

背景磁場を含む6次元理論における スカラー場の質量補正の相殺機構*

(Cancellation mechanism of mass corrections to scalar field
in six dimensional theory with flux compactification)

大阪市立大学 理学研究科

数物系専攻

廣瀬 拓哉

*本稿は2020年2月に提出した修士論文を加筆、修正したものである。

概要

素粒子標準模型の問題の 1 つに階層性問題がある。これはヒッグス粒子の質量補正が新しい物理スケールの 2 乗に比例し、観測値である 125 GeV を不自然なパラメーターの調整なしに説明できない問題のことである。階層性問題の解決にはいくつかの方法が議論されている。本研究では、flux compactification の発想を元に階層性問題の解決のアプローチを試みる。ここで flux compactification とは、背景磁場が含まれる余剰次元空間のコンパクト化を指す。余剰次元空間が背景磁場を含む 2 次元トーラスの場合、磁場中の量子力学の議論を応用できる。例えば、磁場中の量子力学ではエネルギー固有値として Landau 準位が得られるが、このエネルギー固有値が場の質量固有値になる。flux compactification を出発点とすることで、ゲージ場の余剰次元成分 (スカラー場) の質量補正が相殺されていることを見る。具体的には 6 次元量子電磁気学と 6 次元 SU(2) Yang-Mills 理論の例で見る。またスカラー場の質量補正の相殺の物理的理由が、トーラス並進対称性の自発的破れが関係している。トーラス並進対称性の自発的破れが起こることにより、質量が零の南部-Goldstone ボゾンが生じる。スカラー場がこの南部-Goldstone ボゾンに対応する。本研究は主に [1] の内容である。

目次

第 1 章 Introduction	5
1.1 階層性問題	5
1.2 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ理論	5
1.3 電弱ゲージ理論とヒッグス場	6
1.4 フェルミオン	8
1.5 ヒッグス場の質量補正	9
1.6 階層性問題の考察	11
1.6.1 別の正則化の適用	11
1.6.2 Veltman 条件	12
1.6.3 スカラー場に関する対称性	13
第 2 章 Flux compactification	14
2.1 磁場中の荷電粒子	14
2.2 6次元 flux compactification	16
第 3 章 6次元量子電磁気学	18
3.1 ゲージ場	18
3.2 スカラー場	19
3.3 フェルミオン	20
3.4 質量補正: flux なし、スカラー場の場合	20
3.5 質量補正: flux なし、フェルミオンの場合	21
3.6 質量補正: flux あり、スカラー場の場合	23
3.7 質量補正: flux あり、フェルミオンの場合	24
3.8 質量補正の正則化	27
第 4 章 6次元 $SU(2)$ Yang-Mills 理論	29
4.1 Yang-Mills 理論と flux compactification	29
4.2 質量スペクトル	31
4.2.1 ゲージ場	31
4.2.2 スカラー場	33
4.2.3 ゴースト場	34
4.3 有効 Lagrangian	34
4.3.1 ゲージ場	35
4.3.2 スカラー場	36
4.3.3 ゴースト場	37
4.4 質量補正の相殺	37
4.4.1 ゲージ場のループと質量補正の相殺	37
4.4.2 スカラー場のループ	39
4.4.3 ゴースト場のループ	40

4.4.4	スカラー場の質量補正とゴースト場の質量補正の相殺	41
第 5 章	質量補正が相殺する物理的理由	43
5.1	トーラス磁場中の量子力学の対称性	43
5.2	南部-Goldstone ボゾンとしてのスカラー場 φ	45
第 6 章	まとめと課題	46
付 録 A	ガンマ行列	48
付 録 B	Feynman rules	50
B.1	時間が負の計量でのスカラー場の propagator	50
B.2	propagator	51
付 録 C	1-loop 有効ポテンシャルと発散	52
付 録 D	Jacobi テータ関数	56
付 録 E	次元正則化の計算	57
付 録 F	3 点、4 点相互作用の Feynman rule	62

第1章 Introduction

現在、素粒子を記述する理論は標準模型と呼ばれている。この理論は6種類のクォーク u, d, c, s, t, b 、6種類のレプトン $e, \nu_e, \mu, \nu_\mu, \tau, \nu_\tau$ 、4種類のゲージ粒子 γ, W^\pm, Z^0, g 、ヒッグス粒子で構成される。ゲージ理論の立場で見れば、 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ のゲージ理論を表す。 $SU(3)_C$ は量子色力学を、 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ は電弱理論を表す。1995年にトップクォークが発見された後、残りの未発見粒子はヒッグス粒子だったが、2012年にLHCの実験においてヒッグス粒子は発見された。

ヒッグス粒子の発見により、標準模型は現実にかかる現象を説明する理論として確立した。だがこれで素粒子の理論が完成したわけではなく、標準模型では説明できない現象が多数ある。例えば、2015年にノーベル賞を受賞したニュートリノ振動は、標準模型では説明できない。ニュートリノ関連で言えば、ニュートリノがDirac型なのかMajorana型かもまだ決着が付いていない。他にも暗黒物質は標準模型には含まれていない。この問題は宇宙論の観測事実と素粒子理論を融合して考えなければならない。力の統一という観点で言えば、標準模型は強い相互作用、弱い相互作用、電磁相互作用の3つが含まれているが、重力相互作用は含まれていない。そもそも強い相互作用と電弱相互作用の統一もまだ完成していない。これらの3つの統一に関して、大統一理論 (GUT) が考えられ、いくつかのモデルが提唱されたが、どれも未完成である。

この他にも多くの問題点が存在するが、その中の問題の1つに階層性問題がある。以下では、その階層性問題を詳しく見ていく。以降、特に断らない限り、自然単位系を採用する。

1.1 階層性問題

階層性問題とは、ヒッグス粒子の質量補正 δm_H^2 が新しい物理スケールの2乗に比例し、観測値である $125 \text{ GeV} (= m_H)$ を説明できない問題のことである [2, 3]。例えば、新しい物理スケールが Λ だとすると、 $\delta m_H^2 \propto \Lambda^2$ となり、 $\Lambda \gg \text{TeV}$ ならば $\delta m_H^2 \gg m_H^2$ となってしまう。現在の実験で新しい物理スケールが少なくとも TeV 付近では見つかっていないため、ヒッグス質量が莫大に大きくなる可能性がある。ヒッグス質量を観測値の 125 GeV に合わせるためには、質量補正の絶妙な相殺が起こる必要がある。この相殺が起こるためには、パラメータの不自然な微調整が必要である。この fine tuning の問題を自然さ (Naturalness) ともいう。

1.2 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ理論

階層性問題を標準模型の枠組で考察するため、標準模型を概観する。標準模型は $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ理論である。このとき、共変微分は以下ようになる。

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - ig_s A_\mu^A T^A - ig W_\mu^a T^a - ig' B_\mu \frac{Y}{2}. \quad (1.1)$$

ここで A_μ^A は $SU(3)_C$ ゲージ場、 W_μ^a は $SU(2)_L$ ゲージ場、 B_μ は $U(1)_Y$ ゲージ場である。 $A = 1, 2, \dots, 8$ と $a = 1, 2, 3$ はそれぞれ $SU(3)$ 、 $SU(2)$ ゲージ場の内部空間の添字を表す。 g_s は強い相互作用の結合

定数、 g 、 g' は SU(2)、U(1) 群の結合定数である。また Y は U(1) ハイパー電荷である。また T^A と T^a はそれぞれ

$$T^A = \frac{\lambda^A}{2}, \quad T^a = \frac{\sigma^a}{2}$$

である。 λ^A は Gell-Mann 行列、 σ^a は Pauli 行列である。

それぞれのゲージ場に対応する場の強さのテンソルは以下である。

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A + g_s f^{ABC} A_\mu^B A_\nu^C, \quad (1.2)$$

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g \epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c, \quad (1.3)$$

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \quad (1.4)$$

ゲージ場の Lagrangian は以下のとおりである。

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}. \quad (1.5)$$

他にもヒッグス場に関する Lagrangian、フェルミオンに関する Lagrangian や Yukawa coupling に関する Lagrangian がある。これらは後に言及する。

1.3 電弱ゲージ理論とヒッグス場

以下では、SU(3) に関しては考慮せずに、SU(2)×U(1) 電弱ゲージ理論の部分だけ考える。すなわち、共変微分は

$$D_\mu = \partial_\mu - ig W_\mu^a T^a - ig' B_\mu \frac{Y}{2} \quad (1.6)$$

であり、ゲージ場の Lagrangian は

$$\mathcal{L}_{EW} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} \quad (1.7)$$

である。さらにスカラー場の Lagrangian についても同時に考える：

$$\mathcal{L}_\phi = (D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) - \lambda \left(\phi^\dagger \phi - \frac{v^2}{2} \right)^2. \quad (1.8)$$

ϕ が真空期待値を持つと SU(2)×U(1) 対称性を自発的に破る。その真空期待値を以下のように表す。

$$\langle 0 | \phi | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}.$$

ϕ が真空期待値を持つことで、運動項 $|D_\mu \phi|^2$ からゲージ場の質量項が現れる。それを見るために、以下のような線形結合で書かれる電氣的に中性の場を考える：

$$A_\mu = W_\mu^3 \sin \theta_W + B_\mu \cos \theta_W, \quad (1.9)$$

$$Z_\mu = W_\mu^3 \cos \theta_W - B_\mu \sin \theta_W. \quad (1.10)$$

ここで θ_W は Weinberg 角と呼ばれ、実験により $\sin^2 \theta_W = 0.23$ と測定されている。このような線形結合をとった意味は、質量固有状態に取るためである。 A_μ は電磁場を与え、無質量となる。電磁場に直交するのが Z_μ であり、質量を獲得する。この Z_μ を Z ボゾンと呼ぶ。また、

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp i W_\mu^2) \quad (1.11)$$

は質量を獲得する。この W_μ^\pm を W ボゾンと呼び、荷電場である。

実際に A_μ 、 Z_μ 、 W_μ^\pm の質量項を導出する。 ϕ に関するハイパー電荷は $Q = T + Y/2$ という関係式と ϕ が電荷を持たないことから $Y = 1$ と定められる。 $D_\mu\phi$ は

$$\begin{aligned} D_\mu\phi &= \left(\partial_\mu - igW_\mu^a T^a - \frac{1}{2}ig'B_\mu \right) \phi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\partial_\mu - \frac{1}{2}ig \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}ig'B_\mu \right] \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-\frac{1}{2}ig \begin{pmatrix} (W_\mu^1 - iW_\mu^2)v \\ -W_\mu^3v \end{pmatrix} - \frac{1}{2}ig'B_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{iv}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -g(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ gW_\mu^3 - g'B_\mu \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.12)$$

となる。したがって、 $|D_\mu\phi|^2$ は (1.11) 式を用いれば

$$\begin{aligned} |D_\mu\phi|^2 &= \frac{v^2}{4} \left(-gW_\mu^-, \frac{1}{\sqrt{2}}(gW_\mu^3 - g'B_\mu) \right) \cdot \begin{pmatrix} -gW_\mu^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(gW_\mu^3 - g'B_\mu) \end{pmatrix} \\ &= \frac{g^2v^2}{4} W_\mu^+ W_\mu^- + \frac{v^2}{8} (gW_\mu^3 - g'B_\mu)^2 \end{aligned} \quad (1.13)$$

と計算される。ここで (1.9)、(1.10) 式から

$$\begin{aligned} gW_\mu^3 - g'B_\mu &= g(Z_\mu \cos \theta_W + A_\mu \sin \theta_W) - g'(-Z_\mu \sin \theta_W + A_\mu \cos \theta_W) \\ &= Z_\mu(g \cos \theta_W + g' \sin \theta_W) + A_\mu(g \sin \theta_W - g' \cos \theta_W) \end{aligned} \quad (1.14)$$

となるが、 $\sin \theta_W$ 、 $\cos \theta_W$ と g 、 g' の関係は

$$\sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + (g')^2}}, \quad \cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + (g')^2}} \quad (1.15)$$

で与えられる。(1.15) 式を用いれば、(1.14) 式は

$$gW_\mu^3 - g'B_\mu = \sqrt{g^2 + (g')^2} Z_\mu \quad (1.16)$$

と変形できる。 A_μ の項が消えた点は、電磁場が無質量であることを意味する。これより

$$|D_\mu\phi|^2 = \frac{g^2v^2}{4} W_\mu^+ W_\mu^- + \frac{(g^2 + (g')^2)v^2}{8} Z_\mu Z^\mu \quad (1.17)$$

と計算される。この式から W ボゾンと Z ボゾンの質量は

$$m_W = \frac{gv}{2}, \quad m_Z = \frac{\sqrt{g^2 + (g')^2}v}{2} \quad (1.18)$$

と読み取ることができる。

真空期待値のまわりで展開として以下のものが考えられる。

$$\phi = U(\zeta) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \varphi \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

ただし、 $U(\zeta) = \exp(i\tau^a \zeta^a / 2)$ であり、 τ^a は Pauli 行列である。この ζ^a はユニタリーゲージによってゲージ場の縦波成分に吸収される。ここで現れた φ がヒッグス場である。(1.19) 式で $|D_\mu\phi|^2$ を計算することで、ヒッグス場 φ と A_μ 、 Z_μ 、 W_μ^\pm の相互作用項が得られる。このようにスカラー場が真空期待値を持って対称性を自発的に破り、ゲージ場が質量を獲得する機構をヒッグス機構という。

ヒッグス機構後の電弱ゲージ理論の Lagrangian は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{EW} = & -\frac{1}{2}|\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+|^2 - \frac{1}{4}(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu)^2 - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 \\ & + W_\mu^+ W^{-\mu} \left(m_W + \frac{g}{2}\varphi\right)^2 + \frac{1}{2}Z_\mu Z^\mu \left(m_Z + \frac{\sqrt{g^2 + (g')^2}}{2}\varphi\right)^2 \\ & - \frac{1}{2}m_H^2 \varphi^2 - \lambda v \varphi^3 - \frac{1}{4}\lambda \varphi^4 + \dots\end{aligned}\quad (1.20)$$

である。ここで $m_H = \sqrt{2\lambda}v$ はヒッグス場の質量を表す。

1.4 フェルミオン

フェルミオンの Lagrangian は

$$\mathcal{L}_f = \sum_{\text{quarks}} i\bar{Q}_L \gamma^\mu D_\mu Q_L + \sum_{\text{quarks}} i\bar{q}_R \gamma^\mu D_\mu q_R + \sum_{\text{leptons}} i\bar{L}_L \gamma^\mu D_\mu L_L + \sum_{\text{leptons}} i\bar{l}_R \gamma^\mu D_\mu l_R \quad (1.21)$$

である。ただし、 D_μ は (1.6) 式である。また、

$$\psi_L = \frac{1 - \gamma^5}{2}\psi, \quad \psi_R = \frac{1 + \gamma^5}{2}\psi$$

である。レプトン二重項と一重項は

$$L_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}, \quad (1.22)$$

$$l_R = e_R, \nu_R, \tau_R \quad (1.23)$$

とし、クォーク二重項と一重項は

$$Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}, \quad (1.24)$$

$$u_R = u_R, c_R, t_R \quad (1.25)$$

$$d_R = d_R, s_R, b_R \quad (1.26)$$

と定義する。 q は $q = u, d, c, s, t, b$ を表す。フェルミオンの Lagrangian から、フェルミオンとゲージ場の相互作用項があることが分かる。

Yukawa coupling を記述する Lagrangian は

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -\bar{L}_L Y_l \phi \ell_R - \bar{Q}_L Y_u \tilde{\phi} u_R - \bar{Q}_L Y_d \phi d_R + \text{h.c.} \quad (1.27)$$

と表される。ここで

$$\tilde{\phi} = i\sigma^2 \phi^* = U(\zeta) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v + \varphi^* \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

である。ただし (1.19) 式と $\sigma^2 U(\zeta)^* \sigma^2 = U(\zeta)$ を用いた。 Y_l, Y_d, Y_u が Yukawa coupling である。

ヒッグス機構によって ϕ の部分が期待値を持ち、フェルミオンが質量を獲得する。特にクォークに関して、ユニタリ行列で質量固有状態へと持っていけば、クォークの質量が得られる。実際、

$$u_L \rightarrow U_{uL} u_L, \quad d_L \rightarrow U_{dL} d_L \quad (1.29)$$

$$u_R \rightarrow U_{uR} u_R, \quad d_R \rightarrow U_{dR} d_R \quad (1.30)$$

とユニタリー変換を施せば、(1.27) 式のうちクォークの質量項を取り出すと

$$\mathcal{L}_{\text{quark mass}} = -M_u(\bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L) - M_d(\bar{d}_L d_R + \bar{d}_R d_L) \quad (1.31)$$

と表せる。ここで

$$M_u = \frac{v}{\sqrt{2}} U_{uL}^\dagger Y_u U_{uR} = \text{diag}(m_u, m_c, m_t) \quad (1.32)$$

$$M_d = \frac{v}{\sqrt{2}} U_{dL}^\dagger Y_d U_{dR} = \text{diag}(m_d, m_s, m_b) \quad (1.33)$$

と対角化された形で書かれる。

1.5 ヒッグス場の質量補正

実際にヒッグス場の質量補正を標準模型の Lagrangian を用いて計算してみよう [4, 5, 6]。ヒッグス機構後の電弱ゲージ理論の Lagrangian は (1.20) 式である。一方で、Yukawa coupling の Lagrangian は (1.27) 式である。ヒッグス場の質量補正は次図 1.1 の 3 つが主な寄与である。フェルミオン場の寄与としてトップクォークのみを考える理由は、トップクォークの湯川結合定数が他のフェルミオンの湯川結合定数に比べて非常に大きく、他のフェルミオン場の寄与を無視できるからである。

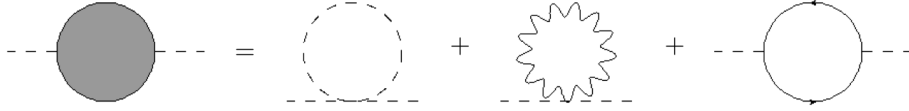


図 1.1: ヒッグス場の質量補正。右辺の第 1 項目からヒッグス場、ゲージ場、トップクォークの寄与

図 1.1 の右辺第 1 項目の寄与を I_1 とすると、

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{i\lambda}{4} \cdot 4! \int_0^\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m_H^2} \\ &\simeq -6i\lambda \frac{\Lambda^2}{16\pi^2} \end{aligned} \quad (1.34)$$

となる。ここで、 $4!$ は対称因子で、Wick 回転を施している。図 1.1 の右辺第 2 項目の寄与を I_2 とすると

$$\begin{aligned} I_2 &= 2! \cdot \frac{ig^2 \epsilon_{ij}}{4} \int_0^\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-i\epsilon^{ij}}{k^2 - m_W^2} + \frac{1}{2} \cdot 2! \cdot 2! \cdot \frac{i(g^2 + g'^2)\epsilon_{ij}}{8} \int_0^\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-i\epsilon^{ij}}{k^2 - m_Z^2} \\ &\simeq -i \frac{3g^2 + g'^2}{4} \frac{3\Lambda^2}{16\pi^2} \end{aligned} \quad (1.35)$$

である。ここで、 Z に関する補正に $1/2$ 倍が付くのは、運動項の係数の違いである。また、 ϵ_{ij} は偏極ベクトルの自由度を表す。図 1.1 の右辺第 3 項目の寄与を I_3 とすると

$$\begin{aligned} I_3 &\simeq (-1) \cdot 3 \cdot \left(-i \frac{y_t}{\sqrt{2}}\right)^2 \text{Tr} \int_0^\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\frac{ik}{k^2}\right)^2 \\ &= i \frac{3y_t^2}{2} \int_0^\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-k_\mu k_\nu \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu]}{k^4} \\ &= i \frac{3y_t^2}{2} \cdot 4 \int_0^\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \\ &\simeq 6iy_t^2 \frac{\Lambda^2}{16\pi^2} \end{aligned} \quad (1.36)$$

となる。1行目の最初の (-1) 倍はフェルミオンループから来る因子であり、次の3倍はカラーの自由度である。ここで $\text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}$ を用いた。以上より、 $-i\delta m_H^2 = I_1 + I_2 + I_3$ とすれば、

$$\delta m_H^2 = \frac{\Lambda^2}{16\pi^2} \left[6\lambda + \frac{9g^2 + 3g'^2}{4} - 6y_t^2 \right] \quad (1.37)$$

となる。

ヒッグス場の質量補正は有効ポテンシャルを用いても計算可能である [7, 8, 9]。有効ポテンシャルとは量子補正を含んだポテンシャル項を指し、有効ポテンシャルを場で2階微分すると場の質量補正が得られる。1-loop 有効ポテンシャルは一般にスカラー場を ϕ として

$$V_{\text{eff}}(\phi) = \frac{1}{2} \sum_I (-1)^{F_I} n_I \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \log[p^2 + M_I^2(\phi)] \quad (1.38)$$

である。ここで和は全てのボゾンとフェルミオンの自由度の和を表しており、ボゾンなら $F_I = 0$ 、フェルミオンなら $F_I = 1$ である。また n_I は場の自由度、 $M_I(\phi)$ は ϕ に依存する質量を表す。1-loop 有効ポテンシャルの紫外発散は $\log[p^2 + M_I^2(\phi)]$ を級数展開すれば表すことができる。具体的には

$$\begin{aligned} \log[p^2 + M_I^2(\phi)] &= \log p^2 + \log \left(1 + \frac{M_I^2(\phi)}{p^2} \right) \\ &= \log p^2 + \frac{M_I^2(\phi)}{p^2} + \dots \end{aligned} \quad (1.39)$$

を用いる。(1.38)式に(1.39)式を用いると、

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}(\phi) &= \frac{1}{2} \sum_I (-1)^{F_I} n_I \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[\log p^2 + \frac{M_I^2(\phi)}{p^2} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_I (-1)^{F_I} n_I \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \log p^2 + \frac{1}{2} \sum_I (-1)^{F_I} n_I M_I^2(\phi) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2} + \dots \end{aligned} \quad (1.40)$$

と変形できる。(1.40)式の第1項は ϕ に依らない定数項で宇宙項を表す。後に紹介する超対称性を考慮すれば、この宇宙項は落とすことができる。第2項がヒッグス場の質量補正を表す項である。以降、この項に着目する。

ヒッグス場の質量補正を計算する上で、ヒッグス場、ゲージ場、トップクォークの寄与を考慮した。有効ポテンシャルにおいてもこれらの場の寄与を考慮すると、

$$V_{\text{eff}}(\phi) \supset \left(m_H^2(\phi) + 3m_\chi^2(\phi) + 6m_W^2(\phi) + 3m_Z^2(\phi) - 12m_t^2(\phi) \right) \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2} \quad (1.41)$$

が得られる。ここで χ は南部-Goldstone ボゾンを表し、自由度は3である。これは(1.19)式をより一般的に記述した次の表式

$$\phi = U(\zeta) \begin{pmatrix} \chi_1 + \chi_2 \\ \frac{v + \phi + i\chi_3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

から現れる。有効ポテンシャルは全ての場の自由度を勘定しなければならないので、南部-Goldstone ボゾンも必要となる。各質量は(1.18)式、(1.32)式の真空期待値 v を場 ϕ に変えたものであり、

$$m_H^2(\phi) = 3\lambda\phi^2 - m^2, \quad (1.43)$$

$$m_\chi^2(\phi) = \lambda\phi^2 - m^2, \quad (1.44)$$

$$m_W^2(\phi) = \frac{g^2\phi^2}{4}, \quad (1.45)$$

$$m_Z^2(\phi) = \frac{(g^2 + (g')^2)\phi^2}{4}, \quad (1.46)$$

$$m_t^2(\phi) = \frac{y_t^2\phi^2}{2} \quad (1.47)$$

である。 $m_h^2(\phi)$ と $m_\chi^2(\phi)$ に関しては、 $V = m^2\phi^2/2 + \lambda^4\phi^4/4$ のポテンシャルから得られる質量を採用している。また各質量の前の係数は場の自由度を表す。積分を実行し、 V_{eff} を場 ϕ で 2 階微分すると、

$$\begin{aligned}\delta m_H^2 &= \left. \frac{\partial^2 V_{\text{eff}}(\phi)}{\partial \phi^2} \right|_{\phi=v} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Lambda^2}{16\pi^2} \left[6\lambda + 3 \cdot 2\lambda + 6 \cdot 2 \cdot \frac{g^2}{4} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{g^2 + (g')^2}{4} - 12 \cdot 2 \cdot \frac{y_t^2}{2} \right] \\ &= \frac{\Lambda^2}{16\pi^2} \left[6\lambda + \frac{9g^2 + 3g'^2}{4} - 6y_t^2 \right]\end{aligned}\quad (1.48)$$

と (1.37) 式と同様の結果を得る。以上の計算を 2-loop レベルで行なった文献が [10, 11] である。[10] では有効ポテンシャルを用いて計算しており、[11] では、標準模型の裸の結合定数の観点から裸のヒッグス質量の補正を計算し、2 次発散の寄与を導いている。

1.6 階層性問題の考察

階層性問題はヒッグス場のようなスカラー場に特有の問題である。この原因は対称性にある。フェルミオンやゲージ場は質量がゼロの極限で対称性を回復する。例えばフェルミオンは、 $m_f \rightarrow 0$ の極限でカイラル対称性が回復し、カイラル対称性がフェルミオンの質量を量子補正から保護してくれる。ゲージ場は $m_W, m_Z \rightarrow 0$ の極限でゲージ対称性が回復し、ゲージ対称性が量子補正から保護してくれる。しかし、スカラー場はカイラル対称性やゲージ対称性のような対称性はない。したがって、スカラー場は何かの対称性によって量子補正から保護されているわけではなく、2 次発散の問題が生じる。以下では、階層性問題を回避する考察をまとめる。

1.6.1 別の正則化の適用

前節のヒッグス場の質量補正は、運動量カットオフ Λ を入れた計算である。運動量カットオフで計算したために、質量補正が Λ^2 に比例した可能性がある。そこでこの計算を次元正則化で行えば、発散部分が $1/\epsilon$ となって問題が解決すると考えられる。だが、それでも階層性問題は解決されない。

例えば、TeV スケール以上にヒッグス場 ϕ と 4 点相互作用する複素スカラー場 S があったとする。 ϕ は対称性が破れて $\phi = \langle \phi \rangle + \varphi$ と考える。Lagrangian で言えば、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_S &= |\partial_\mu S|^2 - \lambda_S |\phi|^2 |S|^2 \\ &= |\partial_\mu S|^2 - m_S^2 |S|^2 - \lambda_S \langle \phi \rangle \varphi |S|^2 - \lambda_S \langle \phi \rangle \bar{\varphi} |S|^2 - \lambda_S |\varphi|^2 |S|^2\end{aligned}\quad (1.49)$$

