つの構造の組 $(\mathcal{V}, [\cdot,\cdot]_{\mathrm{V}}, \rho_{\mathrm{V}}, (\cdot,\cdot)_+)$ が Courant 亜代数ではなく Vaisman 亜代数を定義することを以下に示す．仮定から，derivation 条件 (3.20) が成立していないことに注意して，Axiom C1-C5 が成立しているかどうかをそれぞれ確かめる．本文中には，各計算の要点だけを載せる．詳細な計算は Appendix A.5-A.11 を参照のこと．Axiom C3, C5 のみが成立し，他の Axiom が破れていれば $(\mathcal{V}, [\cdot,\cdot]_{\mathrm{V}}, \rho_{\mathrm{V}}, (\cdot,\cdot))$ が Vaisman 亜代数であるといえる．

証明の過程で必要となる補助的な関係式は，以下の 2 式である．

$$\begin{aligned} T(e_1, e_2, e_3) &\equiv \frac{1}{3}(([e_1, e_2]_{\mathrm{c}}, e_3)_+ + \mathrm{c.p.}) \\ &= \frac{1}{2}\{\langle \xi_3, [X_1, X_2]_E\rangle + \langle X_3, [\xi_1, \xi_2]_{E^*}\rangle \\ &\qquad + \rho(X_3)(e_1, e_2)_- - \rho_*(\xi_3)(e_1, e_2)_-\} + \mathrm{c.p.}, \end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned} ([e_1, e_2]_{\mathrm{V}}, e_3)_- + \mathrm{c.p.} &= T(e_1, e_2, e_3) \\ &\quad + \Big[\{\rho(X_3)(e_1, e_2)_- + 2\rho_*(\xi_3)(e_1, e_2)_- \\ &\qquad - \langle [\xi_1, \xi_2]_{\mathrm{V}}, X_3\rangle\} + \mathrm{c.p.}\Big]. \end{aligned} \tag{3.37}$$

これらの関係式の導出や，証明に関わる全計算は Appendix A.5 に収録した．

Axiom C1 の確認

まず，Axiom C1 を確認するために，Vaisman 括弧 $[\cdot,\cdot]_{\mathrm{V}}$ の Jacobiator を計算する．(3.21) 式の左辺を展開すると，以下の結果が得られる．

$$
\begin{aligned}
&[[e_1,e_2]_{\mathrm{V}},e_3]_{\mathrm{V}}+\text{c.p.}=I_1+I_2, &(3.38)\\
&I_1=[[\xi_1,\xi_2]_{E^*},\xi_3]_{E^*}+[\mathcal{L}_{X_1}\xi_2-\mathcal{L}_{X_2}\xi_1,\xi_3]_{E^*}+[\mathrm{d}(e_1,e_2)_-,\xi_3]_{E^*}\\
&\qquad+\mathcal{L}_{[X_1,X_2]_E+\mathcal{L}_{\xi_1}X_2-\mathcal{L}_{\xi_2}X_1-\mathrm{d}_*(e_1,e_2)_-}\xi_3\\
&\qquad-\mathcal{L}_{X_3}[\xi_1,\xi_2]_{E^*}-\mathcal{L}_{X_3}\mathcal{L}_{X_1}\xi_2+\mathcal{L}_{X_3}\mathcal{L}_{X_2}\xi_1\\
&\qquad-\mathcal{L}_{X_3}\mathrm{d}(e_1,e_2)_-+\mathrm{d}([e_1,e_2]_{\mathrm{V}},e_3)_-+\text{c.p.}, &(3.39)\\
&I_2=[[X_1,X_2]_E,X_3]_E+[\mathcal{L}_{\xi_1}X_2-\mathcal{L}_{\xi_2}X_1,X_3]_E-[\mathrm{d}_*(e_1,e_2)_-,X_3]_E\\
&\qquad+\mathcal{L}_{[\xi_1,\xi_2]_{E^*}+\mathcal{L}_{\xi_1}X_2-\mathcal{L}_{\xi_2}X_1+\mathrm{d}(e_1,e_2)_-}X_3\\
&\qquad-\mathcal{L}_{\xi_3}[X_1,X_2]_E-\mathcal{L}_{\xi_3}\mathcal{L}_{\xi_1}X_2+\mathcal{L}_{\xi_3}\mathcal{L}_{\xi_2}X_1\\
&\qquad+\mathcal{L}_{\xi_3}\mathrm{d}_*(e_1,e_2)_--\mathrm{d}_*([e_1,e_2]_{\mathrm{V}},e_3)_-+\text{c.p.} &(3.40)
\end{aligned}
$$

ただし，$\Gamma(E^*)$ に属する項は I_1 に，$\Gamma(E)$ に属する項は I_2 にまとめた．以降の計算は，I_1 に関してのみ行う．X と ξ を入れ替えることで，I_2 に関する計算も再現できる．上記の I_1 には，Lie 括弧の Jacobi 律によって消える項が含まれており，それらを整理すれば以下の形となる．

$$
\begin{aligned}
I_1=&[\mathcal{L}_{X_1}\xi_2-\mathcal{L}_{X_2}\xi_1,\xi_3]_{E^*}+[\mathrm{d}(e_1,e_2)_-,\xi_3]_{E^*}+\mathcal{L}_{\mathcal{L}_{\xi_1}X_2-\mathcal{L}_{\xi_2}X_1}\xi_3-\mathcal{L}_{\mathrm{d}_*(e_1,e_2)_-}\xi_3\\
&-\mathcal{L}_{X_3}[\xi_1,\xi_2]_{E^*}-\mathcal{L}_{X_3}\mathrm{d}(e_1,e_2)_-+\mathrm{d}([e_1,e_2]_{\mathrm{V}},e_3)_-+\text{c.p.} \qquad (3.41)
\end{aligned}
$$

ここで，I_1 へ以下の公式を適用する．この公式の導出は Appendix A.7 に載せた．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{X_3}[\xi_1,\xi_2]_{E^*}+\text{c.p.}=&[\mathcal{L}_{X_1}\xi_2-\mathcal{L}_{X_2}\xi_1,\xi_3]_{E^*}+\mathcal{L}_{\mathcal{L}_{\xi_1}X_2-\mathcal{L}_{\xi_2}X_1}\xi_3\\
&+2[\mathrm{d}(e_1,e_2)_-,\xi_3]_{E^*}+2\mathrm{d}(\rho_*(\xi_3)\cdot(e_1,e_2)_-)-\mathrm{d}\langle[\xi_1,\xi_2]_{E^*},X_3\rangle\\
&+\iota_{X_3}(\mathrm{d}[\xi_1,\xi_2]_{E^*}-\mathcal{L}_{\xi_1}\mathrm{d}\xi_2+\mathcal{L}_{\xi_2}\mathrm{d}\xi_1)+\text{c.p.} \qquad (3.42)
\end{aligned}
$$

すると，最終的に I_1 は以下のようにまとまる．

$$
I_1=\mathrm{d}T(e_1,e_2,e_3)-\{K_1+K_2\}+\text{c.p.} \qquad (3.43)
$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
K_1&=\iota_{X_3}(\mathrm{d}[\xi_1,\xi_2]_{E^*}-\mathcal{L}_{\xi_1}\mathrm{d}\xi_2+\mathcal{L}_{\xi_2}\mathrm{d}\xi_1),\\
K_2&=\mathcal{L}_{\mathrm{d}_*(e_1,e_2)_-}\xi_3+[\mathrm{d}(e_1,e_2)_-,\xi_3]_{E^*}. \qquad (3.44)
\end{aligned}
$$

同様に，I_2 に関して計算すると，以下の結果が得られる．

$$
\begin{aligned}
I_2&=\mathrm{d}_*T(e_1,e_2,e_3)-\{K_3+K_4\}+\text{c.p},\\
K_3&=\iota_{\xi_3}(\mathrm{d}_*[X_1,X_2]_E-\mathcal{L}_{X_1}\mathrm{d}_*X_2+\mathcal{L}_{X_2}\mathrm{d}_*X_1),\\
K_4&=-\Big(\mathcal{L}_{\mathrm{d}(e_1,e_2)_-}X_3+[\mathrm{d}_*(e_1,e_2)_-,X_3]_E\Big). \qquad (3.45)
\end{aligned}
$$

したがって，Vaisman 括弧 $[\cdot,\cdot]_{\mathrm{V}}$ の Jacobiator の計算結果は次のようになる．

$$
[[e_1,e_2]_{\mathrm{V}},e_3]_{\mathrm{V}}+\text{c.p.}=I_1+I_2=\mathcal{D}T(e_1,e_2,e_3)-(J_1+J_2+\text{c.p.}). \qquad (3.46)
$$

ただし，J_1, J_2 は以下のような項である．

$$
\begin{aligned}
J_1 &= K_1 + K_3 \\
&= \iota_{X_3}(\mathrm{d}[\xi_1,\xi_2]_{E^*} - \mathcal{L}_{\xi_1}\mathrm{d}\xi_2 + \mathcal{L}_{\xi_2}\mathrm{d}\xi_1) + \iota_{\xi_3}(\mathrm{d}_*[X_1,X_2]_E - \mathcal{L}_{X_1}\mathrm{d}_*X_2 + \mathcal{L}_{X_2}\mathrm{d}_*X_1), \\
J_2 &= K_2 + K_4 \\
&= \mathcal{L}_{\mathrm{d}(e_1,e_2)_-}\xi_3 + [\mathrm{d}(e_1,e_2)_-,\xi_3]_{E^*} + \mathcal{L}_{\mathrm{d}_*(e_1,e_2)_-}X_3 + [\mathrm{d}_*(e_1,e_2)_-,X_3]_E.
\end{aligned} \tag{3.47}
$$

一般に，任意の X_i, ξ_i, f に対し $(J_1 + J_2 + \mathrm{c.p.})$ は 0 ではない．よって，$(\mathcal{V}, [\cdot,\cdot]_{\mathrm{V}}, \rho_{\mathrm{V}}, (\cdot,\cdot)_+)$ において，Axiom C1 は破れている．

Axiom C2 の確認

同様に，Axiom C2 に関して計算する．まず，(3.22) の各辺を f に対して作用させせると，以下の式が得られる．

$$
\rho_{\mathrm{V}}([e_1,e_2]_{\mathrm{V}})\cdot f = [\rho_{\mathrm{V}}(e_1),\rho_{\mathrm{V}}(e_2)]f. \tag{3.48}
$$

式 (3.48) の左辺は次のように展開される．

$$
\begin{aligned}
&\rho_{\mathrm{V}}([e_1,e_2]_{\mathrm{V}})\cdot f \\
&= [\rho(X_1),\rho(X_2)]\cdot f + \rho(\mathcal{L}_{\xi_1}X_2)\cdot f - \rho(\mathcal{L}_{\xi_2}X_1)\cdot f - \frac{1}{2}\rho\rho_*^*\mathrm{d}_0(\langle\xi_1,X_2\rangle - \langle\xi_2,X_1\rangle)\cdot f \\
&+ [\rho_*(\xi_1),\rho_*(\xi_2)]\cdot f + \rho_*(\mathcal{L}_{X_1}\xi_2)\cdot f - \rho_*(\mathcal{L}_{X_2}\xi_1)\cdot f + \frac{1}{2}\rho_*\rho^*\mathrm{d}_0(\langle\xi_1,X_2\rangle - \langle\xi_2,X_1\rangle)\cdot f,
\end{aligned} \tag{3.49}
$$

ただし，$\mathrm{d}_* = \rho_*^*\mathrm{d}_0, \mathrm{d} = \rho^*\mathrm{d}_0$ であり，d_0 は $\Gamma(T^*M)$ の外微分演算子である．

式 (3.48) の右辺は次のように展開される．

$$
\begin{aligned}
&[\rho_{\mathrm{V}}(e_1),\rho_{\mathrm{V}}(e_2)]f \\
&= [\rho(X_1),\rho(X_2)]f + [\rho_*(\xi_1),\rho(X_2)]f + [\rho(X_1),\rho_*(\xi_2)]f + [\rho_*(\xi_1),\rho_*(\xi_2)]f.
\end{aligned} \tag{3.50}
$$

右辺の 2 項目，3 項目の X, ξ の cross term は，以下の公式

$$
\rho_*(\xi)\rho(X)\cdot f = -\rho\rho_*^*\mathrm{d}_0\langle\xi,X\rangle\cdot f + \langle\xi,\mathcal{L}_{\mathrm{d}f}X\rangle + \langle\mathrm{d}f,\mathcal{L}_\xi X\rangle. \tag{3.51}
$$

を用いることで，

$$
\begin{aligned}
[\rho(X),\rho_*(\xi)]f &= (\rho(X)\rho_*(\xi) - \rho_*(\xi)\rho(X))\cdot f \\
&= \rho(X)\rho_*(\xi)\cdot f + (\rho\rho_*^*\mathrm{d}_0\langle\xi,X\rangle)\cdot f - \langle\xi,\mathcal{L}_{\mathrm{d}f}X\rangle - \rho(\mathcal{L}_\xi X)\cdot f
\end{aligned} \tag{3.52}
$$

と書ける．したがって，(3.48) の左辺と右辺の差は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
&\rho_{\mathrm{V}}([e_1,e_2]_{\mathrm{V}})\cdot f - [\rho_{\mathrm{V}}(e_1),\rho_{\mathrm{V}}(e_2)]f \\
&= -\langle\xi_1,(\mathcal{L}_{\mathrm{d}f}X_2 - [X_2,\mathrm{d}_*f]_E)\rangle + \langle\xi_2,(\mathcal{L}_{\mathrm{d}f}X_1 - [X_1,\mathrm{d}_*f]_E)\rangle \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big(\rho\rho_*^* + \rho_*\rho^*\Big)\mathrm{d}_0(\langle\xi_1,X_2\rangle - \langle\xi_2,X_1\rangle)\cdot f.
\end{aligned} \tag{3.53}
$$

一般に，任意の X_i, ξ_i に対し右辺は 0 にならない．よって，$(\mathcal{V}, [\cdot,\cdot]_{\mathrm{V}}, \rho_{\mathrm{V}}, (\cdot,\cdot)_+)$ において，Axiom C2 は破れている．

Axiom C3 の確認

(3.23) 式の左辺は，$e_i = X_i + \xi_i$ から，以下のように分割して書ける．

$$[e_1, fe_2]_{\mathrm{V}} = [X_1, fX_2]_{\mathrm{V}} + [X_1, f\xi_2]_{\mathrm{V}} + [\xi_1, fX_2]_{\mathrm{V}} + [\xi_1, f\xi_2]_{\mathrm{V}}. \tag{3.54}$$

ここで，Vaisman 括弧の定義から，(3.54) の右辺は以下のように展開される．

$$\begin{aligned}
&[X_1, fX_2]_{\mathrm{V}} = [X_1, fX_2]_E, \\
&[X_1, f\xi_2]_{\mathrm{V}} = f[X_1, \xi_2]_{\mathrm{V}} + (\rho(X_1)\cdot f)\xi_2 - \frac{1}{2}\mathcal{D}f\langle \xi_2, X_1\rangle, \\
&[\xi_1, fX_2]_{\mathrm{V}} = f[\xi_1, X_2]_{\mathrm{V}} + (\rho_*(\xi_1)\cdot f)X_2 - \frac{1}{2}\mathcal{D}f\langle \xi_1, X_2\rangle, \\
&[\xi_1, f\xi_2]_{\mathrm{V}} = [\xi_1, f\xi_2]_{E^*}.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

(3.55) の 4 つの式の右辺を全て足すと，以下の結果が得られる．

$$[e_1, fe_2]_{\mathrm{V}} = f[e_1, e_2]_{\mathrm{V}} + (\rho_{\mathrm{V}}(e_1)f)e_2 - \mathcal{D}f(e_1, e_2)_+. \tag{3.56}$$

よって，$(\mathcal{V}, [\cdot,\cdot]_{\mathrm{V}}, \rho_{\mathrm{V}}, (\cdot,\cdot)_+)$ において，Axiom C3 は成立する．

Axiom C4 の確認

(3.24) 式の左辺は以下のように展開される．

$$(\mathcal{D}f, \mathcal{D}g)_+ = \frac{1}{2}(\rho_*\rho^*\mathrm{d}_0 f + \rho\rho_*^*\mathrm{d}_0 f)g. \tag{3.57}$$

一般に anchor ρ は反対称ではない．すなわち $\rho\rho_*^* = -\rho_*\rho^*$ は成立しない．よって，(3.57) の右辺は 0 にならず，Axiom C4 は $(\mathcal{V}, \rho_{\mathrm{V}}, [\cdot,\cdot]_{\mathrm{V}}, (\cdot,\cdot))$ において破れる．ただし，anchor に付いている上付きの $*$ は，adjoint operator の意味であり，内積を通して元の演算子の転置で定義される．

$$\begin{aligned}
&\rho : E \to TM \qquad \rho^* : T^*M \to E^* \\
&\rho_* : E^* \to TM \quad \rho_*^* : T^*M \to E
\end{aligned} \tag{3.58}$$

したがって，$\rho\rho_*^* : T^*M \to TM$，$\rho_*\rho^* : T^*M \to TM$ である．

Derivation 条件が成立している場合は必ず anchor は反対称になることが [44] の Proposition 3.4 の内容を元に示せる．一般に，Lie 亜代数の性質から以下の関係式が得られる．

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{L}_{\mathrm{d}f}X + [\mathrm{d}_* f, X]_E)\wedge Y \\
&= -f\Big(\mathrm{d}_*[X,Y]_E + \mathcal{L}_Y\mathrm{d}_*X - \mathcal{L}_X\mathrm{d}_*Y\Big) + \Big(\mathrm{d}_*[X, fY]_E - \mathcal{L}_X\mathrm{d}_*(fY) + \mathcal{L}_{fY}\mathrm{d}_*X\Big).
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Proposition 3.4 では，(3.59) の右辺が derivation 条件を課すことで 0 となることを示している．すなわち，derivation 条件が満たされた場合，付随して以下の関係式が成立することが確認できる．

$$\mathcal{L}_{\mathrm{d}f}X + [\mathrm{d}_* f, X]_E = 0. \tag{3.60}$$

(3.60) が満たされない限り，ρ は反対称とならないことが示される．詳細は Appendix A.10 参照せよ．したがって，derivation 条件が成立するならば必ず ρ は反対称となり，Axiom C4 が成立する．逆に，derivation 条件を課さないならば，anchor が反対称でない場合を排除できない．

Axiom C5 の確認

章の冒頭で与えた $T(e_1,e_2,e_3)$ の関係式 (3.36) から，以下のふたつの式が成立する．

$$([e,e_1]_{\mathrm{V}},e_2)_+ = T(e,e_1,e_2) + \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{V}}(e)\cdot(e_1,e_2)_+ - \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{V}}(e_1)\cdot(e,e_2)_+, \tag{3.61}$$

$$(e_1,[e,e_2]_{\mathrm{V}})_+ = T(e,e_2,e_1) + \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{V}}(e)\cdot(e_2,e_1)_+ - \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{V}}(e_2)\cdot(e,e_1)_+. \tag{3.62}$$

以下のように，式 (3.61)，(3.62) の左辺同士，右辺同士を足しても等号は保たれる．

$$\begin{aligned}
&([e,e_1]_{\mathrm{V}},e_2)_+ + (e_1,[e,e_2]_{\mathrm{V}})_+ \\
&= T(e,e_1,e_2) + \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{V}}(e)\cdot(e_1,e_2)_+ - \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{V}}(e_1)\cdot(e,e_2)_+ \\
&\quad + T(e,e_2,e_1) + \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{V}}(e)\cdot(e_2,e_1)_+ - \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{V}}(e_2)\cdot(e,e_1)_+.
\end{aligned} \tag{3.63}$$

式 (3.63) は，T の反対称性などから以下のように整理できる．

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathrm{V}}(e)\cdot(e_1,e_2)_+ &= ([e,e_1]_{\mathrm{V}},e_2)_+ + (e_1,[e,e_2]_{\mathrm{V}})_+ + \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{V}}(e_1)\cdot(e,e_2)_+ + \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{V}}(e_2)\cdot(e,e_1)_+ \\
&([e,e_1]_{\mathrm{V}} + \mathcal{D}(e,e_1)_+,e_2)_+ + (e_1,[e,e_2]_{\mathrm{V}} + \mathcal{D}(e,e_2)_+)_+.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

よって，$(\mathcal{V},[\cdot,\cdot]_{\mathrm{V}},\rho_{\mathrm{V}},(\cdot,\cdot)_+)$ において，Axiom C5 は成立する．これらの計算の詳細は Appendix A.9, A.11 に示した．これで，双対な 2 つの Lie 亜代数の double によって，Vaisman 亜代数が得られることが示せた．Axiom C5 と Axiom C3 が成立する状況は，文献 [50] の議論とも矛盾しない．

では，逆に Vaisman 亜代数の分割方法を考えてみよう．[35] で行われている Courant 亜代数の Dirac 部分束による分割に基づいて議論するために，まずは [35] の該当部分のレヴューを行う．Courant 亜代数 $(\mathcal{C},[\cdot,\cdot]_{\mathrm{c}},\rho_{\mathrm{c}},(\cdot,\cdot))$ は $(\cdot,\cdot)$ に関して最大等方的であり，なおかつ Courant 括弧 $[\cdot,\cdot]_{\mathrm{c}}$ が $\Gamma(\mathcal{C})$ で閉じている場合，Dirac 部分束 $L,\tilde{L}$ によって分割できる．また，$(L,\tilde{L})$ は自然に Lie 双亜代数となる．これを示すために必要となのは，以下に提示する Proposition 2.3 と Lemma 5.2 である．

Proposition 2.3 in [35]. L が，Courant 亜代数 $(\mathcal{C},[\cdot,\cdot]_{\mathrm{c}},\rho_{\mathrm{c}},(\cdot,\cdot)_+)$ の双線型形式 $(\cdot,\cdot)_+$ について等方的な部分束で，かつ積分可能[*4]なとき，$(L,[\cdot,\cdot]_{\mathrm{c}},\rho_{\mathrm{c}}|_L)$ は Lie 亜代数となる．

ただし，「$(\cdot,\cdot)$ について等方な部分束」とは，任意の $X,Y\in\Gamma(L)$ に対して，$(X,Y)=0$ が成立するような部分束を指す．$\rho_{\mathrm{c}}|_L$ は，anchor ρ_{c} から L に作用する部分だけを抜き出したものである．Proposition 2.3 は，Axiom C1 の (3.21) 式

$$[[e_1,e_2]_{\mathrm{c}},e_3]_{\mathrm{c}} + \mathrm{c.p.} = \mathcal{D}T(e_1,e_2,e_3) \tag{3.21}$$

から，L に由来する部分 (X だけを含む項) を抜き出すことですぐに確認できる．(3.21) 式の左辺は，L 上の括弧積 $[\cdot,\cdot]_L$ による Jacobiator となる．一方，右辺は T の定義

$$T(e_1,e_2,e_3) = \frac{1}{3}([e_1,e_2]_{\mathrm{c}},e_3) + \mathrm{c.p.} \tag{3.65}$$

[*4] 可積分性についての詳細は次の章で与える．ひとことで言うと，部分束 L 上の Lie 括弧が閉じていることを指す．

から，L が $(\cdot,\cdot)$ に関して等方的であることを仮定すると必ず 0 になる．よって，$[\cdot,\cdot]_L$ が Jacobi 律を満たすことが確かめられ，L は Lie 亜代数となる．Proposition 2.3 から，Courant 亜代数の Dirac 構造 $L, \tilde{L}$ はそれぞれ Lie 亜代数となる．L の anchor は $\rho_{\mathrm{c}}|_L$ で，$\tilde{L}$ の anchor は $\rho_{\mathrm{c}}|_{\tilde{L}}$ で定義される．

Proposition 2.3 を要請しておくと，L が $(\cdot,\cdot)$ に関して等方的なことを用いて Axiom C5 の (3.25) 式から以下の関係が導ける．$X \in \Gamma(L), \xi \in \Gamma(\tilde{L})$ としたとき，

$$[X,\xi]_{\mathrm{c}} = -\mathcal{L}_\xi X + \frac{1}{2}\mathrm{d}_*\langle \xi, X\rangle + \mathcal{L}_X \xi - \frac{1}{2}\mathrm{d}\langle \xi, X\rangle. \tag{3.66}$$

Lemma 5.2 in [35]. $L, \tilde{L}$ を，Courant 亜代数 $\mathcal{C}$ に対して，$\mathcal{C} = L \oplus \tilde{L}$ となるような Dirac 構造であるとする．このとき，以下の関係式が成立する．ただし，

$$\mathcal{L}_{\mathrm{d}_* f}\xi = -[\mathrm{d}f, \xi]_{\tilde{L}}, \quad \mathcal{L}_{\mathrm{d}f} X = -[\mathrm{d}_* f, X]_L. \tag{3.67}$$

ここで，d, d_* はそれぞれ $\Gamma(\wedge^p \tilde{L}), \Gamma(\wedge^p L)$ に作用する外微分演算子である．

Lemma 5.2 は以下のように示せる．まず，Axiom C4 から，以下の関係が成立する．

$$\rho_* \cdot \mathrm{d} = -\rho \cdot \mathrm{d}_*. \tag{3.68}$$

これを，Axiom C2 へ応用することで，以下の関係がわかる．

$$\begin{aligned}
[\rho_*(\xi), \rho(X)] &= \rho_{\mathrm{c}}[\xi, X]_{\mathrm{c}} \\
&= \rho_{\mathrm{c}}(\mathcal{L}_\xi X - \frac{1}{2}\mathrm{d}_*\langle \xi, X\rangle - \mathcal{L}_X \xi + \frac{1}{2}\mathrm{d}\langle \xi, X\rangle) \\
&= \rho(\mathcal{L}_\xi X) - \rho_*(\mathcal{L}_X \xi) + \rho_*(\mathrm{d}\langle \xi, X\rangle).
\end{aligned} \tag{3.69}$$