である。ここで $m_S^2 \equiv \lambda_S \langle \phi \rangle^2$ である。(1.49) 式から 1-loop レベルの Feynman 図は 2 種類ある (図 1.2)。4 点相互作用の寄与を I_{S4} 、3 点相互作用の寄与を I_{S3} とし、簡単のためカットオフ正則化で計

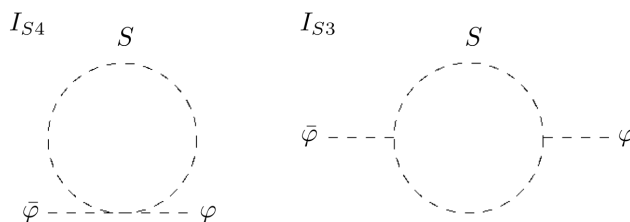


図 1.2: 複素スカラー場 S からのヒッグス場の質量補正。左図が I_{S4} 、右図が I_{S3} を表す。

算し、後で次元正則化と対応させる。まず I_{S4} の寄与は

$$\begin{aligned}
I_{S4} &= -i\lambda_S \int_0^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m_S^2} \\
&= -i\lambda_S \int_0^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + m_S^2} \quad (\text{Wick 回転}) \\
&= -\frac{i\lambda_S}{16\pi^2} \int_0^{\Lambda^2} \frac{xdx}{x + m_S^2} \quad (x = k^2) \\
&= -\frac{i\lambda_S}{16\pi^2} \int_{m_S^2}^{\Lambda^2 + m_S^2} \left(1 - \frac{m_S^2}{t}\right) dt \quad (x + m_S^2 = t) \\
&= -\frac{i\lambda_S}{16\pi^2} \left[\Lambda^2 - m_S^2 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{m_S^2}\right) \right] \tag{1.50}
\end{aligned}$$

と計算される。次に I_{S3} の寄与は

$$\begin{aligned}
I_{S3} &= (-i\lambda_S \langle \phi \rangle)^2 \int_0^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{k^2 - m_S^2} \right)^2 \\
&= i\lambda_S m_S^2 \int_0^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + m_S^2)^2} \quad (\text{Wick 回転}) \\
&= \frac{i\lambda_S m_S^2}{16\pi^2} \int_0^{\Lambda^2} \frac{xdx}{(x + m_S^2)^2} \quad (x = k^2) \\
&= \frac{i\lambda_S m_S^2}{16\pi^2} \int_{m_S^2}^{\Lambda^2 + m_S^2} \left(\frac{1}{t} - \frac{m_S^2}{t^2} \right) dt \quad (x + m_S^2 = t) \\
&= \frac{i\lambda_S m_S^2}{16\pi^2} \left[\ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{m_S^2}\right) + \frac{m_S^2}{\Lambda^2 + m_S^2} - 1 \right] \tag{1.51}
\end{aligned}$$

したがって、複素スカラー場 S の影響で生まれたヒッグス場の質量補正は I_{S4} と I_{S3} から

$$\delta m_H^2 = \frac{\lambda_S}{16\pi^2} \left[\Lambda^2 - 2m_S^2 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{m_S^2}\right) - \frac{m_S^4}{\Lambda^2 + m_S^2} + 1 \right] \tag{1.52}$$

となる。 $\Lambda \rightarrow \infty$ から右辺第3項は消え、最後の項が有限値を表す。カットオフ正則化と次元正則化の対応は $\Lambda^2 \leftrightarrow 1/\epsilon$ である。発散項を除去する相殺項を導入しても、 m_S^2 に比例する項が残り、 m_S^2 が TeV 以上のスケールになると必然的に δm_H^2 が大きくなる。結局、 m_S^2 が理論のカットオフの役割を担い、 m_S^2 が TeV スケールに比べて非常に大きいスケールであれば階層性問題は生じる。このことは新たにフェルミオンを導入しても同様の問題が起こる。したがって正則化の方法に依らず、ヒッグス場が新しい物理場と結合する時点で、階層性問題は避けられない問題である。

TeV スケール以上に新しい物理が無ければ、階層性問題も生じないが、少なくとも量子重力が有効な Planck スケールや、電磁相互作用、弱い相互作用、強い相互作用の3つの結合定数が統一されると想定される GUT スケールなど様々なスケールが想定されているので、新物理はあると考える方が自然である。

1.6.2 Veltman 条件

(1.37) 式は 1-loop レベルの質量補正であるが、もしこの式がゼロになれば、少なくとも 1-loop レベルでは階層性問題が現れないはずである。これが Veltman 条件である [8, 9]。具体的に、

$$6\lambda + \frac{9g^2 + 3g'^2}{4} - 6y_t^2 = 0 \tag{1.53}$$

が Veltman 条件である。ここで (1.18)、(1.32) 式と $m_H = \sqrt{2\lambda}v$ を用いれば、

$$m_H^2 + m_Z^2 + 2m_W^2 - 4m_t^2 = 0 \quad (1.54)$$

と変形できる。 $m_W = 80.4$ GeV、 $m_Z = 91.2$ GeV、 $m_t = 172$ GeV から $m_H = 311.6$ GeV となるが、観測値の 125 GeV とは異なる。したがって、観測値との整合性から Veltman 条件は適切ではない。また、仮に Veltman 条件が 1-loop レベルで適切であったとしても、2-loop レベル以上でもこのような条件が成り立つかは疑問であり、その意味でも Veltman 条件は微妙である。

1.6.3 スカラー場に関する対称性

階層性問題の解決法として、スカラー場にどのような対称性が課されるかを考察する必要がある。

1 つ目は超対称性である [12, 13]。ボゾンとフェルミオンの対称性を課することによって、ボゾンが寄与する質量補正とフェルミオンが寄与する質量補正が相殺する。これにより、ヒッグス場の質量補正が消えるという発想である。しかし、現実の粒子とペアになる超対称性粒子が加速器実験で発見されていない現状では、超対称性で階層性問題を説明するのは厳しい状況である。

2 つ目はゲージヒッグス統一理論である [14, 15]。これは高次元ゲージ場の余剰次元成分がヒッグス場であるという発想である。この理論の興味深い点は、高次元理論はくりこみ不可能な理論であるにも関わらず、少なくとも 1-loop レベルでは有効ポテンシャルが有限である点である。有効ポテンシャルが有限であることから、ヒッグス場の質量の有限に留まる [16]。しかし摂動の全次数で有効ポテンシャルが有限かどうかは非自明であり、近年でも議論がなされている [17]。

3 つ目は古典的スケール不変性である [18, 19]。元々の議論は Bardeen[20] に端を発し、古典的スケール不変性、すなわち $x^\mu \rightarrow \lambda x$ 、 $\phi \rightarrow \lambda^{-\Delta}\phi$ の変換のもとで理論が不変であること要求すると、スカラー場の質量項が禁止される。この対称性により、スカラー場であるヒッグス粒子の質量が保護されているという考え方である。この議論はくりこみ群とも深く関連する。

4 つ目は pseudo NG ヒッグスである [21]。これは global 対称性が自発的に破れて pseudo NG ボゾンがヒッグス場になるという発想である。global 対称性は上記の 2 つ目と 3 つ目にも関わっており、絡めて考察することも可能である。

本研究では、4 つ目の pseudo NG ボゾンがヒッグス場になるという立場で考察する。具体的には、6 次元場の理論を考察し、余剰次元は背景磁場を含むトーラスにコンパクト化する。ゲージ場の余剰次元成分をスカラー場とみなし、トーラスの並進対称性の自発的破れによってスカラー場が NG ボゾンとなり、質量補正が消えることを示す。また、その相殺が特徴的であることも言及する。

第2章 Flux compactification

flux compactification とは、背景磁場が含まれる余剰次元空間をコンパクト化することを指す。ここで背景磁場とは、ゲージ場の余剰次元成分が生み出す磁場のことである。背景磁場を含む余剰次元理論は、標準模型では説明不可能な湯川結合定数及びフェルミオンの質量階層性の説明 [22] や、標準模型の世代数の予言 [23] が可能である。また背景磁場が含まれることで超対称性の破れ [24] も議論でき、魅力的な理論である。この章では、flux compactification の設定について具体的に見ていく。

2.1 磁場中の荷電粒子

flux compactification を見る前に、磁場中の荷電粒子の量子力学を思い出そう [25, 26]。一様な磁場中 B を質量 m 、電荷 e の荷電粒子が運動しているとき、2次元 Hamiltonian は

$$H = \frac{1}{2m} \left\{ (p_x - eA_x(x, y))^2 + (p_y - eA_y(x, y))^2 \right\} \quad (2.1)$$

と表される。量子力学では $p_x = -i\partial_x$ 、 $p_y = -i\partial_y$ なので、(2.1) 式は

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m} \left\{ (-i\partial_x - eA_x(x, y))^2 + (-i\partial_y - eA_y(x, y))^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2m} \left\{ (iD_x)^2 + (iD_y)^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.2)$$

と書き直せる。ここで、 $D_i = \partial_i - ieA_i (i = x, y)$ であり、2次元中の共変微分を表す。(2.2) 式は調和振動子のハミルトニアンと類似している。そこで、 iD_x と iD_y の交換関係を計算すると、

$$\begin{aligned} [iD_x, iD_y] &= ie(\partial_x A_y - \partial_y A_x) \\ &= ieB \end{aligned} \quad (2.3)$$

となる。ただし磁場 B が $B = \partial_x A_y - \partial_y A_x$ で表せることを用いた。 eB で規格化すれば、交換関係 (2.3) は

$$[Q, P] = i, \quad Q \equiv \frac{iD_x}{\sqrt{eB}}, \quad P \equiv \frac{iD_y}{\sqrt{eB}} \quad (2.4)$$

と表せる。生成消滅演算子を

$$a \equiv \frac{Q + iP}{\sqrt{2}}, \quad a^\dagger \equiv \frac{Q - iP}{\sqrt{2}} \quad (2.5)$$

と定義すれば、Hamiltonian は

$$H = \omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad (2.6)$$

と書き直せる。ただし、 $\omega = \frac{eB}{m}$ であり、サイクロトロン振動数と呼ばれる。系のエネルギー準位は $\omega(n + \frac{1}{2})$ と離散化される。これを Landau 準位と呼ぶ。

ここまでエネルギー固有値を議論してきたが、次は運動量固有値に着目する。ここでは簡単のため、(2.1) 式において、次のようなゲージ場 (Landau ゲージ)

$$A_x = 0, \quad A_y = Bx \quad (2.7)$$

を選ぶ。すると、(2.1) 式は

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m} \left\{ p_x^2 + (k_y - eBx)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2m} \left\{ p_x^2 + e^2 B^2 \left(x - \frac{k_y}{eB} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.8)$$

と表される。ただし p_y の固有値を k_y とした。この p_y の固有値 k_y はエネルギー固有値とは無関係の任意の量である。それでは取り扱いづらいため、 x 方向の長さを L_x 、 y 方向の長さを L_y とする周期境界条件を課す。これはトーラスの周期境界条件と同じ状況であることに注意である。 y 方向の周期境界条件から、

$$k_y = \frac{2\pi}{L_y} l \quad (l \in \mathbb{Z}) \quad (2.9)$$

と離散化される。一方で、(2.8) 式から x 方向の波動関数の中心は k_y/eB だと分かる。この波動関数の中心の位置が 0 と L_x の間にあるためには、

$$0 \leq \frac{1}{eB} \frac{2\pi}{L_y} l \leq L_x$$

を満たす必要がある。この式を変形すると、

$$0 \leq l \leq \frac{eBL_x L_y}{2\pi}$$

を満たすことを意味する。したがって縮退数 N は

$$N = \frac{eB}{2\pi} L_x L_y \quad (2.10)$$

と表される。

縮退数 N が離散化されていることを見るために、波動関数 $\psi(x)$ のゲージ変換を考える。その形は

$$\psi'(x) = e^{i\chi} \psi(x) \quad (2.11)$$

である。ただし、 χ はゲージ変換 $A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi$ の自由度である。磁場が存在する領域の上の経路 C_1 と下の経路 C_2 で、波動関数が取りうる位相差 $\exp[ie(\chi_{C_1} - \chi_{C_2})]$ が生じる。経路 C_1 と経路 C_2 中には、磁場は存在しないので、

$$\begin{aligned} \chi_{C_1} - \chi_{C_2} &= \int_{C_1} A(s) \cdot ds - \int_{C_2} A(s) \cdot ds \\ &= \oint A(s) \cdot ds = \int B \cdot dS \\ &= \Phi = BL_x L_y \end{aligned} \quad (2.12)$$

と書ける。2 行目の 2 つ目の等式に関して Stokes の定理を用いた。 Φ は磁束であり、波動関数の 1 価性を課すと、

$$eBL_x L_y = 2\pi N \quad (N \in \mathbb{Z}) \quad (2.13)$$

が得られる。このことから縮退数 N は離散化されている。

2.2 6次元 flux compactification

6次元 flux compactification の基礎を解説する [22, 27, 28]。全空間が Minkowski 空間 M^4 と 2次元トーラス T^2 の直積空間 $M^4 \times T^2$ であるとする。添字は

$$\begin{aligned} M &= 0, 1, 2, 3, 5, 6 \\ \mu &= 0, 1, 2, 3 \quad (\text{non compact}) \\ m, n &= 5, 6 \quad (\text{compact}) \end{aligned}$$

とする。計量は $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$ を採用する。flux は余剰次元空間 T^2 内に存在すると考える。この状況を実現するために、次のようなゲージ場 (対称ゲージ) を選ぶ。

$$A_5 = -\frac{1}{2}fx_6, \quad A_6 = \frac{1}{2}fx_5, \quad F_{56} = \partial_5 A_6 - \partial_6 A_5 = f \quad (2.14)$$

トーラスの面積あたりの縮退度は

$$\frac{q}{2\pi} \int_{T^2} F = \frac{q}{2\pi} \int_{T^2} dx_5 dx_6 F_{56} = \frac{q}{2\pi} f \in \mathbb{Z} \quad (2.15)$$

である。ただしトーラスの面積を 1 としている。これは (2.10) 式と本質的に同じである。

簡単な例として、6次元荷電スカラー場の運動項

$$S_6 = \int d^6x (-D_M \bar{\phi} D^M \phi) \quad (2.16)$$

を考える。ただし、 $D_M = \partial_M - igA_M$ である。これらを Minkowski 時空の 4次元とトーラスの 2次元に分解すると、

$$S_6 = \int d^6x (-\eta^{\mu\nu} D_\mu \bar{\phi} D_\nu \phi - D_5 \bar{\phi} D_5 \phi - D_6 \bar{\phi} D_6 \phi) \quad (2.17)$$

となる。このうち第 2, 3 項に着目する。ここで $D_5 \bar{\phi}$ と $D_5 \phi$ に注意する。ここでは $\bar{\phi}$ の共変微分を D_m^* と区別して書く。

$$\begin{aligned} -D_5^* \bar{\phi} D_5 \phi - D_6^* \bar{\phi} D_6 \phi &= -(\partial_5 + igA_5) \bar{\phi} D_5 \phi - (\partial_6 + igA_6) \bar{\phi} D_6 \phi \\ &\simeq \bar{\phi} (\partial_5 - igA_5) D_5 \phi + \bar{\phi} (\partial_6 - igA_6) D_6 \phi \\ &= -\bar{\phi} (-D_5^2 - D_6^2) \phi \\ &\equiv -\bar{\phi} H_2 \phi \end{aligned}$$

ただし、第 2 行目では表面項を境界条件によって落としている。この H_2 は、量子力学的調和振動子で

$$p = iD_6, \quad x = iD_5, \quad m = \frac{1}{2}, \quad \omega = 2$$

と置き換えれば前節の議論がそのまま適用できる。生成消滅演算子は前節を参考にすると

$$a = \sqrt{\frac{1}{2gf}} (iD_5 - D_6), \quad (2.18)$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{1}{2gf}} (iD_5 + D_6), \quad (2.19)$$

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad (2.20)$$

と定義される。これを用いれば

$$\begin{aligned} H_2 &= 2gfa^\dagger a - qf \\ &= 2gf \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

と書ける。前節と同様に、(2.21) 式は Landau 準位となり、 ϕ の質量スペクトルに対応する。

Landau 準位を n 、縮退数を j ($j = 0, 1, \dots, N-1$) とする。コンパクト空間のモード関数を $\xi_{n,j}$ と書くと、最低次の真空は

$$a\xi_{0,j} = 0, \quad a^\dagger\bar{\xi}_{0,j} = 0 \quad (2.22)$$

と表される。生成消滅演算子を使えば、

$$\xi_{n,j} = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n \xi_{0,j}, \quad \bar{\xi}_{n,j} = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a)^n \bar{\xi}_{0,j} \quad (2.23)$$

となり、直交関係は

$$\int_{T^2} d^2x \bar{\xi}_{\bar{n},\bar{j}} \xi_{n,j} = \delta_{n,\bar{n}} \delta_{j,\bar{j}} \quad (2.24)$$

と表せる。

Landau 準位と縮退数を用いて、Kaluza-Klein 展開 (KK 展開) を行くと、

$$\phi = \sum_{n,j} \phi_{n,j}(x_\mu) \xi_{n,j}(x_m) = \sum_{n,j} \phi_{n,j}(x_\mu) \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n \xi_{0,j}(x_m), \quad (2.25)$$

$$\bar{\phi} = \sum_{n,j} \bar{\phi}_{n,j}(x_\mu) \bar{\xi}_{n,j}(x_m) = \sum_{n,j} \bar{\phi}_{n,j}(x_\mu) \frac{1}{\sqrt{n!}} (a)^n \bar{\xi}_{0,j}(x_m) \quad (2.26)$$

となる。この展開式を用いると、4次元有効作用として

$$S_4 = \int d^4x \sum_{n,j} \left(-D_\mu \bar{\phi}_{n,j} D^\mu \phi_{n,j} - (2gf) \left(n + \frac{1}{2} \right) \bar{\phi}_{n,j} \phi_{n,j} \right) \quad (2.27)$$

が得られる。

第3章 6次元量子電磁気学

我々の時空は4次元である。6次元の理論を出発点としたとき、残りの2次元はコンパクト化されており、コンパクト空間の積分を実行して4次元有効 Lagrangian を得る必要がある。3章では、6次元の理論に U(1) ゲージ場とスカラー場、またはフェルミオンが含まれる場合を議論する。まず6次元ゲージ場の Lagrangian を変形し、ゲージ場の余剰次元成分をスカラー場として取り扱う。次にスカラー場、またはフェルミオンについて、flux なしの場合と flux ありの場合で比較する。この章は主に [27, 28, 29] の解説である。

3.1 ゲージ場

6次元ゲージ場の作用は

$$\begin{aligned} S_{6g} &= \int d^6x \left(-\frac{1}{4} F^{MN} F_{MN} \right) \\ &= \int d^6x \left(-\frac{1}{4} \right) \left\{ F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + 2(F^{\mu 5} F_{\mu 5} + F^{\mu 6} F_{\mu 6} + F^{56} F_{56}) \right\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

と変形できる。ただし、 $F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M$ である。ここで、

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_6 + iA_5), \quad z = \frac{1}{2}(x_5 + ix_6), \quad \partial = \partial_5 - i\partial_6 \quad (3.2)$$

と定義する。これより、

$$\begin{aligned} F_{\mu 5}^2 + F_{\mu 6}^2 &= -\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi - \partial_\mu \bar{\phi})^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi + \partial_\mu \bar{\phi})^2 \\ &\quad + \frac{i}{\sqrt{2}}(\partial_\mu \phi - \partial_\mu \bar{\phi})(\partial A^\mu + \bar{\partial} A^\mu) - \frac{i}{\sqrt{2}}(\partial_\mu \phi + \partial_\mu \bar{\phi})(\partial A^\mu - \bar{\partial} A^\mu) \\ &\quad + \frac{1}{4}(\partial A_\mu + \bar{\partial} A_\mu)^2 - \frac{1}{4}(\partial A_\mu - \bar{\partial} A_\mu)^2 \\ &\simeq 2\partial_\mu \bar{\phi} \partial^\mu \phi - \frac{2i}{\sqrt{2}}(\partial \bar{\phi} - \bar{\partial} \phi) \partial_\mu A^\mu + \bar{\partial} A^\mu \partial A_\mu, \\ F_{56}^2 &= \frac{1}{2}(\partial \bar{\phi} + \bar{\partial} \phi)^2 \end{aligned}$$

と計算される。したがって、

$$\begin{aligned} S_{6g} &= \int d^6x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \partial^\mu \bar{\phi} \partial_\mu \phi - \frac{1}{4}(\partial \bar{\phi} + \bar{\partial} \phi)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \bar{\partial} A^\mu \partial A_\mu - \frac{i}{\sqrt{2}} \partial_\mu A^\mu (\bar{\partial} \phi - \partial \bar{\phi}) \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

となる。このゲージ場の作用には場の2次までが含まれていることに注意である。すなわち、ゲージ場 A_μ とスカラー場 ϕ の3次以上の相互作用項は含まれていない。背景 flux のまわりで ϕ を展開すると、

$$\phi = \frac{f}{\sqrt{2}} \bar{z} + \varphi \quad (3.4)$$

となる。 φ は量子ゆらぎである。(3.4) 式を (3.3) 式に適用すると、

$$S_{6g} = \int d^6x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \partial^\mu \bar{\varphi} \partial_\mu \varphi - \frac{1}{4} (\partial \bar{\varphi} + \bar{\partial} \varphi)^2 - \frac{1}{2} f^2 \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \bar{\partial} A^\mu \partial A_\mu - \frac{i}{\sqrt{2}} \partial_\mu A^\mu (\partial \bar{\varphi} - \bar{\partial} \varphi) \right) \quad (3.5)$$

と、 A_μ と φ の観点で作用を書き下すことができる。

3.2 スカラー場

6次元スカラー QED を念頭におき、2.2 節で考えた作用

$$S_{6s} = \int d^6x \left(-(D_M \Phi)^* D^M \Phi \right) \\ = \int d^6x \left(-(D_\mu \Phi)^* D^\mu \Phi - (D_m \Phi)^* D^m \Phi \right) \quad (3.6)$$

を考える。このうち特に第 2 項について考える。(3.4) 式を踏襲し、 $A_{5,6} = \langle A_{5,6} \rangle + a_{5,6}$ と書き、

$$\frac{f}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle A_6 \rangle + i \langle A_5 \rangle), \quad \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_6 + i a_5)$$

と書くことにする。すると、

$$D_5 \Phi = \mathcal{D}_5 \Phi - i g a_5 \bar{\Phi}, \quad (3.7)$$

$$D_6 \Phi = \mathcal{D}_6 \Phi - i g a_6 \bar{\Phi} \quad (3.8)$$

と表される。共変微分 $\mathcal{D}_{5,6}$ は $A_{5,6}$ を $\langle A \rangle_{5,6}$ に変えたもので、2.2 節で用いた共変微分に対応する。これより、

$$-(D_m \Phi)^* D^m \Phi = -(\mathcal{D}_5^* \bar{\Phi} + i g a_5 \bar{\Phi})(\mathcal{D}_5 \Phi - i g a_5 \bar{\Phi}) - (\mathcal{D}_6^* \bar{\Phi} + i g a_6 \bar{\Phi})(\mathcal{D}_6 \Phi - i g a_6 \bar{\Phi}) \\ = -\mathcal{D}_5^* \bar{\Phi} \mathcal{D}_5 \Phi - \mathcal{D}_6^* \bar{\Phi} \mathcal{D}_6 \Phi + i g a_5 (\mathcal{D}_5^* \bar{\Phi}) \Phi - i g a_5 \bar{\Phi} \mathcal{D}_5 \Phi + i g a_6 (\mathcal{D}_6^* \bar{\Phi}) \Phi - i g a_6 \bar{\Phi} \mathcal{D}_6 \Phi \\ - g^2 a_5^2 \bar{\Phi} \Phi - g^2 a_6^2 \bar{\Phi} \Phi$$

と変形できる。このうち第 1、2 項目は 2.2 節で得た Landau 準位と同じである。第 3、5 項目は部分積分を行うことにより第 4、6 項目と同じになる。第 4、6 項目を 2.2 節で定義した生成消滅演算子と φ 、 $\bar{\varphi}$ で表すと、

$$-i g a_5 \bar{\Phi} \mathcal{D}_5 \Phi - i g a_6 \bar{\Phi} \mathcal{D}_6 \Phi = -\frac{i g}{\sqrt{2}} \left[(\varphi + \bar{\varphi}) \bar{\Phi} \mathcal{D}_6 \Phi - i (\varphi - \bar{\varphi}) \bar{\Phi} \mathcal{D}_5 \Phi \right] \\ = -i g \sqrt{g f} \bar{\varphi} \bar{\Phi} a^\dagger \Phi + i g \sqrt{g f} \varphi \bar{\Phi} a \Phi$$

となる。2 行目の項に関しても φ 、 $\bar{\varphi}$ で表すと、

$$-g^2 a_5^2 \bar{\Phi} \Phi - g^2 a_6^2 \bar{\Phi} \Phi = -2g^2 \bar{\varphi} \varphi \bar{\Phi} \Phi \quad (3.9)$$

となる。以上より、

$$-(D_m \Phi)^* D^m \Phi = -\bar{\Phi} H_2 \Phi - 2i g \sqrt{g f} \bar{\varphi} \bar{\Phi} a^\dagger \Phi + 2i g \sqrt{g f} \varphi \bar{\Phi} a \Phi - 2g^2 \bar{\varphi} \varphi \bar{\Phi} \Phi \quad (3.10)$$

となる。したがって、

$$S_{6s} = \int d^6x \left(-(D_\mu \Phi)^* D^\mu \Phi - \bar{\Phi} H_2 \Phi \right. \\ \left. - \sqrt{2} i g \sqrt{2 g f} \bar{\varphi} \bar{\Phi} a^\dagger \Phi + \sqrt{2} i g \sqrt{2 g f} \varphi \bar{\Phi} a \Phi - 2g^2 \bar{\varphi} \varphi \bar{\Phi} \Phi \right) \quad (3.11)$$

が得られる。ただし後の計算の都合上、 $2i g \sqrt{g f} = \sqrt{2} i g \sqrt{2 g f}$ とした。

3.3 フェルミオン

作用のうち、フェルミオンの部分を考え以下のように変形する。

$$\begin{aligned} S_{6f} &= \int d^6x i \bar{\Psi} \Gamma^M D_M \Psi \\ &= \int d^6x i (\bar{\Psi} \Gamma^\mu D_\mu \Psi + \bar{\Psi} \Gamma^5 D_5 \Psi + \bar{\Psi} \Gamma^6 D_6 \Psi). \end{aligned} \quad (3.12)$$

(3.12) 式の右辺第 2 項目と第 3 項目を変形する。6 次元のガンマ行列の記法と計算の詳細は付録 A で要約するとし、結果だけを記すと

$$\begin{aligned} i(\bar{\Psi} \Gamma^5 D_5 \Psi + \bar{\Psi} \Gamma^6 D_6 \Psi) &= -\chi D_5 \psi + \bar{\psi} D_5 \bar{\chi} + i(\chi D_6 \psi + \bar{\psi} D_6 \bar{\chi}) \\ &\simeq -\chi(\partial - \sqrt{2}g\phi)\psi - \bar{\chi}(\bar{\partial} - \sqrt{2}g\bar{\phi})\bar{\psi} \end{aligned} \quad (3.13)$$

である。ここで ψ は電荷 $-g$ 、 χ は電荷 $+g$ を持つ 2 成分 fermion である。また 2 行目に移る際、部分積分を施した。以上より、フェルミオンの作用は

$$\begin{aligned} S_{6f} &= \int d^6x \left(-i\psi\sigma^\mu \bar{D}_\mu \bar{\psi} - i\chi\sigma^\mu D_\mu \bar{\chi} \right. \\ &\quad \left. - \chi(\partial - \sqrt{2}g\phi)\psi - \bar{\chi}(\bar{\partial} - \sqrt{2}g\bar{\phi})\bar{\psi} \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

と書き表される。(3.4) 式を用いると、(3.14) 式は

$$\begin{aligned} S_{6f} &= \int d^6x \left(-i\psi\sigma^\mu \bar{D}_\mu \bar{\psi} - i\chi\sigma^\mu D_\mu \bar{\chi} \right. \\ &\quad \left. - \chi(\partial - gf\bar{z} - \sqrt{2}g\varphi)\psi - \bar{\chi}(\bar{\partial} - gfbz - \sqrt{2}g\bar{\varphi})\bar{\psi} \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

と書き直される。

3.4 質量補正：flux なし、スカラー場の場合

flux ありの場合の質量補正と比較するため、flux がない場合の有効 Lagrangian を求め、 φ の質量補正を計算する。flux がない場合、スカラー場の KK 展開は

$$\Phi = \sum_{n,m} \Phi_{n,m}(x^\mu) \lambda_{n,m}(x^m) \quad (3.16)$$

である。 n, m は整数で、コンパクト空間のモード関数 $\lambda_{n,m}(x_m)$ はトーラスの周期条件から

$$\lambda_{n,m}(x_m) = \frac{1}{L} \exp \left[\frac{2\pi i}{L} (nx_5 + mx_6) \right] \quad (3.17)$$

と表される。(2.24) 式のような直交条件は $\lambda_{n,m}(x_m)$ にも適用される。flux がない場合、共変微分 $D_{5,6}$ は通常の偏微分 $\partial_{5,6}$ となる。このことに注意して (3.3)、(3.11)、(3.16) 式を用い、 φ のゼロモードが余剰次元の座標に依らないとすると (以降、 φ はゼロモードの意味で記述する)、4 次元有効作用は

$$\begin{aligned} S_4 &= \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \partial_\mu \bar{\varphi} \partial^\mu \varphi \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n,m} \left(- (D_\mu \Phi_{n,m})^* D^\mu \Phi_{n,m} - |M_{n,m}|^2 \bar{\Phi}_{n,m} \Phi_{n,m} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sqrt{2}ig \bar{M}_{n,m} \varphi \bar{\Phi}_{n,m} \Phi_{n,m} - \sqrt{2}ig M_{n,m} \bar{\varphi} \bar{\Phi}_{n,m} \Phi_{n,m} - 2g^2 \bar{\varphi} \varphi \bar{\Phi}_{n,m} \Phi_{n,m} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

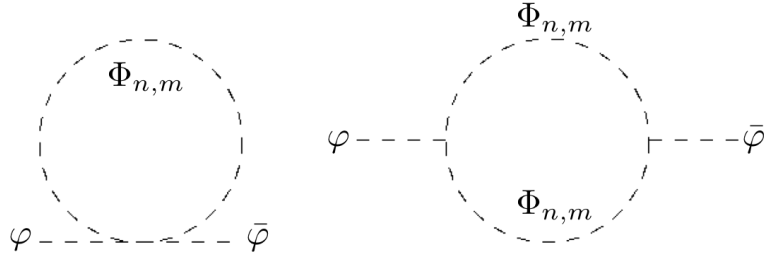


図 3.1: ボゾン場の寄与

となる。ただし $M_{n,m} = 2\pi(m + in)/L$ である。

この作用から、 φ の質量補正を計算できる。ボゾンの寄与として図 3.1 が考えられる。そのうち 4 点相互作用で作られる寄与を計算すると、

$$\begin{aligned}
 (\text{図 3.1 左}) &= -i2g^2 \sum_{n,m} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-i}{k^2 + |M_{n,m}|^2} \\
 &= -i2g^2 \sum_{n,m} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + |M_{n,m}|^2} \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

となる。ただし最後の等式で Wick 回転を施した。同様に 3 点相互作用で作られる寄与を計算すると、

$$\begin{aligned}
 (\text{図 3.1 右}) &= \sum_{n,m} (-\sqrt{2g}\bar{M}_{n,m})(\sqrt{2g}M_{n,m}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{-i}{k^2 + |M_{n,m}|^2} \right\}^2 \\
 &= +i2g^2 \sum_{n,m} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{|M_{n,m}|^2}{(k^2 + |M_{n,m}|^2)^2} \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

となる。ただし最後の等式で Wick 回転を施した。これより質量補正の寄与は

$$\begin{aligned}
 \delta m_b^2 &= 2g^2 \sum_{n,m} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{k^2 + |M_{n,m}|^2} - \frac{|M_{n,m}|^2}{(k^2 + |M_{n,m}|^2)^2} \right) \\
 &= 2g^2 \sum_{n,m} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{(k^2 + |M_{n,m}|^2)^2} \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

である。ただし図 3.1 左、右の寄与を i 倍し足したものを δm_b^2 としている。この計算の続きは次節に行う。

3.5 質量補正：flux なし、フェルミオンの場合

スカラー場のとくと同様に、フェルミオンを理論に含み flux がない場合の有効 Lagrangian を求め、 φ の質量補正を計算する。flux がない場合、KK 展開は

$$\psi = \sum_{n,m} \psi_{n,m}(x_\mu) \lambda_{n,m}(x_m), \quad (3.22)$$

$$\chi = \sum_{n,m} \chi_{n,m}(x_\mu) \bar{\lambda}_{n,m}(x_m) \quad (3.23)$$

である。 n, m は整数で、コンパクト空間のモード関数 $\lambda_{n,m}(x_m)$ は (3.17) 式と同様である。と表される。(3.3)、(3.14)、(3.22)、(3.23) 式を用いると、4次元有効作用は

$$S_4 = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \partial^\mu \bar{\varphi} \partial_\mu \varphi - \frac{1}{2} f^2 \right. \\ \left. + \sum_{n,m} \left(-i\psi_{n,m} \sigma^\mu \bar{D}_\mu \bar{\psi}_{n,m} - i\chi_{n,m} \sigma^\mu D_\mu \bar{\chi}_{n,m} \right. \right. \\ \left. \left. - (M_{n,m} - \sqrt{2}g\varphi)\chi_{n,m}\psi_{n,m} - (\bar{M}_{n,m} - \sqrt{2}g\varphi)\bar{\chi}_{n,m}\bar{\psi}_{n,m} \right) \right) \quad (3.24)$$

と表される。ただし、 $M_{n,m} = 2\pi(m + in)/L$ である。

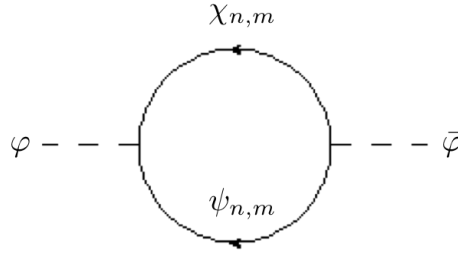


図 3.2: フェルミオン場の寄与

この作用から、 φ の質量補正を計算できる。フェルミオンの寄与として、図 3.2 が考えられる。この寄与を計算すると、

$$\begin{aligned} (\text{図 3.2}) &= (-1) \times (i\sqrt{2}g)(i\sqrt{2}g) \sum_{n,m} \text{Tr} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{ik \cdot \sigma}{k^2 + |M_{n,m}|^2} \right) \left(\frac{-i(-k) \cdot \bar{\sigma}}{(-k)^2 + |M_{n,m}|^2} \right) \\ &= +i4g^2 \sum_{n,m} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{(k^2 + |M_{n,m}|^2)^2} \end{aligned} \quad (3.25)$$

となる。ここでフェルミオンの propagator に関して、2成分の場合の propagator を適用している。2成分の場合のフェルミオンの propagator の規則については、計量の符号による相違点も含めて付録 B を参照。また計算の途中で $\text{Tr}[\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu] = -2g^{\mu\nu}$ を用いたり、Wick 回転を施している。したがって、質量補正の寄与は

$$\delta m_f^2 = -4g^2 \sum_{n,m} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{(k^2 + |M_{n,m}|^2)^2} \quad (3.26)$$

である。(3.21) 式とは $\delta m_f^2 = -2\delta m_b^2$ の関係が成り立っていることに注意である¹。Schwinger 表示²を用いて δm_f^2 の計算を進めると、

$$\begin{aligned} \delta m_f^2 &= -4g^2 \sum_{n,m} \int_0^\infty dt \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} k^2 e^{-t(k^2 + |M_{n,m}|^2)} \\ &= -\frac{g^2}{2\pi^2} \sum_{n,m} \int_0^\infty \frac{dt}{t^2} e^{-|M_{n,m}|^2 t} \\ &= -\frac{g^2}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{dt}{t^2} \Theta_3 \left(0; \frac{4\pi i t}{L^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.27)$$

¹超対称性を課すと、ボゾンとフェルミオンの質量補正が相殺する [27]。

²付録 C 参照。

ここで (3.27) 式の 3 行目に現れている $\Theta_3(z; \tau)$ は Jacobi テータ関数³であり、 $M_{n,m}$ に注意すると

$$\Theta_3\left(0; \frac{4\pi it}{L^2}\right)^2 = \sum_{n,m} e^{-4\pi(n^2+m^2)t/L^2} = \sum_{n,m} e^{-|M_{n,m}|^2 t} \quad (3.28)$$

となる。このように書いたのはモジュラー変換のもとでの変換式を使いたいからである。ここで用いるモジュラー変換は、

$$\Theta_3(0; \tau) = (-i\tau)^{-1/2} \Theta_3\left(0; -\frac{1}{\tau}\right)$$

のことである。これを用いれば

$$\begin{aligned} \delta m_f^2 &= -\frac{g^2}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{dt}{t^2} \Theta_3\left(0; \frac{4\pi it}{L^2}\right)^2 \\ &= -\frac{g^2}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{dt}{t^2} \left(-i\frac{4\pi it}{L^2}\right)^{-1} \Theta_3\left(0; \frac{iL^2}{4\pi t}\right)^2 \\ &= -\frac{g^2 L^2}{8\pi^3} \int_0^\infty \frac{dt}{t^3} \Theta_3\left(0; \frac{iL^2}{4\pi t}\right)^2 \\ &= -\frac{g^2 L^2}{8\pi^3} \int_0^\infty duu \Theta_3\left(0; \frac{iL^2 u}{4\pi}\right)^2 \end{aligned} \quad (3.29)$$

となる。(3.28) 式を再び用いれば、

$$\begin{aligned} \delta m_f^2 &= -\frac{g^2 L^2}{8\pi^3} \sum_{r,s} \int_0^\infty duu \exp\left[-\frac{L^2 u}{4}(r^2 + s^2)\right] \\ &= -\frac{2g^2}{\pi^3 L^2} \sum_{r,s} \frac{1}{(r^2 + s^2)^2} \end{aligned} \quad (3.30)$$

と計算される。 δm_f^2 は $r=0, s=0$ で発散する。この発散部分を取り除けば、 δm_f^2 は有限な値となる。実際、発散項である $(r,s) = (0,0)$ を除いて数値的に計算すると、

$$\delta m_f^2 \approx -0.39 \times \frac{g^2}{L^2} \quad (3.31)$$

となり、確かに有限値が得られる [30]。[27] では、1-loop 有効ポテンシャルを導出し、(3.30) 式と同じ δm_f^2 を得ることを示している⁴。この議論については、一般公式も含めて付録 C に要約する。

3.6 質量補正：flux あり、スカラー場の場合

flux がある場合、KK 展開は 2 章で現れたコンパクト次元の場 $\xi_{n,j}$ を用いて展開する。スカラー場の場合、(2.25) 式より

$$\Phi = \sum_{n,j} \Phi_{n,j}(x^\mu) \xi_{n,j}(x^m) \quad (3.32)$$

となる。量子力学で見られるように、コンパクト次元のモード関数 $\xi_{n,j}$ と生成消滅演算子 a, a^\dagger は次の関係式

$$a \xi_{n,j} = \sqrt{n} \xi_{n-1,j}, \quad a^\dagger \xi_{n,j} = \sqrt{n+1} \xi_{n+1,j} \quad (3.33)$$

³付録 D 参照。

⁴[27] と若干記法が異なることに注意。

を満たす。KK 展開 (3.32) 式と関係式 (3.33) を用いれば、(3.11) 式の 2 行目第 1 項、第 2 項は

$$-\sqrt{2ig}\sqrt{2gf}\bar{\varphi}\bar{\Phi}a^\dagger\Phi = -\sqrt{2ig}\sqrt{2gf}\bar{\varphi}\sum_{n,j}\sum_{n',j'}\sqrt{n+1}\bar{\Phi}_{n',j'}\Phi_{n,j}\bar{\xi}_{n',j'}\xi_{n+1,j}, \quad (3.34)$$

$$\sqrt{2ig}\sqrt{2gf}\bar{\varphi}\bar{\Phi}a\Phi = \sqrt{2ig}\sqrt{2gf}\bar{\varphi}\sum_{n,j}\sum_{n',j'}\sqrt{n}\bar{\Phi}_{n',j'}\Phi_{n,j}\bar{\xi}_{n',j'}\xi_{n-1,j} \quad (3.35)$$

と変形できる。コンパクト空間の積分を行うと、4 次元有効作用は

$$\begin{aligned} S_4 = \int d^4x & \left(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \partial_\mu\bar{\varphi}\partial^\mu\varphi \right. \\ & + \sum_{n,j} \left(- (D_\mu\Phi_{n,j})^* D^\mu\Phi_{n,j} - 2gf \left(n + \frac{1}{2} \right) \bar{\Phi}_{n,j}\Phi_{n,j} \right. \\ & \left. \left. - \sqrt{2ig}\sqrt{2gf(n+1)}\bar{\varphi}\bar{\Phi}_{n+1,j}\Phi_{n,j} + \sqrt{2ig}\sqrt{2gf(n+1)}\varphi\bar{\Phi}_{n,j}\Phi_{n+1,j} - 2g^2\bar{\varphi}\varphi\bar{\Phi}_{n,j}\Phi_{n,j} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.36)$$

となる。

この作用から、 φ の質量補正を計算できる。まず 4 点相互作用で作られる寄与を計算すると、

$$\begin{aligned} (\text{図 3.1左}) &= -i2g^2 \sum_{n,j} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-i}{k^2 + 2gf(n + \frac{1}{2})} \\ &= -i2g^2 \sum_{n,j} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + 2gf(n + \frac{1}{2})} \end{aligned} \quad (3.37)$$

となる。ただし最後の等式で Wick 回転を施した。同様に 3 点相互作用で作られる寄与を計算すると、

$$\begin{aligned} (\text{図 3.1右}) &= i(\sqrt{2ig})i(-\sqrt{2ig}) \sum_{n,j} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{-i\sqrt{2gf(n+1)}}{k^2 + 2gf(n + \frac{1}{2})} \right) \left(\frac{-i\sqrt{2gf(n+1)}}{k^2 + 2gf(n + \frac{3}{2})} \right) \\ &= +i2g^2 \sum_{n,j} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2gf(n+1)}{(k^2 + 2gf(n + \frac{1}{2}))(k^2 + 2gf(n + \frac{3}{2}))} \end{aligned} \quad (3.38)$$

となる。ただし最後の等式で Wick 回転を施した。これより質量補正の寄与は

$$\begin{aligned} \delta m_b^2 &= 2g^2 \sum_{n,j} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{k^2 + 2gf(n + \frac{1}{2})} - \frac{2gf(n+1)}{(k^2 + 2gf(n + \frac{1}{2}))(k^2 + 2gf(n + \frac{3}{2}))} \right) \\ &= 2g^2|N| \sum_n \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{k^2 + 2gf(n + \frac{1}{2})} - (n+1) \left(\frac{1}{k^2 + 2gf(n + \frac{1}{2})} - \frac{1}{k^2 + 2gf(n + \frac{3}{2})} \right) \right) \\ &= 2g^2|N| \sum_n \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{n+1}{k^2 + 2gf(n + \frac{3}{2})} - \frac{n}{k^2 + 2gf(n + \frac{1}{2})} \right) \end{aligned} \quad (3.39)$$

と計算される。(3.39) 式の右辺第 2 項目の n を $n+1$ ヘシフトすれば、右辺第 1 項目と厳密に等しくなり、この寄与はゼロとなる。つまり、

$$\delta m_b^2 = 0 \quad (3.40)$$

が得られる。したがって、1-loop レベルで質量補正が消えることが示された。

3.7 質量補正：flux あり、フェルミオンの場合

flux がある場合、KK 展開は第 2 章で現れたコンパクト次元の場 $\xi_{n,j}$ を用いて展開する。フェルミオンの場合、 ψ と χ の 2 種類が存在するため、それぞれの生成消滅演算子を求める。そのために、

質量二乗演算子を導出する。(3.14) 式から $\bar{\psi}$ と χ で変分すと Dirac 方程式が得られる。

$$i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi + (\bar{\partial} + g f z) \bar{\chi} = 0, \quad (3.41)$$

$$i\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\chi} + (\partial - g f \bar{z}) \psi = 0 \quad (3.42)$$

が得られる。ここでは質量二乗演算子の導出に注目したいので、相互作用項を無視している。(3.41) 式に $i\sigma^\mu \partial_\mu$ を作用させると、

$$(i\sigma^\mu \partial_\mu)(i\bar{\sigma}^\nu \partial_\nu) \psi + (\bar{\partial} + g f z)(i\sigma^\mu \partial_\mu) \bar{\chi} = 0 \quad (3.43)$$

となる。(3.42) 式を用いれば、

$$\square \psi - (\bar{\partial} + g f z)(\partial - g f \bar{z}) \psi = 0 \quad (3.44)$$

が得られる。ただし、第 1 項目に $\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu = -2\eta^{\mu\nu}$ を用いた。第 2 項目を生成消滅演算子で $M_-^2 = 2gf a_-^\dagger a_-$ と書くことにする。これが質量二乗演算子に対応する。この M_-^2 を用いれば、Klein-Gordon 方程式 $(\square + M_-^2)\psi = 0$ が得られることになる。同様に、 $\bar{\chi}$ の変分で得られた式と ψ の変分で得られた式を使えば $M_+^2 = 2gf(a_+^\dagger a_+ + 1)$ が得られる。 M_-^2 と M_+^2 の質量スペクトルの違いは、4次元の観点で見るとフェルミオンのゼロモードがカイラルな理論になっていることを表す⁵。

生成消滅演算子をまとめると、

$$a_- = \frac{i}{\sqrt{2qf}}(\partial - g f \bar{z}), \quad a_-^\dagger = \frac{i}{\sqrt{2qf}}(\bar{\partial} + g f z), \quad (3.45)$$

$$a_+ = \frac{i}{\sqrt{2qf}}(\bar{\partial} - g f z), \quad a_+^\dagger = \frac{i}{\sqrt{2qf}}(\partial + g f \bar{z}) \quad (3.46)$$

である。コンパクト空間のモード関数を $\xi_{n,j}$ 、 $\bar{\xi}_{n,j}$ とすると、基底状態のモード関数は $a_- \xi_{0,j} = 0$ 、 $a_+ \bar{\xi}_{0,j} = 0$ を満たす。 $\xi_{n,j}$ を生成消滅演算子を用いて表せば、(2.23) 式のように、

$$\xi_{n,j} = \frac{i^n}{\sqrt{n!}}(a_-^\dagger)^n \xi_{0,j}, \quad \bar{\xi}_{n,j} = \frac{i^n}{\sqrt{n!}}(a_+^\dagger)^n \bar{\xi}_{0,j} \quad (3.47)$$

と表される。ここで i^n があるのは便宜的な理由である。また、生成消滅演算子がモード関数に作用すると、次のような関係式になる。

$$a_- \xi_{n,j} = i\sqrt{n} \xi_{n-1,j}, \quad a_-^\dagger \xi_{n,j} = -i\sqrt{n+1} \xi_{n+1,j}, \quad (3.48)$$

$$a_+ \bar{\xi}_{n,j} = i\sqrt{n} \bar{\xi}_{n-1,j}, \quad a_+^\dagger \bar{\xi}_{n,j} = -i\sqrt{n+1} \bar{\xi}_{n+1,j}. \quad (3.49)$$

ここまでのコンパクト空間のモード関数 $\xi_{n,j}$ と $\bar{\xi}_{n,j}$ を用いてフェルミオンの KK 展開を行うと、

$$\psi = \sum_{n,j} \psi_{n,j}(x^\mu) \xi_{n,j}(x^m), \quad (3.50)$$

$$\chi = \sum_{n,j} \chi_{n,j}(x^\mu) \bar{\xi}_{n,j}(x^m) \quad (3.51)$$

となる。フェルミオンの作用 (3.14) に対し、(3.48)~(3.51) 式を用いる。特に、

$$S_{6f} \supset \int d^6x (-\chi(\partial - g f \bar{z})\psi) \quad (3.52)$$

⁵通常の高次元理論ではコンパクト空間を orbifold してカイラル理論を得るが、flux compactification では magnetic flux を導入することで orbifold しないでカイラル理論を構成できる。

に着目する。変形すると、

$$\begin{aligned}
S_{6f} &\supset \int d^6x \left(-\frac{\sqrt{2gf}}{i} \chi a_- \psi \right) \\
&= \int d^6x \sum_{n',j'} \sum_{n,j} \left(-\frac{\sqrt{2gf}}{i} \chi_{n',j'} \psi_{n,j} \bar{\xi}_{n',j'} a_- \xi_{n,j} \right) \\
&= \int d^6x \sum_{n',j'} \sum_{n,j} \left(-\sqrt{2gf} n \chi_{n',j'} \psi_{n,j} \bar{\xi}_{n',j'} \xi_{n-1,j} \right)
\end{aligned}$$

となる。コンパクト空間の積分を行うと、モード関数の直交条件より

$$S_{4f} \supset \int d^4x \sum_{n,j} \left(-\sqrt{2gf(n+1)} \chi_{n,j} \psi_{n+1,j} \right) \quad (3.53)$$

が得られる。以上より、4次元有効作用は

$$\begin{aligned}
S_4 &= \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \partial^\mu \bar{\varphi} \partial_\mu \varphi - \frac{1}{2} f^2 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n,m} \left(-i \psi_{n,j} \sigma^\mu \bar{D}_\mu \bar{\psi}_{n,j} - i \chi_{n,j} \sigma^\mu D_\mu \bar{\chi}_{n,m} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sqrt{2gf(n+1)} \chi_{n,j} \psi_{n+1,j} + \sqrt{2g\varphi} \chi_{n,j} \psi_{n,j} + \text{h.c.} \right) \right) \quad (3.54)
\end{aligned}$$

が得られる。

この作用から、 φ の質量補正を計算できる。フェルミオンの寄与として同じく図 3.2 が考えられる。ただし、生成消滅演算子の影響で ψ の質量スペクトルが $\mathcal{M}_-^2 = 2gfa_-^\dagger a_-$ 、 χ の質量スペクトルが $\mathcal{M}_+^2 = 2gf(a_+^\dagger a_+ + 1)$ と異なることに注意である。この寄与を計算すると、

$$\begin{aligned}
(\text{図 3.2}) &= (-1) \times (i\sqrt{2g})(i\sqrt{2g}) \sum_{n,j} \text{Tr} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{ik \cdot \sigma}{k^2 + 2gfn} \right) \left(\frac{-i(-k) \cdot \bar{\sigma}}{(-k)^2 + 2gf(n+1)} \right) \\
&= -i4g^2 |N| \sum_n \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{(k^2 + 2gfn)(k^2 + 2gf(n+1))} \\
&= -i4g^2 |N| \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{n+1}{k^2 + 2gf(n+1)} - \frac{n}{k^2 + 2gfn} \right) \quad (3.55)
\end{aligned}$$

と計算される。(3.55) 式の右辺第 2 項目の n を $n+1$ ヘシフトすれば、右辺第 1 項目と厳密に等しくなり、この寄与はゼロとなる。つまり、

$$\delta m_f^2 = 0 \quad (3.56)$$

が得られる。したがって、1-loop レベルで質量補正が消えることが示された⁶。

flux なしの場合の結果 (3.31) と flux ありの場合の結果 (3.56) を比較する。flux なしの場合、トーラスの長さの逆数はカットオフの役割を担うが、(3.31) 式を見るとカットオフが現れているのが見て取れる。トーラスの長さが有限であれば、(3.31) 式は有限値に留まる。一方 flux ありの場合、 φ の質量補正が 1 ループのレベルで厳密にゼロであることが見て取れる。これは後に見るように、余剰次元空間の並進対称性の自発的破れによって生じる南部-Goldstone ボゾンとして理解される。

最後に (3.40) 式と (3.56) 式の結果について言及する。この結果は次のことを意味する；仮にスカラー場とフェルミオンを同時に含んだ理論を扱っても、スカラー場が寄与する φ の質量補正とフェルミオンが寄与する φ の質量補正は別々で消える。この結果は超対称性を課しても変わらない。通常、超対称性を課してボゾンが寄与する質量補正とフェルミオンが寄与する質量補正が相殺する。しかし flux を導入することにより超対称性を課さなくても別々で質量補正が消える。この結果は flux を導入する新たな利点と言え、階層性問題を解決するヒントとなりうる。

⁶2-loop レベルでも質量補正が消えることが [31] で示されている。

3.8 質量補正の正則化

前節で $\delta m_f^2 = 0$ が示されたが、(3.55) 式は $n \rightarrow \infty$ の極限では運動量積分が無限大に発散してしまうため、無限大の発散について調べることも重要である。無限大の発散量を取り除く手法として、正則化が知られている。ここでは、次元正則化を施して質量補正がゼロになることを示す [29]。そこで、外線運動量 q を導入した場合に次元正則化を施した質量補正の計算を行う。外線運動量を導入すれば、UV の振る舞いを調べることができる。MS subtraction スケール μ を結合定数が $d = 4 - 2\epsilon$ 次元で無次元になるように導入しておく。ここで MS subtraction とは、発散部分 (次元正則化だと $1/\epsilon$) を取り除く操作のことをいう⁷。図 3.2 から、

$$\delta m_f^2(q^2) = -2g^2|N|\mu^{2\epsilon} \sum_n \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2k(q+k)}{((q+k)^2 + \alpha n)(k^2 + \alpha(n+1))} \quad (3.57)$$