ただし，式 (3.69) の 1 段目から 2 段目への変形で，式 (3.66) を用いた．一方で，Lie 亜代数の性質から，

$$\rho_*(\mathrm{d}\langle \xi, X\rangle)\cdot f = [\rho_*(\xi), \rho(X)]f - \rho(\mathcal{L}_\xi X)\cdot f + \rho_*(\mathcal{L}_X \xi)\cdot f + \langle \mathcal{L}_{\mathrm{d}_* f}\xi + [\mathrm{d}f, \xi]_{\tilde{L}}, X\rangle. \tag{3.70}$$

式 (3.69) と (3.70) の比較から，$\mathcal{L}_{\mathrm{d}_* f}\xi = -[\mathrm{d}f, \xi]_{\tilde{L}}$ である．式 (3.69) と (3.70) の ξ と X を入れ替えて再計算すれば，$\mathcal{L}_{\mathrm{d}f} X = -[\mathrm{d}_* f, X]_L$ も示せる．

Lemma 5.2 の関係式を念頭に置きつつ，もう一度 Courant 括弧の Jacobiator の計算結果に注目する．

$$[[e_1, e_2]_{\mathrm{c}}, e_2]_{\mathrm{c}} + \text{c.p.} = \mathcal{D}T(e_1, e_2, e_3) - (J_1 + J_2 + \text{c.p.}), \tag{3.71}$$

ただし，J_1, J_2 は (3.47) で示したのと同じものである．

$$\begin{aligned}
J_1 &= \iota_{X_3}\Big(\mathrm{d}[\xi_1, \xi_2]_{\mathrm{V}} - \mathcal{L}_{\xi_1}\mathrm{d}\xi_2 + \mathcal{L}_{\xi_2}\mathrm{d}\xi_1\Big) + \iota_{\xi_3}\Big(\mathrm{d}_*[X_1, X_2]_{\mathrm{V}} - \mathcal{L}_{X_1}\mathrm{d}_* X_2 + \mathcal{L}_{X_2}\mathrm{d}_* X_1\Big), \\
J_2 &= \Big(\mathcal{L}_{\mathrm{d}_*(e_1,e_2)_-}\xi_3 + [\mathrm{d}(e_1,e_2)_-, \xi_3]_{\mathrm{V}}\Big) - \Big(\mathcal{L}_{\mathrm{d}(e_1,e_2)_-}X_3 + [\mathrm{d}_*(e_1,e_2)_-, X_3]_{\mathrm{V}}\Big).
\end{aligned} \tag{3.47}$$

いま，$\mathcal{C} = L \oplus \tilde{L}$ は Axiom C1 を満たすので，必然的に $J_1 + J_2 + \text{c.p.} = 0$ である．加えて，Lemma 5.2 から，$J_2 = 0$ である．よって $J_1 + \text{c.p.} = 0$ が要求される．したがって，$e_1 = X_1$, $e_2 = X_2$, $e_3 = \xi_3$ と置くと，以下の条件を得る．

$$\mathrm{d}_*[X_1, X_2]_L - \mathcal{L}_{X_1}\mathrm{d}_* X_2 + \mathcal{L}_{X_2}\mathrm{d}_* X_1 = 0. \tag{3.72}$$

これは，Lie 双亜代数の derivation 条件 (3.20) そのものである．よって，$(L \oplus \tilde{L})$ は Lie 双亜代数となる．前節で述べた通り，Courant 亜代数 $\mathcal{C}$ の Dirac 構造 $L, \tilde{L}$ は，全体で Manin triple $(\mathcal{C}, L, \tilde{L})$ を構成する．

この事実をもとに，Vaisman 亜代数の分割を考える．Vaisman 亜代数の Dirac 構造は，Courant 亜代数の場合と同様に，$\Gamma(\mathcal{V})$ を引数とする双線型形式 $(\cdot,\cdot)$ に対する，最大等方な部分束で定義できる．$L, \tilde{L}$ は $\mathcal{V} = L \oplus \tilde{L}$ となるような $\mathcal{V}$ の Dirac 構造であるとする．ただし，$\mathcal{V}$ は Vaisman 亜代数なので，Axiom C3, C5 だけが成立する．まず，[35] の Proposition 2.3 は，導出する際に Axiom C1 を用いるので，Vaisman 亜代数を前提とすると成立しない．よって，$L, \tilde{L}$ の括弧積は一般に Jacobi 律を満たすとは限らず，$L, \tilde{L}$ は Lie 亜代数にならない場合も考えられる．加えて，仮に $L, \tilde{L}$ が Lie 亜代数であったとしても Axiom C2, C4 が破れているため，Lemma 5.2 は成立しない．したがって，$(L, \tilde{L})$ の間に derivation 条件は成立せず，$(L, \tilde{L})$ は全体で Lie 双亜代数をなさない．これを，DFT のセットアップで具体的に成分計算した結果は 次章の後半で示す．双対な Lie 亜代数の組 L と L^* が Lie 双亜代数になるのは，(L, L^*) が全体で differential Gerstenhaber 代数をなすときのみである [54]．これは，外微分演算子 d (または d_*) が Schouten-Nijenhuis 括弧と両立するときである．

第 4 章

Vaisman algebroid が現れる幾何学

パラエルミート (para-Hermitian) 多様体には，DFT の倍化空間が自然に現れることが [14, 15, 26–28] などで議論されている．この章では，パラエルミート多様体上に前節で示した Vaisman 亜代数を再現し，その Dirac 構造に基づいて，DFT のゲージ対称性について議論する．

この章の前半では，亜代数の記述に必要な数学的構造の定義を与える．まず，パラエルミート多様体 $\mathcal{M}$ を与え，接束 $T\mathcal{M}$ の分割がパラ複素 (para-complex) 構造から自然に導入できることを確認する．それに付随する葉層構造 (foliation) 構造 [56] を導入する．加えて，DFT 上のパラドルボーコホモロジー (para-Dolbeault cohomology) について議論し，亜代数構造の再現に必要な演算子を整理する．章の後半では，上述の定義を用いて実際に成分計算を行い，パラエルミート多様体上に Vaisman 亜代数を構築する．そして，前の章で示した種々の亜代数構造が，DFT ではどのように現れるかを調べる．特に，deivation 条件と DFT の強い拘束条件の関係を考察する．

4.1 パラ複素構造

DFT の倍化空間 $\mathcal{M}$ の座標系 $x^M = (x^\mu, \tilde{x}_\mu)$ は，KK モードに Fourier 共役な座標 x^μ と winding モードに Fourier 共役な座標 $\tilde{x}_\mu$ を組み合わせることで導入される．文献 [14, 15] において，このような構造の座標は，パラエルミート多様体に自然に組み込まれているという指摘がなされた．パラエルミート多様体 $\mathcal{M}$ を定義するには，パラ複素構造が必要となる．まず，概パラ複素多様体は以下のように定義される．

Definition 4.1.1. 概 (almost) パラ複素多様体とは，以下の概パラ複素構造 K が定義された多様体 $\mathcal{M}$ のことである．K は，$K^2 = 1$ を満たすような $T\mathcal{M}$ 上の自己同型写像である．

通常の複素構造 $J^2 = -1$ では Nijenhuis テンソルが 0 になると J について積分可能となる [57]．それと同様に，以下の量

$$N_K(X,Y) = \frac{1}{4}([K(X), K(Y)] + [X,Y] - K([K(X), Y] + [X, K(Y)])\tag{4.1}$$

が 0 になるとき，概パラ複素構造 K が可積分であるという．可積分な概パラ複素構造はパラ複素構造である．K が可積分なとき $(K, \mathcal{M})$ をパラ複素多様体という．

概パラ複素構造 K の固有値 ± 1 に応じて，$\mathcal{M}$ の接束 $T\mathcal{M}$ を K の固有部分束 $L, \tilde{L}$ に分割できる．$T\mathcal{M}$ の分割は，以下の射影演算子 $P, \tilde{P}$ によって行われる．$P, \tilde{P}$ は，$T\mathcal{M}$ から $L, \tilde{L}$ を選

ぶような写像であり，以下のように定義される．

$$P = \frac{1}{2}(1+K), \qquad \tilde{P} = \frac{1}{2}(1-K). \tag{4.2}$$

$P, \tilde{P}$ によって得られる部分束 $L, \tilde{L}$ は，distribution である．

Definition 4.1.2. Distribution は，以下のように定義される．一般に，M を m 次元の C^∞ 級多様体とする．M 上の任意の点 x の接空間 T_xM に対して，x に関して滑らかな n 次元 $(n \leq m)$ の部分空間 Δ_x を考える．Δ を M 上の全ての点に対する部分空間 Δ_x の集合とすると，Δ は n 次元の distribution となる．ただし，x に関して滑らかとは，Δ_x に属するベクトルから，x 近傍の全ての点に対して n 次元のベクトル場を作れる，という意味である．

Distribution の最も簡単な例は，$n=1$ の場合である．M に対する 1 次の distribution は，TM の切断によるベクトル場 $\Gamma(TM)$ の軌跡となる．任意の $X, Y \in \Gamma(L)$ に対して，Lie 括弧による積 $[X, Y]_L$ が必ず L に属するとき，distribution L は involutive であるという．仮に，$L, \tilde{L}$ が involutive であれば，以下の量が 0 となる．

$$N_P(X,Y) = \tilde{P}[P(X), P(Y)], \quad N_{\tilde{P}}(X,Y) = P[\tilde{P}(X), \tilde{P}(Y)]. \tag{4.3}$$

すると，以下の Frobenius の定理から，(4.3) 式によって $L, \tilde{L}$ の可積分性が評価できる．

Theorem 4.1.3. ある distribution L が可積分となるのは L が involutive のときだけである．また，逆も成立する．

式 (4.3) で提示された N_P と $N_{\tilde{P}}$ を足すと，式 (4.1) が得られる．導出は Appendix A.12 に示した．つまり，L に対しての可積分条件と $\tilde{L}$ に対しての可積分条件は独立しており，$L, \tilde{L}$ のうち L だけが可積分になる場合 $(N_P(X,Y)=0)$ や，$\tilde{L}$ だけが可積分になる場合 $(N_{\tilde{P}}=0)$ を考えることができる．この点が，パラ複素構造と通常の複素構造との大きな違いである．この事実から，以下のような多様体を定義できる [26, 27]．

Definition 4.1.4. $(\mathcal{M}, K)$ を概パラ複素多様体とする．特に，L だけが K について可積分なとき，これを L-パラ複素 (L-para-complex) 多様体という．$\tilde{L}$ に関しても同様である．特に，L と $\tilde{L}$ が両方可積分であれば，$T\mathcal{M}$ 全体が K に関して可積分 $(N_K = 0)$ となり，$(\mathcal{M}, K)$ はパラ複素多様体になる．

4.2 パラエルミート多様体

次に，概パラエルミート多様体を定義しよう．

Definition 4.2.1. $(\mathcal{M}, K)$ をパラ複素多様体とする．$(\mathcal{M}, K)$ が neutral な計量 $\eta : T\mathcal{M} \times T\mathcal{M} \to \mathbb{R}$ をもつとき，$(\mathcal{M}, \eta, K)$ を概パラエルミート多様体という．η をパラエルミート計量といい，η と K の間には両立条件 $\eta(K\cdot, K\cdot) = -\eta(\cdot,\cdot)$ が成立する．

定義から，$X, Y \in \Gamma(L)$ としたとき，$\eta(X,Y) = 0$ である．加えて，η が neutral なので，$L, \tilde{L}$ の rank は $\frac{1}{2}\dim\mathcal{M}$ となる．よって，$L, \tilde{L}$ はパラエルミート計量 η に関して最大等方的である．

	$\mathrm{d}\omega \neq 0$	$\mathrm{d}\omega = 0$
$N_K \neq 0$	概パラエルミート (概シンプレクティック)	概パラケーラー (almost para-Kähler) (シンプレクティック)
$N_K = 0$	パラエルミート (概シンプレクティック)	パラケーラー (シンプレクティック)

表 4.1　可積分条件と ω の関係.

概パラエルミート多様体上には，K と η から，非退化な微分 2 形式 $\omega = \eta K$ を定義できる．ω は一般に閉形式とは限らない．ω を，以下に定義するような，概シンプレクティック多様体のシンプレクティック 2 形式とみなすことができる．

Definition 4.2.2. 概シンプレクティック (almost symplectic) 多様体とは，実 $2n$ 次元多様体 $\mathcal{M}$ と，$\mathcal{M}$ 上の微分 2 形式 ω の組のことをいう．ω を概シンプレクティック形式という．特に，ω が閉形式 ($\mathrm{d}\omega = 0$) である場合は，シンプレクティック多様体となる．このとき，$\mathrm{d}\omega = 0$ を「概シンプレクティック形式に対する可積分条件」という．

よって，概パラエルミート多様体 $(\mathcal{M}, \eta, K)$ は概シンプレクティック多様体でもあり，K に関する可積分条件と ω に関する可積分条件を別個に扱える．これを用いて，表 4.1 のように複数の多様体を定義できる．特に，今後の議論の中心となるパラエルミート多様体の定義を改めて提示しておく．

Definition 4.2.3. $\mathcal{M}$ と，パラエルミート計量 $\eta : T\mathcal{M} \times T\mathcal{M} \to \mathbb{R}$，パラ複素構造 K の組を考える．K だけが可積分で，ω が可積分でないとき，$(\mathcal{M}, K, \eta)$ はパラエルミート多様体である．

また，K に対する可積分条件が $L, \tilde{L}$ に対して独立に課せることから，以下のような多様体も定義可能である．

Definition 4.2.4. $(\mathcal{M}, K)$ を L-パラ複素多様体とする．これに，パラエルミート計量を加えた $(\mathcal{M}, \eta, K)$ を L-パラエルミート多様体という．$\tilde{L}$ に関しても同様で，$\tilde{L}$-パラエルミート多様体を定義できる．

上記のように $L, \tilde{L}$ のいずれかだけが可積分となるように多様体を定義することはできるが，それが倍化空間を記述するにあたってどのように影響するのかはあまり議論されていない．ただし，L-パラエルミート多様体のセットアップを用いて，リーマン幾何で共変微分を導入するのと類似した流れで $\mathcal{M}$ 上の微分を補正し，DFT の D 括弧を計量 η が湾曲している場合へ拡張できるという指摘があり [26]，片側だけ可積分という状況が今後有用となる可能性は十分ありうる．本論文では以後，$L, \tilde{L}$ の両方が可積分，すなわちパラエルミート多様体を用いた倍化空間の記述を議論する．

パラエルミート多様体 $\mathcal{M}$ 上の distribution $L, \tilde{L}$ は η に関して最大等方的，すなわち $\dim L = \dim \tilde{L} = \frac{1}{2} \dim \mathcal{M}$ である．かつ，K が可積分であることから (4.1) 式が 0 となり，(4.3) で与えた $N_P, N_{\tilde{P}}$ が 0 となる．したがって，$L, \tilde{L}$ に involutive，つまりそれぞれに閉じた交換子積を定

義できる．3 章の 3.3.1 節の定義を参照すると，$L, \tilde{L}$ は $T\mathcal{M}$ の Dirac 構造である．また，$L, \tilde{L}$ は Frobenius の定理から，可積分である．

$\mathcal{M}$ によって倍化空間を数学的に記述するにあたり，$L, \tilde{L}$ が可積分であることの有用性は，以下に示す Frobenius の定理の別の表現を適用するとわかる．

Theorem 4.2.5. ある部分束 $E \subset T\mathcal{M}$ が可積分となるのは，$\mathcal{M}$ 上に葉層構造 $\mathcal{F}$ が定義できる場合に限られる．逆に，$\mathcal{M}$ 上に葉層構造 $\mathcal{F}$ が定義できるならば，可積分な部分束 E を，$\mathcal{M}$ の葉層構造 $\mathcal{F}$ に対する接束として必ず与えられる．

いま，$L, \tilde{L}$ は可積分である．Frobenius の定理から，$L, \tilde{L}$ が接束であるような葉層構造 $\mathcal{F}, \tilde{\mathcal{F}}$ を定義できる．

$$L = T\mathcal{F} \qquad \text{and} \qquad \tilde{L} = T\tilde{\mathcal{F}}. \tag{4.4}$$

M_p は $\mathcal{F}$ の葉であり，$\mathcal{M}$ 上の点 p を通るような，$\mathcal{F}$ の部分空間である．$\mathcal{F}$ は葉 M_p の和集合 $\coprod_{[p]} M_{[p]}$ である．$\tilde{L}$ に関しても同様で，局所座標 x^μ は，M_p に沿って与えられる．このとき，$\tilde{x}_\mu$ は M_p 上で，ある定数をとる．この流れは，図 4.1 のような絵を描くと想像しやすい．いま，$\mathcal{M}$ は $\mathcal{F}$ (赤い線の方向) と，$\tilde{\mathcal{F}}$ に基づいた方向 (青い線の方向) の 2 通りに千切りできる．図 4.1 で示した 赤い線が $\mathcal{F}$ の葉，青い線が $\tilde{\mathcal{F}}$ の葉である．赤い線と青い線の位置関係を決めるのが，座標 $x^\mu, \tilde{x}_\mu$ である．x^μ は赤い線 ($\mathcal{F}$ の葉) に沿って，$\tilde{x}_\mu$ は青い線 ($\tilde{\mathcal{F}}$ の葉) に沿って与えられる．したがって，$\mathcal{F}$ から葉を一枚選ぶと $\tilde{x}_\mu$ は定数をとる．

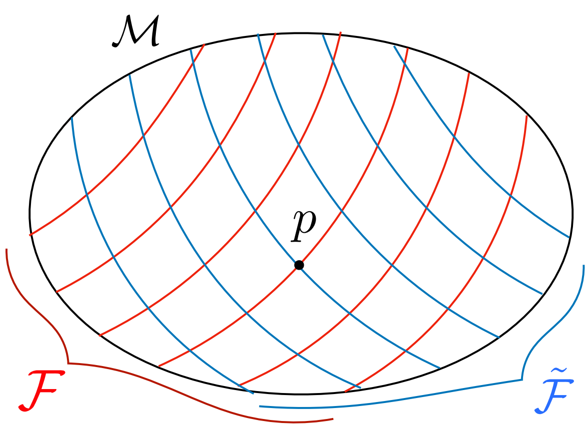

図 4.1　$\mathcal{M}$ に現れる葉層構造 $\mathcal{F}$ や $\tilde{\mathcal{F}}$．葉の一部分を線で示した．

この節で確かめられたことを簡単にまとめる．パラエルミート多様体 $\mathcal{M}$ の最大の特徴は，接束 $T\mathcal{M}$ を $L, \tilde{L}$ に分割したときに，L の可積分条件と $\tilde{L}$ の可積分条件が完全に独立することだった．この特徴から，Frobenius の定理を用いて $\mathcal{M}$ 上に 二種類の葉層構造 $\mathcal{F}$ と $\tilde{\mathcal{F}}$ を定義できた．$\mathcal{M}$ の倍化座標 $(x^\mu, \tilde{x}_\mu)$ から，半分の x^μ 座標を抜き出すことは，$\mathcal{M}$ 上の葉層構造 $\mathcal{F}$ から葉を一枚選ぶこととして説明できた．これが，パラエルミート多様体 $\mathcal{M}$ が倍化空間の数学的な記述として有力視される理由である．

最後に，$\tilde{L}$ と L の双対束である L^* の関係についてコメントしておく．パラエルミート計量 η は，$T\mathcal{M} = L \oplus \tilde{L}$ から $T^*\mathcal{M} = L^* \oplus \tilde{L}^*$ への写像とみなせる．よって，η は以下のふたつの同型

写像を定義する．

$$\phi^+ : \tilde{L} \to L^* \qquad \text{and} \qquad \phi^- : L \to \tilde{L}^*. \tag{4.5}$$

これらの写像は，$\tilde{L}$ 上のベクトルが，L^* 内の形式と同一視できることを意味する．L 上のベクトルと，$\tilde{L}^*$ 上の形式に関しても同様である．よって，以下の写像が与えられる．

$$\Phi^+ : T\mathcal{M} \to L \oplus L^* \qquad \text{and} \qquad \Phi^- : T\mathcal{M} \to \tilde{L} \oplus \tilde{L}^*. \tag{4.6}$$

特に，Φ^+ は，natural isomorphism といい，倍化幾何学と一般化幾何学を結びつけるのに利用される．Natural isomorphism が自然に与えられることも，パラエルミート多様体が倍化幾何学の数学的な記述として有力な理由である．

4.3 パラドルボーコホモロジー

前節で，パラエルミート多様体 $\mathcal{M}$ が倍化空間の数学的な記述として有用なことが確認できた．しかし，$\mathcal{M}$ 上で Vaisman 亜代数を実際に構築するには，外微分や内部積などの演算子を定義し，成分計算できるように書き下す必要がある．この節では $\mathcal{M}$ 上の演算子について述べ，具体計算のために必要な準備を行う．

この節では，前節で定義した $\mathcal{M}$ の distribution $L, \tilde{L}$ に対して，パラドルボーコホモロジーを定義する．はじめに，$\mathcal{M}$ の接空間 $T\mathcal{M}$ に対して，通常の外積代数を定義する．k 次の完全反対称テンソル積の切断 $\Gamma(\wedge^k T\mathcal{M})$ を，$\hat{\mathcal{A}}^k(\mathcal{M})$ とする．すると，$T\mathcal{M} = L \oplus \tilde{L}$ であることから，$\Gamma(L)$ と $\Gamma(\tilde{L})$ 上に外積代数を定義できる．$\mathcal{A}^{r,s}(\mathcal{M})$ を $\Gamma((\wedge^r L) \wedge (\wedge^s \tilde{L}))$ とすると，$\hat{\mathcal{A}}^k(\mathcal{M})$ は以下のように分割できる．

$$\hat{\mathcal{A}}^k(\mathcal{M}) = \bigoplus_{k=r+s} \mathcal{A}^{r,s}(\mathcal{M}). \tag{4.7}$$

また，この分割を起こすような正準射影演算子として

$$\pi^{r,s} : \hat{\mathcal{A}}^{r+s}(\mathcal{M}) \to \mathcal{A}^{r,s}(\mathcal{M}) \tag{4.8}$$

を定義する．$\pi^{r,s}$ は，$P, \tilde{P}$ によって誘導される．具体的な表式は以下のように与えられる．まず，$T\mathcal{M}$ の分割をもたらす射影演算子を，以下のように定める．

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

ここからは，例として $r = 2, s = 0$ の場合を考える．$T \in \hat{\mathcal{A}}^2(\mathcal{M})$ は，成分表示では以下のように書ける．

$$T^{MN} = \begin{pmatrix} t_{\mu\nu} & t_\mu{}^\nu \\ t^\mu{}_\nu & t^{\mu\nu} \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

例えば，$\pi^{2,0}$ は P によって以下のように定義される．

$$\begin{aligned} P^M{}_K P^N{}_L T^{KL} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{\mu\nu} & t_\mu{}^\nu \\ t^\mu{}_\nu & t^{\mu\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t^{\mu\nu} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

$t^{\mu\nu}$ は $\hat{A}^{2,0}(\mathcal{M})$ の成分である．これにより，$\pi^{2,0}(T^{MN}) = t^{\mu\nu}$ が誘導される．同様に，$\pi^{1,1}, \pi^{0,2}$ も定義可能である．

次に，L と $\tilde{L}$ に作用する外微分演算子を以下のように与える．

$$\begin{aligned} \tilde{\mathrm{d}} &: \mathcal{A}^{r,s}(\mathcal{M}) \to \mathcal{A}^{r+1,s}(\mathcal{M}), \\ \mathrm{d} &: \mathcal{A}^{r,s}(\mathcal{M}) \to \mathcal{A}^{r,s+1}(\mathcal{M}). \end{aligned} \tag{4.12}$$

これらの外微分作用素は，パラドルボー作用素と呼ばれ，通常の複素多様体上のドルボー作用素と同じく，以下の性質を持つ．

$$\mathrm{d}^2 = 0, \quad \mathrm{d}\tilde{\mathrm{d}} + \tilde{\mathrm{d}}\mathrm{d} = 0, \quad \tilde{\mathrm{d}}^2 = 0. \tag{4.13}$$

このようなパラドルボー作用素のベキ零性から，パラドルボーコホモロジーを定義できる．加えて，$A \in \Gamma(L)$ と $\alpha \in \Gamma(\tilde{L})$ に対してそれぞれ内部積を定義できる．

$$\begin{aligned} \iota_A &: \mathcal{A}^{r,s}(\mathcal{M}) \to \mathcal{A}^{r-1,s}(\mathcal{M}), \\ \tilde{\iota}_\alpha &: \mathcal{A}^{r,s}(\mathcal{M}) \to \mathcal{A}^{r,s-1}(\mathcal{M}). \end{aligned} \tag{4.14}$$

よって，以下のように二種類の Lie 微分を定義できる．$\xi \in \mathcal{A}^{r,s}(\mathcal{M})$ に対して，

$$\mathcal{L}_A\xi = (\mathrm{d}\iota_A + \iota_A\mathrm{d})\xi, \quad \tilde{\mathcal{L}}_\alpha\xi = (\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\iota}_\alpha + \tilde{\iota}_\alpha\tilde{\mathrm{d}})\xi. \tag{4.15}$$