と書き下せる。ただし $\alpha = 2gf$ である。次元正則化の枠組みでこの計算を実行すると (付録 E 参照)、

$$\delta m_f^2(q^2) = -\left(\frac{4\pi\mu^2}{\alpha}\right)^\epsilon K_0 \int_0^1 dx \left[2q^2 x(x-1)\Gamma(\epsilon)\zeta[\epsilon, \rho] + d\alpha\Gamma(-1+\epsilon)\zeta[-1+\epsilon, \rho] \right] \quad (3.58)$$

と変形される。ただし、

$$K_0 \equiv \frac{2g^2N}{(4\pi)^2}, \quad \rho = (1-x) \left(1 + x \frac{q^2}{\alpha} \right) > 0 \quad (3.59)$$

である。ただし、Hurwitz のゼータ関数 $\zeta[s, a] = \sum_{n \geq 0} (n+a)^{-s}$ を導入した。(3.58) 式はガンマ関数とゼータ関数を含んでいる。これらの関数をテイラー展開し、有限部分と極 (発散部分) で分けることができる。詳しい議論は付録 E を参照してもらうとして、結果だけを記すと

$$\delta m_f^2(q^2) = -\left(\frac{4\pi\mu^2}{\alpha}\right)^\epsilon K_0 \left[d\alpha\Gamma(\epsilon-1)\zeta[\epsilon-1, 0] + \Gamma(\epsilon) \int_0^1 dx \zeta[\epsilon, \rho] f(x) \right] \quad (3.60)$$

が得られる。ここで $f(x) = 2q^2 x(x-1) + xd\alpha\rho'(x)$ である。さらに、次元正則化において用いる公式

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (3.61)$$

$$\zeta[\epsilon, \rho] = \zeta[0, \rho] + \epsilon\zeta^{(1,0)}[0, \rho] + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (3.62)$$

$$\left(\frac{4\pi\mu^2}{\alpha}\right)^\epsilon = 1 + \epsilon \ln \frac{4\pi\mu^2}{\alpha} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (3.63)$$

を使う。ここで、[32] の p19 等を参考にすると、

$$\zeta[0, \rho] = \frac{1}{2} - \rho,$$

$$\zeta^{(1,0)}[0, \rho] = \ln \Gamma[\rho] - \ln \sqrt{2\pi}$$

が分かる。ただし、 $\zeta^{(1,0)}[s, a] = \partial\zeta[s, a]/\partial s$ である。また、 $G = 1.28243$ を Glaisher 定数といい、

$$\ln G = \frac{1}{12} - \zeta'[-1]$$

で定義される。 $\zeta[x]$ はリーマンゼータ関数である。詳しい計算は付録 E を参照してもらうとして、 $\delta m_f^2(q^2)$ の計算を進めると

$$\delta m_f^2(q^2) = -K_0 \left[\frac{4q^4}{30\alpha} \left(\frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{4\pi\mu^2 e^{-\gamma_E}}{\alpha} \right) + \alpha \ln G^4 - \frac{q^4}{30\alpha} + H(q) \right] + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (3.64)$$

⁷次元正則化を施すと、オイラー定数 γ_E や $\ln(4\pi)$ が現れる。発散部分と同時にこれらの項を差し引く操作を $\overline{\text{MS}}$ subtraction という。

が得られる。ここで、

$$H(q) = \int_0^1 dx (2q^2 x(x-1) + 4\alpha x \rho'(x)) \ln \frac{\Gamma[\rho(x)]}{\sqrt{2\pi}} \quad (3.65)$$

である⁸。したがって、 $\mathcal{O}(\epsilon)$ 以下の項は

$$\delta m_f^2(q^2) = K_0 \left[-\frac{4q^4}{30\alpha\epsilon} + \mathcal{O}(q^2/\alpha) \right] \quad (3.66)$$

である。

(3.64) 式で $q^2 = 0$ と設定する。このとき $H(q)$ は

$$\begin{aligned} H(0) &= -4\alpha \int_0^1 dx x \ln \frac{\Gamma(1-x)}{\sqrt{2\pi}} \\ &= -4\alpha \ln G = -\alpha \ln G^4 \end{aligned} \quad (3.67)$$

となるので、

$$\begin{aligned} \delta m_f^2(0) &= -K_0 \left[\alpha \ln G^4 + H(0) \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.68)$$

と、 $q^2 \rightarrow 0$ の極限で質量補正が消えていることが分かる。これは、1-loop レベルで φ が曲率ゼロのポテンシャルの点の平坦方向であることを示している。

⁸ $H(q)$ の詳細な計算は [29] でなされている。

第4章 6次元SU(2) Yang-Mills理論

前章までは可換ゲージ理論の場合を取り扱っていた。しかし、現実の標準模型は $SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$ と、非可換群を含む。そこで、非可換群に拡張した場合の flux compactification を出発点とし、4次元有効作用を求め、ゲージ場の余剰次元成分 φ の質量補正を計算する。非可換群に拡張すると、可換群の場合には見られなかった相互作用項が生まれるために、前章のような質量補正の結果が非自明となる。本章では、非可換群の場合でも質量補正が消えることを示す。この章は主に [1] の内容である。この研究のきっかけは [27, 28, 33] である。

4.1 Yang-Mills理論と flux compactification

flux が含まれる 6次元 SU(2) Yang-Mills 理論を考える。2.2 節と同様に、全空間が Minkowski 空間 M^4 と 2次元トーラス T^2 の直積空間 $M^4 \times T^2$ であるとする。6次元 Yang-Mills 理論の Lagrangian は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_6 &= -\frac{1}{4} F_{MN}^a F^{aMN} \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2} F_{\mu 5}^a F^{a\mu 5} - \frac{1}{2} F_{\mu 6}^a F^{a\mu 6} - \frac{1}{2} F_{56}^a F^{a56} \end{aligned} \quad (4.1)$$

である。ただし、添字 $a = 1, 2, 3$ はゲージ場の添字である。field strength と共変微分は

$$F_{MN}^a = \partial_M A_N^a - \partial_N A_M^a - ig[A_M, A_N]^a, \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} D_M A_N^a &= \partial_M A_N^a + g\varepsilon^{abc} A_M^b A_N^c \\ &= \partial_M A_N^a - ig[A_M, A_N]^a \end{aligned} \quad (4.3)$$

と定義する。

非可換群の場合、どのように flux が導入されるかを見る。magnetic flux はゲージ場の余剰次元成分 $A_{5,6}$ が期待値を持つことによって生まれる量である。これらは次の真空の方程式

$$D^m \langle F_{mn} \rangle = 0 \quad (4.4)$$

を満たす。この方程式を満たす解として、

$$\langle A_5^1 \rangle = -\frac{1}{2} f x_6, \quad \langle A_6^1 \rangle = \frac{1}{2} f x_5, \quad \langle A_5^{2,3} \rangle = \langle A_6^{2,3} \rangle = 0 \quad (4.5)$$

を選ぶ。このように選ぶと、 $\langle F_{56}^1 \rangle = f$ となり、6次元並進対称性が自発的に破れる。flux はトーラス上で積分すれば

$$\frac{g}{2\pi} \int_{T^2} dx_5 dx_6 \langle F_{56}^1 \rangle = \frac{g}{2\pi} L^2 f = N \in \mathbb{Z} \quad (4.6)$$

と量子化される。2章の磁場中の荷電粒子の議論で言えば、 N は縮退度を表す。 L^2 は正方トーラスの面積を表す。以下の議論では、 $L = 1$ とする。

以下の議論でも (3.2) 式の記法を用いる。 ϕ が期待値を持つとき、 $\langle \phi^1 \rangle = f\bar{z}/\sqrt{2}$ を得る。背景 flux のまわりで展開すると (3.4) 式のように

$$\phi^a = \langle \phi^a \rangle + \varphi^a \quad (4.7)$$

と書ける。ここで ϕ^a は量子ゆらぎの部分である。

(4.1) 式の変形を行う。特に右辺第 2 項目以降を計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}F_{\mu 5}^a F^{a\mu 5} + \frac{1}{2}F_{\mu 6}^a F^{a\mu 6} &= \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \bar{\phi}^a + \frac{1}{2}\partial A_\mu^a \bar{\partial} A^{a\mu} - g^2[A_\mu, \phi][A^\mu, \bar{\phi}] \\ &+ \frac{i}{\sqrt{2}}(\partial_\mu \phi^a \bar{\partial} A^{a\mu} - \partial_\mu \bar{\phi}^a \partial A^{a\mu}) \\ &- ig\left\{\partial_\mu \phi^a [A^\mu, \bar{\phi}] + [A_\mu, \phi] \partial^\mu \bar{\phi}^a\right\} \\ &+ \frac{g}{\sqrt{2}}\left\{-\partial A_\mu^a [A^\mu, \bar{\phi}] + [A_\mu, \phi] \bar{\partial} A^{a\mu}\right\}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$F_{56} F^{56} = \frac{1}{2}\left(D\bar{\phi} + \bar{D}\phi + \sqrt{2}g[\phi, \bar{\phi}]\right)^2 \quad (4.9)$$

が得られる。ここで D, \bar{D} は、任意の随伴表現の場 Φ^a に対して

$$D\Phi^a \equiv (D_5 - iD_6)\Phi^a = \partial\Phi^a - \sqrt{2}g[\phi, \Phi]^a, \quad (4.10)$$

$$\bar{D}\Phi^a \equiv (D_5 + iD_6)\Phi^a = \bar{\partial}\Phi^a + \sqrt{2}g[\bar{\phi}, \Phi]^a \quad (4.11)$$

と作用する共変微分で、コンパクト次元の共変微分 $D_{5,6}$ を $\partial, \bar{\partial}$ のように複素化したものである。したがって、(4.1) 式は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_6 &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \partial_\mu \bar{\phi}^a \partial^\mu \phi^a - \frac{1}{2}\partial A_\mu^a \bar{\partial} A^{a\mu} + g^2[A_\mu, \phi]^a [A^\mu, \bar{\phi}]^a \\ &- \frac{i}{\sqrt{2}}(\partial_\mu \phi^a \bar{\partial} A^{a\mu} - \partial_\mu \bar{\phi}^a \partial A^{a\mu}) \\ &+ ig\left\{\partial_\mu \phi^a [A^\mu, \bar{\phi}]^a + \partial^\mu \bar{\phi}^a [A_\mu, \phi]^a\right\} \\ &- \frac{g}{\sqrt{2}}\left\{-\partial A_\mu^a [A^\mu, \bar{\phi}]^a + \bar{\partial} A^{a\mu} [A_\mu, \phi]^a\right\} \\ &- \frac{1}{4}\left(D\bar{\phi}^a + \bar{D}\phi^a + \sqrt{2}g[\phi, \bar{\phi}]^a\right)^2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

と書き直される。(4.12) 式の第 2 行目のゲージ場とスカラー場の混合項は、次のゲージ固定項によって取り除かれる：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{g-f} &= -\frac{1}{2\xi}(D_\mu A^{a\mu} + \xi \mathcal{D}_m A^{am})^2 \\ &= -\frac{1}{2\xi}D_\mu A^{a\mu} D_\nu A^{a\nu} - \frac{g}{\sqrt{2}}\partial\bar{\phi}^a [A_\mu, A^\mu]^a + \frac{g}{\sqrt{2}}\bar{\partial}\phi^a [A_\mu, A^\mu]^a + \frac{\xi}{4}(D\bar{\phi}^a - \bar{D}\phi^a)^2 \\ &+ \frac{i}{\sqrt{2}}(\partial_\mu \phi^a \bar{\partial} A^{a\mu} - \partial_\mu \bar{\phi}^a \partial A^{a\mu}). \end{aligned} \quad (4.13)$$

ここで、共変微分 D, \bar{D} は (4.10)、(4.11) 式の $\phi^a, \bar{\phi}^a$ を $\langle\phi^a\rangle, \langle\bar{\phi}^a\rangle$ に置き換えたものである。また ξ はゲージパラメータと呼ばれる。ゲージパラメータ ξ を任意で取り扱うゲージの取り方は R_ξ ゲージと呼ばれる ([34],[35])。

ゲージ固定の後、ゲージ場の量子化のために Faddeev-Popov の手続きに従いゴースト場を導入する必要がある。そのゴースト場の Lagrangian は

$$\mathcal{L}_{ghost} = -\bar{c}^a (D_\mu D^\mu + \xi \mathcal{D}_m \mathcal{D}^m) c^a \quad (4.14)$$

である。以上より、Lagrangian 全体は

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{total} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}D_\mu A^{a\mu} D_\nu A^{a\nu} - \partial_\mu \bar{\phi}^a \partial^\mu \phi^a \\
& - \frac{1}{2}\partial A_\mu^a \bar{\partial} A^{a\mu} + g^2[A_\mu, \phi]^a [A^\mu, \bar{\phi}]^a - \frac{g}{\sqrt{2}}\left\{-\partial A_\mu^a [A^\mu, \bar{\phi}]^a + \bar{\partial} A^{a\mu} [A_\mu, \phi]^a\right\} \\
& + ig\left\{\partial_\mu \phi^a [A^\mu, \bar{\phi}]^a + \partial^\mu \bar{\phi}^a [A_\mu, \phi]^a\right\} \\
& - \frac{1}{4}\left(D\bar{\phi}^a + \bar{D}\phi^a + \sqrt{2}g[\phi, \bar{\phi}]^a\right)^2 + \frac{\xi}{4}\left(\mathcal{D}\bar{\phi}^a - \bar{\mathcal{D}}\phi^a\right)^2 \\
& - \bar{c}^a (D_\mu D^\mu + \xi D_m \mathcal{D}^m) c^a
\end{aligned} \tag{4.15}$$

である。

4.2 質量スペクトル

この節では、ゲージ場 A_μ^a 、スカラー場 ϕ^a 、ゴースト場 c^a の質量固有状態と固有値を求める。非可換群と flux の影響でゲージ場の質量が Landau 準位で離散化される点が前章との大きな違いである。

4.2.1 ゲージ場

まずゲージ場の固有値、固有状態を求める。(4.15) 式の 2 行目の背景場に対応する部分がゲージ場の質量項に対応する。すなわち、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{mass} = & -\frac{1}{2}\partial A_\mu^a \bar{\partial} A^{a\mu} + g^2[A_\mu, \langle\phi\rangle]^a [A^\mu, \langle\bar{\phi}\rangle]^a - \frac{g}{\sqrt{2}}\left\{-\partial A_\mu^a [A^\mu, \langle\bar{\phi}\rangle]^a + \bar{\partial} A_\mu^a [A^\mu, \langle\phi\rangle]^a\right\} \\
= & -\frac{1}{2}\mathcal{D}A_\mu^a \bar{\mathcal{D}}A^{a\mu} \\
= & -\frac{1}{2}A_\mu^a [-\mathcal{D}\bar{\mathcal{D}}]A^{a\mu}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

である。2.2 節の議論を思い出すと、 $-\mathcal{D}\bar{\mathcal{D}}$ は Hamiltonian に対応する。 $i\mathcal{D}$ を生成演算子、 $i\bar{\mathcal{D}}$ を消滅演算子として扱えば、ゲージ場の質量は Landau 準位に離散化される。生成消滅演算子の係数を決めるため、 \mathcal{D} と $\bar{\mathcal{D}}$ の交換関係を計算する。行列の形に書くと、

$$\mathcal{D}^{ac} = \begin{pmatrix} \partial & 0 & 0 \\ 0 & \partial & -\sqrt{2}i\varepsilon^{213}g\langle\phi^1\rangle \\ 0 & \sqrt{2}i\varepsilon^{312}g\langle\phi^1\rangle & \partial \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial & 0 & 0 \\ 0 & \partial & igf\bar{z} \\ 0 & -igfz & \partial \end{pmatrix}, \tag{4.17}$$

$$\bar{\mathcal{D}}^{ac} = \begin{pmatrix} \bar{\partial} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\partial} & \sqrt{2}i\varepsilon^{213}g\langle\bar{\phi}^1\rangle \\ 0 & -\sqrt{2}i\varepsilon^{312}g\langle\bar{\phi}^1\rangle & \bar{\partial} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\partial} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\partial} & -igfz \\ 0 & igfz & \bar{\partial} \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

と表される。これより交換関係を計算すると、

$$[i\bar{\mathcal{D}}, i\mathcal{D}]^{ac} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2igf \\ 0 & 2igf & 0 \end{pmatrix} = 2igf\varepsilon^{a1c} \tag{4.19}$$

となる。したがって、生成消滅演算子を

$$a = \frac{1}{\sqrt{2gf}}i\bar{\mathcal{D}}, \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2gf}}i\mathcal{D} \tag{4.20}$$

と定義すれば、その交換関係は

$$[a, a^\dagger]^{ac} = i\varepsilon^{a1c} \quad (4.21)$$

が得られる。

ここまで共変微分を定義したが、その行列の形は非対角的である。そこで \mathcal{D}^{ac} 、 $\bar{\mathcal{D}}^{ac}$ を対角化すると、

$$\mathcal{D}_{diag}^{ac} = \begin{pmatrix} \partial & 0 & 0 \\ 0 & \partial - g f \bar{z} & 0 \\ 0 & 0 & \partial + g f \bar{z} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathcal{D}}_{diag}^{ac} = \begin{pmatrix} \bar{\partial} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\partial} + g f z & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\partial} - g f z \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

となる。対角化した場合の生成消滅演算子の交換関係は

$$[a, a^\dagger] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

と表される。対角成分ごとに生成消滅演算子を定義すれば、

$$\begin{cases} a_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2gf}} i \bar{\partial} \\ a_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2gf}} i (\bar{\partial} + g f z) \\ a_3 \equiv \frac{1}{\sqrt{2gf}} i (\bar{\partial} - g f z) \end{cases}, \quad \begin{cases} a_1^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2gf}} i \partial \\ a_2^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2gf}} i (\partial - g f \bar{z}) \\ a_3^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2gf}} i (\partial + g f \bar{z}) \end{cases} \quad (4.24)$$

と要約される。いくつか注意がある。まず、 a_1 と a_1^\dagger が生成消滅演算子の役割を持たない。一方、 a_2 と a_2^\dagger は通常の生成消滅演算子の役割を担う。しかし、 a_3 と a_3^\dagger は生成消滅演算子の役割が $[a_3, a_3^\dagger] = -1$ という関係のために逆転している。基底状態のモード関数は $a_2 \psi_{0,j}^2 = 0, a_3^\dagger \psi_{0,j}^3 = 0$ で決定される。ただし、 $j = 0, \dots, |N| - 1$ は縮退数を表す。高次のモード関数 $\psi_{n_a,j}^a$ は (2.23)、(3.47) 式と同様に

$$\psi_{n_1,j}^1, \quad \psi_{n_2,j}^2 = \frac{1}{\sqrt{n_2!}} (a_2^\dagger)^{n_2} \psi_{0,j}^2, \quad \psi_{n_3,j}^3 = \frac{1}{\sqrt{n_3!}} (a_3)^{n_3} \psi_{0,j}^3 \quad (4.25)$$

と表される。直交関係は

$$\int_{T^2} dx^2 (\psi_{n'_a,j'}^{a'})^* \psi_{n_a,j}^a = \delta^{a'a} \delta_{n'_a n_a} \delta_{j'j} \quad (4.26)$$

を満たす。また代数的な関係式として

$$\begin{cases} a_1 \psi_{n_1,j}^1 = \psi_{n_1,j}^1 \\ a_2 \psi_{n_2,j}^2 = \sqrt{n_2} \psi_{n_2-1,j}^2 \\ a_3 \psi_{n_3,j}^3 = \sqrt{n_3+1} \psi_{n_3+1,j}^3 \end{cases}, \quad \begin{cases} a_1^\dagger \psi_{n_1,j}^1 = \psi_{n_1,j}^1 \\ a_2^\dagger \psi_{n_2,j}^2 = \sqrt{n_2+1} \psi_{n_2+1,j}^2 \\ a_3^\dagger \psi_{n_3,j}^3 = \sqrt{n_3} \psi_{n_3-1,j}^3 \end{cases} \quad (4.27)$$

を得る。

対角化されたゲージ場の質量演算子は、明示的に書くと

$$\mathcal{H}_{diag} = -\mathcal{D}_{diag} \bar{\mathcal{D}}_{diag} = 2gf \begin{pmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 + 1 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

と表される。 $n_{2,3}$ が Landau 準位に対応する。ゲージ場の質量固有状態は次のように定義される：

$$\tilde{A}_\mu^a = U A_\mu^a, \quad \tilde{A}^{a\mu} = U^{-1} A^{a\mu}. \quad (4.29)$$

ただし、

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

である。

4.2.2 スカラー場

(4.15) 式からスカラー場の 2 次の項について取り出すと、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\varphi\varphi} = & -\frac{1}{4} \left(\mathcal{D}\bar{\varphi}^a \mathcal{D}\bar{\varphi}^a + \mathcal{D}\bar{\varphi}^a \bar{\mathcal{D}}\varphi^a + \bar{\mathcal{D}}\varphi^a \mathcal{D}\bar{\varphi}^a + \bar{\mathcal{D}}\varphi^a \bar{\mathcal{D}}\varphi^a - 4gf[\varphi, \bar{\varphi}]^1 \right) \\ & + \frac{\xi}{4} \left(\mathcal{D}\bar{\varphi}^a \mathcal{D}\bar{\varphi}^a - \mathcal{D}\bar{\varphi}^a \bar{\mathcal{D}}\varphi^a - \bar{\mathcal{D}}\varphi^a \mathcal{D}\bar{\varphi}^a + \bar{\mathcal{D}}\varphi^a \bar{\mathcal{D}}\varphi^a \right) \end{aligned} \quad (4.31)$$

である。ゲージ場るときと同様に、対角化する必要がある。スカラー場の質量固有状態は、ゲージ場の質量固有状態を定義した際に現れたユニタリ行列 U を用いて

$$\tilde{\varphi} = U^{-1}\varphi, \quad \bar{\tilde{\varphi}} = U\bar{\varphi} \quad (4.32)$$

と定義される。(4.31) 式の 1 行目の第 2、3 項目は $\mathcal{D}\bar{\varphi}^a \bar{\mathcal{D}}\varphi^a = -\bar{\varphi}^a \mathcal{D}\bar{\mathcal{D}}\varphi^a$ により対角化されている状態である。そこで第 1 項について計算してみる。すると、

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\bar{\varphi}^a \mathcal{D}\bar{\varphi}^a &= -\bar{\varphi}^a \mathcal{D}\bar{\mathcal{D}}\bar{\varphi}^a \\ &= 2gf \left(\bar{\varphi}^1 (a_1)^2 \bar{\varphi}^1 - i\bar{\varphi}^2 (a_2)^2 \bar{\varphi}^3 - i\bar{\varphi}^3 (a_3)^2 \bar{\varphi}^2 \right) \end{aligned} \quad (4.33)$$

と変形できる。4 次元の Lagrangian を得るためには、コンパクト空間の積分を実行しなければいけない。生き残った部分は 4 次元時空へ情報が引き継がれ、逆に生き残らない部分は 4 次元時空へ何の情報ももたらさない。(4.33) 式についてもコンパクト空間上で積分する必要があるが、第 2、3 項目はモード関数の直交性のおかげで消える。また第 1 項目は φ のゼロモードに着目すれば、 $\bar{\varphi}^1$ が z, \bar{z} に依らないことから消える。つまり、 $\mathcal{D}\bar{\varphi}^a \mathcal{D}\bar{\varphi}^a$ はスカラー場 φ の 4 次元での質量に影響を及ぼさない。これは $\bar{\mathcal{D}}\varphi^a \bar{\mathcal{D}}\varphi^a$ も同様である。(4.31) 式の 1 行目の第 5 項目はユニタリ行列 U によって

$$-4gf[\varphi, \bar{\varphi}]^1 = 2 \times 2gf\bar{\varphi}^a \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \bar{\varphi}^a \quad (4.34)$$

と対角化される。(4.31) 式の 2 行目も (4.33) 式と同様の議論を適用すれば、スカラー場の質量固有値は

$$m_\varphi^2 = gf \begin{pmatrix} (1+\xi)n_1 & 0 & 0 \\ 0 & (1+\xi)n_2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1+\xi)n_3 + \xi \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

と表される。

4.2.3 ゴースト場

最後にゴースト場の質量固有値について求める。ゴースト場の2次の項を取り出すと、

$$\mathcal{L}_{cc} = -\bar{c}^a \xi \mathcal{D}_m \mathcal{D}^m c^a \quad (4.36)$$

式中の $\mathcal{D}_m \mathcal{D}^m$ について、以下のような変形を施す。

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_m \mathcal{D}^m)^{ab} &= (\mathcal{D}_5^2 + \mathcal{D}_6^2)^{ab} \\ &= -[(i\mathcal{D})(i\bar{\mathcal{D}})]^{ab} - \frac{1}{2}[D, \bar{D}]^{ab} \\ &= -2gf \left[(a^\dagger a)^{ab} + \frac{1}{2}i\varepsilon^{a1b} \right]. \end{aligned} \quad (4.37)$$

ただし $[D_5, D_6] = [D, \bar{D}]/2i$ という関係式を用いた。したがってゴースト場の質量固有値は

$$m_c^2 = 2gf\xi \begin{pmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 + \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & n_3 + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

ゴースト場の質量固有状態は

$$\bar{c}^a = U \bar{c}^a, \quad \tilde{c}^a = U^{-1} c^a \quad (4.39)$$

と定義される。

4.3 有効 Lagrangian

6次元 Lagrangian から4次元有効 Lagrangian を得るため、前節で考えた3つの場 A_μ^a 、 φ^a 、 c^a を KK 展開する。その形は、

$$\tilde{A}_\mu^a = \sum_{n_a, j} \tilde{A}_{\mu, n_a, j}^a \psi_{n_a, j}^a \quad (a = 1, 2, 3), \quad (4.40)$$

$$\tilde{\varphi}^a = \sum_{n_a, j} \tilde{\varphi}_{n_a, j}^a \psi_{n_a, j}^a, \quad \tilde{\bar{\varphi}}^a = \sum_{n_a, j} \tilde{\bar{\varphi}}_{n_a, j}^a \psi_{n_a, j}^{a*} \quad (a = 2, 3) \quad (4.41)$$

$$\tilde{c}^a = \sum_{n_a, j} \tilde{c}_{n_a, j}^a \psi_{n_a, j}^a, \quad \tilde{\bar{c}}^a = \sum_{n_a, j} \tilde{\bar{c}}_{n_a, j}^a \psi_{n_a, j}^{a*} \quad (a = 1, 2, 3) \quad (4.42)$$