これで，$\mathcal{M}$ 上で Vaisman 亜代数を再現するにあたって必要な演算子をすべて定義できた．

次に，これらの演算を座標表示で書き下す方法を考える．パラエルミート計量 η によって，$\mathcal{A}^{1,0}(\mathcal{M}) \times \mathcal{A}^{0,1}(\mathcal{M})$ の $C^\infty(\mathcal{M},\mathbb{R})$-双線型写像が存在する．$\langle\langle \alpha, A \rangle\rangle$ を対称対をとる，という操作として定義する．ベクトルと 1 形式の内積 $\langle \cdot,\cdot \rangle$ と似ているが，L と $\tilde{L}$ が双対でなくとも，対称対をつくることができる．特に，$\alpha \in \mathcal{A}^{0,s}(\mathcal{M}), A_1, \dots, A_s \in \mathcal{A}^{1,0}(\mathcal{M})$ とすると，

$$\langle\langle \alpha, A_1 \wedge \cdots \wedge A_s \rangle\rangle = \alpha(A_1, \dots, A_s). \tag{4.16}$$

同様に，$A \in \mathcal{A}^{r,0}(\mathcal{M}), \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathcal{A}^{0,1}(\mathcal{M})$ とすると，

$$\langle\langle \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_s, A \rangle\rangle = A(\alpha_1, \dots, \alpha_r). \tag{4.17}$$

したがって，$\alpha \in \mathcal{A}^{0,s}(\mathcal{M})$ のとき，$\iota_A\alpha$ は $\mathcal{A}^{0,s-1}(\mathcal{M})$ に含まれる．これで，pairing $\langle\langle \alpha, A \rangle\rangle$ に基づいて，$\Gamma(\wedge^r\tilde{L})$ から $\Gamma(\wedge^{r-1}\tilde{L})$ を得る操作や，$\Gamma(\wedge^sL)$ から $\Gamma(\wedge^{s-1}L)$ を得る操作を規定できた．これは，上述の内部積の定義そのものである．内部積は，pairing を使って具体的に以下のように書き下せる．

$$\iota_A\alpha(A_1 \wedge \cdots \wedge A_{s-1}) = \alpha(A, A_1, \dots, A_{s-1}). \tag{4.18}$$

同様に，$A \in \mathcal{A}^{r,0}(\mathcal{M})$ のとき，$\iota_\alpha A$ は $\mathcal{A}^{r-1,0}(\mathcal{M})$ に含まれる．よって，

$$\tilde{\iota}_\alpha A(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{r-1}) = A(\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}). \tag{4.19}$$

また，$\alpha \in \mathcal{A}^{0,s}(\mathcal{M}), \beta \in \mathcal{A}^{0,\bullet}(\mathcal{M}), A \in \mathcal{A}^{r,0}(\mathcal{M}), B \in \mathcal{A}^{\bullet,0}(\mathcal{M})$ としたとき，$\iota_A, \tilde{\iota}_\alpha$ はそれぞれ以下のように作用する．

$$\iota_A(\alpha \wedge \beta) = (\iota_A\alpha) \wedge \beta + (-1)^s\alpha \wedge \iota_A\beta, \tag{4.20}$$

$$\tilde{\iota}_\alpha(A \wedge B) = (\tilde{\iota}_\alpha A) \wedge B + (-1)^r A \wedge \tilde{\iota}_\alpha B. \tag{4.21}$$

4.4 DFT における Vaisman 亜代数

この節では，前節までの内容を用いて，C 括弧が定義する亜代数構造について議論する．初めに，倍化空間をパラエルミート多様体 $\mathcal{M}$ によって局所座標系を用いた形で具体的に規定する．そして，前節で $L, \tilde{L}$ を得るのに用いた射影 $P, \tilde{P}$ などを行列で成分表示する．また，$L, \tilde{L}$ が Lie 亜代数であることを確認した上で，3 章で与えた 外微分演算子などもすべて成分表示する．そして，L と $\tilde{L}$ の間に derivation 条件が成立していないことを確認し，強い拘束条件と derivation 条件の関係を調べる．

DFT に現れる倍化空間として，$2D$ 次元の平坦なパラエルミート多様体 $\mathcal{M}$ を採用する [26]．$\mathcal{M}$ 上の局所座標系を $x^M (M = 1, \ldots, 2D)$ とすると，接空間 $T\mathcal{M}$ は ∂_M によって張られる．前の節で述べた通り，$T\mathcal{M}$ は射影演算子 $P, \tilde{P}$ によって $L, \tilde{L}$ に分割される．それに応じて二種類の葉層構造 $\mathcal{F}$ と $\tilde{\mathcal{F}}$ を定義できたことから，$\mathcal{M}$ の座標 x^M は，$\mathcal{F}$ の葉に沿った座標 x^μ と $\tilde{\mathcal{F}}$ の葉に沿った座標 $\tilde{x}_\mu$ に分割することができた．これにより，倍化ベクトル $\Xi = \Xi^M \partial_M \in \Gamma(T\mathcal{M})$ は以下のように，L 側の成分と $\tilde{L}$ 側の成分に分割して書ける．$A \in \Gamma(L), \alpha \in \Gamma(\tilde{L})$ とすると，

$$\Xi^M \partial_M = A_\mu(x, \tilde{x})\partial_\mu + \alpha^\mu(x, \tilde{x})\tilde{\partial}^\mu. \tag{4.22}$$

また，パラエルミート多様体には，定義から必ず neutral 計量 η が存在する．

$$\eta_{MN} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.23}$$

Neutral 計量は，その固有値の符号が正になる成分と負になる成分が同数な計量を指す．η は，DFT における $O(D, D)$ 不変な構造 (2.5) に対応する．また，η により写像 $L \to \tilde{L}$ が誘導され，倍化ベクトルの足の上下 $\eta_{MN}A^N = A_M$ を規定する．足の上下を考えると，$\tilde{L}$ と L の双対束 L^* との間に同型写像 (4.6) が存在することがわかる．η によって，倍化ベクトルの間の内積 $\eta(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_+$ を定義できる．ただし，$X, Y \in \Gamma(L)$ に対して，$\langle X, Y \rangle = 0$ である．$\tilde{L}$ についても同様である．したがって，$L, \tilde{L}$ はそれぞれ $T\mathcal{M}$ の最大等方な部分束である．

パラエルミート多様体 $\mathcal{M}$ では，$L, \tilde{L}$ は involutive なので，それぞれ閉じた交換子積として Lie 括弧を定義できる．まず，L 上の Lie 括弧を以下のように定義する．$A, B \in \Gamma(L)$ としたとき，

$$[A, B]_L = [A, B]_L^\mu \partial_\mu = (A^\nu \partial_\nu B^\mu - B^\nu \partial_\nu A^\mu)\partial_\mu. \tag{4.24}$$

$[\cdot, \cdot]_L$ は Jacobi 律を満たし，かつ Leibniz 則を満たす．さらに，anchor として自明な束写像 $\rho_L = \mathrm{id}_L$ を採用すると，L は Lie 亜代数となる．$\tilde{L}$ にも同様に，Lie 亜代数を定義できる．これで，$\mathcal{M}$ 上に現れる Lie 亜代数 $L, \tilde{L}$ を具体的に与えられた．

次に，2 章で multi vector を導入し，Lie 括弧を Schouten-Nijenhuis 括弧に一般化したように，$[\cdot, \cdot]_L$ に基づいて Schouten-Nijenhuis 括弧を成分表示で与える．まずは，k 次の multi vector として，$A \in \Gamma(\wedge^k L)$ を以下のように与える．

$$A = \frac{1}{k!} A^{\mu_1 \cdots \mu_k} \partial_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{\mu_k}. \tag{4.25}$$

“odd 座標” として，$\zeta_\mu = \partial_\mu$ を導入する．ζ はグラスマン数として扱うことができ，$\partial/\partial\zeta$ は右微分となる．すなわち，

$$\frac{\partial}{\partial\zeta_{\mu_n}}(\zeta_{\mu_1}\cdots\zeta_{\mu_n}\cdots\zeta_{\mu_k}) = (\zeta_{\mu_1}\cdots\zeta_{\mu_n}\cdots\zeta_{\mu_k})\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\zeta_{\mu_n}} = (-1)^{k-n}\zeta_{\mu_1}\cdots\check{\zeta}_{\mu_n}\cdots\zeta_{\mu_k}. \quad (4.26)$$

ただし，$\check{\zeta}_{\mu_n}$ は ζ_{μ_n} を消去する，という意味で用いた．ζ を用いると，k-vector A は以下のように書ける．

$$A = \frac{1}{k!}A^{\mu_1\cdots\mu_k}\zeta_{\mu_1}\cdots\zeta_{\mu_k}. \quad (4.27)$$

すると，Schouten-Nijenhuis 括弧は以下のように書ける．$A \in \Gamma(\wedge^p L), B \in \Gamma(\wedge^q L)$ としたとき，

$$[A, B]_{\mathrm{S}} = \left(\frac{\partial}{\partial\zeta_\mu}A\right)\partial_\mu B - (-1)^{(p-1)(q-1)}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_\mu}B\right)\partial_\mu A. \quad (4.28)$$

同様の手順で，$[\cdot,\cdot]_{\tilde{L}}$ を拡張して，$\Gamma(\wedge^k\tilde{L})$ を引数とする Schouten-Nijenhuis 括弧 $[\cdot,\cdot]^*_{\mathrm{S}}$ も定義できる．一般に，多様体上の multi vector は，Schouten-Nijenhuis 括弧によって Gerstenhaber 代数をなす [58]. また，ベクトル束 V 上の Lie 亜代数 $V \to M$ と，multi vector $\Gamma(\wedge^p V)$ による Gerstenhaber 代数は等価である [59].

k-vector を $(k+1)$-vector に写すのは，前節で定義した パラドルボー作用素 $\tilde{\mathrm{d}} : \wedge^k L \to \wedge^{k+1}L$ である．$\tilde{\mathrm{d}}$ は以下のように定義される．$X \in \Gamma(\wedge^k L), \alpha \in \Gamma(\tilde{L})$ とすると，

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{d}}X(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}\rho_{\tilde{L}}(\alpha_i)(X(\alpha_1,\ldots,\check{\alpha}_i,\ldots,\alpha_{k+1}))\\ &\quad + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}X([\alpha_i,\alpha_j]^*_{\mathrm{S}},\alpha_1,\ldots,\check{\alpha}_i,\ldots,\check{\alpha}_j,\ldots,\alpha_{k+1}). \quad (4.29)\end{aligned}$$

ただし $\check{\alpha}_i$ は i 番目の α を消去するという意味である．特に，局所座標を用いると，$\tilde{\mathrm{d}}$ は k-vector X に対して以下のように作用する．

$$\tilde{\mathrm{d}}X = \frac{1}{k!}\tilde{\partial}^\mu X^{\nu_1\cdots\nu_k}(x,\tilde{x})\partial_\mu \wedge \partial_{\nu_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{\nu_k}. \quad (4.30)$$

ここで，特に $k=1$ の場合を計算することで，$\tilde{\mathrm{d}}$ と $[\cdot,\cdot]^*_{\mathrm{S}}$ が両立することを確認する．$\tilde{\mathrm{d}}$ の定義 (4.29) から，$k=1$ のとき

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{d}}A(\alpha_1,\alpha_2) &= (-1)^2\rho_{\tilde{L}}(\alpha_1)(A(\alpha_2)) + (-1)^3\rho_{\tilde{L}}(\alpha_2)(A(\alpha_1)) + (-1)^3 A([\alpha_1,\alpha_2]^*_{\mathrm{S}})\\ &= \rho_{\tilde{L}}(\alpha_1)(A(\alpha_2)) - \rho_{\tilde{L}}(\alpha_2)(A(\alpha_1)) - A([\alpha_1,\alpha_2]^*_{\mathrm{S}}).\end{aligned}$$

ただし，$A \in \Gamma(L), \alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma(\tilde{L})$ である．よって，本節の前半で与えたパラエルミート多様体上の局所座標表示を用いると，特に $\rho_*(\alpha_1) = \alpha_{1\mu}\tilde{\partial}^\mu$ と書けることに注意すれば

$$\begin{aligned}A([\alpha_1,\alpha_2]^*_{\mathrm{S}}) &= \rho_{\tilde{L}}(\alpha_1)(A(\alpha_2)) - \rho_{\tilde{L}}(\alpha_2)(A(\alpha_1)) - \tilde{\mathrm{d}}A(\alpha_1,\alpha_2)\\ &= \alpha_{1\mu}\tilde{\partial}^\mu(A^\nu\alpha_{2\nu}) - \alpha_{2\nu}\tilde{\partial}^\nu(A^\mu\alpha_{1\mu}) - (\tilde{\partial}^\mu A^\nu - \tilde{\partial}^\nu A^\mu)\alpha_{1\mu}\alpha_{2\nu}\\ &= A^\mu(\alpha_{1\nu}\tilde{\partial}^\nu\alpha_{2\mu} - \alpha_{2\nu}\tilde{\partial}^\nu\alpha_{1\mu}).\end{aligned}$$

したがって，$\tilde{\mathrm{d}}$ と $[\cdot,\cdot]^*_{\mathrm{S}}$ は両立することがわかる．同様の手順で，d と $[\cdot,\cdot]_{\mathrm{S}}$ も両立することが確かめられる．

次に，Lie 微分を局所座標表示する．内部積は次のように作用する．$A, B \in \mathcal{A}^{1,0}(\mathcal{M}), \alpha, \beta \in \mathcal{A}^{0,1}(\mathcal{M})$ とすると，

$$\begin{aligned} \iota_A\beta &= A^\mu\beta_\mu, &\qquad \iota_A\mathrm{d}\beta &= (A^\nu\partial_\nu\beta_\mu - A^\nu\partial_\mu\beta_\nu)\tilde{\partial}^\mu, \\ \tilde{\iota}_\alpha B &= \alpha_\mu B^\mu, &\qquad \tilde{\iota}_\alpha\tilde{\mathrm{d}}B &= (\alpha_\nu\tilde{\partial}^\nu B^\mu - \alpha_\nu\tilde{\partial}^\mu B^\nu)\partial_\mu. \end{aligned} \tag{4.31}$$

すると，(4.15) で定義した Lie 微分は以下のように書ける．

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_A\beta &= (\mathrm{d}\iota_A + \iota_A\mathrm{d})\beta \\ &= \mathrm{d}(\iota_A\beta) + \iota_A(\mathrm{d}\beta) \\ &= \mathrm{d}(A^\nu\beta_\nu) + \iota_A(\partial_\mu\beta_\nu\tilde{\partial}^\mu \wedge \tilde{\partial}^\nu) \\ &= [(\partial_\mu A^\nu)\beta_\nu + A^\nu\partial_\mu\beta_\nu]\tilde{\partial}^\mu + A^\mu\partial_\mu\beta_\nu\tilde{\partial}^\nu - A^\nu\partial_\mu\beta_\nu\tilde{\partial}^\mu \\ &= (A^\nu\partial_\nu\beta_\mu + \beta_\nu\partial_\mu A^\nu)\tilde{\partial}^\mu. \end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_\alpha B &= (\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\iota}_\alpha + \tilde{\iota}_\alpha\tilde{\mathrm{d}})B \\ &= \tilde{\mathrm{d}}(\alpha_\nu B^\nu) + \tilde{\iota}_\alpha(\tilde{\partial}^\mu B^\nu\partial_\mu \wedge \partial_\nu) \\ &= [(\tilde{\partial}^\mu\alpha_\nu)B^\nu + \alpha_\nu\tilde{\partial}^\mu B^\nu]\partial_\mu + \alpha_\mu\tilde{\partial}^\mu B^\nu\partial_\nu - \alpha_\nu\tilde{\partial}^\mu B^\nu\partial_\mu \\ &= (\alpha_\nu\tilde{\partial}^\nu B^\mu + B^\nu\tilde{\partial}^\mu\alpha_\nu)\partial_\mu. \end{aligned} \tag{4.33}$$

4.5 Derivaiton 条件の破れ

これまでの議論から，パラエルミート多様体 $\mathcal{M}$ 上に双対なふたつの Lie 亜代数 $(L, [\cdot,\cdot]_L, \rho_L, \mathrm{d})$ と $(L^*, [\cdot,\cdot]_{L^*}, \rho_{L^*}, \mathrm{d}_*)$ を局所座標表示で得ることができた．これらの亜代数を用いて，前の章で提示した double 化する操作によって得られる構造 $(L, \tilde{L})$ を議論したい．前の章で述べた通り，Lie 双亜代数は Lie 亜代数 $(L, [\cdot,\cdot]_L, \rho_L, \mathrm{d})$ と，L と双対な Lie 亜代数 $(L^*, [\cdot,\cdot]^*_L, \rho_L, \mathrm{d}_*)$ の間に derivation 条件が成立するときに定義できる．derivation 条件は以下のような条件である．

$$\mathrm{d}_*[X,Y]_{\mathrm{S}} = [\mathrm{d}_*X, Y]_{\mathrm{S}} + [X, \mathrm{d}_*Y]_{\mathrm{S}}, \qquad X, Y \in \Gamma(\wedge^\bullet L). \tag{4.34}$$

前節の (4.28) で，Schouten-Nijenhuis 括弧を成分表示したので，パラエルミート多様体上に座標をあらわにして与えた Lie 亜代数 $L, \tilde{L}$ に対して，derivation 条件が成立しているかどうか確かめられるようになった．実際に (4.34) の左辺を計算すると，次の結果が得られる．

$$\begin{aligned} \tilde{\mathrm{d}}[A,B]_{\mathrm{S}} &= \tilde{\partial}^\mu[A,B]^\nu_{\mathrm{S}}\partial_\mu \wedge \partial_\nu \\ &= \tilde{\partial}^\mu(A^\rho\partial_\rho B^\nu - B^\rho\partial_\rho A^\nu)\partial_\mu \wedge \partial_\nu \\ &= (\tilde{\partial}^\mu A^\rho\partial_\rho B^\nu + A^\rho\partial_\rho\tilde{\partial}^\mu B^\nu - \tilde{\partial}^\mu B^\rho\partial_\rho A^\nu - B^\rho\partial_\rho\tilde{\partial}^\mu A^\nu)\partial_\mu \wedge \partial_\nu. \end{aligned} \tag{4.35}$$

続いて，(4.34) の右辺を計算すると以下の結果が得られる．

$$
\begin{aligned}
[\tilde{\mathrm{d}}A, B]_{\mathrm{S}} &= \left(\frac{\partial}{\partial\zeta_\rho}\tilde{\mathrm{d}}A\right)\partial_\rho B - (-1)^0\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_\rho}B\right)\partial_\rho\tilde{\mathrm{d}}A \\
&= (\tilde{\partial}^\mu A^\rho\zeta_\mu - \tilde{\partial}^\rho A^\mu\zeta_\mu)\partial_\rho B^\nu\zeta_\nu - B^\rho\partial_\rho\tilde{\partial}^\mu A^\nu\zeta_\mu\zeta_\nu \\
&= (\tilde{\partial}^\mu A^\rho\partial_\rho B^\nu - \tilde{\partial}^\rho A^\mu\partial_\rho B^\nu - B^\rho\partial_\rho\tilde{\partial}^\mu A^\nu)\partial_\mu\wedge\partial_\nu, \\
[A, \tilde{\mathrm{d}}B]_{\mathrm{S}} &= -[\tilde{\mathrm{d}}B, A]_{\mathrm{S}} \\
&= -(\tilde{\partial}^\mu B^\rho\partial_\rho A^\nu - \tilde{\partial}^\rho B^\mu\partial_\rho A^\nu - A^\rho\partial_\rho\tilde{\partial}^\mu B^\nu)\partial_\mu\wedge\partial_\nu.
\end{aligned}
\tag{4.36}
$$

したがって，derivation 条件は次のように破れている．

$$
\tilde{\mathrm{d}}[A, B]_{\mathrm{S}} = [\tilde{\mathrm{d}}A, B]_{\mathrm{S}} + [A, \tilde{\mathrm{d}}B]_{\mathrm{S}} + (\tilde{\partial}^\rho A^\mu\partial_\rho B^\nu + \tilde{\partial}^\rho B^\nu\partial_\rho A^\mu)\partial_\mu\wedge\partial_\nu. \tag{4.37}
$$

右辺三項目の存在から，パラエルミート多様体上に現れるふたつの Lie 亜代数 L と $\tilde{L}(\simeq L^*)$ の間に，derivation 条件は成立しないことがわかる．したがって，$(L, \tilde{L})$ は Lie 双亜代数をなさない．加えて，3 章で示した通り，L と $\tilde{L}$ の double $L\oplus\tilde{L}$ によって得られる構造は Vaisman 亜代数である．この Vaisman 亜代数の anchor は $\rho = \rho_L + \rho_{\tilde{L}}$，微分演算子は $\mathcal{D} = \mathrm{d} + \tilde{\mathrm{d}}$ で定義される．また，非退化な双線型形式は，対称対を用いて以下のように定義される．$\Xi_i \in \Gamma(T\mathcal{M})$ としたとき，

$$
(\Xi_1, \Xi_2) = (A+\alpha, B+\beta) = \frac{1}{2}\Big\{\langle\!\langle\alpha, B\rangle\!\rangle + \langle\!\langle\beta, A\rangle\!\rangle\Big\}. \tag{4.38}
$$

また，Vaisman 括弧は以下の形に定義する．これは，DFT の C 括弧と全く同じ形である．

$$
\begin{aligned}
[\Xi_1, \Xi_2]_{\mathrm{V}} = [A+\alpha, B+\beta]_{\mathrm{V}} = [A, B]_L + \mathcal{L}_A\beta - \mathcal{L}_B\alpha - \frac{1}{2}\mathrm{d}(\iota_A\beta - \iota_B\alpha) \\
+ [\alpha, \beta]_{\tilde{L}} + \tilde{\mathcal{L}}_\alpha B - \tilde{\mathcal{L}}_\beta A + \frac{1}{2}\tilde{\mathrm{d}}(\iota_A\beta - \iota_B\alpha).
\end{aligned}
\tag{4.39}
$$

$(L\oplus\tilde{L}, [\cdot,\cdot]_{\mathrm{C}}, \rho_{\mathrm{V}}, (\cdot,\cdot))$ の組は，Vaisman 亜代数となる．

ここで，(4.37) の右辺 3 項目に着目する．この項は，derivation 条件の破れを現している項であり，

$$
\tilde{\partial}^\rho A^\mu\partial_\rho B^\nu + \tilde{\partial}^\rho B^\nu\partial_\rho A^\mu = \eta^{KL}\partial_K A^\mu\partial_L B^\nu. \tag{4.40}
$$

と書き直すことができる．これは，まさに強い拘束条件 (2.21) を課すことで消える形の項である．つまり，強い拘束条件を課すことで，L と $\tilde{L}$ の間に derivation 条件が成立するようになる．よって，これらのペア $(L, \tilde{L})$ は Lie 双亜代数を定義する．また，3 章での議論から，上記の $L\oplus\tilde{L}$ に対して derivation 条件を課すと文献 [35] の Courant 亜代数となる．よって，**DFT における強い拘束条件の代数的な起源は，L と $\tilde{L}$ の間の derivation 条件であると言える．**これは，文献 [36] における，pre-DFT 亜代数に対して強い拘束条件を課すと Courant 亜代数が得られるという指摘とも合致する．

一方で，C 括弧に対して強い拘束条件を課すと，(2.2) 式で示した [17] の Courant 括弧が得られるのは，2 章の最後で述べた通りである．文献 [35] の Courant 括弧から (2.2) 式の Courant 括弧を得るには，もう少し考察が必要である．強い拘束条件と derivation 条件の間の関係は図 4.2 に示したほか，次の節で引き続き議論を行う．

4.6　一般幾何学との関連

この節では，前節まで議論した $L, \tilde{L}$ によるゲージ代数と，一般化幾何学との関係を議論する．

DFT のゲージ対称性を規定する C 括弧は，パラエルミート幾何学における Vaisman 括弧と一致することは，[15, 25] で指摘されている．C 括弧は，一般座標変換の微分同相写像と，B 場の $U(1)$ ゲージ変換を同時に扱い，$O(D, D)$ 共変となるように組んだものである．Vaisman 括弧をパラエルミート多様体上で再現するにあたって，強い拘束条件を要求する必要はない．よって，Vaisman 括弧は強い拘束条件を課さない状態での DFT のゲージ対称性，すなわち “off-shell” でのゲージ対称性を記述する．幾何学的には，倍化空間を記述するためにパラ複素構造を導入しているため，接束 $T\mathcal{M}$ は $L \oplus \tilde{L}$ の形に分割でき，L と $\tilde{L}$ はそれぞれ Lie 亜代数となる．$L, \tilde{L}$ は他にもよい性質を持つ．$L, \tilde{L}$ は distribution であり，Dirac 構造でもある．$L, \tilde{L}$ 上の括弧積は involutive であり，Frobenius の定理から積分可能である．したがって，$L, \tilde{L}$ はそれぞれ $\mathcal{M}$ 上の葉層構造 $\mathcal{F}, \tilde{\mathcal{F}}$ の接束となる．x^μ で特徴付けられる物理的時空は，葉層構造から葉を一枚選ぶことで定められる (葉を選ぶことで，$\tilde{x}_\mu$ は定数になる)．また，パラエルミート計量 η によって定義される同型写像から，$\tilde{L} = T\mathcal{F} \simeq L^* = T^*\mathcal{F}$ なので，$\tilde{L}$ のベクトルは，L^* の 1 形式と同一視できる．したがって，L 側の Lie 括弧はベクトル側のゲージパラメータ ξ_i^μ によって一般座標変換を支配し，$\tilde{L}$ 側の Lie 括弧は 1 形式側のゲージパラメータ $\tilde{\xi}_{i,\mu}$ によって B 場のゲージ変換を支配する．一般に，1 形式側の Lie 括弧は 0 にならないことから，$O(D, D)$ 共変な B 場のゲージ変換は，非可換な “off-shell” 対称性へと拡張される．

$$
\begin{tikzcd}
\text{C-bracket} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dd, "\text{strong constraint } \tilde{\partial} = 0"] & \text{Vaisman bracket} \arrow[d, "\text{derivation condition}"] \\
 & \text{Courant bracket} \arrow[d, "{[\cdot,\cdot]_* = 0}"] \\
\text{c-bracket} \arrow[r, leftrightarrow] & \text{c-bracket}
\end{tikzcd}
$$