である。ここで $\psi_{n_a, j}^a$ は (4.25) 式で現れたコンパクト空間のモード関数である。スカラー場に関しては $\varphi^{2,3}$ のみを KK 展開する。これは z, \bar{z} に依らない φ^1 のゼロモードの質量補正に注目したいからである。注意として、ゲージ場の実条件 $A_\mu^\dagger = A_\mu$ 、波動関数の複素共役 $(\psi_{n_a, j}^a(z))^* = \psi_{n_a, -j}^a(\bar{z})$ を満たすことから、 $(A_{\mu, n_a, j}^a)^\dagger = A_{\mu, n_a, -j}^a$ という関係が得られる。(4.12) 式の Lagrangian を前節で求めたゲージ場の質量固有値 \mathcal{H}_{diag} 、スカラー場の質量固有値 m_φ^2 、ゴースト場の質量固有値 m_c^2 や φ

を用いて書き直すと、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{total} = & -\frac{1}{4}\tilde{F}_{\mu\nu}^a\tilde{F}^{a\mu\nu} - \partial_\mu\bar{\varphi}^a\partial^\mu\varphi^a - \bar{c}^a\mathcal{D}_\mu\mathcal{D}^\mu c^a \\
& -\frac{1}{2}\tilde{A}_\mu^a\mathcal{H}_{diag}\tilde{A}^{a\mu} - \bar{\varphi}^am_\varphi^2\varphi^a - \bar{c}^am_c^2c^a \\
& + ig\left\{\partial_\mu\varphi^a[A^\mu, \bar{\varphi}]^a + \partial^\mu\bar{\varphi}^a[A_\mu, \varphi]^a\right\} + g^2[A_\mu, \varphi]^a[A^\mu, \bar{\varphi}]^a \\
& -\frac{g}{\sqrt{2}}\left\{-\partial A_\mu^a[A^\mu, \bar{\varphi}]^a + \bar{\partial}A^{a\mu}[A_\mu, \varphi]^a\right\} \\
& +\frac{g}{\sqrt{2}}(\mathcal{D}\bar{\varphi} + \bar{\mathcal{D}}\varphi)^a[\varphi, \bar{\varphi}]^a - \frac{1}{2}g^2[\varphi, \bar{\varphi}]^a[\varphi, \bar{\varphi}]^a \\
& -\frac{g\xi}{\sqrt{2}}([\varphi, \bar{c}]^a\bar{\partial}c^a - [\bar{\varphi}, c]^a\partial c^a)
\end{aligned} \tag{4.43}$$

と得られる。¹(4.43) 式は、2次の項のみ質量固有状態で書かれている。しかし、Feynman 図の計算に必要な vertex の読み取りのために、3次以上の項も質量固有状態で書き直す必要がある。以下、ゲージ場、スカラー場、ゴースト場の順に3次以上の φ^1 との相互作用項を計算する。

4.3.1 ゲージ場

ゲージ場と φ^1 の4次の項について計算する。

$$g^2[A_\mu, \varphi]^a[A^\mu, \bar{\varphi}]^a = -g^2\varepsilon^{ab1}\varepsilon^{ab'1}\sum_{nb,j}\sum_{n'_b,j'}A_{\mu,nb,j}^bA_{n'_b,j'}^{b'\mu}\varphi^1\bar{\varphi}^1\psi_{nb,j}^b\psi_{n'_b,j'}^{b'}. \tag{4.44}$$

直交条件 (4.26) を用いれば、4次元におけるゲージ場と φ^1 の4次の項は

$$\mathcal{L}_{\varphi\varphi AA} = -2g^2\eta^{\mu\nu}\sum_{nb,j}A_{\mu,nb,j}^bA_{\nu,nb,-j}^{b'}\varphi^1\bar{\varphi}^1 \tag{4.45}$$

と書ける。

次にゲージ場と φ^1 の3次の項について計算する。計算の例として $\partial A_\mu^a[A^\mu, \bar{\varphi}]^a$ を考える。

$$\begin{aligned}
\partial A_\mu^a[A^\mu, \bar{\varphi}]^a & = i\varepsilon^{abc}\partial A_\mu^aA^{b\mu}\bar{\varphi}^c \\
& \supset -\partial\tilde{A}_\mu^2\tilde{A}^{2\mu}\bar{\varphi}^1 + \partial\tilde{A}_\mu^3\tilde{A}^{3\mu}\bar{\varphi}^1 \\
& = -\left(\frac{\sqrt{2gf}}{i}a_2^\dagger\tilde{A}_\mu^2 + gfz\tilde{A}_\mu^2\right)\tilde{A}^{2\mu}\bar{\varphi}^1 + \left(\frac{\sqrt{2gf}}{i}a_3^\dagger\tilde{A}_\mu^3 - gfz\tilde{A}_\mu^3\right)\tilde{A}^{3\mu}\bar{\varphi}^1,
\end{aligned} \tag{4.46}$$

ただし、記号 \supset は直交条件で生き残る部分だけを抜き出しているという意味である。また最後の等式において、(4.24) 式を用いて変形を施した。これらの項において KK 展開を適用し、直交条件を用いて計算する。 $z\tilde{A}_\mu^2\tilde{A}^{2\mu}\bar{\varphi}^1$ や $z\tilde{A}_\mu^3\tilde{A}^{3\mu}\bar{\varphi}^1$ という項は z, \bar{z} について奇関数のためにトーラス上の積分を行うと消える。したがって生き残る項は $a_2^\dagger\tilde{A}_\mu^2\tilde{A}^{2\mu}\bar{\varphi}^1$ や $a_3^\dagger\tilde{A}_\mu^3\tilde{A}^{3\mu}\bar{\varphi}^1$ である。この部分の計算に関しては、

$$\begin{aligned}
-\int_{T^2}d^2x\frac{\sqrt{2gf}}{i}a_2^\dagger\tilde{A}_\mu^2\tilde{A}^{2\mu}\bar{\varphi}^1 & = -\sum_{n_2,j}\sum_{n'_2,j'}\tilde{A}_{\mu,n_2,j}^2\tilde{A}_{n'_2,j'}^{2\mu}\bar{\varphi}^1\int_{T^2}d^2x\frac{\sqrt{2gf}}{i}a_2^\dagger\psi_{n_2,j}^2\psi_{n'_2,j'}^2 \\
& = -\sum_{n_2,j}\sum_{n'_2,j'}\tilde{A}_{\mu,n_2,j}^2\tilde{A}_{n'_2,j'}^{2\mu}\bar{\varphi}^1\frac{\sqrt{2gf}}{i}\sqrt{n_2+1}\delta_{n_2+1,n'_2}\delta_{-j,j'} \\
& = -\sum_{n_2,j}\frac{\sqrt{2gf(n_2+1)}}{i}\tilde{A}_{\mu,n_2,j}^2\tilde{A}_{n_2+1,-j}^{2\mu}\bar{\varphi}^1,
\end{aligned} \tag{4.47}$$

¹ $\tilde{F}_{\mu\nu}$ は $F_{\mu\nu}$ の双対の意味ではなく、質量固有状態の \tilde{A}_μ^a で書かれた field strength の意味である。

$$\begin{aligned}
\int_{T^2} d^2x \frac{\sqrt{2gf}}{i} \tilde{A}_\mu^3 \tilde{A}^{3\mu} \bar{\varphi}^1 &= \sum_{n_3, j} \sum_{n'_3, j'} \tilde{A}_{\mu, n_3, j}^3 \tilde{A}_{n'_3, j'}^{3\mu} \bar{\varphi}^1 \int_{T^2} d^2x \frac{\sqrt{2gf}}{i} a_3^\dagger \psi_{n_3, j}^3 \psi_{n'_3, j'}^3 \\
&= \sum_{n_3, j} \sum_{n'_3, j'} \tilde{A}_{\mu, n_3, j}^3 \tilde{A}_{n'_3, j'}^{3\mu} \bar{\varphi}^1 \frac{\sqrt{2gf}}{i} \sqrt{n_3} \delta_{n_3-1, n'_3} \delta_{-j, j'} \\
&= \sum_{n_3, j} \frac{\sqrt{2gf} n_3}{i} \tilde{A}_{\mu, n_3, j}^3 \tilde{A}_{n_3-1, -j}^{3\mu} \bar{\varphi}^1
\end{aligned} \tag{4.48}$$

となる。したがって、4次元におけるゲージ場と φ^1 の3次の項は

$$\mathcal{L}_{\bar{\varphi}AA} = - \sum_{n_2, j} \frac{g\sqrt{\alpha(n_2+1)}}{\sqrt{2i}} \tilde{A}_{\mu, n_2, j}^2 \tilde{A}_{n_2+1, -j}^{2\mu} \bar{\varphi}^1 + \sum_{n_3, j} \frac{g\sqrt{\alpha(n_3+1)}}{\sqrt{2i}} \tilde{A}_{\mu, n_3, j}^3 \tilde{A}_{n_3+1, -j}^{3\mu} \bar{\varphi}^1 \tag{4.49}$$

と書ける。ただし $\alpha = 2gf$ である。同様の手順により、

$$\mathcal{L}_{\varphi AA} = \sum_{n_2, j} \frac{g\sqrt{\alpha(n_2+1)}}{\sqrt{2i}} \tilde{A}_{\mu, n_2, j}^2 \tilde{A}_{n_2+1, -j}^{2\mu} \varphi^1 - \sum_{n_3, j} \frac{g\sqrt{\alpha(n_3+1)}}{\sqrt{2i}} \tilde{A}_{\mu, n_3, j}^3 \tilde{A}_{n_3+1, -j}^{3\mu} \varphi^1 \tag{4.50}$$

が得られる。

ゲージ場と φ^1 の3次の項に関して、 $\partial\varphi[A, \bar{\varphi}]$, $\partial\bar{\varphi}[A, \varphi]$ も含まれている。これらの項はモード関数の直交条件により消える。したがってこの3次の項からの補正は無い。

4.3.2 スカラー場

スカラー場の4次元の項について計算する。

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} g^2 [\varphi, \bar{\varphi}]^a [\varphi, \bar{\varphi}]^a &= \frac{1}{2} g^2 \varepsilon^{abc} \varepsilon^{ab'c'} \varphi^b \bar{\varphi}^c \varphi^{b'} \bar{\varphi}^{c'} \\
&= 2 \times \frac{1}{2} g^2 \varepsilon^{abc} \varepsilon^{ab'c'} \sum_{n_b, j} \sum_{n_{c'}, j'} \varphi_{n_b, j}^b \bar{\varphi}_{n_{c'}, j'}^{c'} \varphi^{b'} \bar{\varphi}^c \psi_{n_b, j}^b \psi_{n_{c'}, j'}^{c'*}
\end{aligned} \tag{4.51}$$

2行目の最初の“2”倍がつく理由は、外線と頂点のつなぎ方が2通りあるからである。したがって、

$$\mathcal{L}_{\varphi\varphi\varphi} = g^2 \varepsilon^{abc} \varepsilon^{ab'c'} \delta^{bc'} \sum_{n_b, j} \varphi_{n_b, j}^b \bar{\varphi}_{n_b, j}^{c'} \varphi^{b'} \bar{\varphi}^c \tag{4.52}$$

が得られる。

次にスカラー場の3次の項について計算する。 φ^1 を必ず1つ含む場合を抜き出せば、

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}\bar{\varphi}^a[\varphi, \bar{\varphi}]^a &= i\varepsilon^{abc} \mathcal{D}\bar{\varphi}^a \varphi^b \bar{\varphi}^c \\
&\supset \bar{\varphi}^2 \bar{\varphi}^2 \mathcal{D}\bar{\varphi}^1 - \bar{\varphi}^3 \bar{\varphi}^3 \mathcal{D}\bar{\varphi}^1 - \mathcal{D}\bar{\varphi}^2 \bar{\varphi}^2 \bar{\varphi}^1 + \mathcal{D}\bar{\varphi}^3 \bar{\varphi}^3 \bar{\varphi}^1
\end{aligned} \tag{4.53}$$

が得られる。 $\mathcal{D}\bar{\varphi}^1$ は φ が z, \bar{z} に依存しないことと、トーラス上で z, \bar{z} を積分すると消えることから、 $\mathcal{D}\bar{\varphi}^1 = 0$ となる。残りの項について考えると、4.3.1節の3次の項の計算と同様に行えば、4次元におけるスカラー場の3次の項は

$$\mathcal{L}_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}\varphi} = \sum_{n_2, j} \frac{g\sqrt{\alpha(n_2+1)}}{\sqrt{2i}} \bar{\varphi}_{n_2+1, j}^2 \bar{\varphi}_{n_2, j}^2 \varphi^1 - \sum_{n_3, j} \frac{g\sqrt{\alpha(n_3+1)}}{\sqrt{2i}} \bar{\varphi}_{n_3, j}^3 \bar{\varphi}_{n_3+1, j}^3 \varphi^1, \tag{4.54}$$

$$\mathcal{L}_{\bar{\varphi}\varphi\varphi} = - \sum_{n_2, j} \frac{g\sqrt{\alpha(n_2+1)}}{\sqrt{2i}} \bar{\varphi}_{n_2+1, j}^2 \bar{\varphi}_{n_2, j}^2 \varphi^1 + \sum_{n_3, j} \frac{g\sqrt{\alpha(n_3+1)}}{\sqrt{2i}} \bar{\varphi}_{n_3, j}^3 \bar{\varphi}_{n_3+1, j}^3 \varphi^1 \tag{4.55}$$

となる。

4.3.3 ゴースト場

ゴースト場と φ^1 の 3 次の項について計算する。

$$\begin{aligned} [\varphi, c]^a \bar{\partial} c^a &= i \varepsilon^{abc} \varphi^a \bar{c}^b \bar{\partial} c^c \supset -\bar{c}^2 \bar{\partial} \bar{c}^2 \varphi^1 + \bar{c}^3 \bar{\partial} \bar{c}^3 \varphi^1 \\ &= -\bar{c}^2 \left(\frac{\sqrt{2}gf}{i} a_2 \bar{c}^2 - g f z \bar{c}^2 \right) \varphi^1 + \bar{c}^3 \left(\frac{\sqrt{2}gf}{i} a_3 \bar{c}^3 + g f z \bar{c}^3 \right) \varphi^1. \end{aligned} \quad (4.56)$$

最後の等式において、(4.24) 式を用いて変形を施した。4.3.1 節の 3 次の項の計算と同様に行えば、

$$\mathcal{L}_{\bar{c}c\bar{\varphi}} = \sum_{n_2,j} \frac{g\xi\sqrt{\alpha(n_2+1)}}{\sqrt{2i}} \bar{c}_{n_2,j}^2 \bar{c}_{n_2+1,j}^2 \varphi^1 - \sum_{n_3,j} \frac{g\xi\sqrt{\alpha(n_3+1)}}{\sqrt{2i}} \bar{c}_{n_3+1,j}^3 \bar{c}_{n_3,j}^3 \varphi^1, \quad (4.57)$$

$$\mathcal{L}_{\bar{c}c\varphi} = \sum_{n_2,j} \frac{g\xi\sqrt{\alpha(n_2+1)}}{\sqrt{2i}} \bar{c}_{n_2+1,j}^2 \bar{c}_{n_2,j}^2 \bar{\varphi}^1 - \sum_{n_3,j} \frac{g\xi\sqrt{\alpha(n_3+1)}}{\sqrt{2i}} \bar{c}_{n_3,j}^3 \bar{c}_{n_3+1,j}^3 \bar{\varphi}^1 \quad (4.58)$$

が得られる。

4.4 質量補正の相殺

前節で準備した有効 Lagrangian を用いて、スカラー場のゼロモード φ^1 の 1-loop 質量補正を計算する。

4.4.1 ゲージ場のループと質量補正の相殺

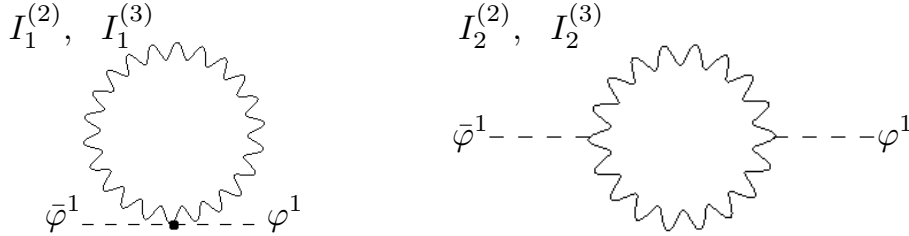


図 4.1: ゲージ場のループの寄与 $I_1^{(2,3)}$ と $I_2^{(2,3)}$

図 4.1 のように、ゲージ場のループの形は 2 種類ある。添字にある (2) や (3) はそれぞれ $\tilde{A}_\mu^2, \tilde{A}_\mu^3$ からの寄与を表している。この Feynman 図を元に計算する。まず、4 点の 1-loop について計算すると、

$$\begin{aligned} I_1^{(2)} &= -2ig^2 \eta^{\mu\nu} \sum_{j=0}^{|N|-1} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-i}{p^2 + \alpha n} \left\{ \eta_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2 + \alpha n \xi} \right\} \\ &= -2ig^2 |N| \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + \alpha n} \left\{ 4 - (1-\xi) \frac{p^2}{p^2 + \alpha n \xi} \right\} \\ &= -2ig^2 |N| \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[\frac{4}{p^2 + \alpha n} - \left\{ \frac{1}{p^2 + \alpha n} - \frac{\xi}{p^2 + \alpha n \xi} \right\} \right] \\ &= -2ig^2 |N| \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(\frac{3}{p^2 + \alpha n} + \frac{\xi}{p^2 + \alpha n \xi} \right) \end{aligned}$$

となる。ただし、2行目で Wick 回転を施した²。その際、Euclid 化したときの運動量 p_E を p と名前を付け直している。また、途中の計算で、次の部分分数分解を用いている：

$$\frac{(1-\xi)p^2}{(p^2+\alpha n)(p^2+\alpha n\xi)} = \frac{1}{p^2+\alpha n} - \frac{\xi}{p^2+\alpha n\xi}. \quad (4.59)$$

この計算は $I_1^{(3)}$ についても同様である。

次に、3点の 1-loop について計算すると、

$$\begin{aligned} I_2^{(2)} &= \sum_{j=0}^{|N|-1} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(-2 \frac{g\sqrt{\alpha(n+1)}}{\sqrt{2}} \eta^{\mu\sigma} \right) \frac{-i}{p^2+\alpha(n+1)} \left\{ \eta_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2+\alpha(n+1)\xi} \right\} \\ &\quad \times \left(2 \frac{g\sqrt{\alpha(n+1)}}{\sqrt{2}} \eta^{\nu\rho} \right) \frac{-i}{p^2+\alpha n} \left\{ \eta_{\rho\sigma} - (1-\xi) \frac{p_\rho p_\sigma}{p^2+\alpha n\xi} \right\} \\ &= \frac{4ig^2|N|}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\alpha(n+1)}{(p^2+\alpha n)(p^2+\alpha(n+1))} \\ &\quad \times \left\{ \eta_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2+\alpha(n+1)\xi} \right\} \left\{ \eta^{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{p^\mu p^\nu}{p^2+\alpha n\xi} \right\} \\ &= \frac{4ig^2|N|}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \alpha(n+1) \\ &\quad \times \left(\frac{4}{(p^2+\alpha n)(p^2+\alpha(n+1))} + \left[\frac{(1-\xi)p^2}{(p^2+\alpha n)(p^2+\alpha n\xi)} \right] \left[\frac{(1-\xi)p^2}{(p^2+\alpha(n+1))(p^2+\alpha(n+1)\xi)} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{p^2+\alpha(n+1)} \cdot \frac{(1-\xi)p^2}{(p^2+\alpha n)(p^2+\alpha n\xi)} - \frac{1}{p^2+\alpha n} \cdot \frac{(1-\xi)p^2}{(p^2+\alpha(n+1))(p^2+\alpha(n+1)\xi)} \right) \\ &= \frac{4ig^2|N|}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(\frac{3\alpha(n+1)}{(p^2+\alpha n)(p^2+\alpha(n+1))} + \frac{\alpha(n+1)\xi^2}{(p^2+\alpha n\xi)(p^2+\alpha(n+1)\xi)} \right) \end{aligned}$$

となる。ただし、2行目で Wick 回転を施した。また、途中の計算で、部分分数分解 (4.59) 式を用いている。この計算は $I_2^{(3)}$ についても同様である。

計算結果をまとめておくと、

$$I_1^{(2)} = -2ig^2|N| \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(\frac{3}{p^2+\alpha n} + \frac{\xi}{p^2+\alpha n\xi} \right), \quad (4.60)$$

$$I_1^{(3)} = -2ig^2|N| \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(\frac{3}{p^2+\alpha(n+1)} + \frac{\xi}{p^2+\alpha(n+1)\xi} \right), \quad (4.61)$$

$$I_2^{(2)} = 2ig^2|N| \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(\frac{3\alpha(n+1)}{(p^2+\alpha n)(p^2+\alpha(n+1))} + \frac{\alpha(n+1)\xi^2}{(p^2+\alpha n\xi)(p^2+\alpha(n+1)\xi)} \right), \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} I_2^{(3)} &= 2ig^2|N| \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(\frac{3\alpha(n+1)}{(p^2+\alpha(n+1))(p^2+\alpha(n+2))} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha(n+1)\xi^2}{(p^2+\alpha(n+1)\xi)(p^2+\alpha(n+2)\xi)} \right) \end{aligned} \quad (4.63)$$

となる。ここで、運動量積分に Wick 回転を施していることに注意する。 $I_1^{(2)}$ と $I_2^{(2)}$ 、 $I_1^{(3)}$ と $I_2^{(3)}$ の

²Wick 回転については付録 B.1 を参照。

和をそれぞれ計算すると、

$$I_1^{(2)} + I_2^{(2)} = -6ig^2|N| \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{p^2 + \alpha n} - \frac{\alpha(n+1)}{(p^2 + \alpha n)(p^2 + \alpha(n+1))} \right) \\ - 2ig^2|N| \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\frac{\xi}{p^2 + \alpha n \xi} - \frac{\alpha(n+1)\xi^2}{(p^2 + \alpha n \xi)(p^2 + \alpha(n+1)\xi)} \right), \quad (4.64)$$

$$I_1^{(3)} + I_2^{(3)} = -6ig^2|N| \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{p^2 + \alpha(n+1)} - \frac{\alpha(n+1)}{(p^2 + \alpha(n+1))(p^2 + \alpha(n+2))} \right) \\ - 2ig^2|N| \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\frac{\xi}{p^2 + \alpha(n+1)\xi} - \frac{\alpha(n+1)\xi^2}{(p^2 + \alpha(n+1)\xi)(p^2 + \alpha(n+2)\xi)} \right) \quad (4.65)$$

となる。 $I_1^{(2,3)} + I_2^{(2,3)}$ の 1 行目の積分において、次の変形

$$\frac{1}{p^2 + \alpha n} - \frac{\alpha(n+1)}{(p^2 + \alpha n)(p^2 + \alpha(n+1))} = \frac{1}{p^2 + \alpha n} - (n+1) \left(\frac{1}{p^2 + \alpha n} - \frac{1}{p^2 + \alpha(n+1)} \right) \\ = -\frac{n}{p^2 + \alpha n} + \frac{n+1}{p^2 + \alpha(n+1)} \quad (4.66)$$

を用いると、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{p^2 + \alpha n} - \frac{\alpha(n+1)}{(p^2 + \alpha n)(p^2 + \alpha(n+1))} \right) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(-\frac{n}{p^2 + \alpha n} + \frac{n+1}{p^2 + \alpha(n+1)} \right) = 0 \quad (4.67)$$

という結果が、 $n \rightarrow n+1$ のシフトによって得られる。 $I_1^{(2,3)} + I_2^{(2,3)}$ の 2 行目の積分においても、 $p^2 = \xi q^2$ の変数変換を行えば、同様の構造が現れる。実際、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\frac{\xi}{p^2 + \alpha n \xi} - \frac{\alpha(n+1)\xi^2}{(p^2 + \alpha n \xi)(p^2 + \alpha(n+1)\xi)} \right) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{\xi^2 d^4q}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{q^2 + \alpha n} - \frac{\alpha(n+1)}{(q^2 + \alpha n)(q^2 + \alpha(n+1))} \right) = 0 \quad (4.68)$$

となる。ただし、最後の等式は (4.67) 式を用いた。

したがって、ゲージ場の質量補正は

$$I_1^{(2)} + I_2^{(2)} = 0, \quad I_1^{(3)} + I_2^{(3)} = 0 \quad (4.69)$$

が得られる。この結果は、ゲージ場の質量補正同士が相殺していることを意味する。また、任意の ξ パラメーターでゲージ場の相殺が成り立つことも重要である。

4.4.2 スカラー場のループ

図 4.2 のように、スカラー場のループの形も 2 種類ある。添字にある (2) や (3) はそれぞれ $\tilde{\varphi}^2, \tilde{\varphi}^3$ からの寄与を表している。この Feynman 図を元に計算する。まず、4 点の 1-loop について計算すると、

$$I_3^{(2)} = -ig^2 \sum_{j=0}^{|N|-1} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-i}{p^2 + \frac{\alpha}{2}((1+\xi)n+1)} \\ = -ig^2|N| \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + \frac{\alpha}{2}((1+\xi)n+1)}$$

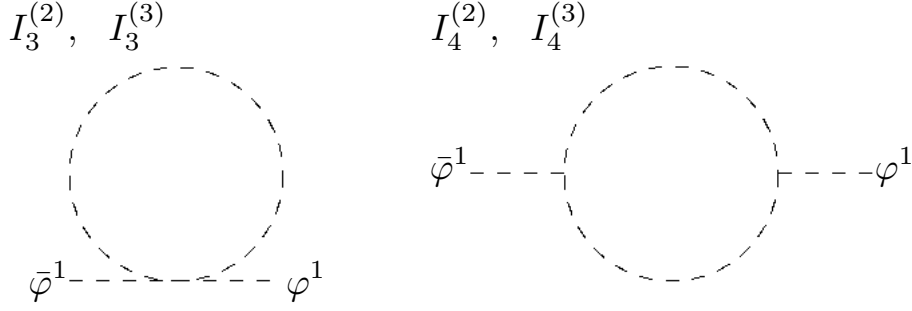


図 4.2: スカラー場のループの寄与 $I_3^{(2,3)}$ と $I_4^{(2,3)}$

となる。ただし、2行目で Wick 回転を施した。この計算は $I_3^{(3)}$ についても同様である。

次に3点の1-loopについて計算すると、

$$\begin{aligned}
 I_4^{(2)} &= \sum_{j=0}^{|N|-1} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(-\frac{g\sqrt{\alpha(n+1)}}{\sqrt{2}} \right) \frac{-i}{p^2 + \frac{\alpha}{2}((1+\xi)n+1)} \\
 &\quad \times \left(\frac{g\sqrt{\alpha(n+1)}}{\sqrt{2}} \right) \frac{-i}{p^2 + \frac{\alpha}{2}((1+\xi)(n+1)+1)} \\
 &= \frac{ig^2|N|}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\alpha(n+1)}{\{p^2 + \frac{\alpha}{2}((1+\xi)n+1)\}\{p^2 + \frac{\alpha}{2}((1+\xi)(n+1)+1)\}}
 \end{aligned}$$