図 4.2　各括弧と条件の関係を示した．

では，強い拘束条件を課した後のことを考えてみよう．このとき，DFT のゲージ代数は C 括弧で閉じる．したがって，C 括弧によって規定される代数が対称性を記述するには，強い拘束条件が必ず満たされる必要がある．強い拘束条件を解く最も簡単な方法は，winding 座標にかかる微分を 0 にする ($\tilde{\partial}* = 0$) ことである．このとき，1 形式側の Lie 括弧は 0 となり，C 括弧は (2.2) 式の c 括弧 $[\cdot, \cdot]_c$ に変形する (図 4.2)．これは，DFT 場やゲージパラメータに対して 強い拘束条件を課し，“on-shell”，すなわち物理的な部分空間を定義することにより，“off-shell” では非可換だった B 場のゲージ対称性が “on-shell” では可換になることを意味する．この意味で，C 括弧の “on-shell” 版として対応するのが c 括弧といえる．数学的には，c 括弧は次の手順で得られる．

まず，Vaisman 括弧に対して，derivation 条件 (3.20) を課す．そして，$\tilde{L}$ 側の Lie 括弧を zero bracket ($[\cdot,\cdot]_{\tilde{L}}=0$) とすればよい．成分計算によって明示的に示したように，C 括弧が規定する Vaisman 亜代数に対して derivation 条件を課すと，その構造は文献 [35] の Courant 亜代数となる．また，$(L,\tilde{L})$ は全体で Lie 双亜代数を成す．さらに，$[\cdot,\cdot]_{\tilde{L}}=0$ とすれば C 括弧は (2.2) 式の c 括弧に変化する．この c 括弧は，一般化幾何学に現れる Courant 括弧にほかならない [11]．

パラドルボーコホモロジーを規定したことで，強い拘束条件を満たすような，“on-shell” の DFT 場やゲージパラメータは，パラドルボー作用素を作用させると 0，すなわちパラ正則 (para-holomorphic) な量となる特徴がある．

$$\text{para-holomorphic}: \qquad \tilde{\mathrm{d}}\Phi = 0. \tag{4.41}$$

Φ は，倍化空間の任意の場やゲージパラメータである．これは，Φ が $\mathcal{F}$ の葉に制限されているのに等しいが，パラドルボー作用素が $\mathrm{d},\tilde{\mathrm{d}}$ の二種類あることから，強い拘束条件の解として一意ではない．強い拘束条件のもう一つの解は，Φ がパラ反正則 (anti-para-holomorphic) な量となる場合である．

$$\text{anti-para-holomorphic}: \qquad \mathrm{d}\Phi = 0. \tag{4.42}$$

パラ反正則な量は，$\tilde{\mathcal{F}}$ の葉に制限される．つまり，x^μ を定数にすることで定義できる winding 空間に存在する．DFT における運動方程式の解として，winding 空間に依存する時空も現れる [60–64]．

第 5 章

まとめ

本修士論文では，弦理論における T 双対性を明白に含んだ重力理論である Double Field Theory に基づいて，特に DFT の時空の幾何学的な描像や，ゲージ対称性に現れる代数構造などの数学的な側面について議論した．

第 2 章では，DFT について，必要最低限な部分だけをごく簡単にまとめた．まず倍化座標を提示し，計量や，基本となる DFT 場などを紹介した．そして，一般化 Lie 微分の計算から，特に DFT に現れるゲージ代数構造を生成する C 括弧について詳細に述べ，本論文の主題である Vaisman 亜代数という新しい構造が提示されることを紹介した．また，物理的 section 条件について述べ，強い拘束条件を課す前後での C 括弧のふるまいの変化や，DFT の幾何学的な枠組みの違いについても言及した．

第 3 章では，今度は数学的な観点から，最も基礎的な代数構造である Lie 代数を出発点とし，徐々に構造を一般化していくことで Vaisman 亜代数の厳密な定義を与えた．また，Drinfel'd double という操作に着目し，Vaisman 亜代数は，全体で Lie 双亜代数をなさないような Lie 亜代数のペア (E, E^*) の double によって構成できることを示した．加えて，[35] の Courant 亜代数に関する議論に基づいて Vaisman 亜代数の Dirac 構造による分割を試みた．分割によって現れるふたつの Dirac 構造 $L, \tilde{L} \simeq L^*$ の間には derivation 条件は成立せず，$L, \tilde{L} \simeq L^*$ の組は全体で Lie 双亜代数をなさないことが確かめられた．

第 4 章では，第 3 章で明らかにした Vaisman 亜代数の double 構造を用いて，第 2 章で紹介した DFT のゲージ代数構造について考察した．まず，倍化空間の数学的な描像として，$2D$ 次元のパラエルミート多様体 $\mathcal{M}$ を導入した．$\mathcal{M}$ は，パラ複素構造 K を持つことから，接束 $T\mathcal{M}$ を最大等方的な部分束 $L, \tilde{L}$ へと自然に分割する $(T\mathcal{M} = L \oplus \tilde{L})$．これに伴い，$T\mathcal{M}$ の断面で与えられる倍化ベクトル $\Xi = \Xi^M \partial_M$ を，$\Xi = A^\mu \partial_\mu + \alpha_\mu \tilde{\partial}^\mu$ に分割した．ここで，$A \in \Gamma(L), \alpha \in \Gamma(\tilde{L})$ である．そして，$L, \tilde{L}$ はそれぞれ Lie 亜代数であることを確かめた．$L, \tilde{L}$ に対する外積代数を規定し，パラドルボーコホモロジーを構築した．詳細な成分計算から，L 側に作用する外微分演算子 $\tilde{\mathrm{d}}$ が，Lie 括弧 $[\cdot, \cdot]_L$ に対して derivation 条件を満たさないことを確認し，$L, \tilde{L}$ は一般に全体で Lie 双亜代数をなさないことを示した．第 2 章での議論から，C 括弧が規定する代数構造は Vaisman 亜代数であることを改めて示した．また，**DFT の強い拘束条件の代数的な起源が，derivation 条件であることを示した．**

本修士論文において得られた新たな結果は，主に数学的な観点から，Vaisman 亜代数がふたつ

の Lie 亜代数の double で得られると示したことと，その物理的な応用として，強い拘束条件の代数的な起源が derivation 条件であると明らかにしたことのふたつである．この結果は，[13] において出版済みである．

今後の展望

倍化幾何学を通して DFT の理論構造を理解し，T 双対性が時空に与える影響を知りたいということが，研究の目的である．最後に，DFT や 倍化幾何学に関係する本文に取り上げた以外の話題や，この目的に沿って今後取り組みたい問題をいくつか紹介したい．すでに述べた通り，DFT において C 括弧が特徴付けたのは，そのゲージ対称性であり，言い換えれば 無限小の (infinitesimal) ゲージ変換である．これに対し，有限の (finite) ゲージ変換に関しても議論が行われている．代表的な論文は [19, 65–71] である．特に数学的な観点から言うと，Lie 群が Lie 代数から構成できるという事実から類推するに，DFT の有限ゲージ変換は，Vaisman 亜代数の “積分 (integration)” 操作によって得られると考えられる．少なくとも，Lie 双亜代数の積分によって Poisson-Lie 群が得られる [72] ことや，その一般化で Lie (双) 亜代数の積分によって (Poisson-) Lie 亜群 (groupoid) が得られること [43, 44] はすでに知られている．また，ある種の Courant 亜代数の積分によって亜群[*1]が現れるだろう，という予測がある [74, 75]．このような，「積分によって，ある代数 (または亜代数) から群 (または亜群) を得る」という問題は，“coquecigrue problem” [*2]と呼ばれる．もし，Vaisman 亜代数に対する coquecigrue problem が解決すれば，それは数学的に興味深い結果であるだけでなく，DFT のゲージ対称性の幾何学的な起源を与えるだろう．

また，強い拘束条件を課すことは，DFT の閉じたゲージ代数を得るための十分条件であり，必要条件ではない．より一般的には，強い拘束条件を必要としない DFT セットアップも考えられている [76]．このような状況では，本修士論文で扱った Vaisman 亜代数はより重要な意味合いを持つだろう．

倍化空間を数学的に記述するにあたって，現段階では様々な方法が考えられている．今後これらの方法がただひとつの正当な記述に絞り込まれていくのか，あるいは複数の等価な記述が見つかるのかは定かではないが，いずれにせよ徐々にそれぞれの方法の関係性も整理されていくだろう．本修士論文では，倍化空間の再現としてパラエルミート多様体を採用した．これと独立したアプローチとして graded 幾何学を用いる方法もある [21, 77, 78]．これらのふたつの方法は，Courant 亜代数と QP 多様体が等価であること [79] に由来して同等なものである．C 括弧の構造と derived 括弧積 [21, 80] の関係を調べると，graded 幾何学とパラエルミート幾何学の関係が整理されるはずである．また，パラエルミート幾何学の拡張として，ボルン幾何学が考案されている [26, 27]．ボルン幾何学では，捩率や曲率といった空間の性質を記述する幾何学量を定義する試みが行われており，他の方法と比べて開発が一歩進んでいる．ボルン幾何学で定義した量が DFT にどのように現れるかチェックできれば，倍化空間の数学的な記述としてボルン幾何学の信憑性

---

*1 亜群は，端的にいうと単位元にあたる元を複数もつような，群を拡張した構造である．詳細は，[73] などに詳しい．亜群 (groupoid) に関しては，文中ではこれ以上詳細には言及しない．

*2 coquecigrue は，16 世紀のフランス文学である「ガルガンチュア (Gargantua) 物語」,「パンタグリュエル (Pantagruel)」に現れる空想上の生物を指す．

は増すだろう．

T 双対性の拡張である Poisson-Lie T-duality [81, 82] との関係も議論されている．type II 超重力理論をベースに群多様体上で DFT を構築すると，Poisson-Lie T-duality が理論の明白な対称性となる．本修士論文で述べた double による Vaisman 亜代数の構築は底空間の種類を問わず行えるので，群多様体上で再現した場合にどのような結果が得られるか確かめたい．少なくとも，[35] の Drinfel'd double による Courant 亜代数が弦理論において Poisson-Lie T-duality を理解するための鍵となる [83–86]．

最後に，DFT 自体の素朴な拡張として，対称性を T 双対性から U 双対性に格上げすることが考えられる．DFT をベースに，U 双対性を明白な対称性とする理論として Exceptional Field Theory (EFT) が考案された [87]．EFT のゲージ対称性は [88] などで議論されているが，DFT 以上に幾何学的な描像が不明瞭である．素朴に考えれば，EFT は DFT の拡張であるから，EFT の幾何学的描像は 倍化幾何学を内包しているはずである．仮に倍化幾何学自体が数学的に記述できたとしても，さらにそれが拡張される可能性は十分残っている．今後議論したい興味深い問題は山積みである．

謝辞

学部から引き続き丁寧に指導してくださった講師の佐々木伸先生に深く感謝申し上げます．私が今の研究テーマと出会ったのも，遡ること 3 年前に「一般化幾何学という面白そうな題材があるので，もし良かったら卒業研究でやってみないか」と紹介を受けたことがきっかけでした．あのやり取りがなければ今の私は存在しません．共同研究者であり，尊敬すべき先輩でもある博士二年の塩沢健太さんにも感謝申し上げます．院に進学した当時は，まさか修士終了までにお二人と共同研究ができて論文が出るとは夢にも思っていなかったです．これまでの人生で一番嬉しい出来事でした．改めて深く御礼申し上げます．加えて，日頃お世話になっている北里大学および他大学の諸先輩方，同級生，後輩たちにも感謝します．最後に，主査を務めていただきました大妻女子大学の肥川隆夫教授に感謝申し上げます．

おかげさまで，進学した当初は想像もしなかったような，非常に濃密な 修士 2 年間を過ごすことができました．とても楽しく充実した時間でした．わたしにとって一生の宝です．このように書くと，まるで大学院生活が終わるかのような錯覚を覚えますが，もう何年か同じ場所でお世話になります．後から自分で，これが良い判断だったと思えるように頑張ります．改めてよろしくお願いいたします．

付録 A

計算ノート

A.1 C 括弧の Jacobiator の導出

C 括弧の Jacobiator (2.23) の導出を行う．C 括弧と D 括弧が以下のように関係することを用いる．

$$[\Xi_1,\Xi_2]^M_{\mathsf{D}} = [\Xi_1,\Xi_2]^M_{\mathsf{C}} + \frac{1}{2}\eta^{MN}\partial_N(\eta_{KL}\Xi_1^K\Xi_2^L) \tag{A.1}$$

また，C 括弧は D 括弧によって以下のように定義できる．

$$[\Xi_1,\Xi_2]^M_{\mathsf{C}} = \frac{1}{2}([\Xi_1,\Xi_2]^M_{\mathsf{D}} - [\Xi_2,\Xi_1]^M_{\mathsf{D}}) \tag{A.2}$$

以上の事実から，まずは D 括弧に関して計算し，その結果を C 括弧に応用する．D 括弧は以下のように書ける．

$$[\Xi_1,\Xi_2]^M_{\mathsf{D}} = [\Xi_1,\Xi_2]^M + \Xi_2^K\partial^M\Xi_{1K} \tag{A.3}$$

ただし，$[\cdot,\cdot]$ はただの交換子積である．一般に，Leibniz 律が以下のように与えられることに基づいて，D 括弧の場合を計算する．

$$[\Xi_1,[\Xi_2,\Xi_3]] = [[\Xi_1,\Xi_2],\Xi_3] + [\Xi_2,[\Xi_1,\Xi_3]] \tag{A.4}$$

(A.3) の左辺は，以下のように計算できる．

$$\begin{aligned}
&[\Xi_1,[\Xi_2,\Xi_3]_{\mathsf{D}}]^M_{\mathsf{D}}\\
&= [\Xi_1,[\Xi_2,\Xi_3]_{\mathsf{D}}]^M + \eta_{KL}[\Xi_2,\Xi_3]^K_{\mathsf{D}}\partial^M\Xi_1^L\\
&= [\Xi_1,[\Xi_2,\Xi_3]]^M + (\Xi_1^N\partial_N(\eta_{KL}\Xi_3^K\partial^M\Xi_2^L) - (\eta_{KL}\Xi_3^K\partial^N\Xi_2^L)\partial_N\Xi_1^M)\\
&\quad + \eta_{KL}[\Xi_2,\Xi_3]^K\partial^M\Xi_1^L + \eta_{KL}(\eta_{IJ}\Xi_3^I\partial^K\Xi_2^J)\partial^M\Xi_1^L.
\end{aligned} \tag{A.5}$$

一方で，(A.3) の一項目は以下のように計算できる．

$$\begin{aligned}
&[[\Xi_1,\Xi_2]_{\mathsf{D}},\Xi_3]^M_{\mathsf{D}}\\
&= [[\Xi_1,\Xi_2]_{\mathsf{D}},\Xi_3]^M + \eta_{KL}\Xi_3^K\partial^M[\Xi_1,\Xi_2]^L_{\mathsf{D}}\\
&= [[\Xi_1,\Xi_2],\Xi_3]^M + ((\eta_{KL}\Xi_2^K\partial^N\Xi_1^L)\partial_N\Xi_3^M - \Xi_3^N\partial_N(\eta_{KL}\Xi_2^K\partial^M\Xi_1^L))\\
&\quad + \eta_{KL}\Xi_3^K\partial^M[\Xi_1,\Xi_2]^L + \eta_{KL}\Xi_3^K\partial^M(\eta_{IJ}\Xi_2^I\partial^L\Xi_1^J).
\end{aligned} \tag{A.6}$$

したがって，(A.3) の右辺全体は次のように書ける．

$$
\begin{aligned}
&[[\Xi_1,\Xi_2]_{\mathsf{D}},\Xi_3]_{\mathsf{D}}^M+[\Xi_2,[\Xi_1,\Xi_3]_{\mathsf{D}}]_{\mathsf{D}}^M\\
&=[\Xi_1,[\Xi_2,\Xi_3]]^M+\eta_{KL}([\Xi_2,\Xi_3]^K\partial^M\Xi_1^L+(\eta_{IJ}\Xi_3^I\partial^K\Xi_2^J)\partial^M\Xi_1^L+\Xi_1^N\partial_N(\Xi_3^K\partial^M\Xi_2^L))\\
&\quad+\eta_{KL}(\Xi_2^K\partial^N\Xi_1^L\partial_N\Xi_3^M-\Xi_3^K\partial^N\Xi_1^L\partial_N\Xi_2^M).
\end{aligned}\tag{A.7}
$$

(A.5) をもう一度用いて整理すると，D 括弧に関して以下の関係が得られる．

$$
[\Xi_1,[\Xi_2,\Xi_3]_{\mathsf{D}}]_{\mathsf{D}}^M=[[\Xi_1,\Xi_2]_{\mathsf{D}},\Xi_3]_{\mathsf{D}}^M+[\Xi_2,[\Xi_1,\Xi_3]_{\mathsf{D}}]_{\mathsf{D}}^M+\mathrm{SC}_{\mathsf{D}}(\Xi_1,\Xi_2,\Xi_3)^M,\tag{A.8}
$$

$$
\mathrm{SC}_{\mathsf{D}}(\Xi_1,\Xi_2,\Xi_3)^M=\eta_{KL}(\Xi_3^K\partial^N\Xi_1^L\partial_N\Xi_2^M-\Xi_2^K\partial^N\Xi_1^L\partial_N\Xi_3^M-\Xi_3^K\partial^N\Xi_2^L\partial_N\Xi_1^M).\tag{A.9}
$$

SC_{D} は，強い拘束条件を課すと消える項である．

この結果を用いて，C 括弧の Jacobiator の計算に移る．(A.2) から，以下の関係が得られる．

$$
\begin{aligned}
[[\Xi_1,\Xi_2]_{\mathsf{C}},\Xi_3]_{\mathsf{C}}&=\frac{1}{2}([[\Xi_1,\Xi_2]_{\mathsf{C}},\Xi_3]_{\mathsf{D}}-[\Xi_3,[\Xi_1,\Xi_2]_{\mathsf{C}}]_{\mathsf{D}})\\
&=\frac{1}{4}([[\Xi_1,\Xi_2]_{\mathsf{D}},\Xi_3]_{\mathsf{D}}-[[\Xi_2,\Xi_1]_{\mathsf{D}},\Xi_3]_{\mathsf{D}}-[\Xi_3,[\Xi_1,\Xi_2]_{\mathsf{D}}]_{\mathsf{D}}+[\Xi_3,[\Xi_2,\Xi_1]_{\mathsf{D}}]_{\mathsf{D}}).
\end{aligned}\tag{A.10}
$$

(A.8) と (A.10) から，

$$
\begin{aligned}
[[\Xi_1,\Xi_2]_{\mathsf{C}},\Xi_3]_{\mathsf{C}}=\frac{1}{4}(&[\Xi_1,[\Xi_2,\Xi_3]_{\mathsf{D}}]_{\mathsf{D}}-[\Xi_2,[\Xi_1,\Xi_3]_{\mathsf{D}}]_{\mathsf{D}}-\mathrm{SC}_{\mathsf{D}}(\Xi_1,\Xi_2,\Xi_3)\\
&-[\Xi_2,[\Xi_1,\Xi_3]_{\mathsf{D}}]_{\mathsf{D}}+[\Xi_1,[\Xi_2,\Xi_3]_{\mathsf{D}}]_{\mathsf{D}}+\mathrm{SC}_{\mathsf{D}}(\Xi_2,\Xi_1,\Xi_3)\\
&-[\Xi_3,[\Xi_1,\Xi_2]_{\mathsf{D}}]_{\mathsf{D}}+[\Xi_3,[\Xi_2,\Xi_1]_{\mathsf{D}}]_{\mathsf{D}}).
\end{aligned}\tag{A.11}
$$

(A.11) の cyclic 部分をまとめなおすと，以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
&[[\Xi_1,\Xi_2]_{\mathsf{C}},\Xi_3]_{\mathsf{C}}+\mathrm{c.p.}\\
&=\frac{1}{4}([\Xi_1,[\Xi_2,\Xi_3]_{\mathsf{D}}]_{\mathsf{D}}-[\Xi_2,[\Xi_1,\Xi_3]_{\mathsf{D}}]_{\mathsf{D}}-\mathrm{SC}_{\mathsf{D}}(\Xi_1,\Xi_2,\Xi_3)+\mathrm{SC}_{\mathsf{D}}(\Xi_2,\Xi_1,\Xi_3)+\mathrm{c.p.}).
\end{aligned}\tag{A.12}
$$

右辺を，D 括弧の Leibnitz 律 (A.8) の結果を用いて置き換えると，次のようになる．

$$
[[\Xi_1,\Xi_2]_{\mathsf{C}},\Xi_3]_{\mathsf{C}}+\mathrm{c.p.}=\frac{1}{4}([[\Xi_1,\Xi_2]_{\mathsf{D}},\Xi_3]_{\mathsf{D}}-\mathrm{SC}_{\mathsf{D}}(\Xi_2,\Xi_1,\Xi_3)+\mathrm{c.p.}).\tag{A.13}
$$

ここで，C 括弧と D 括弧の関係 (A.1) から，

$$
\begin{aligned}
[[\Xi_1,\Xi_2]_{\mathsf{C}},\Xi_3]_{\mathsf{C}}&=[[\Xi_1,\Xi_2]_{\mathsf{C}},\Xi_3]_{\mathsf{D}}-\partial^\bullet([\Xi_1,\Xi_2]_{\mathsf{C}},\Xi_3)_+\\
&=[[\Xi_1,\Xi_2]_{\mathsf{D}},\Xi_3]_{\mathsf{D}}-[\partial^\bullet(\Xi_1,\Xi_2)_+,\Xi_3]_{\mathsf{D}}-\partial^\bullet([\Xi_1,\Xi_2]_{\mathsf{C}},\Xi_3)_+.
\end{aligned}\tag{A.14}
$$

ここで，$\partial^\bullet$ は，η^{MN} で足が上がった微分演算である．また，$(\Xi_1,\Xi_2)_+=(\eta_{MN}\Xi_1^M\Xi_2^N)/2$ を意味する．(A.14) の右辺二項目は以下のように計算できる．

$$
\begin{aligned}
[\partial^\bullet(\Xi_1,\Xi_2)_+,\Xi_3]_{\mathsf{D}}^M&=\frac{1}{2}\Big(\partial^N(\Xi_1^K\Xi_{2,K})\partial_N\Xi_3^M+(\partial^M\partial_N(\Xi_1^K\Xi_{2,K})-\partial_N\partial^M(\Xi_1^K\Xi_{2,K}))\Xi_3^N\Big)\\
&=\frac{1}{2}\partial^N(\Xi_1^K\Xi_{2,K})\partial_N\Xi_3^M.
\end{aligned}\tag{A.15}
$$

ここで，(A.14) を使うと，C 括弧は次のように計算できる．

$$N_{\mathsf{C}}(\Xi_1,\Xi_2,\Xi_3) = \frac{1}{3}\big(([\Xi_1,\Xi_2]_{\mathsf{C}},\Xi_3)_+ + \text{c.p.}\big), \tag{A.16}$$

$$\mathrm{SC}_{\mathsf{C}}(\Xi_1,\Xi_2,\Xi_3) = \frac{1}{3}\big([\partial^\bullet(\Xi_1,\Xi_2)_+,\Xi_3]_{\mathsf{D}} - \mathrm{SC}_{\mathsf{D}}(\Xi_2,\Xi_1,\Xi_3) + \text{c.p.}\big). \tag{A.17}$$

ただし，

$$N_{\mathsf{C}}(\Xi_1,\Xi_2,\Xi_3) = \frac{1}{3}\big(([\Xi_1,\Xi_2]_{\mathsf{C}},\Xi_3)_+ + \text{c.p.}\big), \tag{A.18}$$

$$\mathrm{SC}_{\mathsf{C}}(\Xi_1,\Xi_2,\Xi_3) = \frac{1}{3}\big([\partial^\bullet(\Xi_1,\Xi_2)_+,\Xi_3]_{\mathsf{D}} - \mathrm{SC}_{\mathsf{D}}(\Xi_2,\Xi_1,\Xi_3) + \text{c.p.}\big). \tag{A.19}$$

したがって，

$$J_{\mathsf{C}}(\Xi_1,\Xi_2,\Xi_3) = \partial^\bullet N_{\mathsf{C}}(\Xi_1,\Xi_2,\Xi_3) + \mathrm{SC}_{\mathsf{C}}(\Xi_1,\Xi_2,\Xi_3). \tag{A.20}$$

これで，C 括弧の Jacobiator が計算できた．ただし，N_{C} は Nijenhuis テンソルであり，SC_{C} は強い拘束条件で消える項である．

A.2 C 括弧から Courant 括弧への reduction

C 括弧を成分で表記し，これは強い拘束条件のもとで [17] で提示された Courant 括弧

$$[X_1+\xi_1, X_2+\xi_2]_{\mathrm{c}} = [X_1,X_2] + (\mathcal{L}_{X_1}\xi_2 - \mathcal{L}_{X_2}\xi_1) + \frac{1}{2}\mathrm{d}_0(\xi_1(X_2)-\xi_2(X_1)) \tag{A.21}$$

へ変化することを示す．ただし X_i は x^μ 側，ξ_i は $\tilde{x}_\mu$ 側の成分である．まず，gauge パラメータ Ξ_1,Ξ_2 を以下のように成分で分解する．

$$\Xi_1^M = \begin{pmatrix}\alpha_\mu\\ A^\mu\end{pmatrix}, \qquad \Xi_2^M = \begin{pmatrix}\beta_\mu\\ B^\mu\end{pmatrix}. \tag{A.22}$$

この成分表示によって，C 括弧は以下のように書き換えられる．

$$\begin{aligned}[\Xi_1,\Xi_2]_{\mathsf{C}}^M &= \Xi_1^K\partial_K\Xi_2^M - \Xi_2^K\partial_K\Xi_1^M - \frac{1}{2}\eta_{KL}(\Xi_1^K\partial^M\Xi_2^L - \Xi_2^K\partial^M\Xi_1^L)\\ &= \alpha_\nu\tilde{\partial}^\nu\Xi_2^M + A^\nu\partial_\nu\Xi_2^M - \beta_\nu\tilde{\partial}^\nu\Xi_1^M - B^\nu\partial_\nu\Xi_1^M\\ &\quad - \frac{1}{2}(\alpha_\nu\partial^M B^\nu + A^\nu\partial^M\beta_\nu - \beta_\nu\partial^M A^\nu - B^\nu\partial^M\alpha_\nu).\end{aligned} \tag{A.23}$$

ここで，doubled 基底として $\partial^M = (\partial_\mu,\tilde{\partial}^\mu)$ を導入すると，C 括弧はさらに以下のように書ける．

$$\begin{aligned}[\Xi_1,\Xi_2]_{\mathsf{C}} = [\Xi_1,\Xi_2]_{\mathsf{C}}^M\eta_{MN}\partial^N &= \alpha_\nu\tilde{\partial}^\nu\beta_\mu\tilde{\partial}^\mu + A^\nu\partial_\nu\beta_\mu\tilde{\partial}^\mu - \beta_\nu\tilde{\partial}^\nu\alpha_\mu\tilde{\partial}^\mu - B^\nu\partial_\nu\alpha_\mu\tilde{\partial}^\mu\\ &\quad + \alpha_\nu\tilde{\partial}^\nu B^\mu\partial_\mu + A^\nu\partial_\nu B^\mu\partial_\mu - \beta_\nu\tilde{\partial}^\nu A^\mu\partial_\mu - B^\nu\partial_\nu A^\mu\partial_\mu\\ &\quad - \frac{1}{2}(\alpha_\nu\tilde{\partial}^\mu B^\nu + A^\nu\tilde{\partial}^\mu\beta_\nu - \beta_\nu\tilde{\partial}^\mu A^\nu - B^\nu\tilde{\partial}^\mu\alpha_\nu)\partial_\mu\\ &\quad - \frac{1}{2}(\alpha_\nu\partial_\mu B^\nu + A^\nu\partial_\mu\beta_\nu - \beta_\nu\partial_\mu A^\nu - B^\nu\partial_\mu\alpha_\nu)\tilde{\partial}^\mu.\end{aligned} \tag{A.24}$$

ここで，各部分は以下のように Lie 括弧などでまとめ直せる．

$$
\begin{aligned}
[A,B]_L &= [A,B]_L^\mu \partial_\mu = (A^\nu \partial_\nu B^\mu - B^\nu \partial_\nu A^\mu)\partial_\mu, \\
[\alpha,\beta]_{\tilde{L}} &= \left([\alpha,\beta]_{\tilde{L}}\right)_\mu \tilde{\partial}^\mu = (\alpha_\nu \tilde{\partial}^\nu \beta_\mu - \beta_\nu \tilde{\partial}^\nu \alpha_\mu)\tilde{\partial}^\mu, \\
\mathrm{d}\iota_A\beta &= \mathrm{d}(A^\nu\beta_\nu) = \partial_\mu(A^\nu\beta_\nu)\tilde{\partial}^\mu = (\beta_\nu\partial_\mu A^\nu + A^\nu\partial_\mu\beta_\nu)\tilde{\partial}^\mu, \\
\tilde{\mathrm{d}}\iota_A\beta &= \tilde{\mathrm{d}}(A^\nu\beta_\nu) = \tilde{\partial}^\mu(A^\nu\beta_\nu)\partial_\mu = (\beta_\nu\tilde{\partial}^\mu A^\nu + A^\nu\tilde{\partial}^\mu\beta_\nu)\partial_\mu, \\
\tilde{\mathcal{L}}_\alpha B &= (\alpha_\nu\tilde{\partial}^\nu B^\mu + B^\nu\tilde{\partial}^\mu\alpha_\nu)\partial_\mu, \\
\mathcal{L}_A\beta &= (A^\nu\partial_\nu\beta_\mu + \beta_\nu\partial_\mu A^\nu)\tilde{\partial}^\mu.
\end{aligned} \tag{A.25}
$$

ここで，$\mathcal{L}$ は通常のベクトル場に関する Lie 微分である．一方，$\tilde{\mathcal{L}}$ は winding 座標上のベクトル場に関する Lie 微分である．同様に，$[\cdot,\cdot]_L$ は通常の Lie 括弧だが，$[\cdot,\cdot]_{\tilde{L}}$ は winding 座標上のベクトル場に関する Lie 括弧である．したがって，C 括弧は以下のように ∂_μ 側と $\tilde{\partial}^\mu$ 側に分割してまとめられる．

$$
\begin{aligned}
[\Xi_1,\Xi_2]_{\mathsf{C}}^M\partial_M &= ([\alpha,\beta]_{\tilde{L}})_\mu\tilde{\partial}^\mu + A^\nu\partial_\nu\beta_\mu\tilde{\partial}^\mu - B^\nu\partial_\nu\alpha_\mu\tilde{\partial}^\mu + [A,B]_L^\mu\partial_\mu + \alpha_\nu\tilde{\partial}^\nu B^\mu\partial_\mu - \beta_\nu\tilde{\partial}^\nu A^\mu\partial_\mu \\
&\quad - \frac{1}{2}(2A^\nu\tilde{\partial}^\mu\beta_\nu - (\tilde{\mathrm{d}}\iota_A\beta)^\mu + (\tilde{\mathrm{d}}\iota_B\alpha)^\mu - 2B^\nu\tilde{\partial}^\mu\alpha_\nu)\partial_\mu \\
&\quad - \frac{1}{2}((\mathrm{d}\iota_A\beta)_\mu - 2\beta_\nu\partial_\mu A^\nu - (\mathrm{d}\iota_B\alpha)_\mu + 2\alpha_\nu\partial_\mu B^\nu)\tilde{\partial}^\mu \\
&= \left([A,B]_L^\mu + \tilde{\mathcal{L}}_\alpha B^\mu - \tilde{\mathcal{L}}_\beta A^\mu + \frac{1}{2}(\tilde{\mathrm{d}}(\iota_A\beta - \iota_B\alpha))^\mu\right)\partial_\mu \\
&\quad + \left(([\alpha,\beta]_{\tilde{L}})_\mu + \mathcal{L}_A\beta_\mu - \mathcal{L}_B\alpha_\mu - \frac{1}{2}(\mathrm{d}(\iota_A\beta - \iota_B\alpha))_\mu\right)\tilde{\partial}^\mu.
\end{aligned} \tag{A.26}
$$

この形は，Courant 括弧をふたつ足し合わせたように見える [9].

$$
\begin{aligned}
[\Xi_1,\Xi_2]_{\mathsf{C}} = [A+\alpha, B+\beta]_{\mathsf{C}} &= [A,B]_L + \mathcal{L}_A\beta - \mathcal{L}_B\alpha - \frac{1}{2}\mathrm{d}(\iota_A\beta - \iota_B\alpha) \\
&\quad + [\alpha,\beta]_{\tilde{L}} + \tilde{\mathcal{L}}_\alpha B - \tilde{\mathcal{L}}_\beta A + \frac{1}{2}\tilde{\mathrm{d}}(\iota_A\beta - \iota_B\alpha).
\end{aligned} \tag{A.27}
$$

(A.27) に対して強い拘束条件を課す ($\tilde{\partial}* = 0$) と，右辺の二段目だけが消滅し，C 括弧は Courant が提示した元祖の Courant 括弧の形 [17] に変化する．

A.3 $T(e_1, e_2, e_3)$ の関係式 (3.36) の導出

以下の式を導出する．

$$
\begin{aligned}
T(e_1,e_2,e_3) &\equiv \frac{1}{3}(([e_1,e_2]_{\mathrm{V}}, e_3)_+ + \text{c.p.}) \\
&= \frac{1}{2}\langle\xi_3, [X_1,X_2]_E\rangle + \langle[\xi_1,\xi_2]_{E^*}, X_3 + \rho(X_3)(e_1,e_2)_- - \rho_*(\xi_3)(e_1,e_2)_-\rangle
\end{aligned} \tag{3.36}
$$

これは，文献 [35] の Lemma 3.2 にあたる関係式であり，$T(e_1,e_2,e_3)$ を定義に沿って計算することで示すことができる．括弧積の形が同じなので，本文中で定義した Vaisman 括弧 $[\cdot,\cdot]_{\mathrm{V}}$ で計算しても，文献 [35] の Courant 括弧 $[\cdot,\cdot]_{\mathrm{c}}$ で計算しても同じ関係式が得られる．

まず，$([e_1,e_2]_{\mathrm{V}},e_3)_+$ に注目すると，$[\cdot,\cdot]_{\mathrm{V}},(\cdot,\cdot)_+$ の定義より

$$([e_1,e_2]_{\mathrm{V}},e_3)_+=\frac{1}{2}\{\langle\xi_3,[X_1,X_2]_E\rangle+\langle\xi_3,\mathcal{L}_{\xi_1}X_2\rangle-\langle\xi_3,\mathcal{L}_{\xi_2}X_1\rangle-\rho_*(\xi_3)(e_1,e_2)_- \\ \langle[\xi_1,\xi_2]_{E^*},X_3\rangle+\langle\mathcal{L}_{X_1}\xi_2,X_3\rangle-\langle\mathcal{L}_{X_2}\xi_1,X_3\rangle+\rho(X_3)(e_1,e_2)_- \quad (\mathrm{A}.28)$$

ここで，Lie 微分の項に着目すると，Lie 微分の分配則から以下の関係式が使える．

$$\langle\xi_3,\mathcal{L}_{\xi_1}X_2\rangle=\mathcal{L}_{\xi_1}\langle\xi_3,X_2\rangle-\langle[\xi_1,\xi_3]_{E^*},X_2\rangle \\ \langle\mathcal{L}_{X_1}\xi_2,X_3\rangle=\mathcal{L}_{X_1}\langle\xi_2,X_3\rangle-\langle\xi_2,[X_1,X_3]_E\rangle$$

また，文献 [44] での d の定義から，

$$\mathcal{L}_{X_1}\langle\xi_2,X_3\rangle=\iota_{X_1}\mathrm{d}\langle\xi_2,X_3\rangle=\rho(X_1)\langle\xi_2,X_3\rangle. \quad (\mathrm{A}.29)$$

同様に，

$$\mathcal{L}_{\xi_1}\langle\xi_3,X_2\rangle=\rho_*(\xi_1)\langle\xi_3,X_2\rangle. \quad (\mathrm{A}.30)$$

よって，$([e_1,e_2]_{\mathrm{V}},e_3)_+$ は，(A.28) から更に以下のように書き換えられる．

$$([e_1,e_2]_{\mathrm{V}},e_3)_+=\frac{1}{2}\{\langle\xi_3,[X_1,X_2]_E\rangle+\langle[\xi_1,\xi_2]_{E^*},X_3\rangle+\mathrm{c.p.}\} \\ +\frac{1}{2}\{\rho_*(\xi_1)\langle\xi_3,X_2\rangle-\rho_*(\xi_2)\langle\xi_3,X_1\rangle-\rho_*(\xi_3)(e_1,e_2)_- \\ +\rho(X_1)\langle\xi_2,X_3\rangle-\rho(X_2)\langle\xi_1,X_3\rangle+\rho(X_3)(e_1,e_2)_-\} \quad (\mathrm{A}.31)$$

これに，$\rho(X_1)(e_2,e_3)_-$，$\rho(X_2)(e_3,e_1)_-$ と $\rho_*(\xi_1)(e_2,e_3)$，$\rho_*(\xi_2)(e_3,e_1)_-$ をそれぞれ足して引き，巡回する項を整理すると，ρ の定義から $([e_1,e_2]_{\mathrm{V}},e_3)_+$ は最終的に以下の形にまとまる．

$$([e_1,e_2]_{\mathrm{V}},e_3)_+=\frac{1}{2}\{\langle\xi_3,[X_1,X_2]_E\rangle+\langle X_3,[\xi_1,\xi_2]_{E^*}\rangle+\rho(X_3)(e_1,e_2)_--\rho_*(\xi_3)(e_1,e_2)_-\mathrm{c.p.}\} \\ +\frac{1}{2}\rho(e_1)(e_2,e_3)_+-\frac{1}{2}\rho(e_2)(e_3,e_1)_+ \quad (\mathrm{A}.32)$$

あとは，$([e_1,e_2]_{\mathrm{V}},e_3)_+$ の足を巡回させて和を取れば，(3.36) の右辺となる．

$$T(e_1,e_2,e_3)\equiv\frac{1}{3}(([e_1,e_2]_{\mathrm{V}},e_3)_++\mathrm{c.p.}) \\ =\frac{1}{2}\{\langle[X_1,X_2]_E,\xi_3\rangle+\langle[\xi_1,\xi_2]_{E^*},X_3\rangle+\rho(X_3)(e_1,e_2)_--\rho_*(\xi_3)(e_1,e_2)_-\mathrm{c.p.}\} \\ +\frac{1}{2}\{\rho(e_1)(e_2,e_3)_+-\rho(e_2)(e_3,e_1)_++\rho(e_2)(e_3,e_1)_+ \\ -\rho(e_3)(e_1,e_2)_++\rho(e_3)(e_1,e_2)_+-\rho(e_1)(e_2,e_3)_+\} \\ =\frac{1}{2}\{\langle\xi_3,[X_1,X_2]_E\rangle+\langle[\xi_1,\xi_2]_{E^*},X_3\rangle \\ +\rho(X_3)(e_1,e_2)_--\rho_*(\xi_3)(e_1,e_2)_-+\mathrm{c.p.}\} \quad (\mathrm{A}.33)$$

よって，(3.36) が示せた．

A.4 $T(e_1, e_2, e_3)$ の関係式 (3.37) の導出

以下の式を示す．

$$
\begin{aligned}
([e_1, e_2]_{\mathrm{V}}, e_3)_- + \text{c.p.} = T(e_1, e_2, e_3) \\
+ [\{\rho(X_3)(e_1, e_2)_- + 2\rho_*(\xi_3)(e_1, e_2)_- - \langle [\xi_1, \xi_2]_{E^*}, X_3\rangle\} + \text{c.p.}]
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

これは [35] の Lemma 3.4 にあたる関係式であり，$(\cdot,\cdot)_\pm$ の定義から示せる．

$(\cdot,\cdot)_\pm$ の定義から，以下の関係が得られる．

$$
\begin{aligned}
([e_1, e_2]_{\mathrm{V}}, e_3)_- + ([e_1, e_2]_{\mathrm{V}}, e_3)_+ = \langle [\xi_1, \xi_2]_{E^*}, X_3\rangle + \langle \mathcal{L}_{X_1}\xi_2, X_3\rangle \\
- \langle \mathcal{L}_{X_2}\xi_1, X_3\rangle + \langle \mathrm{d}(e_1, e_2)_-, X_3\rangle.
\end{aligned}
\tag{A.34}
$$

さらに，(A.29), (A.30) を使って右辺を整理すると，

$$
\begin{aligned}
([e_1, e_2]_{\mathrm{V}}, e_3)_- + ([e_1, e_2]_{\mathrm{V}}, e_3)_+ = \langle [\xi_1, \xi_2]_{E^*}, X_3\rangle + \rho(X_1)\langle \xi_2, X_3\rangle - \langle \xi_2, [X_1, X_3]_E\rangle \\
- \rho(X_2)\langle \xi_1, X_3\rangle + \langle \xi_1, [X_2, X_3]_E\rangle + \rho(X_3)(e_1, e_2)_-.
\end{aligned}
\tag{A.35}
$$

(A.35) の足を巡回させて和をとると，以下のようになる．途中，(3.36) を用いた．

$$
\begin{aligned}
&\{([e_1, e_2]_{\mathrm{V}}, e_3)_- + ([e_1, e_2]_{\mathrm{V}}, e_3)_+\} + \text{c.p.} \\
&= \{([e_1, e_2]_{\mathrm{V}}, e_3)_- + \text{c.p.}\} + 3T(e_1, e_2, e_3) \\
&= \{\langle [\xi_1, \xi_2]_{E^*}, X_3\rangle + \rho(X_1)\langle \xi_2, X_3\rangle - \langle \xi_2, [X_1, X_3]_E\rangle \\
&\quad - \rho(X_2)\langle \xi_1, X_3\rangle + \langle \xi_1, [X_2, X_3]_E\rangle + \rho(X_3)(e_1, e_2)_-\} + \text{c.p.}
\end{aligned}
\tag{A.36}
$$

一旦，c.p. の部分も全て開けて計算すると，以下のようにまとまる．

$$
\begin{aligned}
&\{([e_1, e_2]_{\mathrm{V}}, e_3)_- + \text{c.p.}\} + 3T(e_1, e_2, e_3) \\
&= \{\langle [\xi_1, \xi_2]_{E^*}, X_3\rangle + 2\langle \xi_3, [X_1, X_2]_E\rangle + 3\rho(X_3)(e_1, e_2)_-\} + \text{c.p.} \\
&= 4T(e_1, e_2, e_3) + [\{\rho(X_3)(e_1, e_2)_- + 2\rho_*(\xi_3)(e_1, e_2)_- - \langle [\xi_1, \xi_2]_{E^*}, X_3\rangle\} + \text{c.p.}]
\end{aligned}
\tag{A.37}
$$

最後の行への変形は，(3.37) に着地するために無理やり $4T(e_1, e_2, e_3)$ をつくっただけである．(A.37) を移行して整理すれば，(3.37) となる．

A.5 Axiom C1 の確認

Axiom C1 の左辺 $[[e_1, e_2]_\mathrm{V}, e_3]_\mathrm{V} + \mathrm{c.p}$ を計算する．$[\cdot,\cdot]_\mathrm{V}$ の定義から，

$$
\begin{aligned}
&[[e_1, e_2]_\mathrm{V}, e_3]_\mathrm{V} + \mathrm{c.p.} = I_1 + I_2, && \text{(A.38)}\\
&I_1 = [[\xi_1, \xi_2]_{E^*}, \xi_3]_{E^*} + [\mathcal{L}_{X_1}\xi_2 - \mathcal{L}_{X_2}\xi_1, \xi_3]_{E^*} + [\mathrm{d}(e_1, e_2)_-, \xi_3]_{E^*}\\
&\quad + \mathcal{L}_{[X_1,X_2]_E + \mathcal{L}_{\xi_1}X_2 - \mathcal{L}_{\xi_2}X_1 - \mathrm{d}_*(e_1,e_2)_-}\xi_3\\
&\quad - \mathcal{L}_{X_3}[\xi_1, \xi_2]_{E^*} - \mathcal{L}_{X_3}\mathcal{L}_{X_1}\xi_2 + \mathcal{L}_{X_3}\mathcal{L}_{X_2}\xi_1\\
&\quad - \mathcal{L}_{X_3}\mathrm{d}(e_1, e_2)_- + \mathrm{d}([e_1, e_2]_\mathrm{V}, e_3)_- + \mathrm{c.p.}, && \text{(A.39)}\\
&I_2 = [[X_1, X_2]_E, X_3]_E + [\mathcal{L}_{\xi_1}X_2 - \mathcal{L}_{\xi_2}X_1, X_3]_E - [\mathrm{d}_*(e_1, e_2)_-, X_3]_E\\
&\quad + \mathcal{L}_{[\xi_1,\xi_2]_{E^*} + \mathcal{L}_{\xi_1}X_2 - \mathcal{L}_{\xi_2}X_1 + \mathrm{d}(e_1,e_2)_-}X_3\\
&\quad - \mathcal{L}_{\xi_3}[X_1, X_2]_E - \mathcal{L}_{\xi_3}\mathcal{L}_{\xi_1}X_2 + \mathcal{L}_{\xi_3}\mathcal{L}_{\xi_2}X_1\\
&\quad + \mathcal{L}_{\xi_3}\mathrm{d}_*(e_1, e_2)_- - \mathrm{d}_*([e_1, e_2]_\mathrm{V}, e_3)_- + \mathrm{c.p.} && \text{(A.40)}
\end{aligned}
$$

$\Gamma(E^*)$ 成分を I_1，$\Gamma(E)$ 成分を I_2 とおく．I_1 と I_2 はほぼ同じ計算となるので，I_1 だけ取り出して計算する．

$$
\mathcal{L}_{[X_1,X_2]_E} = [\mathcal{L}_{X_1}, \mathcal{L}_{X_2}]_E \tag{A.41}
$$

を用いると，

$$
\mathcal{L}_{[X_1,X_2]_E}\xi_3 - \mathcal{L}_{X_3}\mathcal{L}_{X_1}\xi_2 + \mathcal{L}_{X_3}\mathcal{L}_{X_2}\xi_1 + \mathrm{c.p.} = 0 \tag{A.42}
$$

なので，I_1 は以下のように書ける．

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \{[[\xi_1, \xi_2]_{E^*}, \xi_3]_{E^*} + [\mathcal{L}_{X_1}\xi_2 - \mathcal{L}_{X_2}\xi_1, \xi_3]_{E^*} - [\mathrm{d}_*(e_1, e_2)_-, \xi_3]_{E^*}\\
&\quad + \mathcal{L}_{[X_1,X_2]_E + \mathcal{L}_{\xi_1}X_2 - \mathcal{L}_{\xi_2}X_1 - \mathrm{d}_*(e_1,e_2)_-}\xi_3\\
&\quad - \mathcal{L}_{X_3}[\xi_1, \xi_2]_{E^*} - \mathcal{L}_{X_3}\mathcal{L}_{X_1}\xi_2 + \mathcal{L}_{X_3}\mathcal{L}_{X_2}\xi_1 - \mathcal{L}_{\mathrm{d}(e_1,e_2)_-} + \mathrm{d}([e_1, e_2]_\mathrm{V}, e_3)_-\} + \mathrm{c.p.}\\
&= \{[\mathcal{L}_{X_1}\xi_2 - \mathcal{L}_{X_2}\xi_1, \xi_3]_{E^*} - [\mathrm{d}_*(e_1, e_2)_-, \xi_3]_{E^*}\\
&\quad + \mathcal{L}_{\mathcal{L}_{\xi_1}X_2 - \mathcal{L}_{\xi_2}X_1 - \mathrm{d}_*(e_1,e_2)_-}\xi_3\\
&\quad - \mathcal{L}_{X_3}[\xi_1, \xi_2]_{E^*} - \mathcal{L}_{\mathrm{d}(e_1,e_2)_-} + \mathrm{d}([e_1, e_2]_\mathrm{V}, e_3)_-\} + \mathrm{c.p.}
\end{aligned} \tag{A.43}
$$

ここで，$\mathcal{L}_{X_3}[\xi_1, \xi_2]_{E^*} + \mathrm{c.p.}$ の項に注目する．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{X_3}[\xi_1, \xi_2]_{E^*} &= (\mathrm{d}\iota_{X_3} + \iota_{X_3}\mathrm{d})[\xi_1, \xi_2]_{E^*}\\
&= \mathrm{d}\langle X_3, [\xi_1, \xi_2]_{E^*}\rangle + i_{X_3}\mathrm{d}[\xi_1, \xi_2]_{E^*}\\
&\quad + (\iota_{X_3}\mathcal{L}_{\xi_1}\mathrm{d}\xi_2 - \iota_{X_3}\mathcal{L}_{\xi_1}\mathrm{d}\xi_2) + (\iota_{X_3}\mathcal{L}_{\xi_2}\mathrm{d}\xi_1 - \iota_{X_3}\mathcal{L}_{\xi_2}\mathrm{d}\xi_1)\\
&= \mathrm{d}\langle X_3, [\xi_1, \xi_2]_{E^*}\rangle + \iota_{X_3}\mathcal{L}_{\xi_1}\mathrm{d}\xi_2 - \iota_{X_3}\mathcal{L}_{\xi_2}\mathrm{d}\xi_1\\
&\quad + \iota_{X_3}(\mathrm{d}[\xi_1, \xi_2]_{E^*} - \mathcal{L}_{\xi_1}\mathrm{d}\xi_2 + \mathcal{L}_{\xi_2}\mathrm{d}\xi_1).
\end{aligned} \tag{A.44}
$$

さらに，$X \in \Gamma(E)$, $\xi, \eta \in \Gamma(E^*)$ としたとき，一般に $\mathcal{L}_{X_3}[\xi_1, \xi_2]_{E^*}$ に対して

$$
\iota_X\mathcal{L}_\xi\mathrm{d}\eta = [\xi, \mathcal{L}_X\eta]_{E^*} - \mathcal{L}_{\mathcal{L}_\xi X}\eta + [\mathrm{d}\langle\eta, X\rangle, \xi]_{E^*} + \mathrm{d}(\rho_*(\xi)\langle\eta, X\rangle) - \mathrm{d}\langle[\xi, \eta]_{E^*}, X\rangle \tag{A.45}
$$