となる。ただし、2行目で Wick 回転を施した。この計算は $I_4^{(3)}$ についても同様である。

計算結果をまとめておくと、

$$I_3^{(2)} = -ig^2|N| \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + \frac{\alpha}{2}((1+\xi)n+1)}, \quad (4.70)$$

$$I_3^{(3)} = -ig^2|N| \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + \frac{\alpha}{2}((1+\xi)n+\xi)}, \quad (4.71)$$

$$I_4^{(2)} = \frac{ig^2|N|}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\alpha(n+1)}{(p^2 + \frac{\alpha}{2}((1+\xi)n+1))(p^2 + \frac{\alpha}{2}((1+\xi)(n+1)+1))}, \quad (4.72)$$

$$I_4^{(3)} = \frac{ig^2|N|}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\alpha(n+1)}{(p^2 + \frac{\alpha}{2}((1+\xi)n+\xi))(p^2 + \frac{\alpha}{2}((1+\xi)(n+1)+\xi))} \quad (4.73)$$

となる。

4.4.3 ゴースト場のループ

図 4.3 のように、ゴースト場のループの形は1種類である。添字にある (2) や (3) はそれぞれ \tilde{c}^2, \tilde{c}^3 からの寄与を表している。この Feynman 図を計算すると、

$$\begin{aligned}
 I_5^{(2)} &= (-1) \sum_{n,j} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(\frac{g\xi\sqrt{\alpha(n+1)}}{\sqrt{2}} \right) \frac{-i}{p^2 + \alpha(n+\frac{3}{2})\xi} \left(\frac{g\xi\sqrt{\alpha(n+1)}}{\sqrt{2}} \right) \frac{-i}{p^2 + \alpha(n+\frac{1}{2})\xi} \\
 &= \frac{ig^2}{2} \sum_{n,j} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\alpha(n+1)\xi^2}{[p^2 + \alpha(n+\frac{1}{2})\xi][p^2 + \alpha(n+\frac{3}{2})\xi]}
 \end{aligned}$$

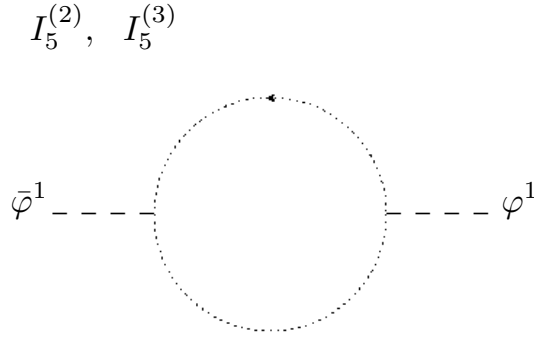


図 4.3: ゴースト場のループの寄与 $I_5^{(2,3)}$

となる。ただし、1 行目の最初の (-1) 倍はゴースト場が反可換であることが由来である。また 2 式目のときに Wick 回転を施している。この計算は $I_5^{(3)}$ についても同様である。ここで変数変換 $p^2 \rightarrow \xi p^2$ を行くと、

$$I_5^{(2)} = \frac{ig^2|N|\xi^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\alpha(n+1)}{(p^2 + \alpha(n + \frac{1}{2}))(p^2 + \alpha(n + \frac{3}{2}))}, \quad (4.74)$$

$$I_5^{(3)} = \frac{ig^2|N|\xi^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\alpha(n+1)}{(p^2 + \alpha(n + \frac{1}{2}))(p^2 + \alpha(n + \frac{3}{2}))} \quad (4.75)$$

が得られる。この変数変換により、全体の因子として ξ^2 がかかっている。

4.4.4 スカラー場の質量補正とゴースト場の質量補正の相殺

4.4.1 節でゲージ場の質量補正の相殺を見た。ここでは Landau ゲージ $\xi = 0$ と Feynman ゲージ $\xi = 1$ の場合において、スカラー場とゴースト場の質量補正の相殺を見ていく。

まず Landau ゲージ $\xi = 0$ の例を考えてみよう。この場合、無質量の(スカラー場と)相互作用しないゴースト場を考えていることになり、ゴースト場の質量補正 (4.74)、(4.75) 式はゼロとなる。したがって、スカラー場の質量補正のみが残る。それらを書き下すと、

$$I_3^{(2)} + I_4^{(2)} = -ig^2|N| \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{p^2 + \frac{\alpha}{2}(n+1)} - \frac{\frac{\alpha}{2}(n+1)}{(p^2 + \frac{\alpha}{2}(n+1))(p^2 + \frac{\alpha}{2}(n+2))} \right) \quad (4.76)$$

$$I_3^{(3)} + I_4^{(3)} = -ig^2|N| \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{p^2 + \frac{\alpha}{2}n} - \frac{\frac{\alpha}{2}(n+1)}{(p^2 + \frac{\alpha}{2}n)(p^2 + \frac{\alpha}{2}(n+1))} \right) \quad (4.77)$$

となる。つまり、 $\xi = 0$ のとき、(4.66)、(4.67) 式を用いると

$$I_3^{(2)} + I_4^{(2)} = 0, \quad I_3^{(3)} + I_4^{(3)} = 0 \quad (4.78)$$

という形で相殺される。

次に Feynman ゲージ $\xi = 1$ の例を考えよう。この場合、スカラー場とゴースト場の非自明な質量

補正の相殺が見られる。質量補正の各寄与を足しあげると、

$$\begin{aligned}
I_3^{(2)} + I_4^{(2)} + I_5^{(2)} &= -ig^2|N| \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{p^2 + \alpha(n + \frac{1}{2})} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{\alpha(n+1)}{(p^2 + \alpha(n + \frac{1}{2}))(p^2 + \alpha(n + \frac{3}{2}))} - \frac{1}{2} \frac{\alpha(n+1)}{(p^2 + \alpha(n + \frac{1}{2}))(p^2 + \alpha(n + \frac{3}{2}))} \right) \\
&= -ig^2|N| \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{p^2 + \alpha(n + \frac{1}{2})} - \frac{\alpha(n+1)}{(p^2 + \alpha(n + \frac{1}{2}))(p^2 + \alpha(n + \frac{3}{2}))} \right),
\end{aligned} \tag{4.79}$$

$$\begin{aligned}
I_3^{(3)} + I_4^{(3)} + I_5^{(3)} &= -ig^2|N| \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{p^2 + \alpha(n + \frac{1}{2})} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{\alpha(n+1)}{(p^2 + \alpha(n + \frac{1}{2}))(p^2 + \alpha(n + \frac{3}{2}))} - \frac{1}{2} \frac{\alpha(n+1)}{(p^2 + \alpha(n + \frac{1}{2}))(p^2 + \alpha(n + \frac{3}{2}))} \right) \\
&= -ig^2|N| \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{p^2 + \alpha(n + \frac{1}{2})} - \frac{\alpha(n+1)}{(p^2 + \alpha(n + \frac{1}{2}))(p^2 + \alpha(n + \frac{3}{2}))} \right)
\end{aligned} \tag{4.80}$$

と計算される。ここで (4.66)、(4.67) 式を用いると、

$$I_3^{(2)} + I_4^{(2)} + I_5^{(2)} = 0, \quad I_3^{(3)} + I_4^{(3)} + I_5^{(3)} = 0 \tag{4.81}$$

と、確かにスカラー場とゴースト場の質量補正が相殺される。

以上の議論では、ゲージ場の質量補正は任意のゲージパラメーター ξ について相殺することを示した一方、スカラー場とゴースト場の質量補正の相殺については2つのゲージについて相殺を示した。スカラー場とゴースト場の質量補正も任意のゲージパラメーター ξ で相殺されるかは非自明だが興味深い問題であり、今後の課題の1つである。

第5章 質量補正が相殺する物理的理由

3章と4章において、可換ゲージ群、非可換ゲージ群の両方の場合でゲージ場の余剰次元成分 φ の質量補正が相殺した。このような質量補正の相殺の背景には、余剰次元空間の並進対称性の自発的破れが関係している。余剰次元空間の並進対称性の自発的破れが起こることにより、零質量の南部-Goldstone ボゾン (NG ボゾン) が生じる。本章では、ゲージ場の余剰次元成分 φ が、この NG ボゾンに対応することを見ていく。

5.1 トーラス磁場中の量子力学の対称性

トーラス磁場中の量子力学を考察することで、並進対称性の破れを理解できる [36]。2章で議論した2次元 Hamiltonian (2.1) に波動関数 ψ が作用すると、 $H\psi = E_n\psi$ となる。 E_n は Landau 準位である。2次元 Hamiltonian と可換な演算子として、

$$\tilde{P}_x \equiv -i\partial_x + \frac{fy}{2}, \quad \tilde{P}_y \equiv -i\partial_y - \frac{fx}{2} \quad (5.1)$$

を定義する。すると、2次元 Hamiltonian (2.1) は

$$H = \frac{1}{2m}(\tilde{P}_x^2 + \tilde{P}_y^2) \quad (5.2)$$

となり、確かに可換であることが分かる。これらが生成するユニタリー変換は

$$\begin{aligned} (U_x(a)\psi)(x, y) &= e^{-i\tilde{P}_x a} \psi(x, y) \\ &= e^{-i\frac{fay}{2}} \psi(x - a, y), \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} (U_y(b)\psi)(x, y) &= e^{-i\tilde{P}_y b} \psi(x, y) \\ &= e^{i\frac{fbx}{2}} \psi(x, y - b) \end{aligned} \quad (5.4)$$

である。これらのユニタリー変換はそれぞれ並進 $\psi(x, y) \rightarrow \psi(x - a, y)$ とゲージ変換 $e^{-i\frac{fay}{2}}$ 、並進 $\psi(x, y) \rightarrow \psi(x, y - b)$ とゲージ変換 $e^{i\frac{fbx}{2}}$ の合成になっている。このユニタリー変換は非可換である。実際、Baker-Campbell-Hausdorff の公式

$$e^A e^B = \exp \left[A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}[A - B, [A, B]] \cdots \right]$$

を用いると、

$$\begin{aligned} U_x(a)U_y(b)U_x(-a)U_y(-b) &= e^{-i\tilde{P}_x a} e^{-i\tilde{P}_y b} e^{i\tilde{P}_x a} e^{i\tilde{P}_y b} \\ &= \exp \left[-i\tilde{P}_x a - i\tilde{P}_y b - \frac{ifab}{2} \right] \exp \left[i\tilde{P}_x a + i\tilde{P}_y b - \frac{ifab}{2} \right] \\ &= e^{-ifab} \end{aligned} \quad (5.5)$$

が得られるから、非可換である。このような磁場の影響で非可換になった並進対称性の群を磁気並進群と呼ぶ。

考える空間が1辺の長さが1の正方トーラスの場合、トーラスを形作る2つの円周を回ると元の場所に戻ることから波動関数は(5.3)、(5.4)式より、

$$\psi(x+1, y) = e^{-i\frac{fy}{2}} \psi(x, y), \quad (5.6)$$

$$\psi(x, y+1) = e^{i\frac{fx}{2}} \psi(x, y) \quad (5.7)$$

を満たす必要がある。x方向とy方向の条件が両立するためには、

$$\begin{aligned} \psi(x+1, y+1) &= e^{-if(y+1)/2} \psi(x, y+1) \\ &= e^{-if(y+1)/2} e^{ifx/2} \psi(x, y) \\ &= e^{if(x-y)/2} e^{-if/2} \psi(x, y), \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \psi(x+1, y+1) &= e^{if(x+1)/2} \psi(x+1, y) \\ &= e^{if(x+1)/2} e^{-ify/2} \psi(x, y) \\ &= e^{if(x-y)/2} e^{if/2} \psi(x, y) \end{aligned} \quad (5.9)$$

が一致しなければならないから、 $e^{if} = 1$ でなければならない。これより $f = 2\pi N$ と、(2.10)式で $eB \rightarrow f$ と変更したものが得られる。つまり、以上の議論からも磁束の量子化は理解できる。

トーラス上で \tilde{P}_x と \tilde{P}_y は Hamiltonian H と可換である。だが、波動関数 ψ に \tilde{P}_x 、 \tilde{P}_y が作用した $\tilde{P}_x\psi$ や $\tilde{P}_y\psi$ は、条件(5.6)、(5.7)式を満たさない：

$$\begin{aligned} \tilde{P}_x\psi(x, y+1) &= \left(-i\partial_x + \frac{fy}{2}\right) e^{i\frac{fx}{2}} \psi(x, y) \\ &= e^{i\frac{fx}{2}} \left(-i\partial_x + \frac{fy}{2}\right) \psi(x, y) + e^{i\frac{fx}{2}} \frac{f}{2} \psi(x, y) \\ &= e^{i\frac{fx}{2}} \left(\tilde{P}_x + \frac{f}{2}\right) \psi(x, y), \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_y\psi(x+1, y) &= \left(-i\partial_y - \frac{fx}{2}\right) e^{-i\frac{fy}{2}} \psi(x, y) \\ &= e^{-i\frac{fy}{2}} \left(-i\partial_y - \frac{fx}{2}\right) \psi(x, y) - e^{-i\frac{fy}{2}} \frac{f}{2} \psi(x, y) \\ &= e^{-i\frac{fy}{2}} \left(\tilde{P}_y - \frac{f}{2}\right) \psi(x, y). \end{aligned} \quad (5.11)$$

これらは演算子の作用は閉じておらず、トーラス上では無限小平行移動の生成子が存在しないことを意味する。だが、有限の長さの平行移動については可能性がある。そこでユニタリ変換を施した波動関数 $(U_x(a)\psi)(x, y)$ について調べる。 $(U_x(a)\psi)(x, y)$ も(5.6)、(5.7)式を満たす必要がある。したがって、

$$\begin{aligned} (U_x(a)\psi)(x, y+1) &= e^{-ifa(y+1)/2} \psi(x-a, y+1) \\ &= e^{-ifa(y+1)/2} e^{if(x-a)/2} \psi(x-a, y) \\ &= e^{-ifa} e^{ifx/2} (U_x(a)\psi)(x, y) \\ &= e^{-2\pi iNa} e^{ifx/2} (U_x(a)\psi)(x, y), \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} (U_y(b)\psi)(x+1, y) &= e^{ifb(x+1)/2} \psi(x+1, y-b) \\ &= e^{ifb(x+1)/2} e^{-if(y-b)/2} \psi(x, y-b) \\ &= e^{ifb} e^{-ify/2} (U_y(b)\psi)(x, y) \\ &= e^{2\pi iNb} e^{-ify/2} (U_y(b)\psi)(x, y) \end{aligned} \quad (5.13)$$

となる。これが条件 (5.6)、(5.7) 式を満たすためには、

$$a = \frac{n_x}{N}, \quad b = \frac{n_y}{N} \quad (5.14)$$

で、 $0 \leq n_x, n_y \leq N - 1$ の整数であることが必要十分である。以上より、並進対称性は離散的な平行移動に限られ、それ以外は破れている。

5.2 南部-Goldstone ボゾンとしてのスカラー場 φ

3章で見たゲージ場とフェルミオンの6次元作用は、トーラス並進 $\delta_T = \epsilon\partial + \bar{\epsilon}\bar{\partial}$ のもとで不変である。また、3章でゲージ場の余剰次元成分としてスカラー場 ϕ を考えた。このスカラー場は (3.4) 式とトーラス並進変換 $\delta_T = \epsilon\partial + \bar{\epsilon}\bar{\partial}$ に対して、

$$\begin{aligned} \delta_T \phi &= (\epsilon\partial + \bar{\epsilon}\bar{\partial})\phi \\ &= (\epsilon\partial + \bar{\epsilon}\bar{\partial})\varphi + \frac{\bar{\epsilon}}{\sqrt{2}}f \end{aligned} \quad (5.15)$$

と変換する。 φ はゼロモードとして定義していたので、 $\partial\varphi = 0, \bar{\partial}\varphi = 0$ であることから

$$\delta_T \phi = \frac{\bar{\epsilon}}{\sqrt{2}}f \quad (5.16)$$

と $\delta_T \phi$ が定数シフトを表すことになり、並進対称性が自発的に破れることが分かる。定数シフトについては次のようにも理解される。 φ に対する並進対称性が破れている変換のもとで4次元有効Langrangianが不変になるためには、 φ の運動項しか書き下せない。したがって、スカラー場 φ は南部-Goldstone ボゾンとして振る舞い、質量項は禁止される。

このような事情は4章の6次元SU(2) Yang-Mills 理論でも同様である。トーラス並進変換は

$$\delta_T A_5^a = (\epsilon_5\partial_5 + \epsilon_6\partial_6) \tilde{A}_5^a - \frac{f}{2}\epsilon_6\delta^{a1} \quad (5.17)$$

$$\delta_T A_6^a = (\epsilon_5\partial_5 + \epsilon_6\partial_6) \tilde{A}_6^a + \frac{f}{2}\epsilon_5\delta^{a1} \quad (5.18)$$

となる。ここで $\epsilon_{5,6}$ は余剰空間の並進パラメータを表す定数である。これらの変換は複素に組み直すと、

$$\begin{aligned} \delta_T \phi^a &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta_T A_6 + i\delta_T A_5) \\ &= (\epsilon\partial + \bar{\epsilon}\bar{\partial})\varphi^a + \frac{f}{\sqrt{2}}\bar{\epsilon}\delta^{a1} \end{aligned} \quad (5.19)$$

となる。ここで、

$$\epsilon \equiv \frac{1}{2}(\epsilon_5 + i\epsilon_6), \quad \bar{\epsilon} \equiv \frac{1}{2}(\epsilon_5 - i\epsilon_6)$$

である。 φ^1 のゼロモードに着目すると、 $\partial\varphi^1 = \bar{\partial}\varphi^1 = 0$ から

$$\delta_T \phi^1 = \frac{f}{\sqrt{2}}\bar{\epsilon} \quad (5.20)$$

となる。これは定数シフトの対称性であり、トーラス並進対称性の自発的破れが生じている。

第6章 まとめと課題

素粒子標準模型の問題の1つに階層性問題があるが、その問題について1章で概説した。2章で flux compactification の基礎を解説した。flux compactification とは、背景磁場が含まれる余剰次元空間のコンパクト化を指す。これは磁場中の量子力学の議論を適用できる。そこでは、共変微分を生成消滅演算子とみなし、エネルギー固有値として Landau 準位を得た。この発想が、後の3、4章の議論でも重要になってくる。3章では、[27, 28] を元に6次元量子電磁気学を出発点とし、スカラー場 (ゲージ場の余剰次元成分) の質量補正を議論した。3.3節では flux なしの場合で質量補正を計算したが、(3.30) 式のように有限の値が得られた。しかし、3.4節の flux ありの場合だと、スカラー場の質量補正は $\delta m_f^2 = 0$ と完全に消えた。これは flux の影響で Landau 準位が生まれ、そのシフト $n \rightarrow n+1$ により消えたのであった。無限大の発散も考慮するため、3.5節では次元正則化で計算を行い、3.4節と同様の結果が得られることを示した。4章は [1] を元に、6次元 SU(2) Yang-Mills 理論を出発点とし、スカラー場の質量補正を議論した。Non-Abelian ゲージ理論の特徴として共変微分に非可換部分があるが、この影響のためにゲージ場の質量項が書き下せる。共変微分を生成消滅演算子とみなせば、ゲージ場の質量が Landau 準位で離散化される。これは U(1) ゲージ場だけでは見られなかった特徴であった。この特徴を活かし、スカラー場の質量補正を計算すると、

$$\begin{aligned} I_1^{(2)} + I_2^{(2)} &= 0, & I_1^{(3)} + I_2^{(3)} &= 0 & (\text{for arbitrary } \xi) \\ I_3^{(2)} + I_4^{(2)} &= 0, & I_3^{(3)} + I_4^{(3)} &= 0 & (\text{for } \xi = 0) \\ I_3^{(2)} + I_4^{(2)} + I_5^{(2)} &= 0, & I_3^{(3)} + I_4^{(3)} + I_5^{(3)} &= 0 & (\text{for } \xi = 1) \end{aligned}$$

という結果が得られた。これを Feynman 図で表すと以下の図 6.1、6.2、6.3 となる。この計算結果を得るためには、(4.67) 式とシフト $n \rightarrow n+1$ を用いれば良い。3章、4章でスカラー場の質量補正が相殺されることを見たが、その物理的理由は、トーラス上の並進対称性が自発的に破れ、スカラー場が南部-Goldstone ボゾンとして振る舞うからである。その議論が5章である。

本論文では、U(1) ゲージ理論、SU(2) Yang-Mills 理論を取り扱った。しかし、現実の標準模型は SU(2)×U(1) ゲージ理論である。SU(2) Yang-Mills 理論だけでは現実の標準模型を説明できないため、フェルミオンを含めて議論する必要がある。さらに、スカラー場の質量補正が相殺されることを見たが、もしスカラー場が南部-Goldstone ボゾンであるならば、スカラー場の質量が許されないことになる。これでは実際のヒッグス粒子の質量が観測値 125 GeV であることを説明できない。したがって、トーラス並進対称性を陽に破る項が必要であり、スカラー場は擬南部-Goldstone ボゾンとして振る舞う必要がある。トーラス並進対称性を破る項を導入できれば、ポテンシャルを元に相構造を解析することが可能である。これらは将来取り組むべき研究課題であり、関連する研究も存在する [42, 43]。最後に、ゲージ場の余剰次元成分をヒッグス粒子とみなす発想がゲージヒッグス統一理論であることを1章で説明した。ゲージヒッグス統一理論と flux compactification を融合させた議論はまだ少ない [44]。この2つを融合し、現実の標準模型を再現することも重要な課題である。

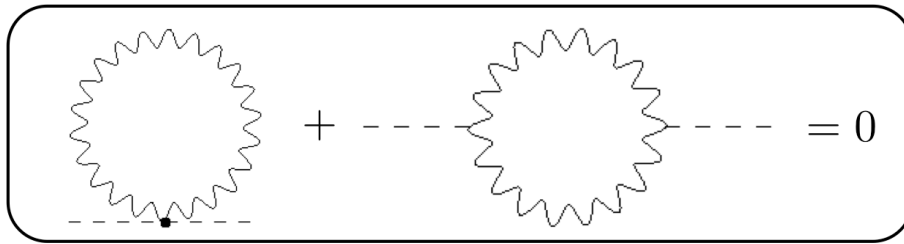


図 6.1: ゲージ場のループの相殺

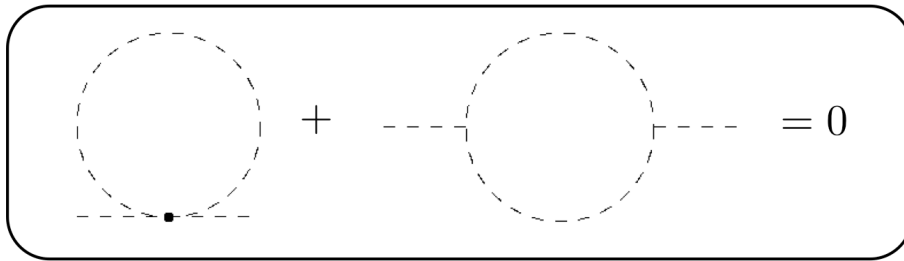


図 6.2: スカラー場のループの相殺 (Landau gauge $\xi = 0$)

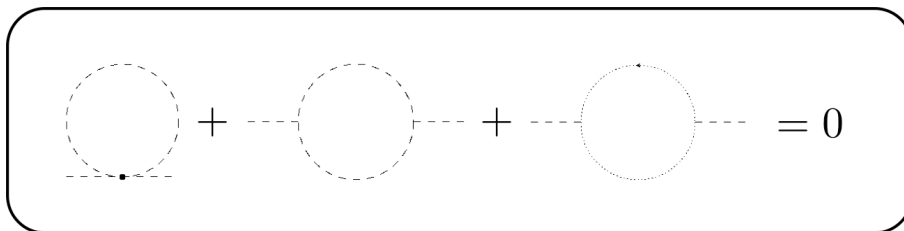


図 6.3: スカラー場のループとゴースト場のループの相殺 (Feynman gauge $\xi = 1$)

付録 A ガンマ行列

6次元のガンマ行列の記法を述べる [38]。ここでは [12] の記法を採用する。つまり

$$\sigma^0 = -1_{2 \times 2} = \bar{\sigma}^0, \quad \sigma^i = -\bar{\sigma}^i \quad (\text{A.1})$$

である。 σ^i は Pauli 行列である。これを元に 4次元ガンマ行列は

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

となる。 γ^5 は固有値として

$$\gamma^5\psi_L = -\psi_L, \quad \gamma^5\psi_R = \psi_R \quad (\text{A.3})$$

を出す。ここで

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\chi} \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

である。 ψ は電荷 $+q$ 、 χ は電荷 $-q$ を持つ 2成分 fermion である。これらを元に 6次元ガンマ行列を次のようにとる。

$$\Gamma^\mu = \begin{pmatrix} \gamma^\mu & 0 \\ 0 & \gamma^\mu \end{pmatrix}, \quad \Gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & i\gamma^5 \\ i\gamma^5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^6 = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma^5 \\ \gamma^5 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

先ほどの ψ_L や ψ_R を用いて 6次元 Weyl fermion と Γ^7 を次のようにとる。

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}, \quad \Gamma^7 = -\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\Gamma^3\Gamma^5\Gamma^6 = \begin{pmatrix} \gamma^5 & 0 \\ 0 & -\gamma^5 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