が成立する．(A.45) の導出は次の節で行う．これを $i_{X_3}\mathcal{L}_{\xi_1}\mathrm{d}\xi_2$ と $i_{X_3}\mathcal{L}_{\xi_2}\mathrm{d}\xi_1$ へ適用すると，$\mathcal{L}_{X_3}[\xi_1,\xi_2]_{E^*}+\mathrm{c.p.}$ は以下の形になる．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{X_3}[\xi_1,\xi_2]_{E^*}+c.p=\{&[\mathcal{L}_{X_1}\xi_2-\mathcal{L}_{X_2}\xi_1,\xi_3]_{E^*}+\mathcal{L}_{\mathcal{L}_{\xi_1}X_2-\mathcal{L}_{\xi_2}X_1}\xi_3\\&+2[\mathrm{d}(e_1,e_2)_-,\xi_3]_{E^*}+2\mathrm{d}(\rho_*(\xi_3)(e_1,e_2)_-)-\mathrm{d}\langle[\xi_1,\xi_2]_{E^*},X_3\rangle\\&+\iota_{X_3}(\mathrm{d}[\xi_1,\xi_2]_{E^*}-\mathcal{L}_{\xi_1}\mathrm{d}\xi_2+\mathcal{L}_{\xi_2}\mathrm{d}\xi_1)\}+\mathrm{c.p.}\end{aligned}\tag{A.46}$$

(A.46) の導出は次の次の節で行う．

(A.46) を (A.43) へ代入すると，I_1 はさらに整理できて，

$$\begin{aligned}I_1&=\{\mathrm{d}\{([e_1,e_2]_{\mathrm{V}},e_3)_--\rho(X_3)(e_1,e_2)_--2\rho_*(\xi_3)(e_1,e_2)_-+\langle[\xi_1,\xi_2]_{E^*},X_3\rangle-K_1-K_2\}+\mathrm{c.p.},\\K_1&=\iota_{X_3}(\mathrm{d}[\xi_1,\xi_2]_{E^*}-\mathcal{L}_{\xi_1}\mathrm{d}\xi_2+\mathcal{L}_{\xi_2}\mathrm{d}\xi_1),\\K_2&=\mathcal{L}_{\mathrm{d}(e_1,e_2)_-}\xi_3+[\mathrm{d}(e_1,e_2)_-,\xi_3]_{E^*}.\end{aligned}\tag{A.47}$$

また，(3.37) から，

$$\begin{aligned}([e_1,e_2]_{\mathrm{V}},e_3)_-+\mathrm{c.p.}=&\,T(e_1,e_2,e_3)\\&+[\{\rho(X_3)(e_1,e_2)_-+2\rho_*(\xi_3)(e_1,e_2)_--\langle[\xi_1,\xi_2]_{E^*},X_3\rangle+\mathrm{c.p.}\}]\end{aligned}\tag{3.37}$$

を代入すると，I_1 は以下のような形になる．

$$I_1=\mathrm{d}T(e_1,e_2,e_3)-\{K_1+K_2\}+\mathrm{c.p.},\tag{A.48}$$

ただし，

$$\begin{aligned}K_1&=\iota_{X_3}(\mathrm{d}[\xi_1,\xi_2]_{E^*}-\mathcal{L}_{\xi_1}\mathrm{d}\xi_2+\mathcal{L}_{\xi_2}\mathrm{d}\xi_1),\\K_2&=\mathcal{L}_{\mathrm{d}_*(e_1,e_2)_-}\xi_3+[\mathrm{d}(e_1,e_2)_-,\xi_3]_{E^*}.\end{aligned}\tag{A.49}$$

I_2 に関しても同様である．

$$\begin{aligned}I_2&=\mathrm{d}_*T(e_1,e_2,e_3)-\{K_3+K_4\}+\mathrm{c.p.},\\K_3&=\iota_{\xi_3}(\mathrm{d}_*[X_1,X_2]_E-\mathcal{L}_{X_1}\mathrm{d}_*X_2+\mathcal{L}_{X_2}\mathrm{d}_*X_1),\\K_4&=\mathcal{L}_{\mathrm{d}_*(e_1,e_2)_-}X_3+[\mathrm{d}_*(e_1,e_2)_-,X_3]_E.\end{aligned}\tag{A.50}$$

よって，最終的に $[[e_1,e_2]_{\mathrm{V}},e_3]_{\mathrm{V}}+c.p$ の計算結果は以下のように得られる．

$$\begin{aligned}[[e_1,e_2]_{\mathrm{V}},e_3]_{\mathrm{V}}+c.p&=I_1+I_2\\&=\mathcal{D}T(e_1,e_2,e_3)-(J_1+J_2+\mathrm{c.p.}).\end{aligned}\tag{A.51}$$

ただし，

$$\begin{aligned}J_1&=K_1+K_3\\&=\iota_{X_3}(\mathrm{d}[\xi_1,\xi_2]_{E^*}-\mathcal{L}_{\xi_1}\mathrm{d}\xi_2+\mathcal{L}_{\xi_2}\mathrm{d}\xi_1)+\iota_{\xi_3}(\mathrm{d}_*[X_1,X_2]_E-\mathcal{L}_{X_1}\mathrm{d}_*X_2+\mathcal{L}_{X_2}\mathrm{d}_*X_1),\\J_2&=K_2+K_4\\&=\mathcal{L}_{\mathrm{d}(e_1,e_2)_-}\xi_3+[\mathrm{d}(e_1,e_2)_-,\xi_3]_{E^*}+\mathcal{L}_{\mathrm{d}_*(e_1,e_2)_-}X_3+[\mathrm{d}_*(e_1,e_2)_-,X_3]_E.\end{aligned}\tag{A.52}$$

一般に，任意の X_i,ξ_i,f に対し $(J_1+J_2+\mathrm{c.p.})$ は 0 ではない．よって，$(\mathcal{V},[\cdot,\cdot]_{\mathrm{V}},\rho_{\mathrm{V}},(\cdot,\cdot)_+)$ において，Axiom C1 は破れている．

A.6 (A.45) 式の導出

$$\iota_X\mathcal{L}_\xi \mathrm{d}\eta = [\xi, \mathcal{L}_X\eta]_{E^*} - \mathcal{L}_{\mathcal{L}_\xi X}\eta + [\mathrm{d}\langle\eta, X\rangle, \xi]_{E^*} + \mathrm{d}(\rho_*(\xi)\langle\eta, X\rangle) - \mathrm{d}\langle[\xi,\eta]_{E^*}, X\rangle \quad ((\text{A.45}))$$

を導出する．左辺を直接計算するのは難しいので，$\langle\iota_X\mathcal{L}_\xi \mathrm{d}\eta, Y\rangle$ を計算し，以下のように右辺と Y で内積をとった形になることを確かめる．

$$\begin{aligned}\langle\iota_X\mathcal{L}_\xi \mathrm{d}\eta, Y\rangle = &\langle[\xi, \mathcal{L}_X\eta]_{E^*}, Y\rangle - \langle\mathcal{L}_{\mathcal{L}_\xi X}\eta, Y\rangle - \langle[\xi, \mathrm{d}\langle\eta, X\rangle]_{E^*}, Y\rangle \\ &+ \langle\mathrm{d}(\rho_*(\xi)\langle\eta, X\rangle), Y\rangle + \langle\mathrm{d}\langle[\xi,\eta]_{E^*}, X\rangle, Y\rangle \end{aligned} \tag{A.53}$$

まず，Lie 微分の分配則から，

$$\langle\iota_X\mathcal{L}_\xi \mathrm{d}\eta, Y\rangle = \mathcal{L}_\xi(\mathrm{d}\eta(X,Y)) - \mathrm{d}\eta(\mathcal{L}_\xi X, Y) - \mathrm{d}\eta(X, \mathcal{L}_\xi Y). \tag{A.54}$$

右辺の 1 項目は，(A.30) を使うことで $\rho_*(\xi)\mathrm{d}\eta(X,Y)$ に置き換えることができる．また，外微分作用素の定義から，

$$\mathrm{d}\xi(X,Y) = \rho(X)\langle\xi, Y\rangle - \rho(Y)\langle\xi, X\rangle - \langle\xi, [X,Y]_E\rangle. \tag{A.55}$$

が成立しているので，これを各項に当てはめると，(A.54) は以下のように変形できる．

$$\begin{aligned}\langle\iota_X\mathcal{L}_\xi \mathrm{d}\eta, Y\rangle = &\rho_*(\xi)\rho(X)\langle\xi, Y\rangle - \rho_*(\xi)\rho(Y)\langle\eta, X\rangle - \rho_*(\xi)\langle\eta, [X,Y]_E\rangle \\ &- \rho(\mathcal{L}_\xi X)\langle\eta, Y\rangle + \rho(Y)\langle\eta, \mathcal{L}_\xi X\rangle + \langle\eta, [\mathcal{L}_\xi X, Y]_E\rangle \\ &+ \rho(\mathcal{L}_\xi Y)\langle\eta, X\rangle - \rho(X)\langle\eta, \mathcal{L}_\xi Y\rangle - \langle\eta, [\mathcal{L}_\xi Y, X]_E\rangle. \end{aligned} \tag{A.56}$$

さらに，(A.29),(A.30) と (3.19) を使うと，(A.56) の各行の先頭の項は以下のように分解できる．

$$\rho_*(\xi)\rho(X)\langle\xi, Y\rangle = \rho_*(\xi)\langle\mathcal{L}_X\eta, Y\rangle + \rho_*(\xi)\langle\eta, [X,Y]_E\rangle \tag{A.57}$$

$$\rho(\mathcal{L}_\xi X)\langle\eta, Y\rangle = \langle\mathcal{L}_{\mathcal{L}_\xi X}\eta, Y\rangle + \langle\eta, [\mathcal{L}_\xi X, Y]_E\rangle \tag{A.58}$$

$$\rho(\mathcal{L}_\xi Y)\langle\eta, X\rangle = \langle\mathcal{L}_{\mathcal{L}_\xi Y}\eta, X\rangle + \langle\eta, [\mathcal{L}_\xi Y, X]_E\rangle \tag{A.59}$$

これを代入して整理すると，いくつかの項が打ち消しあって以下のようにまとまる．

$$\begin{aligned}\langle\iota_X\mathcal{L}_\xi \mathrm{d}\eta, Y\rangle = &\rho_*(\xi)\langle\mathcal{L}_X\eta, Y\rangle - \rho_*(\xi)\rho(Y)\langle\eta, X\rangle - \langle\mathcal{L}_{\mathcal{L}_\xi X}\eta, Y\rangle \\ &+ \rho(Y)\langle\eta, \mathcal{L}_\xi X\rangle - \rho(X)\langle\eta, \mathcal{L}_\xi Y\rangle + \langle\mathcal{L}_{\mathcal{L}_\xi Y}\eta, X\rangle. \end{aligned} \tag{A.60}$$

この結果を，anchor を使わずに Y との内積の形で表すように書き換える．まずは，$\rho(Y)\langle\eta, \mathcal{L}_\xi X\rangle$ に注目する．この項は，(A.29),(A.30) から

$$\rho(Y)\langle\eta, \mathcal{L}_\xi X\rangle = \langle\mathrm{d}(\rho_*(\xi)\langle\eta, X\rangle), Y\rangle - \langle\mathrm{d}\langle[\xi,\eta]_{\mathrm{V}}, X\rangle, Y\rangle. \tag{A.61}$$

と表せる．これを代入して

$$\begin{aligned}\langle\iota_X\mathcal{L}_\xi \mathrm{d}\eta, Y\rangle = &\langle\mathrm{d}(\rho_*(\xi)\langle\eta, X\rangle), Y\rangle + \langle\mathrm{d}\langle[\xi,\eta]_{\mathrm{V}}, X\rangle, Y\rangle - \langle\mathcal{L}_{\mathcal{L}_\xi X}\eta, Y\rangle \\ &+ \rho_*(\xi)\langle\mathcal{L}_X\eta, Y\rangle - \rho_*(\xi)\rho(Y)\langle\eta, X\rangle - \rho(X)\langle\eta, \mathcal{L}_\xi Y\rangle + \langle\mathcal{L}_{\mathcal{L}_\xi Y}\eta, X\rangle. \end{aligned} \tag{A.62}$$

同様に，(A.29),(A.30) を使って (A.62) の 2 段目を整理すると，以下のようになる．

$$\begin{aligned}\langle \iota_X \mathcal{L}_\xi \mathrm{d}\eta, Y\rangle = &\langle \mathrm{d}(\rho_*(\xi)\langle \eta, X\rangle), Y\rangle + \langle \mathrm{d}\langle [\xi,\eta]_{\mathrm{V}}, X\rangle, Y\rangle - \langle \mathcal{L}_{\mathcal{L}_\xi X}\eta, Y\rangle \\ &+ \langle [\xi, \mathcal{L}_X\eta]_{\mathrm{V}}, Y\rangle - \mathcal{L}_\xi\langle \mathcal{L}_Y\eta, X\rangle - \mathcal{L}_\xi\langle \eta, \mathcal{L}_Y X\rangle - \langle \eta, \mathcal{L}_X\mathcal{L}_\xi Y\rangle + \langle \mathcal{L}_{\mathcal{L}_\xi Y}\eta, X\rangle.\end{aligned} \tag{A.63}$$

ここで，

$$\begin{aligned}-\langle \eta, \mathcal{L}_X\mathcal{L}_\xi Y\rangle + \langle \mathcal{L}_{\mathcal{L}_\xi Y}\eta, X\rangle &= \langle \mathcal{L}_{\mathcal{L}_\xi Y}\eta, X\rangle + \langle \mathcal{L}_{\mathcal{L}_\xi Y}\eta, X\rangle \\ &= \langle \mathrm{d}\langle \eta, X\rangle, \mathcal{L}_\xi Y\rangle\end{aligned} \tag{A.64}$$

なので，

$$\begin{aligned}\langle \iota_X \mathcal{L}_\xi \mathrm{d}\eta, Y\rangle = &\langle \mathrm{d}(\rho_*(\xi)\langle \eta, X\rangle), Y\rangle + \langle \mathrm{d}\langle [\xi,\eta]_{\mathrm{V}}, X\rangle, Y\rangle - \langle \mathcal{L}_{\mathcal{L}_\xi X}\eta, Y\rangle \\ &+ \langle [\xi, \mathcal{L}_X\eta]_{\mathrm{V}}, Y\rangle - \mathcal{L}_\xi\langle \mathcal{L}_Y\eta, X\rangle - \mathcal{L}_\xi\langle \eta, \mathcal{L}_Y X\rangle + \langle \mathrm{d}\langle \eta, X\rangle, \mathcal{L}_\xi Y\rangle.\end{aligned} \tag{A.65}$$

Lie 微分の分配則から，

$$\langle \mathrm{d}\langle \eta, X\rangle, \mathcal{L}_\xi Y\rangle = \mathcal{L}_\xi\langle \mathrm{d}\langle \eta, X\rangle, Y\rangle - \langle [\xi, \mathrm{d}\langle \eta, X\rangle]_{\mathrm{V}}, Y\rangle \tag{A.66}$$

なので，

$$\begin{aligned}\langle \iota_X \mathcal{L}_\xi \mathrm{d}\eta, Y\rangle = &\langle \mathrm{d}(\rho_*(\xi)\langle \eta, X\rangle), Y\rangle + \langle \mathrm{d}\langle [\xi,\eta]_{E^*}, X\rangle, Y\rangle - \langle \mathcal{L}_{\mathcal{L}_\xi X}\eta, Y\rangle \\ &+ \langle [\xi, \mathcal{L}_X\eta]_{E^*}, Y\rangle - \langle [\xi, \mathrm{d}\langle \eta, X\rangle]_{E^*}, Y\rangle \\ &- \mathcal{L}_\xi\langle \mathcal{L}_Y\eta, X\rangle - \mathcal{L}_\xi\langle \eta, \mathcal{L}_Y X\rangle + \mathcal{L}_\xi\langle \mathrm{d}\langle \eta, X\rangle, Y\rangle.\end{aligned} \tag{A.67}$$

ここで，以下の計算から三段目は打ち消しあう．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\xi\langle \mathrm{d}\langle \eta, X\rangle, Y\rangle &= \mathcal{L}_\xi\mathcal{L}_Y\langle \eta, X\rangle \\ &= \mathcal{L}_\xi\langle \mathcal{L}_Y\eta, X\rangle + \mathcal{L}_\xi\langle \eta, \mathcal{L}_Y X\rangle.\end{aligned} \tag{A.68}$$

よって，

$$\begin{aligned}\langle \iota_X \mathcal{L}_\xi \mathrm{d}\eta, Y\rangle = &\langle \mathrm{d}(\rho_*(\xi)\langle \eta, X\rangle), Y\rangle + \langle \mathrm{d}\langle [\xi,\eta]_{E^*}, X\rangle, Y\rangle - \langle \mathcal{L}_{\mathcal{L}_\xi X}\eta, Y\rangle \\ &+ \langle [\xi, \mathcal{L}_X\eta]_{E^*}, Y\rangle - \langle [\xi, \mathrm{d}\langle \eta, X\rangle]_{E^*}, Y\rangle\end{aligned} \tag{A.69}$$

A.7 (A.46) 式の導出

前節の計算で用いた，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{X_3}[\xi_1,\xi_2]_{E^*} + \mathrm{c.p.} = &[\mathcal{L}_{X_1}\xi_2 - \mathcal{L}_{X_2}\xi_1, \xi_3]_V + \mathcal{L}_{\mathcal{L}_{\xi_1}X_2 - \mathcal{L}_{\xi_2}X_1}\xi_3 \\ &+ 2[\mathrm{d}(e_1,e_2)_-, \xi_3]_{E^*} + 2\mathrm{d}(\rho_*(\xi_3)\cdot(e_1,e_2)_-) - \mathrm{d}\langle [\xi_1,\xi_2]_{E^*}, X_3\rangle \\ &+ i_{X_3}(\mathrm{d}[\xi_1,\xi_2]_{E^*} - \mathcal{L}_{\xi_1}\mathrm{d}\xi_2 + \mathcal{L}_{\xi_2}\mathrm{d}\xi_1) + \mathrm{c.p.}\end{aligned} \tag{A.46}$$

の導出を行う．まず，左辺の $\mathcal{L}_{X_3}[\xi_1,\xi_2]_{E^*}$ を計算したあとで，その巡回和をとって右辺になることを確認する．$\mathcal{L}_{X_3}[\xi_1,\xi_2]_{E^*}$ は，Lie 微分の定義にしたがって以下のように展開できる．ただし，

2 つ目の等号以下は，$\iota_{X_3}\mathcal{L}_{\xi_2}\mathrm{d}\xi_1$ の項と，$\mathcal{L}_{\xi_2}\mathrm{d}\xi_1$ の項をそれぞれわざと足してから引いている．この操作によって，derivation 条件が影響する項を明示することができる．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{X_3}[\xi_1,\xi_2]_{E^*} &= (\mathrm{d}\iota_{X_3}+\iota_{X_3}\mathrm{d})[\xi_1,\xi_2]_{E^*}\\ &= \mathrm{d}\langle[\xi_1,\xi_2]_{E^*},X_3\rangle+\iota_{X_3}\mathcal{L}_{\xi_1}\mathrm{d}\xi_2-\iota_{X_3}\mathcal{L}_{\xi_2}\mathrm{d}\xi_1\\ &\quad +\iota_{X_3}(\mathrm{d}[\xi_1,\xi_2]_{E^*}-\mathcal{L}_{\xi_1}\mathrm{d}\xi_2+\mathcal{L}_{\xi_2}\mathrm{d}\xi_1).\end{aligned}\tag{A.70}$$

以降の計算は，1 段目の $\iota_{X_3}\mathcal{L}_{\xi_1}\mathrm{d}\xi_2-\iota_{X_3}\mathcal{L}_{\xi_2}\mathrm{d}\xi_1$ の項に注目すると簡単になる．前節の計算から，一般に

$$\iota_X\mathcal{L}_\xi\mathrm{d}\eta=[\xi,\mathcal{L}_X\eta]_{E^*}-\mathcal{L}_{\mathcal{L}_\xi X}\eta+[\mathrm{d}\langle\eta,X\rangle,\xi]_{E^*}+\mathrm{d}(\rho_*(\xi)\langle\eta,X\rangle)-\mathrm{d}\langle[\xi,\eta]_{E^*},X\rangle.\tag{A.45}$$

という関係が成立している．(A.45) を (A.70) に代入して，打ち消しあう項を整理すると，以下の形が得られる．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{X_3}[\xi_1,\xi_2]_{E^*} = &-\mathrm{d}\langle[\xi_1,\xi_2]_{E^*},X_3\rangle\\ &+[\xi_1,\mathcal{L}_{X_3}\xi_2]_{E^*}-\mathcal{L}_{\mathcal{L}_{\xi_1}X_3}\xi_2+[\mathrm{d}\langle\xi_2,X_3\rangle,\xi_1]_{E^*}+\mathrm{d}(\rho_*(\xi_1)\langle\xi_2,X_3\rangle)\\ &-[\xi_2,\mathcal{L}_{X_3}\xi_1]_{E^*}+\mathcal{L}_{\mathcal{L}_{\xi_2}X_3}\xi_1-[\mathrm{d}\langle\xi_1,X_3\rangle,\xi_2]_{E^*}-\mathrm{d}(\rho_*(\xi_2)\langle\xi_1,X_3\rangle)\\ &+\iota_{X_3}(\mathrm{d}[\xi_1,\xi_2]_{E^*}-\mathcal{L}_{\xi_1}\mathrm{d}\xi_2+\mathcal{L}_{\xi_2}\mathrm{d}\xi_1).\end{aligned}\tag{A.71}$$

続いて，(A.71) の巡回和 $\mathcal{L}_{X_3}[\xi_1,\xi_2]_{\mathrm{V}}+\text{c.p.}$ を計算する．(A.71) の 2 段目と 3 段目にあたる項はそれぞれ以下のようにまとまる．

$$[\xi_1,\mathcal{L}_{X_3}\xi_2]_{E^*}-[\xi_2,\mathcal{L}_{X_3}\xi_1]_{E^*}+\text{c.p.}=[\mathcal{L}_{X_1}\xi_2-\mathcal{L}_{X_2}\xi_1,\xi_3]_{E^*}+\text{c.p.},\tag{A.72}$$

$$-\mathcal{L}_{\mathcal{L}_{\xi_1}X_3}\xi_2+\mathcal{L}_{\mathcal{L}_{\xi_2}X_3}\xi_1+\text{c.p.}=\mathcal{L}_{\mathcal{L}_{\xi_1}X_2-\mathcal{L}_{\xi_2}X_1}\xi_3+\text{c.p.},\tag{A.73}$$

$$[\mathrm{d}\langle\xi_2,X_3\rangle,\xi_1]_{E^*}-[\mathrm{d}\langle\xi_1,X_3\rangle,\xi_2]_{E^*}+\text{c.p.}=+2[\mathrm{d}(e_1,e_2)_-,\xi_3]_{E^*}+\text{c.p.},\tag{A.74}$$

$$\mathrm{d}(\rho_*(\xi_1)\langle\xi_2,X_3\rangle)-\mathrm{d}(\rho_*(\xi_2)\langle\xi_1,X_3\rangle)+\text{c.p.}=2\mathrm{d}(\rho_*(\xi_3)\cdot(e_1,e_2)_-)+\text{c.p.}\tag{A.75}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{X_3}[\xi_1,\xi_2]_{E^*}+\text{c.p.}= &-\mathrm{d}\langle[\xi_1,\xi_2]_{E^*},X_3+[\mathcal{L}_{X_1}\xi_2-\mathcal{L}_{X_2}\xi_1,\xi_3]_{E^*}+\mathcal{L}_{\mathcal{L}_{\xi_1}X_2-\mathcal{L}_{\xi_2}X_1}\xi_3\\ &+2[\mathrm{d}(e_1,e_2)_-,\xi_3]_{E^*}+2\mathrm{d}(\rho_*(\xi_3)\cdot(e_1,e_2)_-)\\ &+\iota_{X_3}(\mathrm{d}[\xi_1,\xi_2]_{E^*}-\mathcal{L}_{\xi_1}\mathrm{d}\xi_2+\mathcal{L}_{\xi_2}\mathrm{d}\xi_1)+\text{c.p.}\end{aligned}\tag{A.76}$$

という結果が得られる．これは，(A.46) の右辺そのものである．

A.8 Axiom C2 の確認

直接計算できないので，(3.22) の両辺をそれぞれ任意の $f\in C^\infty(M)$ へ作用させて，

$$\rho_{\mathrm{V}}([e_1,e_2]_{\mathrm{V}})f=[\rho_{\mathrm{V}}(e_1),\rho_{\mathrm{V}}(e_2)]f\tag{3.22'}$$

が成立しているかどうかを確認する．

左辺を展開していくと，ρ と $[\cdot,\cdot]_{\mathrm{V}}$ の定義から以下のような形となる．

$$\begin{aligned}\rho_{\mathrm{V}}([e_1,e_2]_{\mathrm{V}})f &= \rho_{\mathrm{V}}([X_1+\xi_1,X_2+\xi_2]_{\mathrm{V}})f\\ &= \rho\{[X_1,X_2]_E+\mathcal{L}_{\xi_1}X_2-\mathcal{L}_{\xi_2}X_1-\mathrm{d}_*(e_1,e_2)_-\}f\\ &\quad+\rho_*\{[\xi_1,\xi_2]_{E^*}+\mathcal{L}_{X_1}\xi_2-\mathcal{L}_{X_2}\xi_1+\mathrm{d}(e_1,e_2)_-\}f\\ &= \rho([X_1,X_2]_E)f+\rho(\mathcal{L}_{\xi_1}X_2)f-\rho(\mathcal{L}_{\xi_2}X_1)f\\ &\quad-\frac{1}{2}\rho\rho_*^*\mathrm{d}_0(\langle\xi_1,X_2\rangle-\langle\xi_2,X_1\rangle)f\\ &\quad+\rho_*([\xi_1,\xi_2]_{E^*})f+\rho_*(\mathcal{L}_{X_1}\xi_2)f-\rho_*(\mathcal{L}_{X_2}\xi_1)f\\ &\quad+\frac{1}{2}\rho_*\rho^*\mathrm{d}_0(\langle\xi_1,X_2\rangle-\langle\xi_2,X_1\rangle)f\end{aligned}\tag{A.77}$$

途中，$\mathrm{d}_*=\rho_*^*\mathrm{d}_0,\mathrm{d}=\rho^*\mathrm{d}_0$ であることを用いた．ここで，$[\rho(X_1),\rho(X_2)]$ と $[\rho_*(\xi_1),\rho_*(\xi_2)]$ は，ρ,ρ_* の定義から

$$\begin{aligned}[\rho(X_1),\rho(X_2)]&=\rho([X_1,X_2]_E)\\ [\rho_*(\xi_1),\rho_*(\xi_2)]&=\rho_*([\xi_1,\xi_2]_{E^*})\end{aligned}$$

が成立するので，(A.77) は以下のように書きなおせる．ただし，$[\cdot,\cdot]$ は TM 上の Lie 括弧である．

$$\begin{aligned}\rho_{\mathrm{V}}([e_1,e_2]_{\mathrm{V}})f &= [\rho(X_1),\rho(X_2)]f+\rho(\mathcal{L}_{\xi_1}X_2)f-\rho(\mathcal{L}_{\xi_2}X_1)f\\ &\quad-\frac{1}{2}\rho\rho_*^*\mathrm{d}_0(\langle\xi_1,X_2\rangle-\langle\xi_2,X_1\rangle)f\\ &\quad+[\rho_*(\xi_1),\rho_*(\xi_2)]f+\rho_*(\mathcal{L}_{X_1}\xi_2)f-\rho_*(\mathcal{L}_{X_2}\xi_1)f\\ &\quad+\frac{1}{2}\rho_*\rho^*\mathrm{d}_0(\langle\xi_1,X_2\rangle-\langle\xi_2,X_1\rangle)f\end{aligned}\tag{A.78}$$

また，

$$\begin{aligned}[\rho(X),\rho_*(\xi)]f &= -\rho(\mathcal{L}_\xi X)f+\rho_*(\mathcal{L}_X\xi)f+(\rho\rho_*^*\mathrm{d}_0\langle\xi,X\rangle)f\\ &\quad-\langle\xi,\mathcal{L}_{\mathrm{d}f}X\rangle+\rho(X)\rho_*(\xi)f-\rho_*(\mathcal{L}_X\xi)f\end{aligned}\tag{A.79}$$

であることを用いると，(A.78) はさらに整理することができて，

$$\begin{aligned}\rho_{\mathrm{V}}([e_1,e_2]_{\mathrm{V}})f &= [\rho(X_1),\rho(X_2)]f+\{\rho(\mathcal{L}_{\xi_1}X_2)-\rho_*(\mathcal{L}_{X_2}\xi_1)\}f\\ &\quad-\frac{1}{2}\rho\rho_*^*\mathrm{d}_0(\langle\xi_1,X_2\rangle-\langle\xi_2,X_1\rangle)f\\ &\quad+[\rho_*(\xi_1),\rho_*(\xi_2)]f-\{\rho(\mathcal{L}_{\xi_2}X_1)-\rho_*(\mathcal{L}_{X_1}\xi_2)\}f\\ &\quad+\frac{1}{2}\rho_*\rho^*\mathrm{d}_0(\langle\xi_1,X_2\rangle-\langle\xi_2,X_1\rangle)f\\ &= [\rho(X_1),\rho(X_2)]f+\{\rho(\mathcal{L}_{\xi_1}X_2)-\rho_*(\mathcal{L}_{X_2}\xi_1)-\rho\rho_*^*\mathrm{d}_0\langle\xi_1,X_2\rangle\}f\\ &\quad+\frac{1}{2}\rho\rho_*^*\mathrm{d}_0(\langle\xi_1,X_2\rangle-\langle\xi_2,X_1\rangle)f\\ &\quad+[\rho_*(\xi_1),\rho_*(\xi_2)]f-\{\rho(\mathcal{L}_{\xi_2}X_1)-\rho_*(\mathcal{L}_{X_1}\xi_2)-\rho\rho_*^*\mathrm{d}_0\langle\xi_2,X_1\rangle\}f\\ &\quad+\frac{1}{2}\rho_*\rho^*\mathrm{d}_0(\langle\xi_1,X_2\rangle-\langle\xi_2,X_1\rangle)f\end{aligned}\tag{A.80}$$

ここから，$[\rho(X),\rho_*(\xi)]f$ をまとめる．不足している項は足して引き，帳尻を合わせると以下のよ

うになる．

$$
\begin{aligned}
\rho_{\mathrm{V}}([e_1,e_2]_{\mathrm{V}})f = &[\rho(X_1),\rho(X_2)]f - [\rho(X_2),\rho_*(\xi_1)]f \\
&- \langle \xi_1, \mathcal{L}_{\mathrm{d}f}X_2\rangle + \rho(X_2)\rho_*(\xi_1)f - \rho_*(\mathcal{L}_{X_2})\xi_1 f \\
&+ \frac{1}{2}\rho\rho_*^*\mathrm{d}_0(\langle \xi_1, X_2\rangle - \langle \xi_2, X_1\rangle)f \\
&+ [\rho_*(\xi_1),\rho_*(\xi_2)]f + [\rho(X_1),\rho_*(\xi_2)]f \\
&+ \langle \xi_2, \mathcal{L}_{\mathrm{d}f}X_1\rangle - \rho(X_1)\rho_*(\xi_2)f + \rho_*(\mathcal{L}_{X_1}\xi_2)f \\
&+ \frac{1}{2}\rho_*\rho^*\mathrm{d}_0(\langle \xi_1, X_2\rangle - \langle \xi_2, X_1\rangle)f \\
= &[\rho(X_1),\rho(X_2)]f + [\rho_*(\xi_1),\rho(X_2)]f + [\rho_*(\xi_1),\rho_*(\xi_2)]f + [\rho(X_1),\rho_*(\xi_2)]f \\
&- \langle \xi_1, \mathcal{L}_{\mathrm{d}f}X_2 - [X_2,\mathrm{d}_*f]_E\rangle + \langle \xi_2, \mathcal{L}_{\mathrm{d}f}X_1 - [X_1,\mathrm{d}_*f]_E\rangle \qquad \text{(A.81)}
\end{aligned}
$$

さらに，ρ の定義から (A.81) 上段の 4 項はまとめることができて，

$$
\begin{aligned}
\rho_{\mathrm{V}}([e_1,e_2]_{\mathrm{V}})f = &[\rho_{\mathrm{V}}(e_1),\rho_{\mathrm{V}}(e_2)] - \langle \xi_1, \mathcal{L}_{\mathrm{d}f}X_2 - [X_2,\mathrm{d}_*f]_E\rangle + \langle \xi_2, \mathcal{L}_{\mathrm{d}f}X_1 - [X_1,\mathrm{d}_*f]_E\rangle \\
&+ \frac{1}{2}\rho\rho_*^*\mathrm{d}_0(\langle \xi_1, X_2\rangle - \langle \xi_2, X_1\rangle)f + \frac{1}{2}\rho_*\rho^*\mathrm{d}_0(\langle \xi_1, X_2\rangle - \langle \xi_2, X_1\rangle)f \qquad \text{(A.82)}
\end{aligned}
$$

一般に，任意の X_i,ξ_1 に対し右辺は 0 にならない．よって，$(\mathcal{V},[\cdot,\cdot]_{\mathrm{V}},\rho_{\mathrm{V}},(\cdot,\cdot)_+)$ において，Axiom C2 は破れている．

A.9 Axiom C3 の確認

実際に，左辺 $[e_1,fe_2]_{\mathrm{V}}$ を展開し，右辺に行き着くことを示す．ρ の定義から，

$$
\begin{aligned}
[e_1,fe_2]_{\mathrm{V}} &= [X_1+f\xi_1, X_2,+f\xi_2]_{\mathrm{V}} \\
&= [X_1,fX_2]_{\mathrm{V}} + [X_1,f\xi_2]_{\mathrm{V}} + [\xi_1,fX_2]_{\mathrm{V}} + [\xi_1,f\xi_2]_{\mathrm{V}}. \qquad \text{(A.83)}
\end{aligned}
$$

ここで，$[\cdot,\cdot]_{\mathrm{V}}$ の定義から，

$$
\begin{aligned}
[X_1,f\xi_2]_{\mathrm{V}} &= -\mathcal{L}_{f\xi_2}X_1 + \frac{1}{2}\mathrm{d}_*(f\langle \xi_2,X_1\rangle) + \mathcal{L}_{X_1}(f\xi_2) - \frac{1}{2}\mathrm{d}(f\langle \xi_2,X_1\rangle) \\
&= -f\mathcal{L}_{\xi_2}X_1 - (\mathrm{d}_*f)\langle \xi_2,X_1\rangle + \frac{1}{2}(\mathrm{d}_*f)\langle \xi_2,X_1\rangle + \frac{1}{2}f\mathrm{d}_*\langle \xi_2,X_1\rangle \\
&\quad + f\mathrm{d}\langle \xi_2,X_1\rangle + \iota_X\mathrm{d}f\xi_2 + f\iota_X\mathrm{d}\xi_2 - \frac{1}{2}(\mathrm{d}f)\langle \xi_2,X_1\rangle - \frac{1}{2}f\mathrm{d}\langle \xi_2,X_1\rangle \\
&= f[X_1,\xi_2]_{\mathrm{V}} + (\rho(X_1)f)\xi_2 - \frac{1}{2}\mathcal{D}f\langle \xi_2,X_1\rangle. \qquad \text{(A.84)}
\end{aligned}
$$

$[\xi_1,fX_2]_{\mathrm{V}}$ も同様に，$[\cdot,\cdot]_{\mathrm{V}}$ の定義から，

$$
[\xi_1,fX_2]_{\mathrm{V}} = f[\xi_1,X_2]_{\mathrm{V}} + (\rho_*(\xi_1)f)X_2 - \frac{1}{2}\mathcal{D}f\langle \xi_1,X_2\rangle. \qquad \text{(A.85)}
$$

また，L と L^* がそれぞれ Lie 亜代数であることから，

$$
[X_1,fX_2]_{\mathrm{V}} = [X_1,fX_2]_E = f[X_1,X_2]_{\mathrm{V}} + (\rho(X_1)f)X_2, \qquad \text{(A.86)}
$$

$$
[\xi_1,f\xi_2]_{\mathrm{V}} = [\xi_1,f\xi_2]_{E^*} = f[\xi_1,\xi_2]_V + (\rho_*(\xi_1)f)\xi_2. \qquad \text{(A.87)}
$$

よって，

$$
\begin{aligned}
[e_1, fe_2]_{\mathrm{V}} &= (\mathrm{A.83}) \\
&= (\mathrm{A.86}) + (\mathrm{A.84}) + (\mathrm{A.85}) + (\mathrm{A.87}) \\
&= f[X_1, X_2]_{\mathrm{V}} + (\rho(X_1)f)X_2 \\
&\quad + f[X_1, \xi_2]_{\mathrm{V}} + (\rho(X_1)f)\xi_2 - \frac{1}{2}\mathcal{D}g\langle \xi_2, X_1\rangle \\
&\quad + f[\xi_1, X_2]_{\mathrm{V}} + (\rho_*(\xi_1)f)X_2 - \frac{1}{2}\mathcal{D}f\langle \xi_1, X_2\rangle \\
&\quad + f[\xi_1, \xi_2]_{\mathrm{V}} + (\rho_*(\xi_1)f)\xi_2 \\
&= f[e_1, e_2]_{\mathrm{V}} + (\rho_{\mathrm{V}}(e_1)f)e_2 - \mathcal{D}f(e_1, e_2)_-.
\end{aligned}
\tag{A.88}
$$

よって，$(\mathcal{V}, [\cdot,\cdot]_{\mathrm{V}}, \rho_{\mathrm{V}}, (\cdot,\cdot)_+)$ において，Axiom C3 は成立する．

A.10 Axiom C4 の確認

$\mathcal{D}$ の定義を使うと，(3.24) の左辺は以下のように変形できる．ただし，$\Gamma(T^*M)$ 上の外微分演算子を d_0 とした．

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{D}f, \mathcal{D}g)_+ &= (\mathrm{d}f + \mathrm{d}_*f, \mathrm{d}g + \mathrm{d}_*g)_+ \\
&= \frac{1}{2}(\langle \mathrm{d}f, \mathrm{d}_*g\rangle + \langle \mathrm{d}g, \mathrm{d}_*f\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(\rho_*(\mathrm{d}f)g + \rho(\mathrm{d}_*f)g) \\
&= \frac{1}{2}(\rho_*\rho^*\mathrm{d}_0f + \rho\rho_*^*\mathrm{d}_0f)g.
\end{aligned}
\tag{A.89}
$$

したがって，(A.89) が 0 になり，(3.24) が成立するには $\rho_*\rho^* = -\rho\rho_*^*$ が成り立っていればよい．

初めに，derivation 条件を課せば必ず anchor ρ が反対称 $\rho\rho_*^* = -\rho_*\rho^*$ になることを示す．ただし，本文中でも述べた通り anchor に付いている上付きの $*$ は，adjoint operator の意味であり，内積を通して元の演算子の転置で定義される．

$$
\begin{aligned}
&\rho : E \to TM \qquad \rho^* : T^*M \to E^* \\
&\rho_* : E^* \to TM \quad \rho_*^* : T^*M \to E
\end{aligned}
\tag{A.90}
$$

したがって，$\rho\rho_*^* : T^*M \to TM$，$\rho_*\rho^* : T^*M \to TM$ である..

一般に，「ある演算子 $\mathcal{O} : T^*M \to TM$ が反対称である」とき，以下の式が成立する．全ての $x \in \Gamma(T^*M)$ に対して，

$$\langle \mathcal{O}x, x\rangle = 0. \tag{A.91}$$

演算子 $\mathcal{O}$ を $\rho\rho_*^*$，x を $\mathrm{d}_0f \in \Gamma(TM)$ に置き換えることで以下の関係が得られる．ただし，$f \in \Gamma(TM)$, d_0 は T^*M 上の外微分作用素である．

$$\langle \rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0f), \mathrm{d}_0f\rangle = \rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0f)\cdot f = 0. \tag{A.92}$$

よって，(A.92) が成立するならば $\rho_*\rho^* = -\rho\rho_*^*$ が成立する．

仮に，以下の式が成り立つものとしよう．

$$\mathcal{L}_{\mathrm{d}f}X + [\mathrm{d}_*f, X]_E = 0 \tag{3.60}$$

この式は，文献 [44] の Proposition 3.4 から，darivation 条件が成立していれば付随して成り立つ式である．X を $\mathrm{d}^* f$ で置き換えると，以下の関係が成立する．

$$\mathrm{d}_*\Big(\rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0 f)\cdot f\Big) = 0. \tag{A.93}$$

f を f^2 に置き換えれば，

$$\mathrm{d}_*\Big(\rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0 f^2)\cdot f^2\Big) = 0. \tag{A.94}$$

一方で，

$$\rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0 f^2)\cdot f^2 = \langle \mathrm{d}_0 f^2, \rho\rho_*^*\mathrm{d}_0 f^2\rangle = \langle \mathrm{d}f^2, \mathrm{d}_* f^2\rangle = 4f^2\langle \mathrm{d}f, \mathrm{d}_* f\rangle, \tag{A.95}$$

なので，

$$\begin{aligned}\Big(\rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0 f)\cdot f\Big)\mathrm{d}_* f^2 &= \mathrm{d}_*\Big\{\big(\rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0 f)\cdot f\big)f^2\Big\} - \mathrm{d}_*\Big(\rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0 f)\cdot f\Big)f^2 \\ &= \frac{1}{4}\mathrm{d}_*\Big(\rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0 f^2)\cdot f^2\Big) - \mathrm{d}_*\Big(\rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0 f)\cdot f\Big)f^2.\end{aligned} \tag{A.96}$$

ここで，右辺に (A.93), (A.94) から消える項があるので，

$$\Big(\rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0 f)\cdot f\Big)\rho_*^*\mathrm{d}_0 f^2 = 0. \tag{A.97}$$

さらに，これは $\mathrm{d}_0 f$ との内積だと思うと

$$2f\Big(\rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0 f)\cdot f\Big)^2 = 0. \tag{A.98}$$

となる．したがって，derivation 条件が課されれば $0 = \rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0 f)\cdot f = \langle\rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0 f)$ となる．$\rho\rho_*^*$ が反対称であるには，derivation 条件を課す必要がある．

以下の計算は上記の結果の補足である．derivation 条件を課さない一般の場合は，$\rho_*\rho^* = -\rho\rho_*^*$ が成立しない場合を排除できないことを示す．具体的には，$(\mathcal{V}, [\cdot,\cdot]_{\mathrm{V}}, \rho_{\mathrm{V}}, (\cdot,\cdot)_+)$ は，関係式 (3.24) 満たさないことを確認する．具体的には，(A.92) の左辺を別の方法で導出し，一般に 0 にならないことを示す．

$[\cdot,\cdot]_E$ の性質から，$X, Y \in \Gamma(E)$ とすると

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_*[X, fY]_E &= \mathrm{d}_*(f[X,Y]_E + (\rho(X)\cdot f)Y) \\ &= \mathrm{d}_*(f[X,Y]_E) + \mathrm{d}_*((\rho(X)\cdot f)Y) \\ &= \mathrm{d}_* f\wedge[X,Y]_E + f[X,Y]_E + \mathrm{d}_*\rho(X)\cdot f\wedge Y + \rho(X)\cdot f\mathrm{d}_* Y\end{aligned} \tag{A.99}$$

であることから，以下の関係式が成立する．

$$\begin{aligned}[X, \mathrm{d}_* f]_E\wedge Y = \mathcal{L}_{\mathrm{d}f}X\wedge Y - \mathrm{d}_*[X, fY]_E + f\mathrm{d}_*[X,Y]_E \\ + \mathrm{d}_* f\wedge\mathcal{L}_X Y + \mathcal{L}_X\mathrm{d}_* f\wedge Y + (\rho(X)\cdot f)\mathrm{d}_* Y + f\mathcal{L}_Y\mathrm{d}_* X - f\mathcal{L}_{fY}\mathrm{d}_* X\end{aligned} \tag{A.100}$$

X を $\mathrm{d}_* f$ に置き換えて整理すると，以下の関係式が得られる．

$$\begin{aligned}[\mathrm{d}_* f, \mathrm{d}_* f]_E\wedge Y &= \mathcal{L}_{\mathrm{d}f}\mathrm{d}_* f\wedge Y - \mathrm{d}_*[\mathrm{d}_* f, fY]_E + f\mathrm{d}_*[\mathrm{d}_* f, Y]_E \\ &\quad + \mathrm{d}_* f\wedge\mathcal{L}_{\mathrm{d}_* f}Y + (\rho(\mathrm{d}_* f)\cdot f)\mathrm{d}_* Y \\ &= 0\end{aligned} \tag{A.101}$$

よって，以下の式が成立する．

$$\mathcal{L}_{\mathrm{d}f}\mathrm{d}_*f\wedge Y=\mathrm{d}_*[\mathrm{d}_*f,fY]_E-f\mathrm{d}_*[\mathrm{d}_*f,Y]_E-\mathrm{d}_*f\wedge\mathcal{L}_{\mathrm{d}_*f}Y-(\rho(\mathrm{d}_*f)\cdot f)\mathrm{d}_*Y \qquad (\mathrm{A}.102)$$

また，(A.102) は，f を f^2 に置き換えても成立する．

$$\mathcal{L}_{\mathrm{d}f^2}\mathrm{d}_*f^2\wedge Y=\mathrm{d}_*[\mathrm{d}_*f^2,f^2Y]_E-f^2\mathrm{d}_*[\mathrm{d}_*f^2,Y]_E-\mathrm{d}_*f^2\wedge\mathcal{L}_{\mathrm{d}_*f^2}Y-(\rho(\mathrm{d}_*f^2)\cdot f^2)\mathrm{d}_*Y \qquad (\mathrm{A}.102')$$

さらに，(A.92) から展開していくと，

$$\begin{aligned}\rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0f^2)\cdot f^2&=\langle\rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0f^2),\mathrm{d}_0f^2\rangle\\&=\langle\mathrm{d}_*f^2,\mathrm{d}f^2\rangle\\&=4\langle f\mathrm{d}_*f,f\mathrm{d}f\rangle\\&=4f^2\langle\mathrm{d}_*f,\mathrm{d}f\rangle\\&=4(\rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0f)\cdot f)f^2\end{aligned} \qquad (\mathrm{A}.103)$$

なので，これを両辺 d_* で叩くと

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_*(\rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0f^2)\cdot f^2)&=4\mathrm{d}_*((\rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0f)\cdot f)f^2)\\&=4f^2\mathrm{d}_*(\rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0f)\cdot f)+4(\rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0f)\cdot f)\mathrm{d}_*f^2\end{aligned} \qquad (\mathrm{A}.104)$$

であることから，(A.100) 式は次のように書き換えることができる．

$$\begin{aligned}&4f^2\mathrm{d}_*(\rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0f)\cdot f)\wedge Y+4(\rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0f)\cdot f)\mathrm{d}_*f^2\wedge Y\\&=\mathrm{d}_*[\mathrm{d}_*f^2,f^2Y]_E+\big(-(\mathrm{d}_*f^2)\wedge\mathcal{L}_{\mathrm{d}_*f^2}Y-f\mathcal{L}_{\mathrm{d}_*f^2}\mathrm{d}_*Y-\rho(\mathrm{d}_*f^2)[f^2]\mathrm{d}_*Y\big).\end{aligned} \qquad (\mathrm{A}.102'')$$

左辺に (A.102) を代入すると，以下のようになる．

$$\begin{aligned}&4f^2\mathrm{d}_*[\mathrm{d}_*f,fY]_E-4f^2(\mathrm{d}_*f)\wedge\mathcal{L}_{\mathrm{d}_*f}Y-4f^2\mathcal{L}_{\mathrm{d}_*f}\mathrm{d}_*Y-4f^2(\rho(\mathrm{d}_*f)\cdot f)\mathrm{d}_*Y+4(\rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0f)\cdot f)\mathrm{d}_*f^2\wedge Y\\&=\mathrm{d}_*[\mathrm{d}_*f^2,f^2Y]_E-(\mathrm{d}_*f^2)\wedge\mathcal{L}_{\mathrm{d}_*f^2}Y-f\mathcal{L}_{\mathrm{d}_*f^2}\mathrm{d}_*Y-(\rho(\mathrm{d}_*f^2)\cdot f^2)\mathrm{d}_*Y.\end{aligned}$$

これを $\rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0f)\cdot f\mathrm{d}_*f^2$ のある項でまとめると，

$$\begin{aligned}4\rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0f)\cdot f\mathrm{d}_*f^2\wedge Y=&-4f^2\mathrm{d}_*[\mathrm{d}_*f,fY]_E+4f^2(\mathrm{d}_*f)\wedge\mathcal{L}_{\mathrm{d}_*f}Y\\&+4f^2\mathcal{L}_{\mathrm{d}_*f}\mathrm{d}_*Y+4f^2\rho(\mathrm{d}_*f)\cdot f\mathrm{d}_*Y\\&+\mathrm{d}_*[\mathrm{d}_*f^2,f^2Y]_E-(\mathrm{d}_*f^2)\wedge\mathcal{L}_{\mathrm{d}_*f^2}Y\\&-f\mathcal{L}_{\mathrm{d}_*f^2}\mathrm{d}_*Y-(\rho(\mathrm{d}_*f^2)\cdot f^2)\mathrm{d}_*Y.\end{aligned} \qquad (\mathrm{A}.105)$$

(A.105) の両辺に ρ を作用させると，左辺は

$$\begin{aligned}\rho((\rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0f)\cdot f)(\mathrm{d}_*f^2))&=(\rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0f)\cdot f)\rho(\mathrm{d}_*f^2)\\&=(\rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0f)\cdot f)\rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0f^2)\\&=2f((\rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0f)\cdot f)\rho\rho_*^*\mathrm{d}_0f)\end{aligned}$$

であることから，

$$4\rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0f)\cdot f\mathrm{d}_*f^2\wedge Y=8f((\rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0f)\cdot f)\rho\rho_*^*\mathrm{d}_0f)\wedge Y \qquad (\mathrm{A}.106)$$

となり，(A.105) は ($\rho(X\wedge Y)=\rho(X)\wedge\rho(Y)$ であるならば) 以下のように書くことができる．

$$\begin{aligned}8f(\rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0 f)\cdot f\rho\rho_*^*\mathrm{d}_0 f)\wedge\rho(Y)=&-4f^2\rho(\mathrm{d}_*[\mathrm{d}_* f,fY]_E)+4f^2\rho(\mathrm{d}_* f)\wedge\rho(\mathcal{L}_{\mathrm{d}_* f}Y)\\&+4f^2\rho(\mathcal{L}_{\mathrm{d}_* f}\mathrm{d}_* Y)+4f^2\rho(\mathrm{d}_* f)\cdot f\rho(\mathrm{d}_* Y)\\&+\rho(\mathrm{d}_*[\mathrm{d}_* f^2,f^2Y]_E)-\rho((\mathrm{d}_* f^2))\wedge\rho(\mathcal{L}_{\mathrm{d}_* f^2}Y)\\&-f\rho(\mathcal{L}_{\mathrm{d}_* f^2}\mathrm{d}_* Y)-(\rho(\mathrm{d}_* f^2)\cdot f^2)\rho(\mathrm{d}_* Y).\end{aligned}\tag{A.107}$$