このようにガンマ行列を取れば $\Gamma^7\Psi = -\Psi$ となる。

上述の記法を用いて (3.12) 式の右辺を変形する。

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}\Gamma^\mu D_\mu\Psi &= (\bar{\psi}_L, \bar{\psi}_R) \begin{pmatrix} \gamma^\mu D_\mu\psi_L \\ \gamma^\mu D_\mu\psi_R \end{pmatrix} \\ &= \bar{\psi}_L\gamma^\mu D_\mu\psi_L + \bar{\psi}_R\gamma^\mu D_\mu\psi_R \\ &= (0, -\bar{\psi}) \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_\mu\psi \\ 0 \end{pmatrix} + (-\chi, 0) \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ D_\mu\bar{\chi} \end{pmatrix} \\ &= -\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu D_\mu\psi - \chi\sigma^\mu D_\mu\bar{\chi} \\ &\simeq +\bar{D}_\mu\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\psi - \chi\sigma^\mu D_\mu\bar{\chi} \\ &= -\psi\sigma^\mu\bar{D}_\mu\bar{\psi} - \chi\sigma^\mu D_\mu\bar{\chi} \quad (\because \psi\sigma^\mu\bar{\chi} = -\bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu\psi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i\bar{\Psi}\Gamma^5 D_5\Psi &= i(\bar{\psi}_L, \bar{\psi}_R) \begin{pmatrix} 0 & i\gamma^5 \\ i\gamma^5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_5\psi_L \\ D_5\psi_R \end{pmatrix} \\
&= i^2(\bar{\psi}_L\gamma^5 D_5\psi_R + \bar{\psi}_R\gamma^5 D_5\psi_L) \\
&= (0, -\bar{\psi}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ D_5\bar{\chi} \end{pmatrix} + (-\chi, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_5\psi \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= -\chi D_5\psi + \bar{\psi} D_5\bar{\chi} \\
i\bar{\Psi}\Gamma^6 D_6\Psi &= i(\bar{\psi}_L, \bar{\psi}_R) \begin{pmatrix} 0 & -\gamma^5 \\ \gamma^5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_6\psi_L \\ D_6\psi_R \end{pmatrix} \\
&= i(-\bar{\psi}_L\gamma^5 D_6\psi_R + \bar{\psi}_R\gamma^5 D_6\psi_L) \\
&= (-i) \left\{ -(0, -\bar{\psi}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ D_6\bar{\chi} \end{pmatrix} + (-\chi, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_6\psi \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= (-i)(-\chi D_6\psi - \bar{\psi} D_6\bar{\chi})
\end{aligned}$$

これらの計算により、(3.12) 式から (3.13) 式や (3.14) 式を再現できる。

付録B Feynman rules

素粒子論では、Minkowski 計量を $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ と空間を負に取る。しかし [12] の記法などは

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$$

のように時間を負に取る。このとき vertex の読み取りは普段と変わらないが、propagator の符号が微妙に変わる。そのことについてまとめる。また、2成分 Weyl fermion の propagator についてもまとめておく。この propagator については、3章の計算で用いる。ただし、具体的な計算は省略する。詳細な文献は [37] がある。

B.1 時間が負の計量でのスカラー場の propagator

時間が負の計量の記法で自由スカラー場のラグランジアンがどうなるかを見ると、

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \\ &= \frac{1}{2}\varphi(\square - m^2)\varphi\end{aligned}$$

となる。運動項の前の負号が propagator に影響してくるのである。propagator を求める手続きを踏めば、

$$G(x, y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\frac{-i}{p^2 + m^2 - i\epsilon} \right) e^{-ip(x-y)}$$

となる。一般的な場の量子論のテキストでは

$$G(x, y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right) e^{-ip(x-y)}$$

と書かれている。時間が負の計量の記法に変えた場合、分子に (-1) 、 m^2 の係数が正となることが見て取れる。

時間が負の計量の場合、計算上の利点が1つある。それが Wick 回転である。時間が負の計量の場合、

$$p^2 = p_\mu p^\mu = -(p^0)^2 + \mathbf{p}^2$$

である。Wick 回転は $p^0 \rightarrow ip_E^0$ とするので、

$$p^2 \rightarrow p_E^2 = (p_E^0)^2 + \mathbf{p}_E^2$$

となる。つまり、Wick 回転しても propagator から余分な符号が出てこない。空間が負の計量の場合だと propagator から $-$ 符号が生まれるが、そういった混乱が避けられる。

$$\begin{aligned}
\text{---} &= \frac{-i}{p^2 + m^2} \\
\text{~~~~~} &= \frac{-i}{p^2 + m^2} \left[g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{p^\mu p^\nu}{p^2 + \xi m^2} \right] \\
\begin{array}{c} \dot{\beta} \\ \text{---} \rightarrow \\ \alpha \end{array} &= \frac{ip \cdot \sigma_{\alpha\dot{\beta}}}{p^2 + m^2} \quad \text{or} \quad \frac{-ip \cdot \bar{\sigma}^{\dot{\beta}\alpha}}{p^2 + m^2} \\
\begin{array}{c} \dot{\beta} \\ \text{---} \leftarrow \\ \dot{\alpha} \end{array} &= \frac{-im}{p^2 + m^2} \delta^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \\
\begin{array}{c} \beta \\ \text{---} \leftarrow \\ \alpha \end{array} &= \frac{-im}{p^2 + m^2} \delta_{\alpha}^{\beta}
\end{aligned}$$

図 B.1: propagator

B.2 propagator

次に propagator をまとめる。

2成分 Weyl fermion の propagator に現れている質量 m は Dirac spinor のときの質量である。2成分 Weyl fermion の propagator には矢印が2つ付いているものがある。この矢印は粒子、反粒子の電荷の流れ等を表しているわけではない。ドットなしの vertex に入っていく方向、ドットありの vertex から出ていく方向に矢印の向きは付いている。

付録C 1-loop 有効ポテンシャルと発散

高次元場の理論においても 1-loop 補正を計算する場合には発散項の問題が生じる。この困難を解決するには正則化を行わなければならない。ここではその手法の 1 つとして Schwinger 表示と Poisson resummation を用いた方法を議論する。この議論は [39] を参考にしている。

一般の 4 次元有効ポテンシャルはスカラー場を ϕ として

$$V_{\text{eff}}(\Phi) = \frac{1}{2} \sum_I (-1)^{F_I} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \log [p^2 + M_I^2(\phi)] \quad (\text{C.1})$$

である。ここで和は全ての boson と fermion の自由度の和を表しており、boson なら $F_I = 0$ 、fermion なら $F_I = 1$ である。また $M_I(\phi)$ は質量を表す。これを次のように書き換える。

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}(\Phi) &= -\frac{1}{2} \sum_I (-1)^{F_I} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-t[p^2 + M_I^2(\phi)]} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_I (-1)^{F_I} \int_0^\infty \frac{dt}{t} e^{-tM_I^2(\phi)} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-tp^2} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

となる。この表示を **Schwinger 表示** という。ここで重要公式

$$\frac{1}{A^r} = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^\infty dt t^{r-1} e^{-At} \quad (\text{C.3})$$

に対して、 $r = 1$ で両辺 A の積分を行うと、

$$\log A = - \int_0^\infty \frac{dt}{t} e^{-At} \quad (\text{C.4})$$

が得られる。¹(C.1) 式から (C.2) 式への変形はこの (C.3) 式を用いている。運動量の積分を実行すると、

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-tp^2} &= \frac{2\pi^2}{16\pi^4} \int dp p^3 e^{-tp^2} \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{dx}{2} x e^{-tx} \quad (p^2 = x \text{ の変数変換}) \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{t^2} \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

となる。注意として、4 次元の微小体積は極座標表示では $d^4 p = p^3 \sin^2 \omega \sin \theta d\phi d\theta d\omega dp$ である。被積分関数が動径方向の座標 (今の場合なら p) のみに依存する場合、角度積分が実行でき、その値は $2\pi^2$ と 3 次元球面 S^3 の表面積になる。最後の変形は (C.3) 式を用いている。以上より $V_{\text{eff}}(\Phi)$ は

$$V_{\text{eff}}(\Phi) = -\frac{1}{32\pi^2} \sum_I (-1)^{F_I} \int_0^\infty \frac{dt}{t^3} e^{-tM_I^2(\phi)} \quad (\text{C.6})$$

$$= -\frac{1}{32\pi^2} \sum_I (-1)^{F_I} \int_0^\infty dl l e^{-M_I^2(\phi)/l} \quad (\text{C.7})$$

¹有限な部分に興味があるので、積分定数はここでは気にしていない。

となる。(C.6) 式から (C.7) 式の変形では $t = 1/l$ の変数変換を行なっている。ここで

$t \rightarrow 0 (l \rightarrow \infty)$: 紫外発散 (UV) 極限

$t \rightarrow \infty (l \rightarrow 0)$: 赤外発散 (IR) 極限

である。

余剰次元 d について考える。ここでは円周が直交した余剰次元上のコンパクト化を考えている。それぞれの半径は $R_i > 1$ とする。ただし $i = 1 \sim d$ である。今は 6 次元に興味があるので $d = 2$ であるが、これはトーラス T^2 である。以下では一般に d 次元で議論する。

($4 + d$) 次元の KK モードのタワーでの質量は

$$M_{\vec{m}, I}^2 = M_I^2(\phi) + \sum_{i=1}^d \left[\frac{m_i + a_i^I(\phi)}{R_i} \right]^2 \quad (\text{C.8})$$

である。ただし、 $\vec{m} = (m_1, \dots, m_d)$ である。 $M_I^2(\phi)$ は $R_i \rightarrow \infty$ で残っている ($4 + d$) 次元の質量である。ここでは周期性条件は ($4 + d$) 次元の場を考えたとき、

$$\Psi_I(x^\mu, y^i + 2\pi k_i R_i) = e^{i2\pi \sum_i k_i a_i^I} \Psi_I(x^\mu, y^i) \quad (\text{C.9})$$

となる。ただし y^i はコンパクト次元の座標、 $k_i \in \mathbb{Z}$ 、 a_i^I は内部運動量のシフトを表す。²

$M_I^2(\phi)$ が ϕ とは独立な場合に興味がある。このときに ϕ に対する有限な 1-loop 有効ポテンシャルが得られる。以下、簡単のため $M_I^2 = 0$ とする。

(C.7) 式と (C.8) 式より、 $M_I^2 = 0$ のとき

$$V_{\text{eff}}(\Phi) = -\frac{1}{32\pi^2} \sum_I \sum_{\vec{m}} (-1)^{F_I} \int_0^\infty dll \exp \left[-\sum_i \frac{(m_i + a_i^I)^2}{R_i^2 l} \right] \quad (\text{C.10})$$

となる。ここで Poisson resummation を用いる。

Poisson resummation

Fourier 逆変換を

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx$$

と定義したとき、以下の関係式が成り立つ。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(2\pi m). \quad (\text{C.11})$$

ただし $n, m \in \mathbb{Z}$ である。

(証明) 周期が 1 の $F(x) = f(x + n)$ を用いる。この Fourier 変換を考える。

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x + n) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{2\pi} \hat{f}(k) dk e^{ikn} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k x} \hat{f}(2\pi k) dk e^{2\pi i k n} \quad (k \rightarrow 2\pi k \text{ の変数変換}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{2\pi i k x} \hat{f}(2\pi k) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k n} \right) \end{aligned}$$

² a_i^I の例として Wilson line がある。

ここで公式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(k - m)$$

を用いれば、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x + n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(2\pi m)$$

と表せる。あとは $x = 0$ とおけばよい。(証明終わり)

今回の場合、特に

$$f(m) = \exp\left[-\frac{(m+a)^2}{R^2 l}\right]$$

のときの Poisson resummation を使いたい。そこで $\hat{f}(k)$ を計算すると、

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \exp\left[-\frac{(x+a)^2}{R^2 l}\right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{R^2 l}\{x^2 + (2a + ikR^2 l)x\} - \frac{a^2}{R^2 l}\right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{R^2 l}\left\{x + \frac{2a + ikR^2 l}{2}\right\}^2 + ika - \frac{1}{4}k^2 R^2 l\right] dx \\ &= R\sqrt{\pi l} e^{ika} e^{-\frac{1}{4}k^2 R^2 l} \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

となるので、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(n+a)^2}{R^2 l}\right] = R\sqrt{\pi l} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i m a} e^{-\pi^2 l m^2 R^2} \quad (\text{C.13})$$

となる。これより、

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{m}} \exp\left[-\sum_i \frac{(m_i + a_i^I)^2}{R_i^2 l}\right] &= \prod_{i=1}^d \left(\sum_{m_i} \exp\left[-\frac{(m_i + a_i^I)^2}{R_i^2 l}\right] \right) \\ &= \sum_{\vec{n}} \left[(\pi l)^{\frac{d}{2}} \prod_{i=1}^d R_i \cdot e^{2\pi i \sum_i n_i a_i^I} e^{-\pi^2 l \sum_i n_i^2 R_i^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

なので、

$$V_{\text{eff}}(\Phi) = - \sum_I (-1)^{F_I} \frac{\prod_{i=1}^d R_i}{32\pi^{\frac{4-d}{2}}} \sum_{\vec{n}} e^{2\pi i \sum_i n_i a_i^I} \int_0^\infty dl l^{\frac{2+d}{2}} e^{-\pi^2 l \sum_i n_i^2 R_i^2} \quad (\text{C.15})$$

となる。 $\vec{n} = \vec{0}$ の項は発散項を表す。 $\vec{n} \neq \vec{0}$ ならば、

$$l' = \pi^2 l \sum_i n_i^2 R_i^2$$

と変数変換すれば

$$V_{\text{eff}}(\Phi) = - \sum_I (-1)^{F_I} \frac{\Gamma\left(\frac{4+d}{2}\right)}{32\pi^{\frac{12+d}{2}}} \prod_{i=1}^d R_i \sum_{\vec{n} \neq \vec{0}} \frac{e^{2\pi i \sum_i n_i a_i^I(\phi)}}{[\sum_i n_i^2 R_i^2]^{\frac{4+d}{2}}} \quad (\text{C.16})$$

という有限な結果が得られる。この計算手法を用いれば、(3.30) 式を 1-loop 有効ポテンシャルから導出できる。

実際に (C.16) 式を用いて 1-loop 有効ポテンシャルを計算する。余剰次元は $d = 2$ で、トーラスは正方トーラスを仮定し、トーラスの円周を $L = 2\pi R$ で定義する。ただし R はトーラスを形作る円の半径である。3 章ではフェルミオンのループのみを考えた。1-loop 有効ポテンシャルの計算においても、フェルミオンの寄与について議論する。2 成分スピノルが 2 種類現れたことから、自由度は 4 である。したがって、(C.16) 式は

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}} &= +4 \cdot \frac{\Gamma(3)}{32\pi^7} R^2 \sum_{(r,s) \neq \vec{0}} \frac{e^{2\pi i(ra_1(\phi) + sa_2(\phi))}}{(r^2 + s^2)^3 R^6} \\ &= 4 \cdot \frac{2}{32\pi^7} \frac{1}{R^4} \sum_{(r,s) \neq \vec{0}} \frac{e^{2\pi i(ra_1(\phi) + sa_2(\phi))}}{(r^2 + s^2)^3} \\ &= \frac{4}{L^4 \pi^3} \sum_{(r,s) \neq \vec{0}} \frac{e^{2\pi i(ra_1(\phi) + sa_2(\phi))}}{(r^2 + s^2)^3} \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

まで計算を進めることができる。(3.24) 式を見ると、フェルミオンの質量は

$$M_{n,m}(\varphi) = M_{n,m} - \sqrt{2}g\varphi$$

と読み取れる。ただし $M_{n,m} = 2\pi(m + in)/L$ である。 φ を $\varphi = (a_6 + ia_5)/\sqrt{2}$ で定義すれば、

$$\begin{aligned} M_{n,m}(\varphi) &= \frac{2\pi}{L}(m + in) - \sqrt{2}g \frac{a_6 + ia_5}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{m - gRa_6}{R} + i \frac{n - gRa_5}{R} \end{aligned}$$

より、

$$|M_{n,m}| = \left(\frac{n - gRa_5}{R} \right)^2 + \left(\frac{m - gRa_6}{R} \right)^2 \quad (\text{C.18})$$

と決まることから、 $a_1 = -gRa_5$ 、 $a_2 = -gRa_6$ を (C.17) 式に代入すればよい。すると、1-loop 有効ポテンシャルは

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}} &= \frac{4}{L^4 \pi^3} \sum_{(r,s) \neq \vec{0}} \frac{1}{(r^2 + s^2)^3} \exp \left[-2\pi i g R (ra_5 + sa_6) \right] \\ &= \frac{4}{L^4 \pi^3} \sum_{(r,s) \neq \vec{0}} \frac{1}{(r^2 + s^2)^3} \exp \left[-\frac{igL}{\sqrt{2}} \left((s - ir)\varphi + (s + ir)\bar{\varphi} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

と計算される。

1-loop 有効ポテンシャル (C.19) を φ 、 $\bar{\varphi}$ で微分すると、質量補正が得られる。実際に計算すると、

$$\begin{aligned} \partial_\varphi \partial_{\bar{\varphi}} V_{\text{eff}}|_{\varphi=0} &= \frac{4}{L^4 \pi^3} \sum_{(r,s) \neq \vec{0}} \frac{1}{(r^2 + s^2)^3} \left(-\frac{igL}{\sqrt{2}}(s - ir) \right) \left(-\frac{igL}{\sqrt{2}}(s + ir) \right) \\ &= -\frac{2g^2}{L^2 \pi^3} \sum_{(r,s) \neq \vec{0}} \frac{1}{(r^2 + s^2)^2} \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

となり、(3.30) 式と一致する。以上より、ファインマン図と 1-loop 有効ポテンシャルから同じ質量補正の結果を得ることが分かった³。

³質量補正の計算は [30, 40] によって次元正則化でも計算されており、同様の結果を得る。

付録D Jacobi テータ関数

Jacobi テータ関数の定義は

$$\Theta_3(\nu; \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi\tau n^2} e^{2\pi i\nu n} \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (\text{D.1})$$

である。この関数には、二重周期性とモジュラー変換の特徴がある。

・周期性

$$\Theta_3(\nu + 1; \tau) = \Theta_3(\nu; \tau), \quad (\text{D.2})$$

$$\Theta_3(\nu + \tau; \tau) = e^{-i\pi\tau} e^{-2\pi i\nu} \Theta_3(\nu; \tau) \quad (\text{D.3})$$

・モジュラー変換

$$\tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

特に

$$\Theta_3(\nu; \tau + 1) = \Theta_3\left(\nu + \frac{1}{2}; \tau\right), \quad (\text{D.4})$$

$$\Theta_3\left(\frac{\nu}{\tau}; -\frac{1}{\tau}\right) = (-i\tau)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{i\pi\nu^2}{\tau}\right) \Theta_3(\nu; \tau). \quad (\text{D.5})$$

周期性の (D.2)、(D.3) 式は定義から簡単に分かる。モジュラー変換の (D.4)、(D.5) 式は付録 C で紹介した Poisson resummation (C.11) 式や (C.13) 式を用いて証明できる。

より一般的に拡張されたものもあり、それが指標付き **Jacobi** テータ関数である。その定義は

$$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (\nu, \tau) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(a+l)^2\tau} e^{2\pi i(a+l)(\nu+b)} \quad (\text{D.6})$$

である。ここで $a, b \in \mathbb{R}$ 、 $\nu, \tau \in \mathbb{C}$ である。Jacobi テータ関数との関係性は

$$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (\nu, \tau) = e^{\pi i a^2 \tau + 2\pi i a(\nu+b)} \Theta(\nu + a\tau + b; \tau) \quad (\text{D.7})$$

である。以下、指標付き Jacobi テータ関数の性質をまとめておく。

$$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (\nu + n, \tau) = e^{2\pi i n a} \cdot \vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (\nu, \tau), \quad (\text{D.8})$$

$$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (\nu + n\tau, \tau) = e^{-\pi i n^2 \tau - 2\pi i n(\nu+b)} \cdot \vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (\nu, \tau), \quad (\text{D.9})$$

$$\vartheta \begin{bmatrix} a+m \\ b+n \end{bmatrix} (\nu + n\tau, \tau) = e^{2\pi i n a} \cdot \vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (\nu, \tau), \quad (\text{D.10})$$

$$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (\nu, \tau) = \vartheta \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} (\nu + b, \tau). \quad (\text{D.11})$$

付 録 E 次元正則化の計算

ここでは主に [29] の付録にある次元正則化の計算で用いる公式の導出と、(3.57)、(3.58) 式の計算を議論する。計算したい式の一般形は

$$I \equiv \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{f(p_\mu)}{((p+q)^2 + m_2^2)(p^2 + m_1^2)} \quad (\text{E.1})$$

であるが、Feynman のパラメーター公式

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2} \quad (\text{E.2})$$

から、

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \frac{f(p_\mu)}{[x(p+q)^2 + xm_2^2 + (1-x)p^2 + (1-x)m_1^2]^2} \\ &= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \frac{f(p_\mu)}{[(p+xq)^2 + x(1-x)q^2 + xm_2^2 + (1-x)m_1^2]^2} \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

と変形される。 $p \rightarrow p+xq$ と変数変換して $\Delta(x, q^2, m_{1,2}) \equiv x(1-x)q^2 + xm_2^2 + (1-x)m_1^2$ と定義すれば、

$$I = \int_0^1 dx \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{f(p_\mu - xq_\mu)}{[p^2 + \Delta(x, q^2, m_{1,2})]^2} \quad (\text{E.4})$$

となる。

$f(p_\mu) = p_\mu, 1, p_\mu p_\nu$ の場合をそれぞれ I_1, I_2, I_3 とする。[34] の付録 A.4 にループ積分の計算結果が載っている。それによると、

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^n i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2}},$$

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^{n-1} i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{g^{\mu\nu} \Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{2 \Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2} - 1}$$

である。ただし、[34] は計量が $\eta_{\mu\nu} = (+1, -1, -1, -1)$ であることに注意。この結果は d 次元 Minkowski 空間の積分結果なので、Wick 回転を施せば Euclid 空間の積分結果になる。そこで Wick 回転を施すと、

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2}}, \quad (\text{E.5})$$

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\delta_{\mu\nu} \Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{2 \Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2} - 1} \quad (\text{E.6})$$

となる。これらの式より、 I_1 は

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 dx \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p_\mu - xq_\mu}{[p^2 + \Delta(x, q^2, m_{1,2})]^2} \\ &= -q_\mu \int_0^1 dx \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{[p^2 + \Delta(x, q^2, m_{1,2})]^2} \\ &= -\frac{q_\mu}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx x \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) [\Delta(x, q^2, m_{1,2})]^{\frac{d}{2} - 2}, \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

I_2 は

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 dx \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{[p^2 + \Delta(x, q^2, m_{1,2})]^2} \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) [\Delta(x, q^2, m_{1,2})]^{\frac{d}{2}-2}, \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

I_3 は

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^1 dx \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{(p_\mu - xq_\mu)(p_\nu - xq_\nu)}{[p^2 + \Delta(x, q^2, m_{1,2})]^2} \\ &= \int_0^1 dx \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p_\mu p_\nu + x^2 q_\mu q_\nu}{[p^2 + \Delta(x, q^2, m_{1,2})]^2} \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\delta_{\mu\nu}}{2} \int_0^1 dx \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) [\Delta(x, q^2, m_{1,2})]^{\frac{d}{2}-1} \\ &\quad + \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} q_\mu q_\nu \int_0^1 dx x^2 \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) [\Delta(x, q^2, m_{1,2})]^{\frac{d}{2}-2} \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

という公式が得られる。ただし、 $\sum_\mu \delta_{\mu\mu} = d = 4 - 2\epsilon$ である。

さて、(E.7)~(E.9) 式を用いて (3.57) 式を計算する。記法として

$$K_0 \equiv \frac{2g^2 N}{(4\pi)^2}, \quad \rho = (1-x) \left(1 + x \frac{q^2}{\alpha}\right) > 0 \quad (\text{E.10})$$

を用いる。その前に $\Delta \equiv \Delta(x, q^2, m_{1,2})$ について計算しておく、

$$\begin{aligned} \Delta &= x(1-x)q^2 + x\alpha n + (1-x)\alpha(n+1) \\ &= x(1-x)q^2 + \alpha(n + (1-x)) \\ &= \alpha \left(n + x(1-x) \frac{q^2}{\alpha} + (1-x) \right) \\ &= \alpha(n + \rho) \end{aligned}$$

と計算される。以上より、

$$\begin{aligned} \delta m_f^2(q^2) &= -2g^2 |N| \mu^{2\epsilon} \sum_n \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{2p(p+q)}{((p+q)^2 + \alpha n)(p^2 + \alpha(n+1))} \\ &= -\frac{2g^2 |N| \mu^{2\epsilon}}{(4\pi)^{d/2}} \sum_n \int_0^1 dx \left(d \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \Delta^{\frac{d}{2}-1} + 2q^2 x^2 \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Delta^{\frac{d}{2}-2} - 2q^2 x \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Delta^{\frac{d}{2}-2} \right) \\ &= -(4\pi\mu^2)^\epsilon K_0 \sum_n \int_0^1 dx \left(d \Gamma(-1 + \epsilon) \Delta^{-\epsilon+1} + 2q^2 x^2 \Gamma(\epsilon) \Delta^{-\epsilon} - 2q^2 x \Gamma(\epsilon) \Delta^{-\epsilon} \right) \\ &= -\left(\frac{4\pi\mu^2}{\alpha}\right)^\epsilon K_0 \int_0^1 dx \left(d\alpha \Gamma(-1 + \epsilon) \sum_n (n + \rho)^{-\epsilon+1} + 2q^2 x(x-1) \Gamma(\epsilon) \sum_n (n + \rho)^{-\epsilon} \right) \\ &= -\left(\frac{4\pi\mu^2}{\alpha}\right)^\epsilon K_0 \int_0^1 dx \left(d\alpha \Gamma(-1 + \epsilon) \zeta[-1 + \epsilon, \rho] + 2q^2 x(x-1) \Gamma(\epsilon) \zeta[\epsilon, \rho] \right) \end{aligned}$$

と、(3.58) 式が得られる。ただし、Hurwitz のゼータ関数 $\zeta[s, a] = \sum_{n \geq 0} (n+a)^{-s}$ を導入した。

(3.58) の質量補正はガンマ関数 $\Gamma(\epsilon), \Gamma(-1 + \epsilon)$ の極を持つ。微小量 ϵ でゼータ関数をテイラー展開すれば、有限部分と極の部分を分けることができる。しかし、 $(d/dz \zeta[z, \rho])_{z=-1}$ を含む項を積分することはできない。なぜなら、この微分に関しては漸近展開が知られているからである [41]。これを避けるため、上式の第 1 項目 ((3.58) 式の第 2 項目) を部分積分し、

$$\frac{\partial \zeta[s, \rho]}{\partial \rho} = -s \zeta[s+1, \rho] \quad (\text{E.11})$$