さらに，両辺で $\mathrm{d}_0 f$ と内積をとると，左辺は

$$\begin{aligned}&8f\iota_{\mathrm{d}_0 f}(((\rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0 f)\cdot f),\rho\rho_*^*\mathrm{d}_0 f)\wedge\rho(Y))\\&=8f\iota_{\mathrm{d}_0 f}((\rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0 f)\cdot f),\rho\rho_*^*\mathrm{d}_0 f)\wedge\rho(Y)-8f((\rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0 f)\cdot f),\rho\rho_*^*\mathrm{d}_0 f)\wedge\iota_{\mathrm{d}_0 f}\rho(Y)\\&=8f(\rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0 f)\cdot f)^2\wedge Y-8f((\rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0 f)\cdot f),\rho\rho_*^*\mathrm{d}_0 f)\wedge\iota_{\mathrm{d}_0 f}\rho(Y)\end{aligned}\tag{A.108}$$

となることから，

$$\begin{aligned}&8f(\rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0 f)\cdot f)^2\wedge Y\\&=8f((\rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0 f)\cdot f)\rho\rho_*^*\mathrm{d}_0 f)\wedge i_{\mathrm{d}_0 f}\rho(Y)\\&\quad-4f^2\rho(\mathrm{d}_*[\mathrm{d}_* f,fY]_E)+4f^2\rho(\mathrm{d}_* f)\wedge\rho(\mathcal{L}_{\mathrm{d}_* f}Y)\\&\quad+4f^2\rho(\mathcal{L}_{\mathrm{d}_* f}\mathrm{d}_* Y)+4f^2\rho(\mathrm{d}_* f)\cdot f\rho(\mathrm{d}_* Y)\\&\quad+\rho(\mathrm{d}_*[\mathrm{d}_* f^2,f^2Y]_E)-\rho((\mathrm{d}_* f^2))\wedge\rho(\mathcal{L}_{\mathrm{d}_* f^2}Y)\\&\quad-f\rho(\mathcal{L}_{\mathrm{d}_* f^2}\mathrm{d}_* Y)-(\rho(\mathrm{d}_* f^2)\cdot f^2)\rho(\mathrm{d}_* Y).\end{aligned}\tag{A.109}$$

係数程度のズレはあるが，左辺は (A.92) 式の中央の項が現れている．一般に任意の f,Y に対して右辺は明らかに 0 ではないので，$\rho\rho_*^*(\mathrm{d}_0 f)\cdot f$ が 0 にならない可能性を排除できない．

A.11　Axiom C5 の確認

$$\rho(e)(e_1,e_2)=([e,e_1]_{\mathrm{V}}+\mathcal{D}(e,e_1),e_2)+(e_1,[e,e_2]_{\mathrm{V}}+\mathcal{D}(e,e_2))\tag{3.25}$$

が成立しているかどうかを確かめる．これは，(A.32) を使うことで直ちに示せる．(A.32) から，

$$\begin{aligned}([e,e_1]_{\mathrm{V}},e_2)_+&=T(e,e_1,e_2)+\frac{1}{2}\rho_{\mathrm{V}}(e)(e_1,e_2)_+-\frac{1}{2}\rho_{\mathrm{V}}(e_1)(e,e_2)_+\\(e_1,[e,e_2]_{\mathrm{V}})_+&=T(e,e_2,e_1)+\frac{1}{2}\rho_{\mathrm{V}}(e)(e_2,e_1)_+-\frac{1}{2}\rho_{\mathrm{V}}(e_2)(e,e_1)_+\end{aligned}$$

この 2 式を足すと，以下の関係式が得られる．$T(e,e_2,e_1)$ は完全反対称なので打ち消しあう．

$$\begin{aligned}&([e,e_1]_{\mathrm{V}},e_2)_++(e_1,[e,e_2]_{\mathrm{V}})_+\\&=T(e,e_1,e_2)+T(e,e_2,e_1)+\rho_{\mathrm{V}}(e)(e_1,e_2)_+-\frac{1}{2}\rho(e_1)(e,e_2)_+-\frac{1}{2}\rho(e_2)(e,e_1)_+\\&=\rho_{\mathrm{V}}(e)(e_1,e_2)_+-\frac{1}{2}\rho(e_1)(e,e_2)_+-\frac{1}{2}\rho(e_2)(e,e_1)_+\end{aligned}\tag{A.110}$$

(A.110) を $\rho(e)(e_1,e_2)_+$ について解くと，以下のようになる．

$$\rho(e)(e_1,e_2)_+=([e,e_1]_{\mathrm{V}},e_2)_++(e_1,[e,e_2]_{\mathrm{V}})_++\frac{1}{2}\rho_{\mathrm{V}}(e_1)(e,e_2)_++\frac{1}{2}\rho_{\mathrm{V}}(e_2)(e,e_1)_+\tag{A.111}$$

ここで，ρ と $\mathcal{D}$ の定義から，$e_i = X_i + \xi_i$ なので，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\rho_{\mathrm{V}}(e_1)(e,e_2)_+ &= \frac{1}{2}\rho(X_1)(e,e_2)_+ + \frac{1}{2}\rho_*(\xi_1)(e,e_2)_+ \\ &= \frac{1}{2}(\langle X_1, \mathrm{d}(e,e_2)_+\rangle + \langle \xi_1, \mathrm{d}_*(e,e_2)_+\rangle) \\ &= (\mathrm{d}(e,e_2)_+ + \mathrm{d}_*(e,e_2)_+, X_1+\xi_1)_+ \\ &= (\mathcal{D}(e,e_2)_+, e_1)_+ \end{aligned} \tag{A.112}$$

同様に，

$$\frac{1}{2}\rho_{\mathrm{V}}(e_2)(e,e_1)_+ = (\mathcal{D}(e,e_1)_+, e_2)_+ \tag{A.113}$$

これらを (A.111) に代入して，

$$\begin{aligned}\rho_{\mathrm{V}}(e)(e_1,e_2)_+ &= ([e,e_1]_{\mathrm{V}}, e_2)_+ + (e_1, [e,e_2]_{\mathrm{V}})_+ + (\mathcal{D}(e,e_2)_+, e_1)_+ + (\mathcal{D}(e,e_1)_+, e_2)_+ \\ &= ([e,e_1]_{\mathrm{V}} + \mathcal{D}(e,e_1), e_2) + (e_1, [e,e_2]_{\mathrm{V}} + \mathcal{D}(e,e_2)) \end{aligned} \tag{A.114}$$

(A.114) はまさに (3.25) そのものである．よって，$(\mathcal{V}, [\cdot,\cdot]_{\mathrm{V}}, \rho_{\mathrm{V}}, (\cdot,\cdot)_+)$ において，Axiom C5 は成立する．

A.12 $N_K = N_P + N_{\tilde{P}}$ であることの確認

N_K は，(4.1) で与えた，概パラ複素構造の可積分性を評価するための量である．$N_P(X,Y)$, $N_{\tilde{P}}(X,Y)$ を

$$N_P(X,Y) = \tilde{P}[P(X), P(Y)], \quad N_{\tilde{P}}(X,Y) = P[\tilde{P}(X), \tilde{P}(Y)] \tag{A.115}$$

としたとき，$N_K(X,Y) = N_P(X,Y) + N_{\tilde{P}}(X,Y)$ であることを確かめる．

ここで，(4.2) 式の $P, \tilde{P}$ の定義から，$N_P(X,Y), N_{\tilde{P}}(X,Y)$ を K があらわになるように書き下すと，以下のようになる．

$$\begin{aligned} N_P(X,Y) &= \tilde{P}[P(X), P(Y)] \\ &= \frac{1}{2}(1-K)\left[\frac{1}{2}(1+K)X, \frac{1}{2}(1+K)Y\right] \\ &= \frac{1}{2}(1-K)\frac{1}{4}[X+K(X), Y+K(Y)] \\ &= \frac{1}{2}(1-K)\frac{1}{4}\big(XY + XK(Y) + K(X)Y + K(X)K(Y) \\ &\qquad\qquad - YX - YK(X) - K(Y)X - K(Y)K(X)\big) \\ &= \frac{1}{2}(1-K)\frac{1}{4}([X,Y] + [X,K(Y)] + [K(X),Y] + [K(X),K(Y)]) \\ &= \frac{1}{8}([X,Y] + [X,K(Y)] + [K(X),Y] + [K(X),K(Y)]) \\ &\quad + \frac{1}{8}(-K[X,Y] - K[X,K(Y)] - K[K(X),Y] - K[K(X),K(Y)]) \end{aligned}$$

同様に，

$$
\begin{aligned}
N_{\tilde{P}}(X,Y) &= P[\tilde{P}(X),\tilde{P}(Y)] \\
&= \frac{1}{2}(1+K)\left[\frac{1}{2}(1-K)X,\frac{1}{2}(1-K)Y\right] \\
&= \frac{1}{2}(1+K)\frac{1}{4}[X-K(X),Y-K(Y)] \\
&= \frac{1}{2}(1+K)\frac{1}{4}\big(XY-XK(Y)-K(X)Y+K(X)K(Y) \\
&\qquad\qquad -YX+YK(X)+K(Y)X-K(Y)K(X)\big) \\
&= \frac{1}{2}(1+K)\frac{1}{4}([X,Y]-[X,K(Y)]-[K(X),Y]+[K(X),K(Y)]) \\
&= \frac{1}{8}([X,Y]-[X,K(Y)]-[K(X),Y]+[K(X),K(Y)]) \\
&\quad + \frac{1}{8}(K[X,Y]-K[X,K(Y)]-K[K(X),Y]+K[K(X),K(Y)])
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
N_P(X,Y)+N_{\tilde{P}}(X,Y) &= \frac{1}{8}([X,Y]+[X,K(Y)]+[K(X),Y]+[K(X),K(Y)]) \\
&\quad + \frac{1}{8}(-K[X,Y]-K[X,K(Y)]-K[K(X),Y]-K[K(X),K(Y)]) \\
&\quad + \frac{1}{8}([X,Y]-[X,K(Y)]-[K(X),Y]+[K(X),K(Y)]) \\
&\quad + \frac{1}{8}(K[X,Y]-K[X,K(Y)]-K[K(X),Y]+K[K(X),K(Y)]) \\
&= \frac{1}{4}([X,Y]-K[X,K(Y)]-K[K(X),Y]+[K(X),K(Y)]) \\
&= N_K(X,Y) \qquad\qquad \text{(A.116)}
\end{aligned}
$$

よって，$N_P(X,Y), N_{\tilde{P}}(X,Y)$ を

$$
N_P(X,Y)=\tilde{P}[P(X),P(Y)],\quad N_{\tilde{P}}(X,Y)=P[\tilde{P}(X),\tilde{P}(Y)]. \qquad \text{(A.117)}
$$

としたとき，$N_K=N_P+N_{\tilde{P}}$ が成立する．

参考文献

[1] T. Kaluza, "On the Problem of Unity in Physic", Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) (1921) 66.

[2] O. Klein, "Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity. (In German and English)," Z. Phys. **37** (1926) 895, High. Energ. Phys. **5** (1986) 241.

[3] C. G. Callan, Jr., E. J. Martinec, M. J. Perry and D. Friedan, "Strings in Background Fields," Nucl. Phys. B **262** (1985) 593.

[4] J. M. Maldacena, "The Large N limit of superconformal field theories and supergravity," Int. J. Theor. Phys. **38** (1999) 1113 [Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 231] [hep-th/9711200].

[5] A. Sen, "Strong - weak coupling duality in four-dimensional string theory," Int. J. Mod. Phys. A **9** (1994) 3707 [hep-th/9402002].

[6] N. A. Obers and B. Pioline, "U duality and M theory," Phys. Rept. **318** (1999) 113 [hep-th/9809039].

[7] A. Giveon, M. Porrati and E. Rabinovici, "Target space duality in string theory," Phys. Rept. **244** (1994) 77 [hep-th/9401139].

[8] C. Hull and B. Zwiebach, "Double Field Theory," JHEP **0909** (2009) 099 [arXiv:0904.4664 [hep-th]].

[9] C. Hull and B. Zwiebach, "The Gauge algebra of double field theory and Courant brackets," JHEP **0909** (2009) 090 [arXiv:0908.1792 [hep-th]].

[10] A. Einstein, "The Foundation of the General Theory of Relativity," Annalen Phys. **49** (1916) no.7, 769 [Annalen Phys. **14** (2005) 517] [Annalen Phys. **354** (1916) no.7, 769].

[11] N. Hitchin, "Generalized Calabi-Yau manifolds," Quart. J. Math. **54** (2003) 281 [arXiv:math/0209099 [math-dg]].

[12] C. M. Hull, "Doubled Geometry and T-Folds," JHEP **0707** (2007) 080 [arXiv:hep-th/0605149].

[13] H. Mori, S. Sasaki and K. Shiozawa, "Doubled Aspects of Vaisman Algebroid and Gauge Symmetry in Double Field Theory," J. Math. Phys. **61** (2020) 013505 [arXiv:1901.04777 [hep-th]].

[14] I. Vaisman, "On the geometry of double field theory," J. Math. Phys. **53** (2012) 033509 [arXiv:1203.0836 [math.DG]].

[15] I. Vaisman, "Towards a double field theory on para-Hermitian manifolds," J. Math. Phys.

54 (2013) 123507 [arXiv:1209.0152 [math.DG]].

[16] M. Gualtieri, "Generalized complex geometry," Oxford University Ph.D. thesis. [arXiv:math/0401221 [math.DG]].

[17] T. J. Courant, "Dirac Manifolds," Transactions of the American Mathematical Society, vol. 319 (1990) 631.

[18] O. Hohm, C. Hull and B. Zwiebach, "Generalized metric formulation of double field theory," JHEP **1008** (2010) 008 [arXiv:1006.4823 [hep-th]].

[19] O. Hohm and B. Zwiebach, "Towards an invariant geometry of double field theory," J. Math. Phys. **54** (2013) 032303 [arXiv:1212.1736 [hep-th]].

[20] A. Deser and C. Sämann, "Extended Riemannian Geometry I: Local Double Field Theory," arXiv:1611.02772 [hep-th].

[21] A. Deser and C. Sämann, "Derived Brackets and Symmetries in Generalized Geometry and Double Field Theory," PoS CORFU **2017** (2018) 141 [arXiv:1803.01659 [hep-th]].

[22] K. Lee, "Towards Weakly Constrained Double Field Theory," Nucl. Phys. B **909** (2016) 429 [arXiv:1509.06973 [hep-th]].

[23] O. Hohm, C. Hull and B. Zwiebach, "Background independent action for double field theory," JHEP **1007** (2010) 016 [arXiv:1003.5027 [hep-th]].

[24] C. M. Hull, "A Geometry for non-geometric string backgrounds," JHEP **0510** (2005) 065 [hep-th/0406102].

[25] D. Svoboda, "Algebroid Structures on Para-Hermitian Manifolds," J. Math. Phys. **59** (2018) no.12, 122302 [arXiv:1802.08180 [math.DG]].

[26] L. Freidel, F. J. Rudolph and D. Svoboda, "Generalised Kinematics for Double Field Theory," JHEP **1711** (2017) 175 [arXiv:1706.07089 [hep-th]].

[27] L. Freidel, F. J. Rudolph and D. Svoboda, "A Unique Connection for Born Geometry," Commun. Math. Phys. **372** (2019) no.1, 119 [arXiv:1806.05992 [hep-th]].

[28] V. E. Marotta and R. J. Szabo, "Para - Hermitian Geometry, Dualities and Generalized Flux Backgrounds," Fortsch. Phys. **67** (2019) no.3, 1800093 [arXiv:1810.03953 [hep-th]].

[29] W. Siegel, "Superspace duality in low-energy superstrings," Phys. Rev. D **48** (1993) 2826 [hep-th/9305073].

[30] W. Siegel, "Two vierbein formalism for string inspired axionic gravity," Phys. Rev. D **47** (1993) 5453 [hep-th/9302036].

[31] M. Gualtieri, "Generalized Complex Geometry," Ann. of Math. **174** (2011) 75 [arXiv:math/0703298].

[32] M. Grana, R. Minasian, M. Petrini and D. Waldram, "T-duality, Generalized Geometry and Non-Geometric Backgrounds," JHEP **0904** (2009) 075 [arXiv:0807.4527 [hep-th]].

[33] I. Y. Dorfmann, "Dirac Structures of Integrable Evolution Equations", Phys. Lett. **A125**(5) (1987) 240.

[34] D. Roytenberg, "Courant algebroids, derived brackets and even symplectic supermanifolds," math/9910078 [math.DG].

[35] Z.-J. Liu, A. Weinstein, P. Xu, "Manin Triples for Lie Bialgebroids," J. Differential Geom. **45** (1997) 547 [dg-ga/9508013].

[36] A. Chatzistavrakidis, L. Jonke, F. S. Khoo and R. J. Szabo, "Double Field Theory and Membrane Sigma-Models," JHEP **1807** (2018) 015 [arXiv:1802.07003 [hep-th]].

[37] Y. Kosmann-Schwarzbach, "Lie bialgebras, Poisson Lie groups and dressing transformations," Integrability of Nonlinear Systems, Second edition, Lecture Notes in Physics 638, Springer-Verlag, (2004) 107.

[38] C. M. Marle, "The Schouten-Nijenhuis bracket and interior products," Journal of Geometry and Physics. **23** (1997) 350.

[39] C. Chevalley and S. Eilenberg, "Cohomology Theory of Lie Groups and Lie Algebras," Trans. Am. Math. Soc. **63** (1948) 85.

[40] J. A. Schouten, "Über Differentialkonkomitanten zweier kontravarianten Grössen,". Indag. Math. 2 (1940) 449, "On the differential operators of the first order in tensor calculus," In Cremonese. Convegno Int. Geom. Diff. Italia. (1953) 1,
A. Nijenhuis, "Jacobi-type identities for bilinear differential concomitants of certain tensor fields I," Indagationes Math. **17** (1955) 390.

[41] M. Gerstenhaber, "The Cohomology Structure of an Associative Ring," Ann. of Math. **78** (1963) 267.

[42] V. G. Drinfel'd, "Quantum groups," Proc. Internat. Congr. Math. (1986) 789.

[43] J. Pradines, "Théorie de Lie pour les groupoïdes différentiables. Relations entre propriétés locales et globales," C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B **263** (1966) A907.

[44] K. C. H. Mackenzie and P. Xu, "Lie bialgebroids and Poisson groupoids," Duke Math. J. **73** (1994) 415.

[45] N. Hitchin, "Lectures on generalized geometry," arXiv:1008.0973[math.DG].

[46] P. Koerber, "Lectures on Generalized Complex Geometry for Physicists," Fortsch. Phys. **59** (2011) 169 [arXiv:1006.1536 [hep-th]].

[47] T. Asakawa, H. Muraki, S. Sasa and S. Watamura, "Poisson-generalized geometry and R-flux," Int. J. Mod. Phys. A **30** (2015) no.17, 1550097 [arXiv:1408.2649 [hep-th]].

[48] T. Asakawa, H. Muraki and S. Watamura, "Topological T-duality via Lie algebroids and Q-flux in Poisson-generalized geometry," Int. J. Mod. Phys. A **30** (2015) no.30, 1550182 [arXiv:1503.05720 [hep-th]].

[49] T. Asakawa, H. Muraki and S. Watamura, "Gravity theory on Poisson manifold with R-flux," Fortsch. Phys. **63** (2015) 683 [arXiv:1508.05706 [hep-th]].

[50] K. Uchino, "Remarks on the Definition of a Courant Algebroid," Lett. Math. Phys. **60** (2002) 171 [math/0204010 [math.DG]].

[51] D. Roytenberg and A. Weinstein, "Courant algebroids and strongly homotopy Lie algebras." Lett. Math. Phys. **46** (1998) 1 [math/9802118[math.QA]].

[52] I. Vaisman, "Generalized Sasaki metrics on tangent bundles," arXiv:1312.4279 [math.DG].

[53] P. Ševera, "Letters to Alan Weinstein about Courant algebroids," arXiv:1707.00265 [math.DG].

[54] Y. Kosmann-Schwarzbach, "Exact Gerstenharber algebras and Lie bialgebroids," Acta Appl. Math. **41** (1995) 153.

[55] Y. Kosmann-Schwarzbach, F. Magri, "Poisson-Nijenhuis structures," Ann. de l'I.H.P. Physique théorique **53** (1990) 35.

[56] 田村 一郎, "葉層のトポロジー," 岩波書店 (1976)

[57] A. Newlander and L. Nirenberg, "Complex Analytic Coordinates in Almost Complex Manifolds," Ann. of Math. **65** (1957) 391.

[58] W. M. Tulczyjew, "The graded Lie algebra of multivector fields and the generalized Lie derivative of forms," Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. Math. Astr. Phys. **22** (1974) 937.

[59] A. Vaintrob, "Lie algebroids and homological vector fields," Uspekhi Mat. Nauk **52** no.2(314) (1997) 161 translation in Russian Math. Surveys **52** no.2 (1997) 428.

[60] T. Kimura and S. Sasaki, "Gauged Linear Sigma Model for Exotic Five-brane," Nucl. Phys. B **876** (2013) 493 [arXiv:1304.4061 [hep-th]].

[61] J. Berkeley, D. S. Berman and F. J. Rudolph, "Strings and Branes are Waves," JHEP **1406** (2014) 006 [arXiv:1403.7198 [hep-th]].

[62] D. S. Berman and F. J. Rudolph, "Branes are Waves and Monopoles," JHEP **1505** (2015) 015 [arXiv:1409.6314 [hep-th]].

[63] I. Bakhmatov, A. Kleinschmidt and E. T. Musaev, "Non-geometric branes are DFT monopoles," JHEP **1610** (2016) 076 [arXiv:1607.05450 [hep-th]].

[64] T. Kimura, S. Sasaki and K. Shiozawa, "Worldsheet Instanton Corrections to Five-branes and Waves in Double Field Theory," JHEP **1807** (2018) 001 [arXiv:1803.11087 [hep-th]].

[65] O. Hohm and B. Zwiebach, "Large Gauge Transformations in Double Field Theory," JHEP **1302** (2013) 075 [arXiv:1207.4198 [hep-th]].

[66] J. H. Park, "Comments on double field theory and diffeomorphisms," JHEP **1306** (2013) 098 [arXiv:1304.5946 [hep-th]].

[67] D. S. Berman, M. Cederwall and M. J. Perry, "Global aspects of double geometry," JHEP **1409** (2014) 066 [arXiv:1401.1311 [hep-th]].

[68] M. Cederwall, "The geometry behind double geometry," JHEP **1409** (2014) 070 [arXiv:1402.2513 [hep-th]].

[69] C. M. Hull, "Finite Gauge Transformations and Geometry in Double Field Theory," JHEP **1504** (2015) 109 [arXiv:1406.7794 [hep-th]].

[70] U. Naseer, "A note on large gauge transformations in double field theory," JHEP **1506** (2015) 002 [arXiv:1504.05913 [hep-th]].

[71] S. J. Rey and Y. Sakatani, "Finite Transformations in Doubled and Exceptional Space," arXiv:1510.06735 [hep-th].

[72] V. G. Drinfel'd, "Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bialgebras and the geometric meaning of classical Yang-Baxter equations," Dokl. Akad. Nauk SSSR **268(2)** (1983) 285.

[73] R. Loja Fernandes and M. Crainic, "Lectures on Integrability of Lie Brackets," math/0611259.

[74] P. Ševera and M. Širaň, "Integration of differential graded manifolds," [arXiv:1506.04898 [math.DG]].

[75] D. Li-Bland and P. Ševera, "Integration of Exact Courant Algebroids," Electronic Research Announcements in Mathematical Sciences (ERA-MS) 19 (2012) 58 [arXiv:1101.3996 [math.DG]].

[76] M. Grana and D. Marques, "Gauged Double Field Theory," JHEP **1204** (2012) 020 [arXiv:1201.2924 [hep-th]].

[77] A. Deser and J. Stasheff, "Even symplectic supermanifolds and double field theory," Commun. Math. Phys. **339** (2015) no.3, 1003 [arXiv:1406.3601 [math-ph]].

[78] U. Carow-Watamura, N. Ikeda, T. Kaneko and S. Watamura, "DFT in supermanifold formulation and group manifold as background geometry," [arXiv:1812.03464 [hep-th]].

[79] D. Roytenberg, "On the structure of graded symplectic supermanifolds and Courant algebroids," [arXiv:math/0203110 [math-sg]].

[80] Y. Kosmann-Schwarzbach, "Derived brackets," Lett. Math. Phys. **69** (2004) 61, [arXiv:math/0312524 [math.DG]].

[81] C. Klimcik and P. Severa, "Dual nonAbelian duality and the Drinfeld double," Phys. Lett. B **351** (1995) 455 [arXiv:hep-th/9502122].

[82] R. Von Unge, "Poisson Lie T plurality," JHEP **0207** (2002) 014 [arXiv:hep-th/0205245].

[83] D. Lüst and D. Osten, "Generalised fluxes, Yang-Baxter deformations and the O(d,d) structure of non-abelian T-duality," JHEP **1805** (2018) 165 [arXiv:1803.03971 [hep-th]].

[84] V. E. Marotta, F. Pezzella and P. Vitale, "Doubling, T-Duality and Generalized Geometry: a Simple Model," JHEP **1808** (2018) 185 [arXiv:1804.00744 [hep-th]].

[85] P. Ševera and F. Valach, "Courant algebroids, Poisson-Lie T-duality, and type II supergravities," [arXiv:1810.07763 [math.DG]].

[86] S. Demulder, F. Hassler and D. C. Thompson, "Doubled aspects of generalised dualities and integrable deformations," arXiv:1810.11446 [hep-th].

[87] O. Hohm and H. Samtleben, "Exceptional Field Theory I: $E_{6(6)}$ covariant Form of M-Theory and Type IIB," Phys. Rev. D **89** (2014) no.6, 066016 [arXiv:1312.0614 [hep-th]].

[88] O. Hohm and H. Samtleben, "Higher Gauge Structures in Double and Exceptional Field Theory," Fortsch. Phys. **67** (2019) no.8-9, 1910008 [arXiv:1903.02821 [hep-th]].