を用いて変形する。この方針に沿って計算すると、

$$\begin{aligned}
d\alpha\Gamma(\epsilon-1) \int_0^1 dx \zeta[\epsilon-1, \rho] &= d\alpha\Gamma(\epsilon-1) \left[x\zeta[\epsilon-1, \rho] \right]_0^1 - d\alpha\Gamma(\epsilon-1) \int_0^1 dx x \frac{d\zeta[\epsilon-1, \rho]}{dx} \\
&= d\alpha\Gamma(\epsilon-1) \zeta[\epsilon-1, \rho(1)] - d\alpha\Gamma(\epsilon-1) \int_0^1 dx x \frac{\partial \zeta[\epsilon-1, \rho]}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dx} \\
&= d\alpha\Gamma(\epsilon-1) \zeta[\epsilon-1, \rho(1)] + d\alpha(\epsilon-1)\Gamma(\epsilon-1) \int_0^1 dx \zeta[\epsilon, \rho] x \rho'(x) \\
&= d\alpha\Gamma(\epsilon-1) \zeta[\epsilon-1, \rho(1)] + \Gamma(\epsilon) \int_0^1 dx \zeta[\epsilon, \rho] x d\alpha\rho'(x)
\end{aligned}$$

となるので、(3.58) 式は

$$\delta m_f^2(q^2) = - \left(\frac{4\pi\mu^2}{\alpha} \right)^\epsilon K_0 \left[d\alpha\Gamma(\epsilon-1) \zeta[\epsilon-1, 0] + \Gamma(\epsilon) \int_0^1 dx \zeta[\epsilon, \rho] f(x) \right] \quad (\text{E.12})$$

と変形され、(3.60) 式が得られる。ただし $f(x) = 2q^2x(x-1) + xd\alpha\rho'(x)$ である。さらに次元正則化において用いる公式

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (\text{E.13})$$

$$\zeta[\epsilon, \rho] = \zeta[0, \rho] + \epsilon \zeta^{(1,0)}[0, \rho] + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (\text{E.14})$$

$$\left(\frac{4\pi\mu^2}{\alpha} \right)^\epsilon = 1 + \epsilon \ln \frac{4\pi\mu^2}{\alpha} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (\text{E.15})$$

を使う。また、[32] の p19 等を参考にすると

$$\zeta[0, \rho] = \frac{1}{2} - \rho,$$

$$\zeta^{(1,0)}[0, \rho] = \ln \Gamma[\rho] - \ln \sqrt{2\pi}$$

が分かる。ただし、 $\zeta^{(1,0)}[s, a] = \partial \zeta[s, a] / \partial s$ である。また、 $G = 1.28243$ を Glaisher 定数といい、

$$\ln G = \frac{1}{12} - \zeta'[-1]$$

で定義される。これらの公式も用いる。

まず (E.12) 式の括弧の中の $\Gamma(\epsilon-1)$ と $\zeta[\epsilon-1, 0]$ について計算する。(E.13)、(E.14) 式と $\Gamma(\epsilon) = (\epsilon-1)\Gamma(\epsilon-1)$ を用いて

$$\begin{aligned}
\Gamma(\epsilon-1) &= \frac{\Gamma(\epsilon)}{\epsilon-1} \\
&= -(1+\epsilon) \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon) \right) \\
&= - \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + 1 + \mathcal{O}(\epsilon) \right), \quad (\text{E.16})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\zeta[\epsilon-1, 0] &= \zeta[-1, 0] + \zeta^{(1,0)}[-1, 0]\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
&= \zeta(-1) + \zeta'(-1)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
&= -\frac{B_2}{2} + \zeta'(-1)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
&= -\frac{1}{12} + \left(\frac{1}{12} - \ln G \right) \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (\text{E.17})
\end{aligned}$$

と展開できる。ここで B_2 はベルヌーイ数のことで、次の漸化式で定義される：

$$B_0 = 1, \quad B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1}C_k B_k. \quad (\text{E.18})$$

この漸化式を用いると、 $B_1 = -1/2$ 、 $B_2 = 1/6$ と計算される。[41] の p2 によると、

$$\zeta(1-2n) = -\frac{B_{2n}}{2n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

と分かっている。 $n = 1$ を代入すれば $\zeta(-1) = -B_2/2 = -1/12$ が得られる。(E.16)、(E.17) 式が与えられれば、(E.12) 式の括弧の中の第 1 項目が計算できる。実際に計算すると、

$$\begin{aligned} d\alpha\Gamma(\epsilon-1)\zeta[\epsilon-1,0] &= -\alpha(4-2\epsilon)\left(\frac{1}{\epsilon}-\gamma_E+1+\mathcal{O}(\epsilon)\right)\left(-\frac{1}{12}+\left(\frac{1}{12}-\ln G\right)\epsilon+\mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \\ &= \alpha(4-2\epsilon)\left(\frac{1}{12}\frac{1}{\epsilon}+\ln G-\frac{1}{12}\gamma_E\right)+\mathcal{O}(\epsilon) \\ &= \frac{\alpha}{3}\frac{1}{\epsilon}+\alpha\ln G^4-\frac{\alpha}{3}\gamma_E-\frac{1}{6}\alpha+\mathcal{O}(\epsilon) \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

と計算される。(E.15) 式も用いれば、(E.12) 式の第 1 項目は

$$\begin{aligned} \left(\frac{4\pi\mu^2}{\alpha}\right)^\epsilon d\alpha\Gamma(\epsilon-1)\zeta[\epsilon-1,0] &= \left(1+\epsilon\ln\frac{4\pi\mu^2}{\alpha}+\mathcal{O}(\epsilon^2)\right)\left(\frac{\alpha}{3}\frac{1}{\epsilon}+\alpha\ln G^4-\frac{\alpha}{3}\gamma_E-\frac{1}{6}\alpha+\mathcal{O}(\epsilon)\right) \\ &= \frac{\alpha}{3}\left(\frac{1}{\epsilon}+\ln\frac{4\pi\mu^2e^{-\gamma_E}}{\alpha}\right)+\alpha\ln G^4-\frac{1}{6}\alpha \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

と計算される。

次に (E.12) 式の第 2 項目について考える。 $\Gamma(\epsilon)$ と $\zeta[\epsilon, \rho]$ は (E.13)、(E.14) 式から

$$\begin{aligned} \Gamma(\epsilon)\zeta[\epsilon, \rho] &= \left(\frac{1}{\epsilon}-\gamma_E+\mathcal{O}(\epsilon)\right)\left(\zeta[0, \rho]+\zeta^{(1,0)}[0, \rho]\epsilon+\mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \\ &= \left(\frac{1}{\epsilon}-\gamma_E+\mathcal{O}(\epsilon)\right)\left(\frac{1}{2}-\rho+\ln\frac{\Gamma[\rho]}{\sqrt{2\pi}}\epsilon+\mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \\ &= \left(\frac{1}{\epsilon}-\gamma_E\right)\left(\frac{1}{2}-\rho\right)+\ln\frac{\Gamma[\rho]}{\sqrt{2\pi}}+\mathcal{O}(\epsilon) \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

が得られる。 $f(x) = 2q^2x(x-1) + x\alpha\rho'(x)$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx\Gamma(\epsilon)\zeta[\epsilon, \rho]f(x) &= \int_0^1 dx\left[\left(\frac{1}{\epsilon}-\gamma_E\right)\left(\frac{1}{2}-\rho\right)+\ln\frac{\Gamma[\rho]}{\sqrt{2\pi}}\right]\left[2q^2x(x-1)+x\alpha\rho'(x)\right] \\ &= \int_0^1 dx\left[\left(\frac{1}{\epsilon}-\gamma_E\right)\left(\frac{1}{2}-\rho\right)+\ln\frac{\Gamma[\rho]}{\sqrt{2\pi}}\right]\left[2q^2x(x-1)+x(4-2\epsilon)\alpha\rho'(x)\right] \\ &= \left(\frac{1}{\epsilon}-\gamma_E\right)\int_0^1 dx\left(\frac{1}{2}-\rho\right)\left(2q^2x(x-1)+4\alpha x\rho'(x)\right) \\ &\quad -2\alpha\int_0^1 dx\left(\frac{1}{2}-\rho\right)x\rho'(x)+\int_0^1 dx\left(2q^2x(x-1)+4\alpha x\rho'(x)\right)\ln\frac{\Gamma[\rho]}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned} \quad (\text{E.22})$$

と計算される。最後の項は

$$H(q) = \int_0^1 dx\left(2q^2x(x-1)+4\alpha x\rho'(x)\right)\ln\frac{\Gamma[\rho]}{\sqrt{2\pi}} \quad (\text{E.23})$$

とおく。(E.22) で現れている積分について計算する。第 1 項目の積分について計算する。その前に

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx\rho(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\frac{q^2}{\alpha}, \\ \int_0^1 dx\rho^2(x) &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\frac{q^2}{\alpha} + \frac{1}{30}\frac{q^4}{\alpha}, \\ \int_0^1 dx x(x-1)^2\left(1+x\frac{q^2}{\alpha}\right) &= \frac{1}{12} + \frac{1}{30}\frac{q^2}{\alpha} \end{aligned}$$

であることに注意する。これらを用いて計算すると、

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 dx \left(\frac{1}{2} - \rho \right) \left(2q^2 x(x-1) + 4\alpha x \rho'(x) \right) \\
&= q^2 \int_0^1 dx x(x-1) + 2\alpha \int_0^1 dx x \rho'(x) - 2q^2 \int_0^1 dx \rho(x) x(x-1) - 4\alpha \int_0^1 dx x \rho(x) \rho'(x) \\
&= -\frac{q^2}{6} - 2\alpha \int_0^1 dx \rho(x) - 2q^2 \int_0^1 dx (1-x) \left(1 + x \frac{q^2}{\alpha} \right) x(x-1) + 2\alpha \int_0^1 dx \rho^2(x) \\
&= -\frac{q^2}{6} - 2\alpha \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \frac{q^2}{\alpha} \right) + 2q^2 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{30} \frac{q^2}{\alpha} \right) + 2\alpha \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \frac{q^2}{\alpha} + \frac{1}{30} \frac{q^4}{\alpha} \right) \\
&= -\frac{\alpha}{3} + \frac{4q^4}{30\alpha}
\end{aligned} \tag{E.24}$$

が得られる。ただし 2 行目から 3 行目において部分積分を行った。特に最後の項に関しては

$$x \rho(x) \rho'(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (x \rho^2) - \frac{1}{2} \rho^2$$

を用いている。第 2 項目の積分は

$$\begin{aligned}
\int_0^1 dx \left(\frac{1}{2} - \rho \right) x \rho'(x) &= -\frac{1}{2} \int_0^1 dx \rho(x) - \int_0^1 dx x \rho(x) \rho'(x) \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \frac{q^2}{\alpha} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \frac{q^2}{\alpha} + \frac{1}{30} \frac{q^4}{\alpha^2} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} - \frac{q^4}{30\alpha^2} \right)
\end{aligned} \tag{E.25}$$

となる。以上より (E.22) 式は

$$\begin{aligned}
\int_0^1 dx \Gamma(\epsilon) \zeta[\epsilon, \rho] f(x) &= \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E \right) \left(-\frac{\alpha}{3} + \frac{4q^4}{30\alpha} \right) - 2\alpha \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{6} - \frac{q^4}{30\alpha^2} \right) + H(q) \\
&= \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E \right) \left(-\frac{\alpha}{3} + \frac{4q^4}{30\alpha} \right) + \frac{\alpha}{6} - \frac{q^4}{30\alpha} + H(q)
\end{aligned} \tag{E.26}$$

と変形される。したがって (E.12) 式の第 2 項目は

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{4\pi\mu^2}{\alpha} \right)^\epsilon \int_0^1 dx \Gamma(\epsilon) \zeta[\epsilon, \rho] f(x) \\
&= \left(1 + \epsilon \ln \frac{4\pi\mu^2}{\alpha} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) \left[\left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E \right) \left(-\frac{\alpha}{3} + \frac{4q^4}{30\alpha} \right) + \frac{\alpha}{6} - \frac{q^4}{30\alpha} + H(q) \right] \\
&= \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E \right) \left(-\frac{\alpha}{3} + \frac{4q^4}{30\alpha} \right) + \frac{\alpha}{6} - \frac{q^4}{30\alpha} + \left(-\frac{\alpha}{3} + \frac{4q^4}{30\alpha} \right) \ln \frac{4\pi\mu^2}{\alpha} + H(q) \\
&= \left(-\frac{\alpha}{3} + \frac{4q^4}{30\alpha} \right) \left(\frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{4\pi\mu^2 e^{-\gamma_E}}{\alpha} \right) + \frac{\alpha}{6} - \frac{q^4}{30\alpha} + H(q)
\end{aligned} \tag{E.27}$$

と計算される。以上より (E.12)、(E.20)、(E.27) 式から

$$\begin{aligned}
\delta m_f^2(q^2) &= -K_0 \left[\frac{\alpha}{3} \left(\frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{4\pi\mu^2 e^{-\gamma_E}}{\alpha} \right) + \alpha \ln G^4 - \frac{1}{6} \alpha \right. \\
&\quad \left. + \left(-\frac{\alpha}{3} + \frac{4q^4}{30\alpha} \right) \left(\frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{4\pi\mu^2 e^{-\gamma_E}}{\alpha} \right) + \frac{\alpha}{6} - \frac{q^4}{30\alpha} + H(q) \right] + \mathcal{O}(\epsilon) \\
&= -K_0 \left[\frac{4q^4}{30\alpha} \left(\frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{4\pi\mu^2 e^{-\gamma_E}}{\alpha} \right) + \alpha \ln G^4 - \frac{q^4}{30\alpha} + H(q) \right] + \mathcal{O}(\epsilon)
\end{aligned} \tag{E.28}$$

と (3.64) 式が得られる。

付録F 3点、4点相互作用のFeynman rule

ここでは、4.3節で計算に使用した3点、4点相互作用のFeynman ruleにをまとめておく。

$$\begin{array}{c} \tilde{A}_{\mu,n,j}^2 \\ \text{wavy line} \\ \tilde{A}_{\nu,n,-j}^2 \\ \text{wavy line} \\ \bullet \\ \text{---} \varphi^1 \quad \text{---} \varphi^1 \\ \tilde{A}_{\mu,n,j}^3 \\ \text{wavy line} \\ \tilde{A}_{\nu,n,-j}^3 \\ \text{wavy line} \end{array} = \begin{array}{c} \tilde{A}_{\mu,n,j}^3 \\ \text{wavy line} \\ \tilde{A}_{\nu,n,-j}^3 \\ \text{wavy line} \\ \bullet \\ \text{---} \varphi^1 \quad \text{---} \varphi^1 \\ \tilde{A}_{\mu,n,j}^2 \\ \text{wavy line} \\ \tilde{A}_{\nu,n,-j}^2 \\ \text{wavy line} \end{array} = -2ig^2 \eta^{\mu\nu}$$

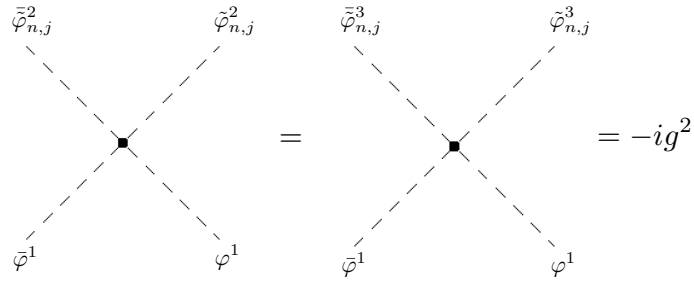
図 F.1: 4-point vertex for $\varphi\varphi AA$

$$\begin{array}{c} \tilde{A}_{\mu,n+1,-j}^2 \\ \text{wavy line} \\ \bullet \\ \text{---} \varphi^1 \\ \tilde{A}_{\nu,n,j}^2 \\ \text{wavy line} \end{array} = \begin{array}{c} \tilde{A}_{\mu,n+1,-j}^3 \\ \text{wavy line} \\ \bullet \\ \text{---} \varphi^1 \\ \tilde{A}_{\nu,n,j}^3 \\ \text{wavy line} \end{array} = -2 \frac{g\sqrt{\alpha(n+1)}}{\sqrt{2}} \eta^{\mu\nu}$$

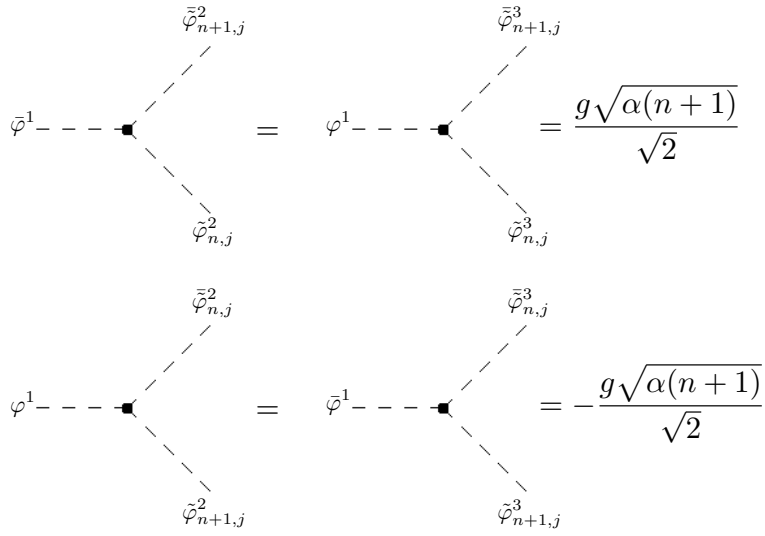
$$\begin{array}{c} \tilde{A}_{\mu,n+1,j}^2 \\ \text{wavy line} \\ \bullet \\ \text{---} \varphi^1 \\ \tilde{A}_{\nu,n,-j}^2 \\ \text{wavy line} \end{array} = \begin{array}{c} \tilde{A}_{\mu,n+1,j}^3 \\ \text{wavy line} \\ \bullet \\ \text{---} \varphi^1 \\ \tilde{A}_{\nu,n,-j}^3 \\ \text{wavy line} \end{array} = 2 \frac{g\sqrt{\alpha(n+1)}}{\sqrt{2}} \eta^{\mu\nu}$$

図 F.2: 3-point vertex for φAA

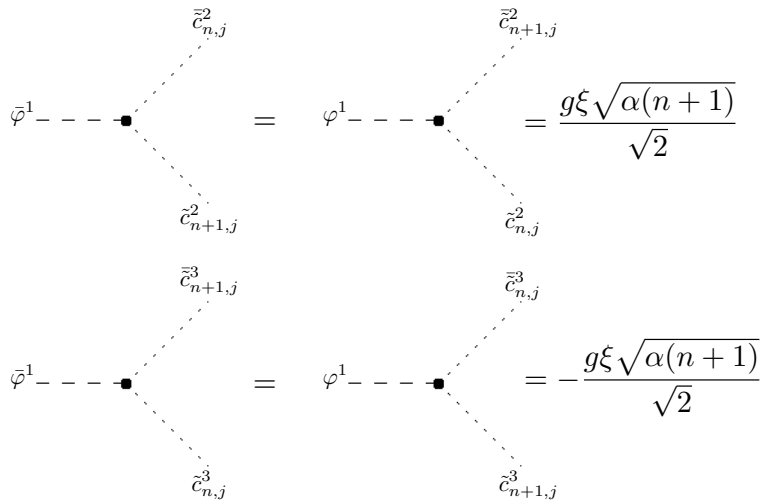
上記の2倍は対称因子である。



⊠ F.3: 4-point vertex for $\varphi\varphi\varphi\varphi$



⊠ F.4: 3-point vertex for $\varphi\varphi\varphi$



⊠ F.5: 3-point vertex for $\varphi c c$

参考文献

- [1] T. Hirose, and N. Maru, “Cancellation of One-loop Corrections to Scalar Masses in Yang-Mills Theory with Flux Compactification,” *JHEP* **1908** (2019) 054 [hep-th/1904.06028]
- [2] C. Csáki, S. Lombardo, and O. Telem, “TASI Lectures on Non-supersymmetric BSM Models,” pp. 501-570, WSP. WSP, (2018) [hep-ph/1811.04279]
- [3] C. Csáki, and P. Tanedo, “Beyond the Standard Model,” 2013 European School of High-Energy Physics, Paradfurdo, Hungary, 5 - 18 Jun (2013), pp.169-268 [hep-ph/1602.04228]
- [4] W. N. Cottingham, and D. A. Greenwood, 訳:樺沢宇紀, “素粒子標準模型入門,” 丸善出版 (2012)
- [5] V. P. Nair, 訳:阿部泰裕, 磯暁, “現代的な視点からの場の量子論 基礎編,” 丸善出版 (2012)
- [6] J. C. Romao, and J. P. Silva, “A resource for and Feynman diagram of the Standard Model,” *Int.J.Mod.Phys. A27* (2012) 1230025 [hep-ph/1209.6213]
- [7] M. Quiros, “Finite Temperature Field Theory and Phase Transitions,” [hep-ph/9901312]
- [8] M. J. G. Veltman, “The Infrared - Ultraviolet Connection,” *Acta Phys. Polon. B* **12** (1981) 437
- [9] I. Masina, and M. Quiros, “On the Veltman Condition, the Hierarchy Problem and High-Scale Supersymmetry,” *Phys.Rev. D88* (2013) 093003 [hep-ph/1308.1242]
- [10] C. Ford, I. Jack and D. R. T. Jones, “The Standard model effective potential at two-loops,” *Nucl. Phys. B* **387** (1992) 373 [hep-ph/0111190]
- [11] Y. Hamada, H. Kawai, and K.-y. Oda, “Bare Higgs mass at Planck scale,” *Phys. Rev. D* **87**, 053009 (2013) [hep-ph/1210.2538]
- [12] J. Wess, and J. Bagger, “Supersymmetry and Supergravity,” Princeton, USA. Univ. Press. (1992)
- [13] S. P. Martin, “A Supersymmetry primer,” *Adv.Ser.Direct.High Energy Phys.* **21** (2010) 1-153 [hep-ph/9709.356]
- [14] 細谷裕, “SGC ライブラリ 143 ゲージヒッグス統合理論～素粒子標準模型のその先へ～,” サイエンス社 (2018)
- [15] C. S. Lim, N. Maru, and K. Hasegawa, “Six Dimensional Gauge-Higgs Unification with an Extra Space S^2 and the Hierarchy Problem,” *J. Phys. Soc. Jap.* **77**, 074101 (2008) [hep-th/0605180]
- [16] H. Hatanaka, T. Inami, and C. S. Lim, “The Gauge hierarchy problem and higher dimensional gauge theories,” *Mod. Phys. Lett. A13* (1998) 2601-2612, [hep-th/9805067]

- [17] J. Hisano, Y. Shoji and A. Yamada, “To be, or not to be finite? The Higgs potential in gauge Higgs unification,” [hep-ph/1908.09158]
- [18] H. Aoki, and S. Iso, “Revisiting the Naturalness Problem -Who is afraid of quadratic divergences?-,” Phys. Rev. D**86**, 013001 (2012)
- [19] 山田雅俊, “素粒子物理学の非摂動的側面,” 金沢大学 博士論文 (2016)
- [20] W. A. Bardeen, “On Naturalness in the Standard Model,” FERMILAB-CONF-95-391-T (1995)
- [21] G. Panico, and A. Wulzer, “The Composite Nambu-Goldstone Higgs,” Lect.Notes Phys. 913 (2016) pp.1-316 [hep-ph/1506.01961]
- [22] D. Cremades, L. E. Ibanez and F. Marchesano, “Computing Yukawa couplings from magnetized extra dimensions,” JHEP 0405 079 (2004) [hep-th/0404229]
- [23] E. Witten, “Some Properties of O(32) Superstrings,” Phys. Lett. **149B**, 351 (1984)
- [24] C. Bachas, “A Way to break supersymmetry,” [hep-th/9503030 (1995)]
- [25] 猪木慶治, 川合光, “量子力学 II,” 講談社サイエンティフィック (1994)
- [26] D. Tong, “Lectures on the Quantum Hall Effect,” [hep-th/1606.06687]
- [27] W. Buchmuller, M. Dierigl, E. Dudas and J. Schweizer, “Effective field theory for magnetic compactifications,” JHEP **1704** (2017) 052 [hep-th/1611.03798]
- [28] W. Buchmuller, M. Dierigl, E. Dudas, “Flux compactifications and naturalness,” JHEP **1808** 151 (2018) [hep-th/1804.07497]
- [29] D. M. Ghilencea and H. M. Lee, “Wilson lines and UV sensitivity in magnetic compactifications,” JHEP **1706** (2017) 039 [hep-th/1703.10418]
- [30] M. Dierigl, “Aspects of Six-Dimensional Flux Compactifications,” Ph.D. Thesis, University of Hamburg, Hamburg Germany (2017)
- [31] M. Honda and T. Shibaaki, “Wilson-line Scalar as a Nambu-Goldstone Boson in Flux Compactifications and Higher-loop Corrections,” JHEP **03** (202) 031 [hep-th/1912.04581]
- [32] 森口繁一, 一松信, 宇田かね久, “岩波数学公式 III 特殊函数,” 岩波書店 (1987)
- [33] 倉橋信明, “超対称性と発散の相殺,” 神戸大学 修士論文 (2009)
- [34] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, “Introduction to Quantum Field Theory,” CRC Press. (1995)
- [35] M.D.Schwartz, “Quantum Field Theory and the Standard Model,” Cambridge University Press. (2013)
- [36] 谷村省吾, “量子力学におけるトポロジーと対称性,” 数理科学 2002 年 11 月号 (Vol.40-11,No.473) pp.48-53
- [37] H. K. Dreiner, H. E. Haber and S. P. Martin, “Two-component spinor techniques and Feynman rules for quantum field theory and supersymmetry,” (2008) [hep-ph/0812.1594]

- [38] W. Buchmuller, M. Dierigl and Y. Tatsuta, “Magnetized orbifolds and localized flux,” *Annals Phys.* **401** (2019) 91-115
- [39] I. Antoniadis, K. Benakli and M. Quiros, “Finite Higgs mass without supersymmetry,” *New J.Phys.* **3** (2001) 20 [hep-th/0108005]
- [40] D. M. Ghilencea, D. Hoover, C. P. Burgess and F. Quevedo, “Casimir energies for 6D supergravities compactified on $T(2)/Z(N)$ with Wilson lines,” *JHEP* **09** (2005) 050 [hep-th/0506164].
- [41] E. Elizalde, “Ten physical applications of spectral zeta functions,” second edition, Berlin, Springer, Germany (2012)
- [42] A. F. Faedo, D. Hernandez, S. Rigolin and M. Salvatori, “One-loop effective potential in $\mathcal{M}_4 \times T^2$ with and without 't Hooft flux,” *Phys. Rev. D* **82** (2010) 025006 [hep-th/0911.0997]
- [43] W. Buchmuller, E. Dudas and Y. Tatsuta “Quantum corrections for D-brane models with broken supersymmetry,” *JHEP* **12** (2019) 022 [hep-th/1909.03007]
- [44] Y. Matsumoto and Y. Sakamura, “Yukawa couplings in 6D gauge-Higgs unification on T^2/Z_N with magnetic fluxes,” *PTEP* **2016** (2016) 053B06 [hep-th/1602.01994].